



تحلیل خمش غیرخطی نانو صفحات ارتوتروپیک، بر اساس مدل غیرموضعی ارینگن توسط روش دیفرانسیل مربعات

محمد اسماعیل گلماکانی^{۱*}، جواد رضا طلب^۲

۱- استادیار گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد

* مشهد، صندوق پستی ۹۱۸۷۱۴۴۱۲۳، m.e.golmakani@mshdiau.ac.ir

چکیده- در این مقاله خمش غیرخطی نانو صفحات مستطیلی گرافن ارتوتروپیک تحت بار عرضی یکنواخت، با بکارگیری اثر غیرموضعی ارینگن و بر اساس تئوری برشی مرتبه اول صفحات و کرنش‌های غیرخطی ون کارمن، توسط روش دیفرانسیل مربعات بررسی شده است. به منظور تأیید دقت حل، نتایج در حالت‌های ساده‌تر با نتایج دیگر روش‌های عددی و همچنین نتایج در دسترس مقایسه شده‌اند که مطابقت خوبی بین آنها مشاهده شده است. در پایان اثر پارامتر مقیاس کوچک، نسبت طول به عرض، ضخامت صفحه، مقدار بار، شرایط مرزی و تاثیر تغییر شکل‌های بزرگ، برای تئوری غیرموضعی صفحات نازک و تئوری برشی مرتبه اول غیرموضعی بر روی خیز بیشینه و نسبت خیزهای مختلف بررسی شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که از میان پارامترهای در نظر گرفته شده، ابعاد صفحه تنها عامل اختلاف بین نتایج دو تئوری غیرموضعی بکاررفته است و پارامتر مقیاس کوچک تاثیری در آن ندارد. همچنین مشخص شد که پارامتر مقیاس کوچک اثر کاهنده قابل توجهی بر خیز ناشی از حل غیرخطی داشته است؛ بطوری که این اثر در طول‌های زیاد صفحات مربعی کمتر و در بارهای زیاد بیشتر است.

کلیدواژگان: خمش غیرخطی، تئوری برشی مرتبه اول صفحات، نانو صفحات ارتوتروپیک، اثر غیرموضعی، روش دیفرانسیل مربعات.

Nonlinear bending analysis of orthotropic nanoplates based on nonlocal model of Eringen using DQM

M.E. Golmakani^{1*}, J. Rezatalab²

1- Assist. Prof., Dept. of Mech. Eng., Islamic Azad Univ., Mashhad branch, Mashhad, Iran

2- MSc Student, Dept. of Mech. Eng., Islamic Azad Univ., Mashhad branch, Mashhad, Iran

* P.O.B. 9187144123, Mashhad, Iran. m.e.golmakani@mshdiau.ac.ir

Abstract- In this paper, nonlinear bending of rectangular nanoplates of Graphene subjected to a transverse uniform load, with incorporation of the nonlocal effect of Eringen based on the first-order shear deformation theory (FSDT) of orthotropic plates and Von Karman nonlinear strains is investigated using differential quadrature method (DQM). In order to validate of the solution accuracy, the simplified results have been compared with results of two developed numerical solution methods and other available results. Comparisons show an excellent agreement between the results. Finally, effects of small scale parameter, aspect ratio, thickness of plate, load value, boundary conditions and efficacy of large deflection, on the maximum deflection and different deflections ratio for nonlocal theory of thin plate and nonlocal FSDT are investigated. Results reveal that among the considered parameters, just aspect of plate is the parameter of difference between two employed nonlocal theories and the small scale parameter has not any effect on the mentioned difference. Also, it is found that the small scale parameter has a noticeable effect on the decrease of deflection of nonlinear solution; so that, unlike the larger values of mechanical load, this parameter has less effect for long length of square plate.

Keywords: Nonlinear Bending, FSDT, Orthotropic Nanoplates, Nonlocal Effect, DQM.

۱- مقدمه

صفحات گرافن که از دسته نانو لایه‌ها هستند، از کنار هم قرار گرفتن اتم‌های کربن در یک صفحه و در یک شبکه کریستالی با ساختار ۶ وجهی منتظم به وجود آمده‌اند. این ساختار ۶ وجهی باعث می‌شود تا زاویه پیوندهای کربن-کربن با بارهای درون صفحه‌ای در راستاهای مختلف متفاوت بوده و لذا خواص غیر ایزوتروپیک داشته باشند. از موارد استفاده ورقه‌های گرافن می‌توان به کاربرد آنها در انواع نانو محرک‌ها، نانو سنسورها، باتری‌های الکتریکی و به طور کلی قطعات به کار رفته در سیستم‌های نانومیکرو الکترومکانیک و میکروسکوپ‌های نیروی اتمی و یا استفاده آنها در افزایش استحکام کامپوزیت‌ها اشاره کرد [۷-۱]. به منظور بررسی رفتار مکانیکی نانوساختارها، تئوری‌های محیط پیوسته کلاسیک دارای یک نقص بزرگ است و آن اینکه در این مقیاس، نمی‌توان از فضای خالی بین اتم‌ها و نیروهای اتمی بین ذرات در مقابل فیزیک و ابعاد اصلی مساله چشم پوشی کرد. لذا روش‌های دیگری باید بکارگیری می‌شد که از آن جمله می‌توان به مشاهدات آزمایشگاهی و روش دینامیک مولکولی اشاره کرد. اما این روش‌ها، بسیار پرهزینه، زمان بر، و محدود به تعداد اتم‌های کم در ساختار می‌باشند. در سال‌های اخیر، چندین تئوری الاستیسیته از جمله تئوری الاستیسیته غیرموضعی، تئوری الاستیسیته گرادین کرنشی اصلاح شده^۱ و تئوری تنش کوپل اصلاح شده^۲ پیشنهاد شده است که اثر مقیاس کوچک را در ساختارهای با مقیاس نانو و میکرو محاسبه می‌کنند. در این میان تئوری غیرموضعی ارینگن به دلیل سادگی و کاربرد مناسب در محاسبه رفتار غیرخطی میکرو/نانو ساختارها، و نتایج نزدیکی که با نتایج دینامیک مولکولی داشته است، به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته است [۹،۸]. این تئوری همچنین، شامل اطلاعاتی در مورد نیروهای بین اتمی و نسبت طول‌های داخلی نیز می‌باشد که در معادلات معرفی شده، به عنوان پارامترهای مواد استفاده می‌شوند [۱۰-۱۳].

بهفر و نقد آبادی [۱۴]، ارتعاشات آزاد و خطی نانو صفحات دو لایه گرافن را در محیط پلیمری بررسی کردند. بهفر و همکاران [۱۵] با استفاده از روش‌های تحلیلی به بررسی و

محاسبه مدول خمشی ورقه گرافن چند لایه پرداختند. آنها نتیجه گرفتند که مدول خمشی صفحات چند لایه گرافن وابسته به طول صفحات نبوده و جزء خواص ورقه‌های چند لایه است. سخایی پور [۱۶] با شبیه سازی اتمی توانست مدول یانگ، مدول برشی و نسبت پواسون را برای آرایش‌های مختلف صفحات گرافن بدست آورد. پرادهان و فادیکار [۱۷]، با بکارگیری تئوری غیرموضعی ارینگن، ارتعاشات آزاد و خطی صفحات دو لایه گرافن در محیط پلیمری را توسط روش ناویر بررسی کردند. آنها نشان دادند که اثر مقیاس کوچک تاثیر مهمی در نتایج دارد و باید در نظر گرفته شود. پرادهان [۱۸] کمانش نانو صفحات ایزوتروپیک مستطیلی گرافن را براساس تئوری برشی مرتبه سوم غیرموضعی و توسط روش ناویر بررسی کرد. آنها نتیجه گرفتند که با افزایش پارامتر مقیاس کوچک و یا کاهش طول صفحه، نسبت بارهای کمانش غیرموضعی به موضعی افزایش می‌یابد.

آقا بابائی و ردی [۱۹] روابط خمش و ارتعاشات آزاد را براساس تئوری برشی مرتبه سوم ردی و اثر غیرموضعی ارینگن بدست آورده و برای صفحه مستطیلی ایزوتروپیک با شرایط مرزی ساده، بطور تحلیلی حل کردند. آنها نتیجه گرفتند که دو تئوری برشی مرتبه اول و سوم غیرموضعی، نتایج مشابهی دارند، در حالی که نتایج بدست آمده از تئوری غیرموضعی صفحات نازک اندکی متفاوت است. ردی [۲۰]، روابط خمش غیرخطی را برای نانولوله‌ها و نانوصفحات ارتوتروپیک توسط تئوری کلاسیک و برشی، با در نظر گرفتن اثر غیرموضعی و کرنش‌های غیرخطی ون کارمن بازنویسی کرد.

انصاری و همکارانش [۲۱]، ارتعاشات آزاد ورقه مستطیلی گرافن را براساس مدل‌های غیرموضعی میندلین و کیرششف صفحات ایزوتروپیک، توسط روش دیفرانسیل مربعات بررسی کرده و نتایج را با نتایج دینامیک مولکولی مقایسه کردند. نتایج نشان داد که روش غیرموضعی از دقت خوبی برخوردار است. همچنین معلوم شد که افزایش پارامتر غیرموضعی در ابعاد کوچکتر باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود، ولی در ابعاد بزرگتر تاثیر چندانی ندارد. لی شن و همکارانش [۲۲]، ارتعاشات غیرخطی ورقه مستطیلی تک لایه گرافن را در محیط حرارتی براساس تئوری غیرموضعی صفحات ارتوتروپیک و نازک، بررسی کردند. نتایج معلوم می‌کند که دامنه نوسان به

1. Modified Strain Gradient Elasticity
2. Modified Couple Stress Theory

اندازه تغییرات دما بر پاسخ ارتعاشات غیرخطی انواع صفحات گرافن موثر است. هیوشن شن [۲۳]، از تئوری غیرموضعی صفحات نازک برای تحلیل غیرخطی نوارهای نازک قرار گرفته بر روی پایه الاستیک دو پارامتری و در محیط حرارتی پرداخت. نتایج بدست آمده حاکی از این است که پارامتر مقیاس کوچک، مسیرهای تعادل پس‌کمانش، خیز تغییر شکل‌های بزرگ و فرکانس‌های طبیعی را کاهش و نسبت فرکانس‌های غیرخطی به خطی را افزایش می‌دهد. سمعی و همکاران [۲۴]، اثر مقیاس کوچک را بر رفتار کمانشی ورقه تک لایه گرافن قرار گرفته در محیط الاستیک پسترناک^۱ با استفاده از تئوری میندلین غیرموضعی صفحات بررسی کردند. آنها گزارش کردند که کاهش طول نانوصفحه، افزایش پارامتر مقیاس کوچک و افزایش سفتی زمینه الاستیک، باعث کاهش نسبت بار کمانش غیرموضعی به بار کمانش موضعی می‌شود. تولگا آکسنسر و متین آیدوگدو [۲۵]، با استفاده از تئوری غیرموضعی ارینگن، کمانش و ارتعاشات آزاد خطی نانو صفحات نازک ایزوتروپیک را مطالعه کردند. نتایج تحقیق آنها بیانگر این است که شرط مرزی گیردار حساسیت بیشتری نسبت به اثر غیرموضعی دارد. آنها در مطالعه دیگری [۲۶]، ارتعاشات اجباری نانو صفحات نازک را توسط تئوری غیرموضعی ارینگن مطالعه کردند. آنها نتیجه گرفتند که اثر غیرموضعی در بررسی ارتعاشات اجباری نانوصفحات باید در نظر گرفته شود. همچنین این اثر با افزایش تعداد مدها افزایش می‌یابد.

جمعه زاده و سعیدی [۲۷]، ارتعاشات بزرگ ورقه‌های چند لایه گرافن را با فرض خواص ارتوتروپیک بررسی کردند. نتایج بدست آمده حاکی از این است که اثر مقیاس کوچک رفتار غیرخطی ورقه گرافن را افزایش می‌دهد در حالی که برهم کنش‌های واندروالسی آن را کاهش می‌دهد. جمعه‌زاده و همکاران [۲۸]، ارتعاشات آزاد و اجباری غیرخطی را بر اساس تئوری غیرموضعی صفحات نازک غیر ایزوتروپیک برای ورقه گرافن دولایه قرار گرفته در محیط پلیمری بررسی کردند. ساتیش، نارندار و گپالاگریشنان [۲۹]، ارتعاشات حرارتی نانو صفحات ارتوتروپیکی مثل گرافن را براساس تئوری تصحیح شده دو متغیره صفحات^۲ و مکانیزم غیرموضعی محیط‌های

پیوسته، توسط روش ناویر مطالعه کردند. نتایج نشان می‌دهد که تئوری بکار رفته نه تنها ساده بوده و نیازی به ضریب تصحیح برشی ندارد، بلکه با تئوری‌های برشی مرتبه بالا نیز قابل مقایسه است. پوراسماعیلی و همکاران [۳۰]، ارتعاشات آزاد دو لایه‌های مستطیلی گرافن را در محیط پلیمری و براساس تئوری غیرموضعی ارینگن بررسی کردند. آنها نشان دادند که فرکانس نانوصفحات ارتوتروپیک دو لایه همواره کمتر از فرکانس نانوصفحات ایزوتروپیک دو لایه است. وانگ و لی [۳۱]، به بررسی خمش نانوصفحات ایزوتروپیک قرار گرفته بر روی پایه الاستیک پرداختند. معادلات حاکم را با اعمال اثر غیرموضعی بر روابط صفحات کیرشهف و میندلین با فرض تغییر شکل‌های کوچک بدست آورده و توسط روش ناویر حل کردند. نتایج نشان می‌دهند که تعداد جملات به کار رفته در سری فوریه، نسبت ابعاد صفحه به هم و خواص زمینه الاستیک تأثیر زیادی بر رفتارهای خمشی دارند. فرج پور و همکارانش [۳۲]، از تئوری غیرموضعی برای بررسی کمانش صفحات تک لایه گرافن، تحت انواع بارهای خطی درون صفحه‌ای استفاده کردند. نتایج نشان می‌دهد که اثر غیرموضعی نقش مهمی در رفتار پایداری نانوصفحات ارتوتروپیک ایفا می‌کند. فرج پور و همکارانش [۳۳]، پس کمانش صفحات گرافن چند لایه تحت کمانش دو محوری غیر یکنواخت در راستای ضخامت را براساس تئوری غیرموضعی صفحات نازک بررسی کردند. آنها گزارش دادند که اثر پارامتر مقیاس کوچک در مدهای کمانشی بزرگتر، بیشتر است. همچنین معلوم شد که پارامتر غیرموضعی اثر کاهنده‌ای بر بار بحرانی پس‌کمانش چند لایه‌های گرافن دارد. براساس بهترین اطلاعات نویسندگان مقاله حاضر، تحقیقی روی خمش غیرخطی نانوصفحات بر اساس تئوری مرتبه اول غیرموضعی صورت نگرفته است. همچنین در هیچکدام از دیگر مقالاتی که خمش نانو صفحات مستطیلی را بر اساس روابط غیرموضعی بررسی کرده‌اند، از روش حل دیفرانسیل مربعات استفاده نشده است. به‌علاوه طبق اطلاعات موجود، تمامی مقالاتی که رفتار نانوصفحات گرافن را بر اساس تئوری برشی غیرموضعی بررسی کرده‌اند، معادلات را برای نانوصفحات ایزوتروپیک بدست آورده‌اند.

در این مطالعه، خمش غیرخطی نانو صفحات مستطیلی ارتوتروپیک بر اساس تئوری‌های برشی مرتبه اول غیرموضعی و تئوری غیرموضعی صفحات نازک، توسط روش دیفرانسیل

1. Pasternak Elastic Medium
2. Tow Variable Refined Plate Theory

جایی که f نیروی حجمی، ρ چگالی، u بردار جابجایی و σ_{ij} تانسور تنش غیرموضعی است که از (۲) بدست می‌آید.

$$\sigma_{ij}(x) = \int_V \alpha(|x' - x|) \tau_{ij}(x') dv(x') \quad (2)$$

در (۲)، τ_{ij} تانسور تنش موضعی، $\alpha(|x' - x|)$ تابع وزن اثرات غیرموضعی و V حجم ورودی در نظر گرفته شده‌اند. تابع وزن اثرات غیرموضعی، تابعی است که اثر کرنش را در محل x' برای تنش داده شده در نقطه مرجع x توصیف می‌کند. جهت کسب اطلاعات بیشتر در مورد این تابع می‌توانید به ارینگن [۱۲] مراجعه کنید. به هر حال استفاده از این شکل انتگرالی در مسائل بسیار دشوار خواهد بود، لذا شکل دیفرانسیلی آن توسط (۳) تعریف می‌شود [۱۲، ۱۳].

$$\sigma^{NL}(1 - \mu \nabla^2) = \sigma^L = \tau = C : \varepsilon$$

$$\mu = (e_0 a)^2, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3)$$

در رابطه (۳)، e_0 ثابت مخصوص برای هر ماده است که از شبیه سازی دینامیک مولکولی به دست می‌آید. a شاخص طول داخلی است و از فاصله بین اتم‌ها مثل طول پیوند اتم‌های کربن-کربن در گرافن‌ها بدست می‌آید. $e_0 a$ یک ضریب مقیاس است که اثر مقیاس کوچک را برای شاخصه‌های مکانیکی مشخص می‌کند.

معادله (۴) بیانگر رابطه منتجه‌های تنش با تنش‌ها است:

$$(N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy})$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, z(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})) dz \quad (4)$$

در (۴) اگر σ تنش موضعی باشد، منتجه‌های تنش نیز موضعی بوده و اگر غیرموضعی باشند، منتجه‌های تنش نیز غیرموضعی خواهند بود. بنابراین چنانچه مطابق (۴) از طرفین (۳) در راستای ضخامت انتگرالگیری شود، ارتباط بین منتجه-های تنش موضعی و غیرموضعی بدست خواهد آمد.

$$(N, M)^{NL}(1 - \mu \nabla^2) = (N, M)^L \quad (5)$$

در تمامی روابط علامت NL به غیرموضعی بودن پارامتر و علامت L به موضعی بودن آن اشاره می‌کنند. معادلات تنش-کرنش برای نانو صفحه ارتوتروپیک به شکل رابطه (۶) خواهند بود.

$$\sigma_{xx}^{(NL)} - \mu \nabla^2 \sigma_{xx}^{(NL)} = Q_{11} \varepsilon_{xx}^{(L)} + Q_{12} \varepsilon_{yy}^{(L)}$$

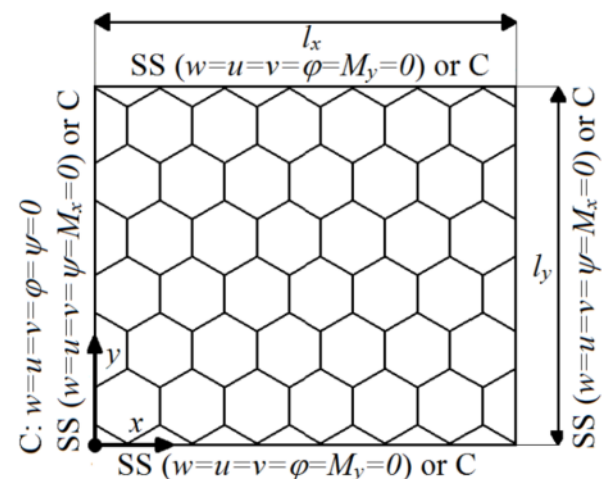
$$\sigma_{yy}^{(NL)} - \mu \nabla^2 \sigma_{yy}^{(NL)} = Q_{12} \varepsilon_{xx}^{(L)} + Q_{22} \varepsilon_{yy}^{(L)}$$

$$\sigma_{xy}^{(NL)} - \mu \nabla^2 \sigma_{xy}^{(NL)} = Q_{66} \gamma_{xy}^{(L)}$$

مربعات تحلیل شده است. به منظور بررسی دقت جواب‌ها و روش حل، در حالت‌های ساده‌تری از مساله اصلی، مقایسه‌ای بین نتایج بدست آمده با نتایج سایر روش‌های عددی و نتایج در دسترس صورت گرفته است. توافق خوبی که بین نتایج وجود دارد دلیل بر درستی تحلیل و پاسخ‌ها می‌باشد. در ادامه اثر پارامتر مقیاس کوچک، نسبت طول به عرض، ضخامت صفحه، مقدار بار، شرایط مرزی و اثر تغییر شکل‌های بزرگ برای دو تئوری کلاسیک و برشی مرتبه اول غیرموضعی، بر روی خیز بیشینه و نسبت خیزهای مختلف بررسی شده است.

۲- فرمول‌بندی مساله

شکل ۱ یک نانو صفحه مستطیلی ارتوتروپیک که دارای طول l_x ، عرض l_y و ضخامت h است را تحت بار عرضی یکنواخت نشان می‌دهد. محور مختصات y در راستای عرض و محور x در راستای طول قرار دارند.



شکل ۱ نانو صفحه مستطیلی گرافن تحت بار عرضی یکنواخت

برخلاف حالت محیط‌های پیوسته که تنش در یک نقطه تابعی از کرنش در همان نقطه است، براساس تئوری غیرموضعی ارینگن، تنش در یک نقطه تابعی از کرنش در تمام نقاط جسم است. معادله حرکت مطابق (۱) آماده شده است [۱۲].

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} N_{xx} - \mu \nabla^2 N_{xx} \\ N_{yy} - \mu \nabla^2 N_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \end{bmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (11)$$

که در آن ضرایب A, D, H طبق (۱۲) بدست می‌آیند:

$$(A_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z^2) Q_{ij} dz = \left(h, \frac{h^3}{12} \right) Q_{ij} \quad i, j=1,2,6$$

$$H_{44} = k \times C_{44} h, \quad H_{55} = k \times C_{55} h \quad (12)$$

معادلات تعادل پس از یک سری ساده‌سازی مطابق (۱۳) تا (۱۷) بدست خواهند آمد.

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + f_x = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad (13)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + f_y = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \quad (14)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + f_z + q + N_{(u,v,w)} = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = I_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = I_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (17)$$

ضرایب ρ_s و I_2 توسط رابطه (۱۸) محاسبه می‌شوند.

$$(\rho_s, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(1, z^2) dz = \left(\rho h, \frac{\rho h^3}{12} \right) \quad (18)$$

همچنین $N_{(u,v,w)}$ در (۱۵) توسط (۱۹) محاسبه می‌شود:

$$N_{(u,v,w)} \cong \left[N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \quad (19)$$

در معادلات (۱۳) تا (۱۷) اگر نتیجه‌های تنش موضعی باشند، معادلات نیز موضعی خواهند بود و اگر نتیجه‌های تنش غیرموضعی باشند، معادلات نیز غیرموضعی خواهند بود.

برای نرمال‌سازی معادلات، پارامترهای زیر تعریف می‌شوند:

$$W = \frac{w_0}{L_x}, \quad U = \frac{u_0}{L_x}, \quad V = \frac{v_0}{L_x}$$

$$X = \frac{x}{L_x}, \quad Y = \frac{y}{L_x}, \quad \Delta = 1 - \nu_{12} \nu_{21}$$

$$\alpha = \frac{L_x}{h}, \quad \beta = \frac{L_x}{L_y}, \quad \eta = \left(\frac{e_0 a}{L_x} \right)^2$$

$$\alpha = \frac{L_x}{h}, \quad \beta = \frac{L_x}{L_y}, \quad \eta = \left(\frac{e_0 a}{L_x} \right)^2$$

$$\sigma_{yz}^{(NL)} - \mu \nabla^2 \sigma_{yz}^{(NL)} = k C_{44} \gamma_{yz}^{(L)}$$

$$\sigma_{xz}^{(NL)} - \mu \nabla^2 \sigma_{xz}^{(NL)} = k C_{55} \gamma_{xz}^{(L)} \quad (6)$$

$$\begin{cases} (Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}) = \frac{(E_1, \nu_{12} E_2, E_2)}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \\ (Q_{66}, C_{44}, C_{55}) = (G_{12}, G_{23}, G_{13}), \quad k = \frac{5}{6} \end{cases} \quad (7)$$

در معادلات (۷)، E مدول یانگ، ν ضریب پواسون، G مدول برشی و k ضریب تصحیح برشی هستند. روابط جابجایی بر اساس تئوری برشی مرتبه اول مطابق (۸) است:

$$\begin{cases} u = (x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \varphi(x, y, t) \\ V = (x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \psi(x, y, t) \\ w = (x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (8)$$

در این روابط u_0, v_0, w_0 مؤلفه‌های جابجایی در لایه میانی φ و ψ به ترتیب زاویه‌های پیچش در راستای x و y هستند. رابطه کرنش-جابجایی با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل‌های بزرگ به شکل رابطه (۹) خواهد بود.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \times \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] \quad (9)$$

با قرار دادن (۸) در (۹) رابطه کرنش‌ها بر اساس جابجایی‌های لایه میانی مطابق (۱۰) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + z \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi \end{aligned} \quad (10)$$

با قرار دادن (۱۰) در (۶) و با استفاده از (۴)، نتیجه‌های تنش غیرموضعی بر حسب جابجایی بدست خواهند آمد.

$$N_{xy} - \mu \nabla^2 N_{xy} = A_{66} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)$$

$$Q_x - \mu \nabla^2 Q_x = H_{55} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi \right)$$

$$Q_y - \mu \nabla^2 Q_y = H_{44} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi \right)$$

$$M_{xy} - \mu \nabla^2 M_{xy} = D_{66} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

۳- روش حل

روش دیفرانسیل مربعات نخستین بار توسط بلمن و همکارانش [۳۵،۳۴] ارائه شد. این روش، در دامنه‌های منظم با تعداد گره-های کم و حجم محاسبات پایین قادر به یافتن جواب‌های عددی با دقت بسیار زیاد است. از این روش در حل انواع مسائل دینامیکی، استاتیکی، خطی و غیرخطی می‌توان استفاده کرد و به نتایج دقیقی دست یافت [۳۶-۳۸]. سادگی، محاسبات کم حجم، توانایی حل انواع مسائل و دقت بالای این روش، علت انتخاب آن در این مقاله بوده است.

روش دیفرانسیل مربعات بر پایه این اصل ریاضی استوار است که مشتقات یک تابع را می‌توان به صورت مجموع مقادیر آن تابع از تمام نقاط موجود در شبکه مش بندی که در ضرایب وزنی مناسب ضرب شده‌اند، تخمین زد. در این مقاله از توابع چند جمله‌ای برای تخمین تابع اصلی و از روش جایگزینی مستقیم^۱ برای اعمال شرایط مرزی استفاده شده است. در نتیجه دستگاه معادله دیفرانسیلی به یک دستگاه معادله جبری غیرخطی تبدیل شده و سپس با روش نیوتن رافسون حل شده است.

مشتقات مرتبه اول برای نقطه (x_i, y_j) از تابع فرضی F در یک صفحه مستطیلی توسط (۳۵) و (۳۶) بدست می‌آیند [۳۶].

$$\frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial x} = \sum_{k=1}^N a_{ik}^x F_{kj} \quad , \quad i=1,2,\dots,N \quad (29)$$

$$\frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial y} = \sum_{r=1}^M a_{jr}^y F_{ir} \quad , \quad j=1,2,\dots,M \quad (30)$$

N و M به ترتیب تعداد گره‌ها در راستای x و y می‌باشند.

$$a_{ij}^x = \frac{R(x_i)}{(x_i - x_j)R(x_j)} \quad \begin{cases} i \neq j \\ i, j = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (31)$$

$$a_{ii}^x = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^x \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (32)$$

$$R(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (x_i - x_j) \quad (33)$$

منظور از نماد $\prod$ در (۳۳) عمل ضرب است. به طور مشابه می‌توان با جایگذاری (y, M) به جای (x, N) در (۳۱) تا (۳۳)، ضرایب a^x و a^y نیز به ترتیب ضرایب وزنی در راستای x و y می‌باشند.

$$\lambda_3 = \frac{G_{12}}{E_{11}} \times \Delta, \quad \lambda_4 = k \frac{G_{23}}{E_{11}} \times \Delta \quad (20)$$

$$\lambda_5 = k \frac{G_{13}}{E_{11}} \times \Delta, \quad Q = \frac{qL_x \Delta}{E_{11}h}$$

با فرض صفر بودن نیروهای داخلی، معادلات در شرایط استاتیکی و بعد از بی‌بعدسازی مطابق (۲۱) تا (۲۵) بدست می‌آیند.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \lambda_3 \beta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + (\lambda_1 + \lambda_3) \beta \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} = - \left[\frac{\partial W}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \lambda_3 \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) + (\lambda_1 + \lambda_3) \beta^2 \left(\frac{\partial W}{\partial Y} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \right) \right] \quad (21)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3) \beta \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + \lambda_2 \beta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} = - \left[(\lambda_1 + \lambda_3) \beta \left(\frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \right) + \beta \frac{\partial W}{\partial Y} \left(\lambda_2 \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) \right] \quad (22)$$

$$\lambda_5 \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \lambda_4 \beta \frac{\partial \psi}{\partial Y} + \lambda_5 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \lambda_4 \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \left(1 - \eta \frac{\partial^2}{\partial X^2} - \eta \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) (Q + \bar{N}) = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + (\lambda_1 + \lambda_3) \beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} + \lambda_3 \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - 12 \lambda_5 \alpha^2 \varphi = 12 \lambda_5 \alpha^2 \frac{\partial W}{\partial X} \quad (24)$$

$$\lambda_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + (\lambda_1 + \lambda_3) \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial Y} + \lambda_2 \beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} - 12 \lambda_4 \alpha^2 \psi = 12 \lambda_4 \beta \alpha^2 \frac{\partial W}{\partial Y} \quad (25)$$

مقدار $\bar{N}$ در (۲۳) طبق رابطه (۲۶) بدست می‌آید:

$$\bar{N} = \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial X} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \lambda_1 \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) + \left(\beta \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{1}{2} \beta^2 \left(\frac{\partial W}{\partial Y} \right)^2 \right) \left(\lambda_1 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \lambda_2 \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) + 2 \lambda_3 \beta \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \right) \times \left(\beta \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} + \beta \frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} \right) \quad (26)$$

رابطه (۲۷) شرایط مرزی ساده ثابت را نشان می‌دهد:

$$\begin{cases} X = 0, 1: W = U = V = \psi = z M_x = 0 \\ Y = 0, 1: W = U = V = \varphi = M_y = 0 \end{cases} \quad (27)$$

شرایط مرزی گیردار مطابق (۲۸) خواهد بود:

$$\begin{cases} X = 0, 1: W = U = V = \psi = \varphi = 0 \\ Y = 0, 1: W = U = V = \varphi = \psi = 0 \end{cases} \quad (28)$$

1. Direct Substitution

مشتقات مراتب بالاتر توسط (۳۴) تا (۳۶) محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial^{(n)} F(x_i, y_j)}{\partial x^{(n)}} = \sum_{k=1}^N c_{ik}^{(n)} F_{kj} \quad (34)$$

$$\frac{\partial^{(m)} F(x_i, y_j)}{\partial y^{(m)}} = \sum_{r=1}^M \bar{c}_{jr}^{(m)} F_{ir} \quad (35)$$

$$\frac{\partial^{(a+b)} F(x_i, y_j)}{\partial x^{(a)} \partial y^{(b)}} = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^M c_{ik}^{(a)} \bar{c}_{jr}^{(b)} F_{kr} \quad (36)$$

ضرایب وزنی C و $\bar{C}$ به ترتیب ضرایب وزنی در راستای x و y می‌باشند که مطابق (۳۷) تا (۳۹) بدست می‌آیند.

$$c^{(1)} = a^x, \quad \bar{c}^{(1)} = a^y \quad (37)$$

$$\left| \begin{aligned} c_{ij}^{(n)} &= n \left[a_{ij}^x c_{ii}^{(n-1)} - \frac{c_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j} \right] \text{ for } i \neq j \\ c_{ii}^{(n)} &= - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}^{(n)} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right. \quad (38)$$

$$\left| \begin{aligned} \bar{c}_{ij}^{(m)} &= m \left[a_{ij}^y \bar{c}_{ii}^{(m-1)} - \frac{\bar{c}_{ij}^{(m-1)}}{y_i - y_j} \right] \text{ for } i \neq j \\ \bar{c}_{ii}^{(m)} &= - \sum_{j=1, j \neq i}^M \bar{c}_{ij}^{(m)} \quad i, j = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \right. \quad (39)$$

با اعمال (۳۴) تا (۳۵) بر (۲۱) تا (۲۵)، معادلات تعادل در نقطه (X_i, Y_j) طبق (۴۰) تا (۴۴) گسسته‌سازی می‌شوند.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N c_{ik}^{(2)} U_{kj} + (\lambda_1 + \lambda_3) \beta \\ & \times \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^M c_{ik}^{(1)} \bar{c}_{jr}^{(1)} V_{kr} + \lambda_3 \beta^2 \sum_{r=1}^M \bar{c}_{jr}^{(2)} U_{ir} \\ & = - \left(\sum_{k=1}^N c_{ik}^{(1)} W_{kj} \right) \left(\sum_{k=1}^N c_{ik}^{(2)} W_{kj} \right. \\ & \quad \left. + \lambda_3 \beta^2 \sum_{r=1}^M \bar{c}_{jr}^{(2)} W_{ir} \right) - (\lambda_1 + \lambda_3) \beta^2 \\ & \times \left(\sum_{r=1}^M \bar{c}_{jr}^{(1)} W_{ir} \right) \left(\sum_{k=1}^N c_{ik}^{(1)} \bar{c}_{jr}^{(1)} W_{kr} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 + \lambda_3) \beta \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^M c_{ik}^{(1)} \bar{c}_{jr}^{(1)} U_{kr} \\ & + \lambda_2 \beta^2 \sum_{r=1}^M \bar{c}_{jr}^{(2)} V_{ir} + \lambda_3 \sum_{k=1}^N c_{ik}^{(2)} V_{kj} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = -(\lambda_1 + \lambda_3) \beta \left(\sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^M c_{ik}^{(1)} \bar{c}_{jr}^{(1)} W_{kr} \right) \\ & \times \left(\sum_{k=1}^N c_{ik}^{(1)} W_{kj} \right) - \beta \left(\sum_{r=1}^M \bar{c}_{jr}^{(1)} W_{ir} \right) \\ & \times \left(\lambda_2 \beta^2 \sum_{r=1}^M \bar{c}_{jr}^{(2)} W_{ir} + \lambda_3 \sum_{k=1}^N c_{ik}^{(2)} W_{kj} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_5 \sum_{k=1}^N \left(c_{ik}^{(1)} \phi_{kj} + c_{ik}^{(2)} W_{kj} \right) \\ & + \lambda_4 \beta \sum_{r=1}^M \left(\bar{c}_{jr}^{(1)} \psi_{ir} + \beta \times \bar{c}_{jr}^{(2)} W_{ir} \right) \\ & - \eta \sum_{k=1}^N c_{ik}^{(2)} \bar{N}_{kj} - \eta \beta^2 \sum_{r=1}^M \bar{c}_{jr}^{(2)} \bar{N}_{ir} + \bar{N}_{ij} \\ & = \eta \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} + \eta \beta^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial Y^2} - Q \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 + \lambda_3) \beta \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^M c_{ik}^{(1)} \bar{c}_{jr}^{(1)} \psi_{kr} \\ & + \sum_{k=1}^N c_{ik}^{(2)} \phi_{kj} + \lambda_3 \beta^2 \sum_{r=1}^M \bar{c}_{jr}^{(2)} \phi_{ir} \\ & - 12 \lambda_5 \alpha^2 \phi_{ij} = 12 \lambda_5 \alpha^2 \sum_{k=1}^N c_{ik}^{(2)} W_{kj} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 + \lambda_3) \beta \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^M c_{ik}^{(1)} \bar{c}_{jr}^{(1)} \phi_{kr} \\ & + \lambda_3 \sum_{k=1}^N c_{ik}^{(2)} \psi_{kj} + \lambda_2 \beta^2 \sum_{r=1}^M \bar{c}_{jr}^{(2)} \psi_{ir} \\ & - 12 \lambda_4 \alpha^2 \psi_{ij} = 12 \lambda_4 \beta \alpha^2 \sum_{r=1}^M \bar{c}_{jr}^{(1)} W_{ir} \end{aligned} \quad (44)$$

در رابطه (۴۲) نیازی به گسسته سازی سمت راست تساوی نداریم، چون مقدار و نوع بار Q بعنوان یک پارامتر خارجی معلوم است و می‌توان مستقیماً از آن مشتق گرفت. به منظور مش‌بندی بهتر صفحه مستطیلی از (۴۵) که موسوم به توزیع‌بندی گوس، جیبشیف، لباتو^۱ است استفاده می‌شود.

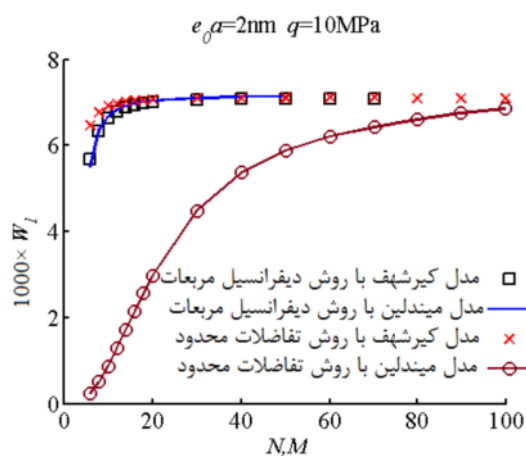
$$x_i = \frac{L_x}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

1. Gauss-Chebyshev-Lobatto

مربعات و تفاضلات محدود حل شده و مقدار خیز بی بعد شده برای تعداد مش‌های مختلف به نمایش در آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد مش‌ها نتایج هر دو روش با دقت مناسبی به یک مقدار همگرا شده‌اند. از این نمودار همچنین می‌توان دریافت که تئوری کلاسیک بدلیل معادلات کمتری که دارد، در هر دو روش خیلی سریع به جواب مطلوب رسیده است. اما برای تئوری برشی مرتبه اول که معادلات و حجم محاسبات بیشتری دارد، روش دیفرانسیل مربعات از نظر زمان و تعداد مش‌های مورد نیاز برای رسیدن به جواب مناسب، و نیز دقت نتایج برتری چشمگیری به روش تفاضلات محدود داشته است.

در جدول ۱، نتایج دو روش عددی دیفرانسیل مربعات و تفاضلات محدود با فرض تغییر شکل‌های کوچک، برای انواع بار و ضخامت دو برابر حالت قبل مقایسه شده‌اند. نتایج بر اساس تئوری برشی مرتبه اول غیرموضعی و شرایط مرزی ساده بدست آمده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، روش دیفرانسیل مربعات با ۱۰ گره در مش نتیجه‌ای مشابه روش تفاضلات محدود با ۵۰ گره در مش می‌دهد که بیانگر قابلیت بالای روش دیفرانسیل مربعات است.

در شکل ۳، نتایج حل غیرخطی (مسأله اصلی) با حل خطی مساله (درستی حل خطی مساله در بخش قبل تأیید شده است)، برای انواع شرط مرزی و بر حسب تعداد مش‌های مختلف مقایسه شده‌اند. مقدار بار عرضی معادل ۱ مگا پاسکال در نظر گرفته شده که مقدار کمی است و این انتظار را ایجاد می‌کند که نتایج دو مدل خطی و غیرخطی نزدیک به یکدیگر باشند.



شکل ۲ خیز بیشینه بی بعد بر حسب تعداد مش‌های مختلف برای دو روش عددی دیفرانسیل مربعات و تفاضلات محدود

$$y_j = \frac{L_y}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{j-1}{M-1} \pi \right) \right) \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (45)$$

۴- بحث و نتایج عددی

در این مقاله خمش غیرخطی ورقه‌های تک لایه گرافن مورد بررسی قرار گرفته است. بنابراین صفحه مستطیلی ارتوتروپیکی با دو نوع شرط مرزی ساده و گیردار تحت بارهای عرضی یکنواخت، به عنوان فیزیک مساله در نظر گرفته شده است. خواص صفحات گرافن بر اساس عواملی مثل کیفیت و درجه خلوص گرافن، دمای محیط، ساختار و چیدمان اتم‌ها در صفحه و ضخامت صفحه می‌تواند متفاوت باشد. همچنین ثابت شده است که این صفحات خواص غیر ایزوتروپیک دارند [۳۹]. اختلاف خواص صفحات گرافن در دو راستای متفاوت، به چیدمان شش وجهی اتم‌های کربن در صفحه و تفاوت زاویه پیوندهای کربن-کربن با بارهای درون صفحه‌ای، مربوط می‌شود. به طور مثال در مرزی که ساختار زیگزاگ دارد، یک سوم پیوندها در راستای بار درون صفحه‌ای قرار دارند درحالی که در مرزی که ساختار آرمچیر دارد تمام پیوندها با بار درون صفحه‌ای زاویه غیر صفر دارند [۲۹]. در این مقاله مشخصات صفحه گرافن به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} E_1 &= 1765 \text{ GPa} & E_2 &= 1588 \text{ GPa} & \nu_{12} &= 0.3 \\ h &= 0.34 \text{ nm} & l_x &= l_y = 10.2 \text{ nm} & \nu_{21} &= 0.27 \end{aligned}$$

مقدار ضریب مقیاس کوچک، به طور دقیق مشخص نشده و این مقدار توسط دینامیک مولکولی تعیین می‌شود. اما معلوم شده که مقدار آن همواره کمتر یا مساوی ۲ نانومتر است [۴۰].

متغیرهای مطرح شده در نمودارها توسط (۴۶) تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{w_{\max}}{L_x}, \quad W_2 = \frac{w_{\max}}{h} \\ R1 &= \left(\frac{W_{\text{FSDT}}}{W_{\text{classical}}} \right)_{\text{small}} \\ R2 &= \left(\frac{W_{\text{FSDT}}}{W_{\text{classical}}} \right)_{\text{large}} & R3 &= \left(\frac{W_{\text{small}}}{W_{\text{large}}} \right)_{\text{FSDT}} \end{aligned} \quad (46)$$

۴-۱- صحت‌سنجی نتایج

به منظور بررسی دقت روش حل و نتایج بدست آمده، ابتدا چندین مساله در حالات ساده‌تر بررسی شده‌اند.

در شکل ۲، مسأله اصلی با فرض تغییر شکل‌های کوچک برای شرایط مرزی ساده ثابت، توسط دو روش دیفرانسیل

صفحات با کرنش‌های غیرخطی و ناکارمن بدست آمده و با نتایج مرجع [۳۷] (نتایج این مرجع بر اساس روش دیفرانسیل مربعات، برای تغییر شکل‌های بزرگ صفحات نازک بدست آمده است) مقایسه شده است. نزدیکی بسیار خوب جواب‌های بدست آمده با نتایج در دسترس در شرایط مرزی مختلف و مقادیر متفاوت بار عرضی، بیانگر درستی روش حل می‌باشد. خواص صفحه به ترتیب زیر تعریف شده است.

$$E_1 = 18.7e6, E_2 = 1.3e6, G_{12} = 0.6e6, \nu_{12} = 0.3, L_x = 9.4, L_y = 7.75, h = 0.0624, e_0 a = 0$$

جدول ۲ مقایسه دو روش دیفرانسیل مربعات و رهایی پویا برای انواع بار، شرط مرزی و ضخامت

شرایط مرزی	ضخامت صفحه	بار عرضی	خیز صفحه	
			روش رهایی پویا (۶۱×۶۱) مربعات	روش دیفرانسیل (۷×۷) مربعات
ساده	۲۰	۱	۱۳/۵۳۶	۱۳/۶۳۴
	۲۰	۰/۱	۲/۴۴۴	۲/۵۰۱
	۱۰	۱	۲۰/۵۷۸	۲۰/۶۰۲
	۱۰	۰/۱	۸/۳۲۱	۸/۳۹۵
گیردار	۲۰	۱	۹/۵۵۶	۹/۵۵۳
	۲۰	۰/۱	۱/۱۳۳	۱/۱۳۸
	۱۰	۱	۱۹/۱۱۵	۱۹/۱۳۷
	۱۰	۰/۱	۵/۳۳۰	۵/۳۵۵

جدول ۳ مقایسه نتایج بدست آمده از حل حاضر با نتایج مرجع [۳۷] برای انواع بار و شرط مرزی.

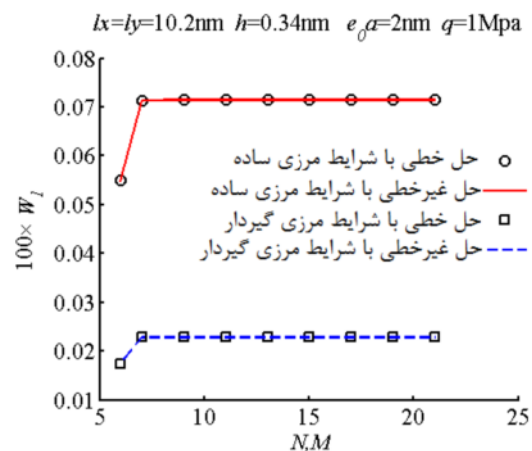
شرایط مرزی	بار	خیز بی بعد (W_2)	
		نتایج بدست آمده	[۳۷]
ساده	۰/۵	۰/۰۴۸	۰/۰۴۸
	۱/۰	۰/۰۶۴	۰/۰۶۴
	۲/۰	۰/۰۸۳	۰/۰۸۳
	۲/۵	۰/۰۹۰	۰/۰۸۹
	۳/۰	۰/۰۹۶	۰/۰۹۵
گیردار	۱/۰	۰/۰۴۱	۰/۰۴۱
	۲/۰	۰/۰۶۳	۰/۰۶۱
	۳/۰	۰/۰۷۸	۰/۰۷۶
	۴/۰	۰/۰۸۹	۰/۰۸۶
	۵/۰	۰/۰۹۸	۰/۰۹۳

۴-۲- نتایج حل

نتایج نهایی برای خیز بیشینه بی بعد شده بر اساس تئوری‌های

جدول ۱ خیز بی بعد حاصل از دور روش تفاضلات محدود و دیفرانسیل مربعات، برای مقادیر مختلف بار و ضخامت ۰/۶۸ نانومتر

بار خارجی (GPa)	دیفرانسیل مربعات				تفاضلات محدود
	$N=8$	$N=10$	$N=40$	$N=50$	
۰/۰۱	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۸	
۰/۰۵	۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۴۱	۰/۰۰۴۲	
۰/۱۰	۰/۰۰۸۱	۰/۰۰۸۵	۰/۰۰۸۱	۰/۰۰۸۴	
۰/۵۰	۰/۰۴۰۵	۰/۰۴۲۴	۰/۰۴۰۷	۰/۰۴۲۱	
۱/۰۰	۰/۰۸۱۰	۰/۰۸۴۸	۰/۰۸۱۵	۰/۰۸۴۲	



شکل ۳ مقایسه نتایج حل غیرخطی با نتایج تائید شده حل خطی

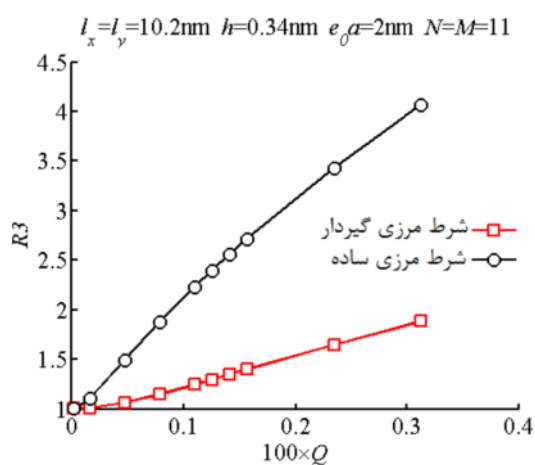
همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج بدست آمده به خوبی یکدیگر را تأیید کرده و به یک جواب همگرا می‌شوند. در جدول ۲، نتایج بدست آمده از روش عددی دیفرانسیل مربعات (برای تئوری برشی مرتبه اول با اثر تغییر شکل‌های بزرگ) با نتایج روش رهایی پویا مقایسه شده‌اند. گفتنی است که این روش یک پروسه تکراری است که هدف آن بطور کلی، انتقال یک سیستم استاتیکی به فضای دینامیکی برای بدست آوردن پاسخ‌های حالت پایدار استاتیکی می‌باشد (برای اطلاعات بیشتر می‌توان به مراجع [۴۲، ۴۱] اشاره نمود). خواص صفحه به ترتیب زیر در نظر گرفته شده است.

$k = \frac{5}{6}$, $E = 25$, $L_x = L_y = 100$, $\nu = 0.3$, $e_0 a = 0$ با مقایسه نتایج دو روش، مشاهده می‌شود که جواب‌های بدست آمده با دقت مناسبی یکدیگر را تأیید می‌کنند که این بیانگر درستی آنها و درستی روش حل بکار رفته است.

در جدول ۳، خیز بی بعد برای صفحه مستطیلی ارتوتروپیک تحت بار عرضی یکنواخت، بر اساس تئوری برشی مرتبه اول

و انواع شرط مرزی رسم شده و اثر تغییر شکل‌های بزرگ بر نتایج بررسی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نمودارهای هر دو شرط مرزی، در محدوده وسیعی (بارهای زیاد) شیب تقریباً ثابتی دارند. بنابراین با حدس مقدار $R3$ از روی نمودار، می‌توان نتایج را برای تغییر شکل‌های کوچک محاسبه کرده و سپس با ضرب آنها در $R3$ ، جواب‌ها را برای مدل غیرخطی بدست آورد. این می‌تواند یک راه بسیار سریع و ساده در محاسبات بعدی باشد و بدین جهت دارای اهمیت است. همچنین این نمودار نشان می‌دهد که نسبت خیز $R3$ در شرط مرزی ساده بیشتر از شرط مرزی گیردار است؛ که این می‌تواند به دلیل خیز بیشتر آنها در مقابل خیز کمتر شرط مرزی گیردار باشد.

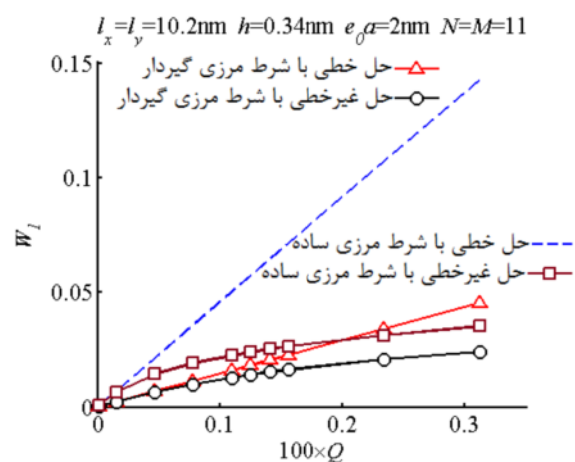
شکل ۶- الف و ب، اثر ضخامت را به ترتیب بر خیز و نسبت خیزها برای شرایط مرزی ساده و گیردار نشان می‌دهند. از هر دو نمودار شکل الف می‌توان دریافت که هر چه ضخامت زیاد شود، کاهش شیب از شدت کمتری برخوردار می‌شود، به طوری که در ضخامت‌های زیاد به سمت خط صاف با شیب صفر میل می‌کند. نمودارهای شکل ب نیز بیانگر این مطلب هستند که در محیط غیرموضعی نیز با افزایش ضخامت، اختلاف بین تئوری‌های کلاسیک و برشی مرتبه اول زیاد شده و اهمیت انتخاب تئوری مرتبه بالا بیشتر خواهد شد. از طرفی مشاهده می‌شود که پارامتر مقیاس کوچک تاثیری در نسبت خیز دو تئوری نداشته است. به علاوه مشخص است که شرایط مرزی گیردار حساسیت بیشتری نسبت به انتخاب تئوری داشته است.



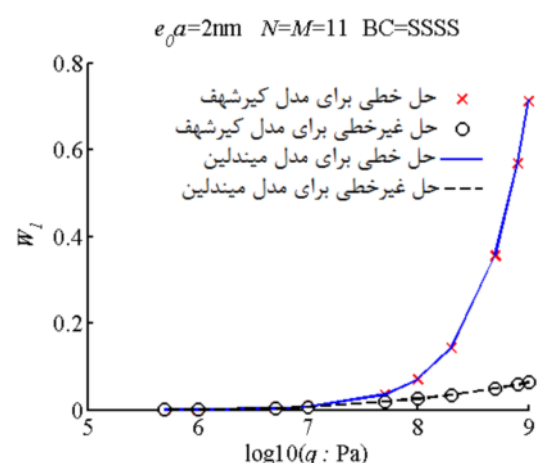
شکل ۵ نمودار نسبت خیز $R3$ بر حسب بار بدون بعد

کلاسیک و برشی مرتبه اول غیرموضعی صفحات و با فرض تغییر شکل‌های بزرگ و کوچک بدست آمده‌اند. تمامی نتایج این بخش توسط روش دیفرانسیل مربعات بدست آمده‌اند.

در شکل ۴- الف و ب، به ترتیب اثر بار عرضی بی بعد شده و لگاریتم بار عرضی بر روی خیز بررسی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، اثر تغییر شکل‌های بزرگ باعث کاهش خیز نانو صفحه شده است، بطوری که هر چه بر مقدار بار اضافه می‌شود این کاهش از شدت بیشتری برخوردار می‌شود؛ این در حالی بوده که شیب نمودار تغییر شکل‌های کوچک ثابت مانده است. از طرفی به علت نازک بودن صفحه، نتایج دو تئوری کلاسیک و برشی مرتبه اول تقریباً یکسان بدست آمده‌اند.



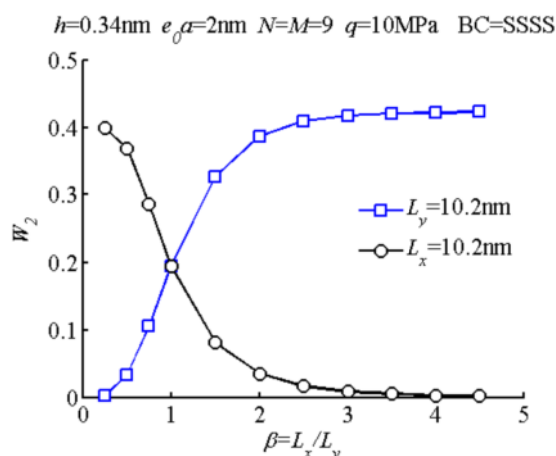
شکل ۴- الف نمودار خیز بر حسب بار در انواع شرط مرزی



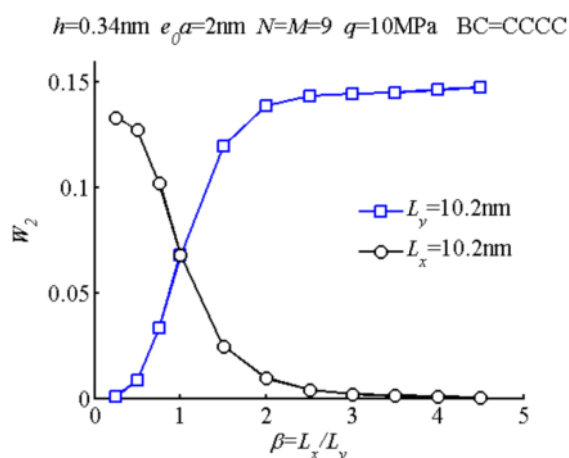
شکل ۴- ب نمودار خیز بر حسب لگاریتم بار و انواع تئوری‌ها در شرایط مرزی ساده

در شکل ۵ نمودار نسبت خیز $R3$ بر پایه بار عرضی بی‌بعد

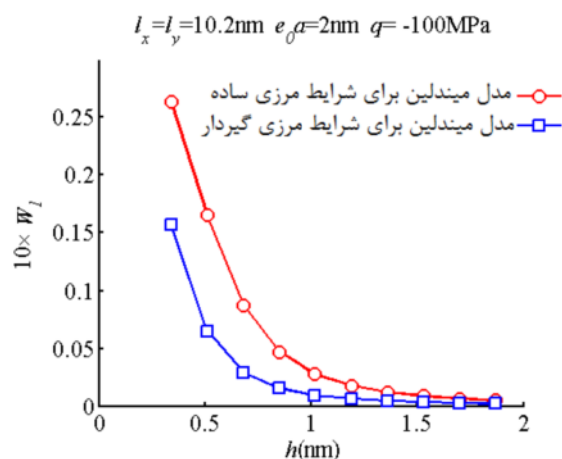
در شکل ۸- الف و ب اثر پارامتر مقیاس کوچک به ترتیب بر روی خیز (با شرایط مرزی ساده و گیردار) و نسبت خیزها (با شرط مرزی ساده)، برای انواع بار عرضی یکنواخت بررسی شده است. محاسبات برای تئوری برشی مرتبه اول با کرنش‌های غیرخطی انجام شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که افزایش این پارامتر، خیز ناشی از حل غیرخطی را به مقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد. به طوری که اختلاف خیز ابتدا و انتهای منحنی‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ به ترتیب برابر $0/047$ ، $0/058$ ، $0/03$ و $0/051$ بدست آمده است. بنابراین می‌توان دریافت که افزایش بار باعث افزایش این اختلاف شده است. همچنین مشاهده می‌شود که شرایط مرزی ساده، اثر پذیری بیشتری از تغییرات اثر مقیاس کوچک داشته است.



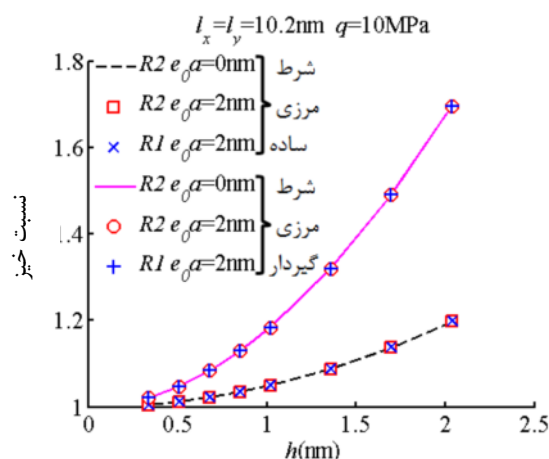
شکل ۷- الف نمودار تغییرات خیز بر حسب تغییرات نسبت عرضی (نسبت طول به عرض) برای شرط مرزی ساده



شکل ۷- ب نمودار تغییرات خیز بر حسب نسبت عرضی برای شرط مرزی گیردار



شکل ۶- الف نمودار تغییرات خیز بر حسب ضخامت در شرایط مرزی ساده و گیردار برای دو تئوری کلاسیک و برشی مرتبه اول

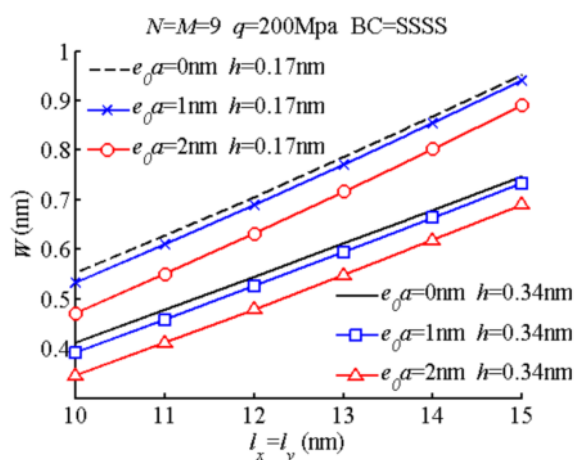


شکل ۶- ب نمودار تغییرات نسبت خیز بر حسب ضخامت در شرایط مرزی ساده و گیردار

شکل ۷- الف و ب، تغییرات خیز بی بعد شده را به ترتیب برای شرایط مرزی ساده و گیردار بر حسب نسبت عرضی β نمایش می‌دهند. محاسبات مطابق قبل بر اساس تئوری برشی مرتبه اول غیرموضعی و با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل‌های بزرگ انجام شده‌اند. همان‌طور که در هر دو شکل ۷- الف و ب مشاهده می‌شود، چنان‌چه افزایش نسبت عرضی با عرض ثابت و در اثر افزایش طول ایجاد شود، خیز نیز افزایش می‌یابد، ولی اگر افزایش نسبت عرضی در طول ثابت و در اثر کاهش عرض ایجاد شود، خیز صفحه نیز کاهش می‌یابد. اما به هر حال در هر دو مورد شیب نمودار کاهش یافته و به سمت خطی شدن میل کرده است. بنابراین می‌توان گفت که رفتار خمشی نانو صفحات مستطیلی بلند، اثر پذیری کمتری نسبت به تغییر نسبت طول به عرض دارند.

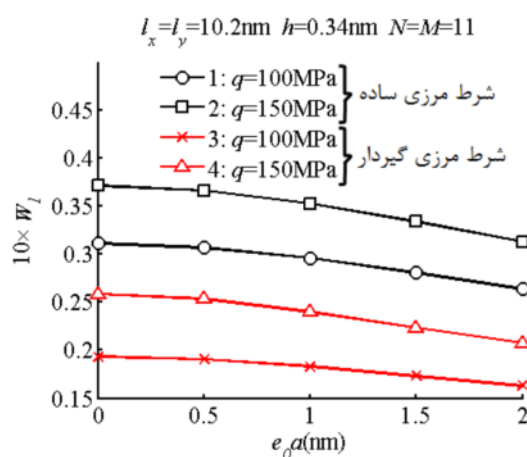
در شکل ۹، تفاوت خیز دو تئوری موضعی و غیرموضعی برای انواع طول و ضخامت با شرایط مرزی ساده بررسی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، همواره خیز ناشی از تئوری موضعی در مقایسه با تئوری غیرموضعی از مقدار بیشتری برخوردار است و هر چه مقدار پارامتر غیرموضعی افزایش یابد این اختلاف با شدت بیشتری افزایش می‌یابد. به طوری که اختلاف خیز ناشی از حل موضعی (پارامتر مقیاس کوچک صفر باشد) و حل غیرموضعی با مقدار یک نانومتر برای پارامتر مقیاس کوچک بسیار کمتر از اختلاف حل غیرموضعی با پارامتر مقیاس کوچک برابر یک نانومتر و حل غیرموضعی با پارامتر مقیاس کوچک برابر دو نانومتر است.

در شکل ۱۰، نسبت خیز غیرموضعی به خیز موضعی بر حسب طول و انواع پارامتر مقیاس کوچک برای صفحه مربعی با شرایط مرزی ساده رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، اثر غیرموضعی با افزایش طول کاهش می‌یابد؛ به طوری که در بیشترین مقدار پارامتر مقیاس کوچک (۲ نانومتر)، اختلاف دو تئوری موضعی و غیرموضعی برای صفحه مربعی با خواص و شرایط مورد استفاده و بار ۲۰۰ مگاپاسکال و طول بیشتر از ۲۵ نانومتر، کمتر از ۲ درصد است. بنابراین در صفحات تک لایه گرافن با طول و عرض زیاد می‌توان از نتایج تئوری‌های محیط پیوسته کلاسیک با تقریب مناسبی استفاده کرد، اما با کم شدن طول و عرض صفحه در حالی که ضخامت آن ثابت است، در نظر گرفتن اثر غیرموضعی پر اهمیت می‌شود.

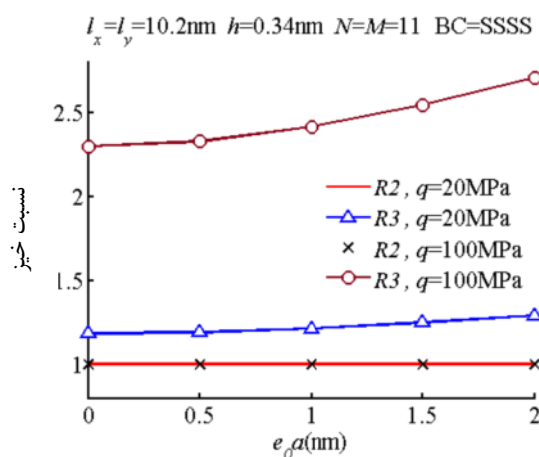


شکل ۹ نمودار خیز بر حسب طول (نانومتر)، برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس کوچک و ضخامت

در شکل ۸-ب مشاهده می‌شود که هر دوی افزایش بار و پارامتر مقیاس کوچک باعث افزایش اختلاف بین حل خطی و غیرخطی شده‌اند. باید توجه داشت که اثر پارامتر غیرموضعی در نتایج حل خطی به دلیل بار یکنواخت حذف شده است، اما در نتایج حل غیر خطی اثر کاهنده داشته است. از طرفی مشاهده می‌شود که نه مقدار بار و نه مقدار پارامتر مقیاس کوچک در نسبت خیز تئوری غیرموضعی صفحات نازک به تئوری برشی مرتبه اول غیرموضعی، تأثیری نداشته‌اند که با توجه به نمودارهای شکل ۶ و ۷، می‌توان نتیجه گرفت که تنها عوامل مؤثر در اختلاف دو تئوری غیرموضعی به کار رفته، مربوط به ابعاد صفحه می‌شود.



شکل ۸-الف نمودار خیز بر حسب پارامتر مقیاس کوچک، برای شرط مرزی ساده و گیردار



شکل ۸-ب نمودار نسبت خیزها بر حسب پارامتر مقیاس کوچک، در شرط مرزی ساده

غیرموضعی و بررسی اثر تغییر شکل‌های بزرگ در گرافن‌ها مورد استفاده قرار گیرد. برخی از مهم‌ترین نتایج بدست آمده در ادامه بیان شده‌اند:

پارامتر مقیاس کوچک خیز صفحه را مخصوصاً در بارهای زیاد، به شدت کاهش می‌دهد. این کاهش در شرایط مرزی ساده بیشتر از شرایط مرزی گیردار است.

استفاده از کرنش‌های غیرخطی ون کارمن در مقایسه با کرنش‌های خطی برای تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ نقش مهم و کاهنده‌ای دارد.

استفاده از تئوری مرتبه بالاتر در نانو صفحاتی که ضخامت نسبی بیشتری دارند، باعث دقیق‌تر شدن نتایج می‌شود. شرایط مرزی گیردار از حساسیت بیشتری نسبت به انتخاب تئوری مناسب برخوردار است.

پارامتر غیرموضعی تأثیری در نسبت خیز تئوری برشی مرتبه اول غیرموضعی به تئوری غیرموضعی صفحات نازک ندارد و تفاوت دو تئوری فقط مربوط به ابعاد صفحه است.

نانو صفحات مستطیلی بلند که نسبت طول به عرض بیشتری دارند، در مقایسه با صفحات مربعی از حساسیت کمتری نسبت به تغییر یا دقت اندازه ابعاد برخوردارند.

با افزایش طول نانوصفحه تک لایه گرافن مربعی در ضخامت ثابت، اختلاف دو تئوری موضعی و غیرموضعی کم می‌شود و در طول‌های زیاد می‌توان به طور تقریبی و با دقت مناسبی از اثر غیرموضعی در روابط صرف نظر کرد.

روش ناویر تقریب مناسبی از مشتقات بار عرضی بدست نمی‌دهد و لذا برای تحلیل غیرموضعی خمش نامناسب است.

۶- پیوست

اثبات ناکارآمدی روش ناویر در تحلیل غیرموضعی خمش:

ابتدا بخش اشاره شده در (۴۷) در نظر گرفته شود:

$$L(q) = q - \mu \times \nabla^2 q = q - \mu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \quad (47)$$

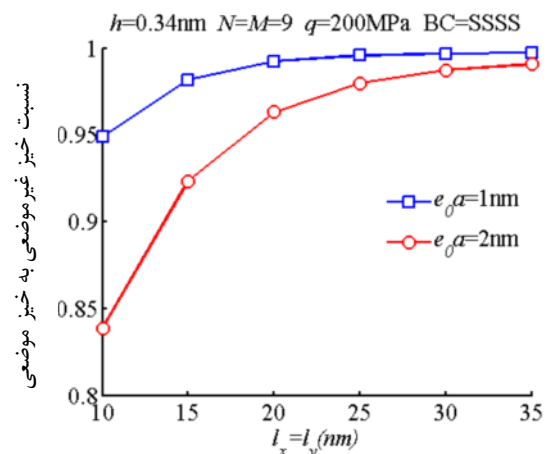
حل دقیق (۴۷) در شرایط بار یکنواخت مطابق (۴۸) است:

$$q(x, y) = \text{const} \rightarrow \nabla^2 q = 0, \quad L(q) = q \quad (48)$$

اما با روش ناویر، تقریب بار عرضی مطابق (۴۹) است:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \times \sin \frac{m\pi x}{l_x} \sin \frac{n\pi y}{l_y} \quad (49)$$

لذا حل (۴۷) طبق روش ناویر برای $\mu \neq 0$ عبارت است از:



شکل ۱۰ نمودار نسبت خیز غیرموضعی به خیز موضعی بر حسب

طول برای انواع پارامتر مقیاس کوچک و شرایط مرزی ساده

برخی از مقالات مثل [۳۱، ۱۹]، که معادلات خمش غیرموضعی را با فرض تغییر شکل‌های کوچک و با روش ناویر حل کرده‌اند، نتایج متفاوتی با آنچه در این مقاله گزارش شده است، بدست آورده‌اند. در واقع باید گفت که روش ناویر نمی‌تواند مشتقات بار عرضی را که در اثر اعمال پارامتر مقیاس کوچک در روابط کلاسیک ایجاد شده‌اند به درستی تقریب کند و منجر به نتایج غلطی می‌شود (طبیعتاً این مشکل در مورد تحلیل‌هایی مثل ارتعاشات آزاد یا کماتش که بار عرضی در آنها حذف شده است، وجود ندارد). به طوری که طبق روش ناویر، هر چه پارامتر مقیاس کوچک افزایش می‌یابد گویا بار عرضی بیشتر شده است و لذا خیز صفحه بیشتر می‌شود که این نتیجه ناصحیح است. این موضوع توسط نویسندگان این مقاله برای بار عرضی یکنواخت که موضوع بحث این مقاله و اغلب دیگر مقالات بوده است، در پیوست الف اثبات شده است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله از تئوری غیرموضعی ارینگن برای مطالعه خمش غیرخطی نانو صفحه مستطیلی و ارتوتروپیک گرافن، بر اساس تئوری برشی مرتبه اول با کرنش‌های غیرخطی ون کارمن استفاده شده است. همچنین اثر بار، ضخامت، نسبت طول به عرض، پارامتر مقیاس کوچک، اثر تغییر شکل‌های بزرگ، شرایط مرزی و تئوری بکار رفته برای حل بر روی نتایج بررسی گردیده‌اند. بررسی انجام شده، نتایج مفید و علمی در اختیار می‌گذارد که می‌تواند در مطالعه رفتار نانوصفحات، انواع تئوری

sheets subjected to transverse loads in thermal environments”, *Composite Structures*, Vol. 98, 2013, pp 294-302.

- [9] Chen Y., Lee J.D., Eskandarian A., “Atomistic viewpoint of the applicability of microcontinuum theories”, *International Journal of Solids Structures*, Vol. 41, No. 8, 2004, pp 2085-2097.
- [10] Eringen A.C., Edelen D.G.B., “On nonlocal elasticity”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, 1972, pp. 233-248.
- [11] Eringen A.C., “On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, No. 9, 1983, pp. 4703-4710.
- [12] Eringen A.C., *Nonlocal Continuum Field Theories*, New York, Springer-Verlag, 2002.
- [13] Eringen A.C., “Nonlocal continuum mechanics based on distributions”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 44, No. 3-4, 2006, pp. 141-147.
- [14] Behfar K., Naghdabadi R., “Nanoscale vibrational analysis of a multi-layered graphene sheet embedded in an elastic medium”, *Composites Science and Technology*, Vol. 65, No. 7-8, 2005, pp. 1159-1164.
- [15] Behfar K., Seifi P., Naghdabadi R., Ghanbari J., “An analytical approach to determination of bending modulus of a multi-layered graphene sheet”, *Thin Solid Films*, Vol. 496, No. 2, 2006, pp. 475-480.
- [16] Sakhaee-Pour A., “Elastic properties of single-layered graphene sheet”, *Solid State Communications*, Vol. 149, No. 1, 2009, pp. 91-95.
- [17] Pradhan S.C., Phadikar J.K., “Small scale effect on vibration of embedded multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum models”, *Physics Letter A*, Vol. 373, No. 11, 2009, pp. 1062-1069.
- [18] Pradhan S.C., “Buckling of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity and higher order shear deformation theory”, *Physics Letters A*, Vol. 373, No. 45, 2009, pp. 4182-4188.
- [19] Aghababaei R., Reddy J.N., “Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 326, No. 1-2, 2009, pp. 277-289.
- [20] Reddy J.N., “Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 11, 2010, pp. 1507-1518.
- [21] Ansari R., Sahmani S., Arash B., “Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets”, *Physics Letters A*, Vol. 375, No. 1, 2010, pp. 53-62.
- [22] Shen L., Shen H.S., Zhang C.L., “Nonlocal plate

$$q - \mu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{k} \times q_{mn} \times \sin \frac{m\pi x}{l_x} \sin \frac{n\pi y}{l_y} = q + \mu \pi^2 \left(\frac{q_1}{l_x^2} + \frac{q_2}{l_y^2} \right) \neq q,$$

$$|L(q)| > |q| \quad (50)$$

که در آن q_1 و q_2 هم علامت با q و مطابق (51) هستند:

$$q_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} m^2 \sin \frac{m\pi x}{l_x} \sin \frac{n\pi y}{l_y}$$

$$q_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} n^2 \sin \frac{m\pi x}{l_x} \sin \frac{n\pi y}{l_y}$$

$$\bar{k} = \left(1 + \mu \frac{(m\pi)^2}{l_x^2} + \mu \frac{(n\pi)^2}{l_y^2} \right) > 1 \quad (51)$$

۷- مراجع

- [1] Craighead H.G., “Nanoelectromechanical systems”, *Science*, Vol. 209, No. 5496, 2000, pp. 1532-1535.
- [2] Li M., Tang H.X., Roukes M.L., “Ultra-sensitive NEMS-based cantilevers for sensing, scanned probe and very high-frequency applications”, *Nature Nanotechnology*, Vol. 2, No. 7, 2007, pp. 114-133.
- [3] Cimalla V., Niebelschütz F., Tonisch K., Foerster C.h., Brueckner K., Cimalla I., Friedrich T., Pezoldt J., Stephan R., Hein M., Ambacher O., “Nanoelectromechanical devices for sensing applications”, *Sensors and Actuators B: Chemical*, Vol. 126, No. 1, 2007, pp. 24-34.
- [4] Sakhaee-Pour A., Ahmadian M.T., Vafai A., “Applications of single-layered graphene sheets as mass sensors and atomistic dust detectors”, *Solid State Communication*, Vol. 145, No. 4, 2008, pp. 168-172.
- [5] Bing-di C., Cheng-xin P., Zheng C., “Ultrasonic synthesis of CoO/graphene nanohybrids as high performance anode materials for lithium-ion batteries”, *Transaction of Nonferrous Metals Society of China*, Vol. 22, No. 10, 2012, pp. 2517-2522.
- [6] Basu S., Bhattacharyya P. “Recent developments on graphene and graphene oxide based solid state gas sensors”, *Sensors and Actuators B: Chemical*, Vol. 173, 2012, pp. 1-21.
- [7] Wang J., Li Z., Fan G., Pan H., Chen Z., Zhang D., “Reinforcement with graphene nanosheets in aluminum matrix composites”, *Scripta Materialia*, Vol. 66, No. 8, 2012, pp. 594-597.
- [8] Xu Y.M., Shen H.S., Zhang C.L., “Nonlocal plate model for nonlinear bending of bilayer graphene

- plane load via nonlocal continuum mechanics", *Composite Structures*, Vol. 94, No. 5, 2012, pp. 1605-1615.
- [33] Farajpour A., ArabSolghar A.R., Shahidi A.R., "Postbuckling analysis of multi-layered graphene sheets under non-uniform biaxial compression", *Physica E*, Vol. 47, 2013, pp. 197-206.
- [34] Bellman R.E., Casti J., "Differential Quadrature and Long-Term Integration", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, No. 2, 1971, pp. 235-238.
- [35] Bellman R.E., Kashef B.G., Casti J., "Differential Quadrature: A Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equation", *Journal of Computational Physics*, Vol. 10, No. 1, 1993, pp. 40-52.
- [36] Shu C., *Differential Quadrature and Its Application in Eng.*, Berlin, Springer, 2000.
- [37] Chen W., Shu C., He W., Zhong T., "The application of special matrix product to differential quadrature solution of geometrically nonlinear bending of orthotropic rectangular plates", *Computers & Structures*, Vol. 74, No. 1, 2000, pp. 65-76.
- [38] Yucel U., Boubaker K., "Differential quadrature method (DQM) and Boubaker Polynomials Expansion Scheme (BPES) for efficient computation of the eigenvalues of fourth-order Sturm–Liouville problems", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 36, No. 1, 2012, pp. 158-167.
- [39] Ni Z., Bu H., Zou M., Yi H., Bi K., Chen Y., "Anisotropic mechanical properties of graphene sheets from molecular dynamics", *Physica B*, Vol. 405, No. 5, 2010, pp 1301–1306.
- [40] Wang Q., Wang C.M., "The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modeling carbon nanotubes", *Nanotechnology*, Vol 18, No. 7, 2007, pp 075702.
- [41] Golmakani M.E., Kadkhodayan M., "Large deflection thermoelastic analysis of functionally graded stiffened annular sector plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 69, 2013, pp. 94-106.
- [42] Golmakani M.E., Emami M., "Nonlinear bending and buckling analysis of functionally graded annular plates", *Modares Mechanical Engineering*, in press. (In Persian)
- model for nonlinear vibration of single layer graphene sheets in thermal environments", *Computational Materials Science*, Vol. 48, No. 3, 2010, pp. 680-685.
- [23] Shen H.S., "Nonlocal plate model for nonlinear analysis of thin films on elastic foundations in thermal environments", *Composite Structures*, Vol. 93, No. 3, 2011, pp. 1143-1152.
- [24] Samaei A.T., Abbasian S., Mirsayar M.M., "Buckling analysis of a single-layer graphene sheet embedded in an elastic medium based on nonlocal Mindlin plate theory", *Mechanics Research Communications*, Vol. 38, No. 7, 2011, pp. 481-485.
- [25] Aksencer T., Aydogdu M., "Levy type solution method for vibration and buckling of nanoplates using nonlocal elasticity theory", *Physica E*, Vol. 43, No. 4, 2011, pp. 954-959.
- [26] Aksencer T., Aydogdu M., "Forced transverse vibration of nanoplates using nonlocal elasticity", *Physica E*, Vol. 44, No. 7-8, 2012, pp. 1752-1759.
- [27] Jomehzadeh E., Saidi A.R., "A study on large amplitude vibration of multilayered graphene sheets", *Computational Materials Science*, Vol. 50, No. 3, 2011, pp. 1043-1051.
- [28] Jomehzadeh E., Saidi A.R., Pugno N.M., "Large amplitude vibration of a bilayer graphene embedded in a nonlinear polymer matrix", *Physica E*, Vol. 44, No. 10, 2012, pp. 1973-1982.
- [29] Satish N., Narendar S., Gopalakrishnan S., "Thermal vibration analysis of orthotropic nanoplates based on nonlocal continuum mechanics", *Physica E*, Vol. 44, No. 9, 2012, pp. 1950-1962.
- [30] Pouresmaeeli S., Fazlzadeh S.A., Ghavanloo E., "Exact solution for nonlocal vibration of double-orthotropic nanoplates embedded in elastic medium", *Composites Part B*, Vol. 43, No. 8, 2012, pp. 3384-3390.
- [31] Wang Y.Z., Li F.M., "Static bending behaviors of nanoplate embedded in elastic matrix with small scale effects", *Mechanics Research Communications*, Vol. 41, 2012, pp. 44-48.
- [32] Farajpour A., Shahidi A.R., Mohammadi M., Mahzoon M., "Buckling of orthotropic micro/nanoscale plates under linearly varying in-