

تحلیل استاتیک تیر قوطی کامپوزیت با استفاده از روش کاهش ابعاد

اسماعیل غفاری^۱، جلیل رضایی پژند^{۲*}

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

۲- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

* jrezaeep@um.ac.ir , 9177948974

چکیده

در این مقاله تحلیل استاتیک تیرهای کامپوزیتی با چیدمان و سطح مقطع دلخواه ارائه شده است. شیوه حل بر پایه تفکیک مسئله الاستیسیته غیرخطی سه بعدی، به حل دو بعدی سطح مقطع و یک بعدی در طول تیر می باشد. مدل سازی بیان شده به کمک فرضیات کوچک بودن کرنش ها نسبت به واحد و ابعاد مقطع نسبت به طول موج تغییر شکل انجام می شود. در تحلیل دو بعدی سطح مقطع توابع اعوجاج به صورت تابعی از کرنش های یک بعدی محاسبه و سپس ماتریس سفتی، دارای کوپل کامل از تغییر شکل های کششی، پیچشی و خمشی در دو جهت متعامد حاصل می شود. در این تحقیق از روش ریلی-ریتز جهت محاسبه توابع اعوجاج استفاده می شود. مزیت استفاده از ریلی-ریتز ساده سازی روند حل سطح مقطع در مقایسه با حل المان محدود مرد استفاده در روش های مشابه می باشد. تحلیل یک بعدی در طول تیر با روش المان محدود از طریق محاسبه انرژی کرنشی تیر انجام گرفته است. اثر تغییر زاویه چیدمان مقطع کامپوزیت بر سفتی های مختلف بررسی شده است. مقایسه نتایج تحلیل استاتیک تیر قوطی یکسرگیردار کامپوزیتی نامتران و نامتران با نتایج المان محدود سه بعدی در نرم افزار آباکوس و نتایج تجربی همگرایی مناسبی نشان می دهد. روش پیش رو، نتایج با دقت بالاتری برای مقطع نامتران را در نرم افزار آباکوس و نتایج تجربی همگرایی سه بعدی، روش حاضر با سرعت بالا و دقت قابل قبول، مناسب جهت تحلیل اولیه و بهینه سازی سازه های تیر شکل کامپوزیت می باشد.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۰۲ شهریور ۱۳۹۳

پذیرش: ۲۳ مهر ۱۳۹۳

ارائه در سایت: ۲۴ آبان ۱۳۹۳

کلید واژگان:

تیر کامپوزیت

تابع اعوجاج

ریلی-ریتز

المان محدود

Static analysis of composite box beams by dimensional reduction method

Esmaeel Ghafari¹, Jalil Rezaeepazhand^{1*}

1- Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
* P.O.B. 9177948974 Mashhad, Iran, jrezaeep@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 24 August 2014

Accepted 15 October 2014

Available Online 15 November 2014

Keywords:

Composite Beam

Warping Function

Rayleigh-Ritz Method

Finite Element Method

ABSTRACT

This paper presents prediction of static behavior of composite beams with arbitrary anisotropic materials. The procedure is based on decomposing a 3-D nonlinear elasticity problem into a 2-D analysis of cross section and a 1-D analysis across the beam length. This is accomplished by assuming that magnitude of strain is small compared to unity and cross section size is small relative to wavelength of deformation, inherent to beam-like structures. In 2-D cross sectional analysis warping functions are calculated in terms of 1-D strain parameters and finally, fully coupled classical stiffness constants are derived which include extension, torsion and bending in two directions. 1-D analysis is modeled by Finite Element Method through calculating beam strain energy. In this article warpings are derived using Rayleigh-Ritz method. The great advantage of using Rayleigh-Ritz is simplifying cross sectional analysis in contrast with the mesh generation in FEM of similar procedures. Different cross section stiffnesses are investigated for ply orientation angle. Calculated results for symmetric and anti-symmetric composite box beams correlate well with 3-D FEM using Abaqus software as well as the experimental results. The present solution has more accurate results for anti-symmetric composite box beam. According to costly use of 3-D FEM analysis, the present procedure with high speed and acceptable accuracy is sufficient for preliminary and optimization problems.

-۱ مقدمه

امروزه مواد کامپوزیت کاربردهای گسترده و روزافزون در صنایع مختلفی مانند هواپاک، خودروسازی، کشتی سازی یافته اند. نرخ مقاومت به وزن بالا، بروز عمر خستگی بهتر در مقایسه با فلزات در شرایط طراحی دقیق و همچنین امکان طراحی ماده جهت عملکرد خاص (با توجه به طبیعت جهتی خواص در مواد کامپوزیت) از ویژگی های برجسته این مواد است. با توجه به مزیت های بیان شده، گسترده گی استفاده از این مواد به دلایلی چون پیچیدگی

تحلیل این سازه ها کمتر از انتظار بوده و با وجود مدل های مختلف همچنان

نیاز به مدل های ساده با جامعیت حل وجود دارد. استفاده از مدل های

سه بعدی المان محدود برای مدل سازی اولیه پرهزینه و وقت گیر می باشد.

بنابراین تحلیل تقریبی این سازه ها حائز اهمیت است.

در بسیاری از اجزاء مکانیکی مورد تحلیل، اهمیت بعد طولی نسبت به

سایر ابعاد بیشتر است. پره هلیکوپتر و توربین باد، بال هواپیما و اجزاء تیر

شکل سازه ها از این دست می باشند. بنابراین روش مناسب جهت تحلیل این

Please cite this article using:

E. Ghafari, J. Rezaeepazhand, Static analysis of composite box beams by dimensional reduction method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 16, pp. 367-374, 2015
(In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.38.7]

تنش اعمال نمی‌شود و محدودیتی برای هندسه سطح مقطع و ماده موردن استفاده وجود ندارد. این برنامه به عنوان VABS⁴ شناخته شده و در مرجع‌های مختلفی مانند یو و همکارانش [10] نشان داده شده که اگر چه روشی تحلیلی جهت حل تیرها می‌باشد دقت مناسبی را در مقایسه با نتایج تحلیل سه‌بعدی المان محدود ارائه می‌دهد. در سال 2012 جدیدترین اصلاحات این برنامه در مرجع [11] ارائه و از آن جهت تحلیل‌های مختلف تیرها در مقالات متعددی استفاده شده است.

در مقاله پیش رو پس از ارائه مدل سه‌بعدی تیر، مسئله به حل دوبعدی سطح مقطع و یکبعدی در طول تیر تفکیک می‌شود. این روش بر پایه فرضیات کوچک بودن کرنش یکبعدی نسبت به واحد و ابعاد سطح مقطع نسبت به طول موج تغییر شکل انجام می‌شود. در حل دوبعدی سطح مقطع توابع اعوجاج داخل و خارج صفحه محاسبه می‌شود. در کارهای انجام شده تا کنون از روش المان محدود جهت حل سطح مقطع استفاده شده است. در این مقاله حل سطح مقطع به روش ریلی-ریتز با توابعی به فرم کلی چندجمله‌ای-ها انجام می‌شود. استفاده از ریلی-ریتز در مقایسه با حل المان محدود سطح مقطع، با حذف فرآیند المان‌بندی، امکان حل تیرهای کامپوزیت را با رویکردی تحلیلی و فرآیندی ساده‌تر جهت تحلیل‌های اولیه ارائه می‌دهد. خروجی این تحلیل ماتریس سفتی 4×4 سطح مقطع بدون اثرات برش عرضی می‌باشد. این ماتریس دارای کوپل کامل از تغییر شکل‌های پایه‌ای کشش، پیچش و خمش در دو جهت متعامد است. با دستیابی به این ماتریس امکان حل یک-بعدی تیر با استفاده از روش المان محدود در طول تیر با المان‌های یکبعدی و سرعت بالا فراهم می‌شود.

2- مدل سازی سه‌بعدی تیر

جهت ایجاد مدل یکبعدی از مسئله سه‌بعدی تیر نیاز به انرژی کرنشی بر حسب متغیرهای یکبعدی وجود دارد. لذا شیوه انتخاب کرنش سه‌بعدی تیر حائز اهمیت ویژه است. کرنش سه‌بعدی تیر بر حسب متغیرهای تغییر شکل یکبعدی (کرنش‌های یکبعدی کلاسیک) و توابع اعوجاج سطح مقطع (تغییر شکل سه‌بعدی مقطع) نوشته می‌شود. با محاسبه توابع اعوجاج بر حسب متغیرهای یکبعدی، می‌توان مسئله سه‌بعدی را به یکبعدی تبدیل کرد. امکان حل این روش به صورت دقیق وجود ندارد. حل تقریبی به کمک فرضیات کوچک در نظر گرفتن کرنش‌های یکبعدی نسبت به واحد و ابعاد مقطع نسبت به طول موج تغییر شکل تیر است. در مرجع [3] با کوچک در نظر گرفتن تانسور دوران محلی رابطه (1) برای تعریف کرنش سه‌بعدی متقارن G ارائه شده است.

$$G_{ij} = \frac{1}{2} (F_{ij} + F_{ji}) - \delta_{ij} \quad (1)$$

در رابطه (1) ε_{ij} اجزای تانسور واحد و F_{ij} اجزای تانسور گرادیان تغییر شکل می‌باشد. برای محاسبه تانسور گرادیان تغییر شکل لازم است بردارهای مکان قبل و بعد از تغییر شکل طبق شکل 1 تعریف گردد. بردار مکان قبل از تغییر شکل (r) و در حالت تغییر شکل یافته (R) جهت تعیین تمامی نقاط مادی دلخواه تیر سه‌بعدی در رابطه (2) تعریف می‌شود [3].

4- Variational Asymptotic Beam Sectional Analysis

سازه‌ها کاهاش ابعاد مسئله در مقابل تحلیل سه‌بعدی آن است. از گذشته نیز شیوه‌های تحلیل این سازه‌ها -که به عنوان تیر شناخته می‌شوند- بر اساس کاهاش ابعاد مسئله و تبدیل مدل حقیقی سه‌بعدی تیر به مدل یکبعدی و صرف نظر از ابعاد کوچک سطح مقطع در مقایسه با بعد طول بوده است. برای مواد همسانگرد از تئوری‌های کاهاش بعددهنده ابتداً تیرها می‌توان به مدل‌های معروفی مانند اوبل-برنولی و تیموشنسکو اشاره کرد [1]. درویزه و همکارانش [2] تحلیلی غیرخطی از تیر همسانگرد به کمک روابط مکانیک محیط پیوسته را به فرم‌های یکبعدی و دوبعدی ارائه کرده‌اند.

از طرف دیگر برای تحلیل سازه‌های کامپوزیتی امکان وجود اعوجاج¹‌های خارج و داخل صفحه و کوپل‌های مادی بین تمامی حرکت‌های پایه بیان شده در تئوری‌های مواد همسانگرد مانند تیموشنسکو (کشش، خمش در دو جهت، پیچش و برش در دو جهت) وجود داشته و در نتیجه فرضیات ساده‌سازی شده سینماتیکی مدل‌های مقدماتی باید حذف شوند.

تئوری مناسب برای تیرهای کامپوزیتی که اهمیت به‌سزایی در مدل‌سازی پره هلیکوپتر و توربین باد دارد، باید بر پایه سینماتیک دارای هندسه غیرخطی و در نظر گرفتن اثرات غیرکلاسیک تیر مانند اعوجاج‌های خارج صفحه و همچنین داخل صفحه باشد. چنین سینماتیک غیرخطی توسط هاژر و دانیلسون [3] در سال 1987 مطرح شده است.

اسمیت و کپرا [4] در سال 1990 در مقاله خود تئوری تیر کامپوزیت به روش مستقیم ارائه کرده و اثرات غیرکلاسیک مانند اعوجاج‌های وابسته به پیچش، برش عرضی و انواع کوپلینگ‌های حرکتی را مورد بررسی قرار دادند. کاندرا و همکارانش [5] در سال 1990 تیر قوطی‌های مستطیلی کامپوزیت متقارن و نامتقارن را بررسی و تحلیل کرده‌اند. مدل‌ها تحت بارهای خمشی، پیچشی و کششی مورد بررسی آزمایشگاهی قرار گرفته و زوایای خمشی و پیچشی با تجهیزات نوری اندازه‌گیری شده‌اند. نتایج با تئوری تحلیلی و المان محدود مقایسه شده و موضوع ایجاد کوپل‌ها در مدل‌های متقارن و نامتقارن بحث شده است. کیم و وايت [6] تئوری دقیقی برای تیرهای کامپوزیت جدارنازک و ضخیم با سطح مقطع بسته ارائه کرده‌اند. اثرات برش عرضی و اعوجاج‌های اولیه و ثانویه در پیچش در نظر گرفته شده اما اعوجاج‌های داخل صفحه نادیده گرفته شده است.

بردیچوسکی [7] در سال 1982 از روش VAM² برای حل میله ناهمسانگرد استفاده کرد. در این مقاله نشان داده شده که مسئله الاستیسیته غیرخطی و سه‌بعدی یک میله قابل تفکیک به حل غیرخطی یکبعدی و مسئله خطی دوبعدی است. در این تحقیق تحلیل سطح مقطع برای مدل‌های عمومی ناهمسانگرد و ناهمگن ارائه شد. روش فوق توسط ولووی و هاژر [8] بهبود یافت. بُری و همکارانش [9] در سال 1992 تحلیلی بر پایه مدل‌سازی المان محدود سطح مقطع برای تیر کامپوزیت جهت محاسبه ویژگی‌های سطح مقطع (ماتریس 6×6 سفتی) و توابع اعوجاج تیر کامپوزیت برای تیر با خمش و پیچش اولیه ارائه کرده‌اند.

برنامه‌ای جهت تحلیل خطی سطح مقطع تیر با استفاده از تئوری VAM به روش المان محدود از سال 1992 توسط هاژر پایه‌گذاری شد. این روش برای حل مسائلی است که دارای بعد یا ابعاد کوچک (ابعاد سطح مقطع) نسبت به سایر ابعاد می‌باشد و با استفاده از مینیمم‌کردن تابعی³ انرژی فرمول‌بندی می‌شود. در این روش فرضیات کلاسیک در مورد جابه‌جایی و

1- Warping

2- Variational Asymptotic Method

3- Functional

اپراتور ∂_i مشتق نسبت به x_i و I_3 و 0_3 به ترتیب ماتریس 3×3 واحد و تهی می‌باشد.

برای جلوگیری از حرکت جسم صلب مقطع، لازم است قیدهایی برای تغییر شکل‌ها در نظر گرفته شود. بدین منظور قید رابطه (7) برای توابع اعوجاج در نظر گرفته می‌شود [11].

$$\int_s (\omega^T \psi) dx_2 dx_3 = 0 \quad (7)$$

در این رابطه s سطح مقطع تیر است و ψ به صورت رابطه (8) تعریف می‌شود.

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

توابع اعوجاج ویژگی ذاتی یک تیر خاص است و در نتیجه انتخاب سیستم مرجع تیر دلخواه می‌باشد. همچنین با توجه به صفر در نظر گرفتن انتگرال توابع اعوجاج روی سطح مقطع، میانگین اعوجاج روی سطح مقطع صفر می‌گردد.

انرژی کرنشی سطح مقطع با استفاده از رابطه (9) قابل بیان می‌باشد.

$$U = \frac{1}{2} \int_s G^T D G dx_2 dx_3 \quad (9)$$

در رابطه (9) D ماتریس سفتی مادی 6×6 اجزاء سطح مقطع است. مسئله سه بعدی الاستیسیته سازه تیر، مینیمم کردن تابعی (9) تحت قیدهای رابطه (7) جهت پیدا کردن توابع مجھول اعوجاج می‌باشد.

3 - کاهاش ابعاد مسئله

برای دستیابی به مدل تیر با حداکثر تشابه به مدل سه بعدی، با توجه به فرض $\epsilon \ll h/l \ll 1$ (ε پارامتر بزرگترین اندازه کرنش‌های یکبعدی کلاسیک و h اندازه مشخصه سطح مقطع و l مشخصه طول موج تغییر شکل در طول تیر) برای تیرها می‌توان تمامی توابع مجھول اعوجاج را بر اساس h و ϵ بسط داد. برای تیر بدون خمن و پیچش اولیه می‌توان تابع اعوجاج را از مرتبه ε در نظر گرفت [12]. در نتیجه دو ترم اول کرنش در رابطه (4) دارای مرتبه ε و ترم سوم از مرتبه $O(\epsilon h/l)$ می‌باشد.

جهت بررسی مسائل با هندسه و ماده ناهمسانگرد دلخواه، مینیمم کردن به صورت عددی انجام می‌شود که در اکثر کارهای انجام شده از روش المان-محدود برای این منظور استفاده می‌شود. در مقاله حاضر از روش ریلی-ریتز استفاده شده است و برای این منظور توابع اعوجاج به صورت رابطه (10) تفکیک می‌شود.

$$\omega_i(x_1, x_2, x_3) = N(x_2, x_3) V_i(x_1) \quad (10)$$

$$N = \{x_2^n x_3^m\}$$

در رابطه (10)، N دسته توابع حدسی روش ریلی-ریتز و V ماتریس ستونی مقادیر گرهای جابه‌جایی اعوجاج سطح مقطع می‌باشد. با قراردادن رابطه (10) در عبارت (9)، تخمین انرژی کرنشی سه بعدی با صرف نظر از ترم‌های مرتبه بالای h به فرم رابطه (11) مشابه مرجع [13] حاصل می‌گردد.

$$2U_0 = V^T D_{hh} V + 2V^T D_{h\epsilon} \epsilon + \epsilon^T D_{\epsilon\epsilon} \epsilon \quad (11)$$

برای تیر بدون خمن و پیچش اولیه و با صرف نظر از اثرات برش عرضی، تخمین انرژی در رابطه (11) با مرتبه صفر از h مناسب می‌باشد رابطه (12):

$$D_{hh} = \langle [G_h N]^T D [G_h N] \rangle \quad D_{h\epsilon} = \langle [G_h N]^T D G_\epsilon \rangle \quad D_{\epsilon\epsilon} = \langle G_\epsilon^T D G_\epsilon \rangle \quad (12)$$

و علامت ⟨ ⟩ به معنای انتگرال روی سطح مقطع مرجع می‌باشد.

$$r(x_1, x_2, x_3) = \bar{r}(x_1) + x_2 a_2 + x_3 a_3$$

$$R(x_1, x_2, x_3) = \bar{R}(x_1) + x_2 A_2(x_1) + x_3 A_3(x_1) + \omega_1(x_1, x_2, x_3) A_1(x_1) + \omega_2(x_1, x_2, x_3) A_2(x_1) + \omega_3(x_1, x_2, x_3) A_3(x_1) \quad (2)$$

مطابق شکل 1، \bar{r} و \bar{R} بردارهای مکان خط مرجع (عبوری از مرکز هندسی سطح مقطع) قبل و بعد از تغییر شکل می‌باشند. بردارهای یکه متعامد a_i مماس بر دستگاه مختصات x_i به صورت x_1 مؤلفه محوری تیر، x_2 و x_3 مؤلفه‌های سطح مقطع تعریف شده است. بردارهای متعامد a_i پس از تغییر شکل تیر، با دوران به A_i تبدیل می‌شود. ω_1 اعوجاج خارج صفحه و ω_2 و ω_3 دو اعوجاج داخل صفحه سطح مقطع در جهات x_2 و x_3 می‌باشند. در نتیجه با توجه به رابطه (2) تمام تغییر شکل‌های ممکن برای مقطع تیر در نظر گرفته شده است.

اجزای تانسور گرادیان تغییر شکل با استفاده از رابطه (3) بدست می‌آید [3].

$$F_{ij} = A_i \cdot P_k p^k \cdot a_j \quad (3)$$

در این رابطه $P_k = \frac{\partial R}{\partial x_k}$ بردار پایه پس از تغییر شکل و $p^k = a_k$ می‌باشد. طبق روابط بیان شده با انجام محاسبات لازم کرنش سه بعدی به فرم ماتریسی برای تیر بدون خمن و پیچش اولیه از رابطه (4) و (5) قابل محاسبه خواهد بود [12].

$$G = G_h \omega + G_\epsilon \epsilon + G_l \omega' \quad (4)$$

) جهت نمایش مشتق نسبت به مختصه x_1 می‌باشد که:

$$G = [G_{11} \quad 2G_{12} \quad 2G_{13} \quad G_{22} \quad 2G_{23} \quad G_{33}]^T$$

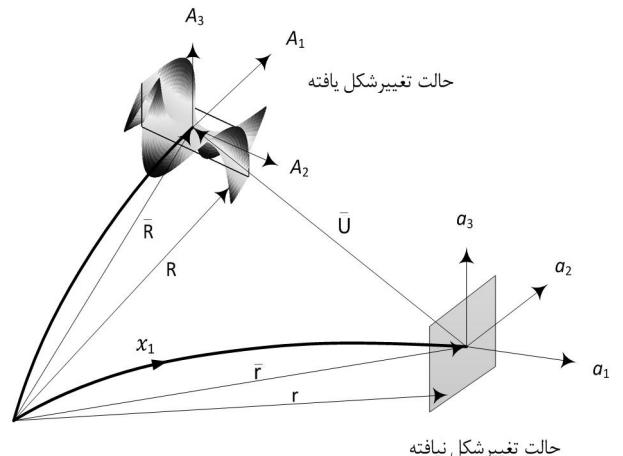
$$\omega = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3]^T$$

$$\epsilon = [\gamma_1 \quad \kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \kappa_3]^T \quad (5)$$

و ϵ کرنش یک بعدی کلاسیک بوده که γ_1 کرنش کششی، κ_1 کرنش پیچشی و κ_2 و κ_3 کرنش‌های خمشی در جهات x_2 و x_3 می‌باشند. همچنین سایر ماتریس‌های رابطه (4) در رابطه (6) ارائه شده است.

$$G_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \partial_2 & 0 & 0 \\ \partial_3 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & 0 & \partial_3 \end{bmatrix}, \quad G_\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_3 & -x_2 \\ 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_l = \begin{bmatrix} I_3 \\ 0_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$



شکل 1 قالب‌بندی تغییر شکل تیر

(21) مختصه x_1 است. در نتیجه رابطه انرژی و ماتریس سختی (K) به شکل (21) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{1}{2} \delta^T \int_e B^T C B \, dx_1 \delta \\ K &= \int_e B^T C B \, dx_1 \end{aligned} \quad (21)$$

معادلات جابه‌جایی-کرنش خطی از رابطه (22) بدست می‌آید [15].

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= u' \\ \kappa_1 &= \varphi_{x_1}', \quad \kappa_2 = \varphi_{x_2}', \quad \kappa_3 = \varphi_{x_3}' \end{aligned} \quad (22)$$

5- نتایج و بحث
در این بخش با ارائه مثال‌هایی، روش تحلیل سطح مقطع و تئوری یکبعدی تیر بررسی می‌شود. کدها در نرم‌افزار متلب تهیه شده و نتایج با نرم‌افزار آباکوس، روش‌های تحلیلی و تجربی سایر مراجع مقایسه می‌شود. در این مقاله تیرهای کامپوزیتی در دو دسته نامتقارن و متقارن بررسی می‌شوند. ویژگی‌های مادی تکلایه‌های کامپوزیتی به ضخامت ۰/۱۲۷ mm مطابق با جدول ۱ و ابعاد تیرها مطابق جدول ۲ در نظر گرفته شده است. با توجه به انتخاب دستگاه محورهای محلی روی دیواره‌ها مطابق شکل ۲ زوایای لایه‌چینی دیواره‌ها در جدول ۳ ارائه شده است.

در این گام، مسئله پیش‌رو مینیمم‌سازی عددی عبارت (11) تحت قيدهای (7) می‌باشد. با اعمال قيدهای لازم، نتیجه نهایی به فرم رابطه (13) قابل بیان می‌باشد.

$$V = \hat{V}_0 \epsilon = V_0 \quad (13)$$

انرژی کرنشی یکبعدی تا مرتبه (ε^2) با جایگذاری رابطه (13) در (11)، تحت قيدهای مسئله از رابطه (14) بدست می‌آید.

$$2U_0 = \epsilon^T (\hat{V}_0^T D_{h\varepsilon} + D_{\varepsilon\varepsilon}) \epsilon \quad (14)$$

در نتیجه انرژی کرنشی سطح مقطع تیر به صورت رابطه (15) قابل بازآرایی است.

$$2U = \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

با دستیابی به ماتریس C موجود در رابطه (15) ویژگی‌های سطح مقطع تیر حاصل شده و به کمک تئوری‌های یکبعدی تیر می‌توان به تحلیل تیر پرداخت. پس از تحلیل یکبعدی تیر و دستیابی به تغییر شکل‌ها و کرنش‌ها، می‌توان توابع اعوجاج را از طریق روابط بیان شده بدست آورد. در نتیجه با استفاده از توابع اعوجاج داخل و خارج صفحه تغییر شکل و حل سهبعدی تیر حاصل می‌شود.

4- یکبعدی تیر

با استفاده از انرژی کرنشی بر واحد طول، تئوری یکبعدی تیر ارائه می‌شود [14]. در این تئوری از نتایج تحلیل سطح مقطع با خروجی عبارت انرژی کرنشی یکبعدی به صورت تابعی از متغیرهای کرنش یکبعدی در بخش ۳ استفاده می‌شود. رابطه انرژی کرنشی تیر یکبعدی با انتگرال روی المان (e) از رابطه (16) محاسبه می‌شود.

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \int_e \epsilon^T C \epsilon \, dx_1 \quad (16)$$

توابع تغییرشکل مورد استفاده به صورت روابط (17) می‌باشند.

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 \\ v &= \alpha_3 + \alpha_4 x_1 + \alpha_5 x_1^2 + \alpha_6 x_1^3 \\ w &= \alpha_7 + \alpha_8 x_1 + \alpha_9 x_1^2 + \alpha_{10} x_1^3 \\ \varphi_{x_1} &= \alpha_{11} + \alpha_{12} x_1 \\ \varphi_{x_2} &= -\alpha_8 - 2\alpha_9 x_1 - 3\alpha_{10} x_1^2 \\ \varphi_{x_3} &= \alpha_4 + 2\alpha_5 x_1 + 3\alpha_6 x_1^2 \end{aligned} \quad (17)$$

که u ، v و w متغیرهای جابه‌جایی و φ_{x_1} و φ_{x_2} و φ_{x_3} تغییر زاویه مقطع در راستای محورهای x_1 ، x_2 و x_3 در پیوست می‌باشند. ماتریس ضرایب α در رابطه (18) بیان شده است.

$$\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{12}]^T \quad (18)$$

ماتریس درجات آزادی المان δ طبق شکل ۱-۲ پیوست به صورت رابطه (19) در نظر گرفته می‌شود.

$$\delta = [u^i \ v^i \ w^i \ \varphi_{x_1}^i \ \varphi_{x_2}^i \ \varphi_{x_3}^i \ u^j \ v^j \ w^j \ \varphi_{x_1}^j \ \varphi_{x_2}^j \ \varphi_{x_3}^j]^T \quad (19)$$

با تعریف ماتریس T ، S و B کرنش بر اساس ماتریس درجات آزادی بیان می‌شود (رابطه (20)).

$$\delta = T \alpha \quad (20)$$

$$\epsilon = S \alpha$$

$$\epsilon = S T^{-1} \delta = B \delta$$

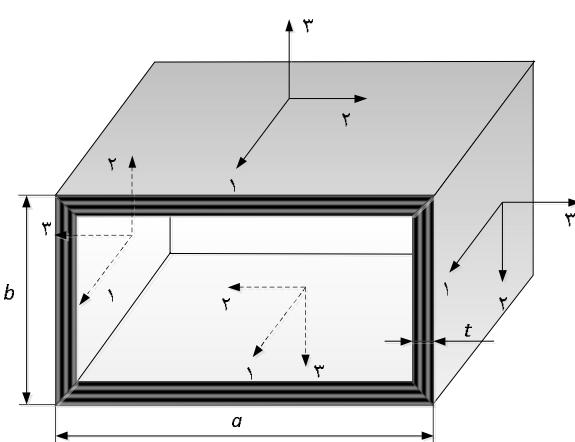
ماتریس 12×12 تابع مختصات گره‌ای المان و ماتریس 4×12 تابع

جدول 1 ویژگی مادی تکلایدها [13]

قطعه متقارن	قطعه نامتقارن	
142 GPa	142 GPa	E_{11}
9/8 GPa	9/8 GPa	$E_{22}=E_{33}$
6/0 GPa	6/0 GPa	$G_{12}=G_{13}$
4/8 GPa	4/8 GPa	G_{23}
0/42	0/3	$V_{12}=V_{13}$
0/42	0/34	V_{23}

جدول 2 ابعاد مقطع تیر کامپوزیت

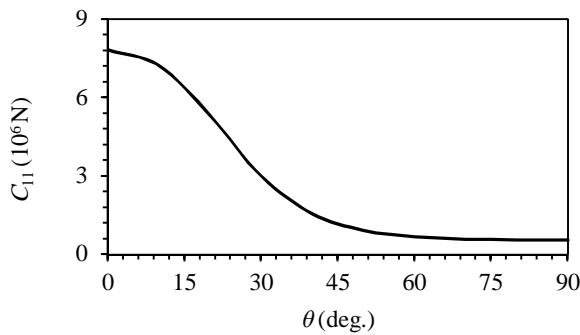
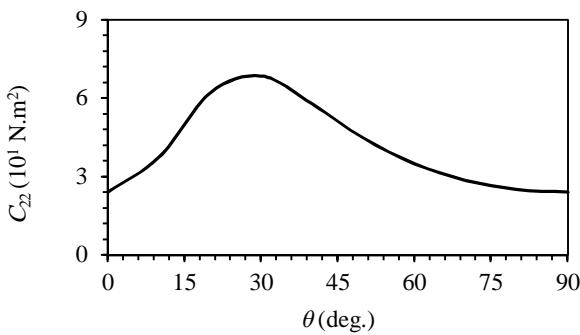
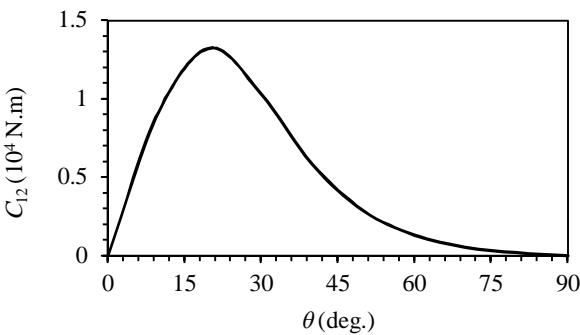
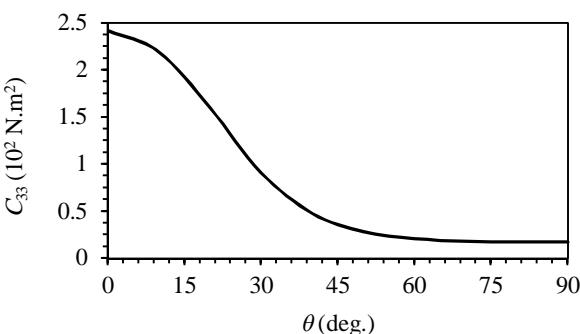
ضخامت دیواره	ارتفاع بیرونی	عرض بیرونی
$t=0/762$ mm	$b=13/46$ mm	$a=24/20$ mm



شکل 2 تیر قوطی کامپوزیت و دستگاه‌های محلی دیواره‌ها

جدول 3 لایه‌چینی مقطع تیر

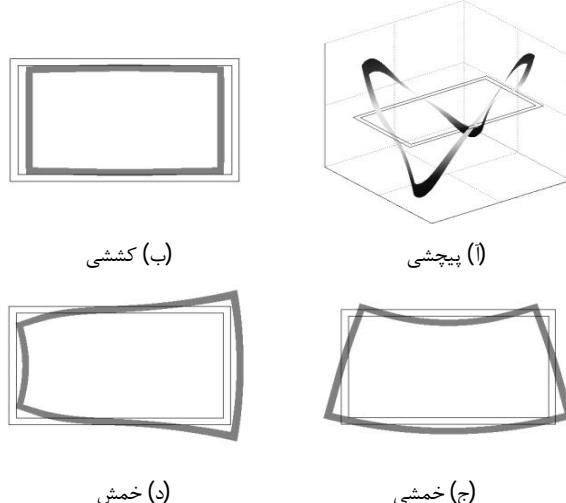
قطعه	نمتر	نمتر	نمتر	نمتر
دیواره چپ	دیواره راست	دیواره بالا	دیواره پایین	دیواره چپ
$[\theta]_6$	$[\theta]_6$	$[\theta]_6$	$[\theta]_6$	$[\theta]_6$

شکل 4 تغییرات سفتی کششی مقطع نامتنازن با تغییر زاویه θ شکل 5 تغییرات سفتی پیچشی مقطع نامتنازن با تغییر زاویه θ شکل 6 تغییرات سفتی کوبل کششی-پیچشی مقطع نامتنازن با تغییر زاویه θ شکل 7 تغییرات سفتی خمشی مقطع نامتنازن با تغییر زاویه θ

با توجه به شکل‌های 4 و 7 برای مقطع نامتنازن، سفتی‌های کششی و خمشی دارای تغییرات قابل ملاحظه در محدوده زاویه لایه‌چینی ۱۰ تا ۴۰ درجه بوده و خارج این محدوده زاویه چیدمان اثر کمتری بر این سفتی‌ها دارد. طبق شکل‌های 5 و 6 در حدود زاویه ۳۰ درجه، حداکثر سفتی پیچشی و حدود زاویه ۲۰ درجه حداکثر سفتی کوبل کشش-پیچش اتفاق می‌افتد. بررسی دقیق تغییرات سفتی سطح مقطع بر حسب لایه‌چینی‌های مختلف و یافتن طراحی بهینه در کاربرد مورد نظر، حائز اهمیت فراوان می‌باشد.

در شکل 3، شکل توابع اعوجاج برای سطح مقطع قوطی کامپوزیت نامتنازن با استفاده از روش پیش‌رو رسم شده‌اند. اعوجاج‌های مقطع در اثر کرنش پیچشی (آ)، کرنش کششی (ب)، کرنش خمشی در جهت ۲ (ج) و ۳ (د) می‌باشند. در جدول‌های ۴ و ۵ به ترتیب مقادیر سفتی مقطع‌های تیر قوطی کامپوزیت نامتنازن و متقاضی با زاویه لایه‌چینی $\theta=15^\circ$ محاسبه شده به روش حاضر و با مراجعهای [11] و [13] مقایسه شده است. میزان خطای از طریق رابطه $(100 \times \text{مراجع} / \text{روش حاضر})$ محاسبه شده است.

شکل‌های 4 تا 7 به ترتیب تغییرات سفتی‌های کششی، پیچشی، کوبل کششی-پیچشی و خمشی تیر قوطی با مقطع نامتنازن با تغییر زاویه لایه‌چینی θ را نشان می‌دهد. بررسی تغییرات سفتی کوبل کششی-پیچشی ایجاد شده در مقطع نامتنازن با توجه به مقادیر سایر سفتی‌ها می‌تواند در روند پاسخ‌های تیر قوطی از قبیل مدل‌سازی پایداری سازه مورد توجه باشد.



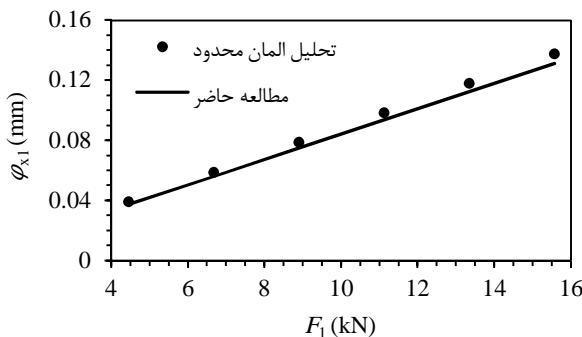
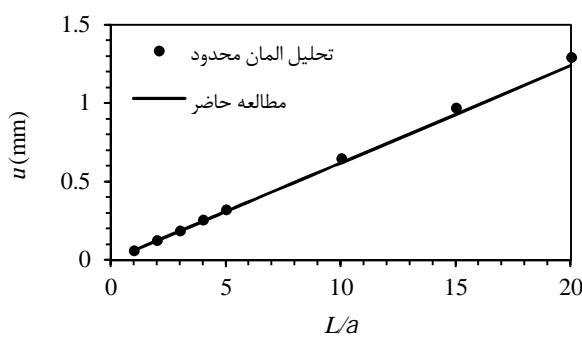
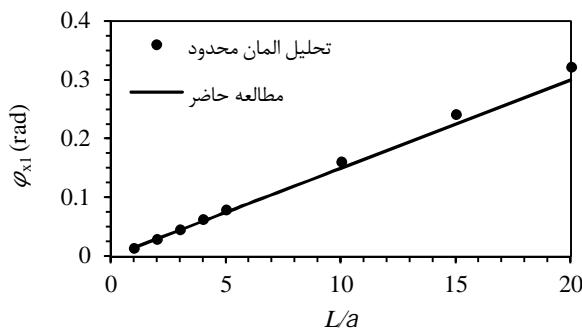
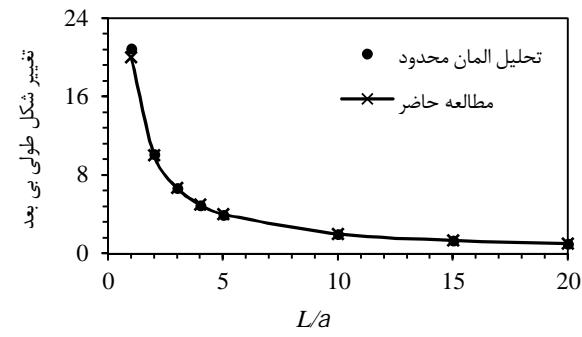
شکل 3 شکل توابع اعوجاج برای سطح مقطع قوطی کامپوزیت نامتنازن

جدول 4 اجزاء ماتریس سفتی مقطع قوطی کامپوزیت نامتنازن با زاویه $\theta=15^\circ$

سفتی‌های غیرصفر (%)	میزان خطای (%)	[11]	روش حاضر
0/4	6/39×10 ⁶	6/42×10 ⁶	$C_{11}(N)$
8/9	1/12×10 ⁴	1/22×10 ⁴	$C_{12}(N.m)$
4/5	4/82×10 ¹	5/04×10 ¹	$C_{22}(N.m^2)$
1/5	1/90×10 ²	1/93×10 ²	$C_{33}(N.m^2)$
3/1	4/95×10 ²	4/80×10 ²	$C_{44}(N.m^2)$

جدول 5 اجزاء ماتریس سفتی مقطع قوطی کامپوزیت متقارن با زاویه $\theta=15^\circ$

سفتی‌های غیرصفر (%)	میزان خطای (%)	[13]	روش حاضر
4/7	6/09×10 ⁵	5/80×10 ⁵	$C_{11}(N)$
3/9	4/88×10 ¹	5/08×10 ¹	$C_{22}(N.m^2)$
2/3	5/05×10 ¹	5/17×10 ¹	$C_{23}(N.m^2)$
22/5	-1/00	-0/775	$C_{24}(N.m^2)$
1/7	1/70×10 ²	1/73×10 ²	$C_{33}(N.m^2)$
35/5	-1/06	-0/683	$C_{34}(N.m^2)$
7/5	5/05×10 ²	4/67×10 ²	$C_{44}(N.m^2)$

شکل 10 پیچش انتهای تیر نامتقارن و $\theta = 15^\circ$ تحت بارهای کششی مختلفشکل 11 خیز طولی انتهای تیر نامتقارن و $\theta = 15^\circ$ با طولهای مختلفشکل 12 پیچش انتهای تیر نامتقارن و $\theta = 15^\circ$ با طولهای مختلفشکل 13 تغییر شکل طولی بی بعد انتهای تیر نامتقارن و $\theta = 15^\circ$ با طولهای مختلف

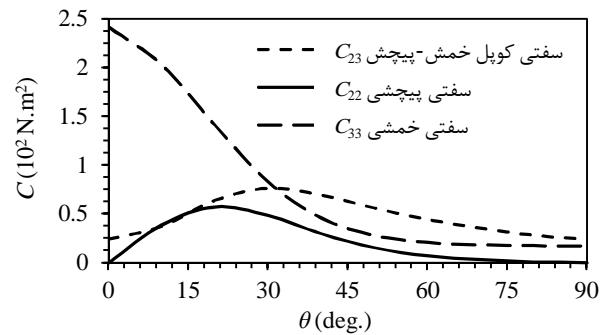
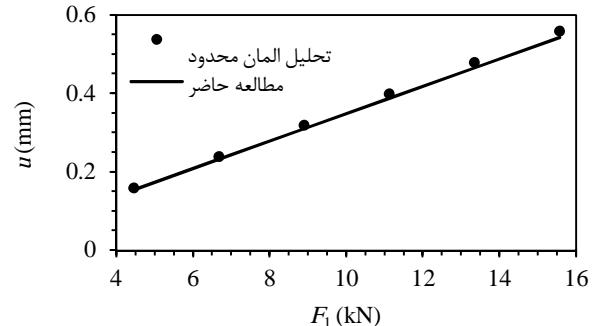
در شکل های 14 و 15 به ترتیب تغییر شکل طولی و پیچشی انتهای تیر نامتقارن با نسبت طولی 5 و بار کششی 8/9 kN در انتهای، برای زوایای لایه-چینی مختلف ارائه شده است. طبق شکل 15 در نزدیک زاویه چیدمان 30 درجه، بیشترین زاویه پیچشی و همچنین خطأ انفاق می افتد. در شکل های 16 و 17 برای تیر نامتقارن و $\theta = 15^\circ$ و طول 0/762 m به ترتیب تحت بار کششی N 4/5 و پیچشی N.m 0/11 در طول تیر با

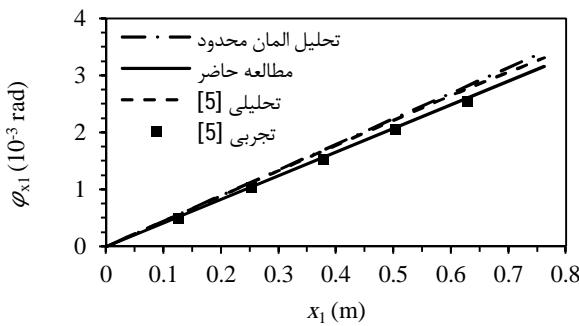
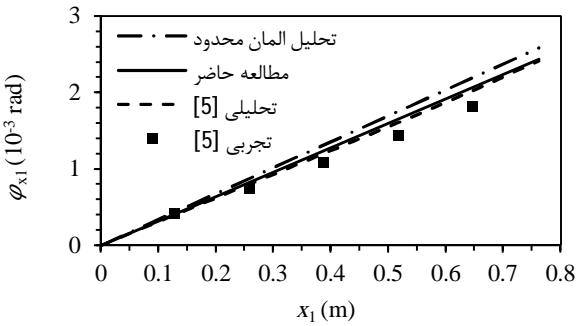
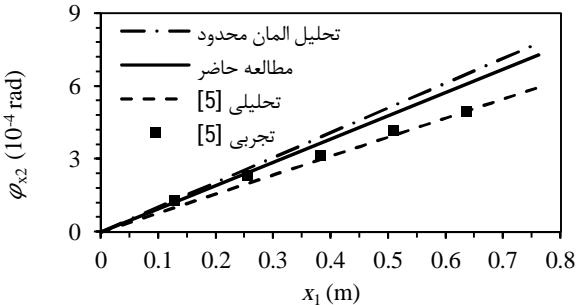
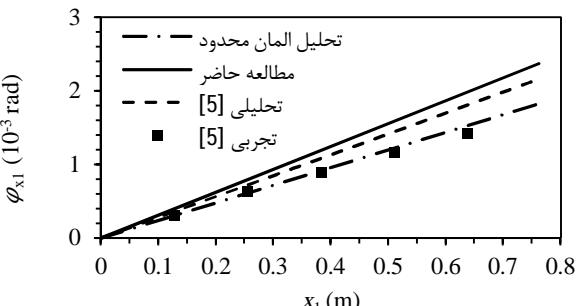
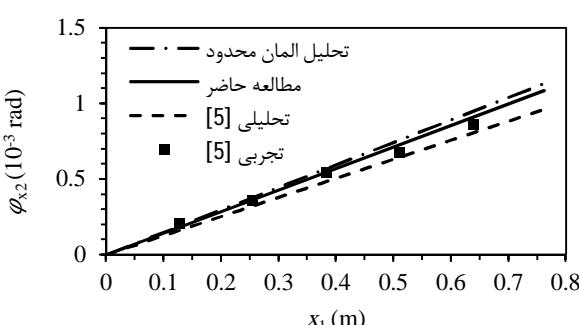
باشد. این بهینه سازی باید با توجه به تغییرات سایر سفتی ها و کاربرد سازه صورت گیرد.

با توجه به ایجاد کوپل خمشی-پیچشی در مقطع متقارن، شکل 8 تغییرات سفتی های خمشی، پیچشی و کوپل خمشی-پیچشی را با تغییر زاویه لایه-چینی θ نشان داده است. با توجه به شکل 8، مقطع متقارن مورد بررسی در زوایای چیدمان حدود 15 درجه دارای سفتی کوپل خمشی-پیچشی با بزرگی مشابه سفتی پیچشی است. این ویژگی می تواند برای پایداری آنرا الاستیسیته بال هواپیما مورد بهره برداری قرار گیرد. همچنین مقطع در این ناحیه دارای سفتی خمشی قابل ملاحظه ای می باشد.

برای تیر یکسر گیردار با مقطع نامتقارن، زاویه چیدمان $\theta = 15^\circ$ و طول $L = 5a$ تحت تأثیر بار کششی در انتهای، جایه جایی طولی و زاویه پیچشی انتهای تیر به ترتیب در شکل های 9 و 10 با تغییر نیروی کششی نشان داده شده است. مقادیر حاصل از روش حاضر با نتایج مدل سه بعدی در نرم افزار آباکوس مقایسه شده است. مثالی از مدل سازی در نرم افزار آباکوس در پیوست ارائه شده (شکل 1-آ) که المان های مورد استفاده از نوع C3D8R بوده و دارای 8 گره است و خطی می باشد. جایه جایی های یک بعدی با میانگین گیری از نتایج سه بعدی در مقطع قابل دستیابی است. با توجه به زمان بر بودن تحلیل المان محدود سه بعدی برای تیرهای بلند مورد مطالعه، با بررسی حساسیت به تعداد المان ها، از حداقل تعداد شبکه ممکن در مدل سازی استفاده شده است.

برای تیر نامتقارن و $\theta = 15^\circ$ با نسبت های طولی (L/a) مختلف تحت بار کششی 8/9 kN تغییر شکل طولی و زاویه پیچشی انتهای تیر به ترتیب در شکل های 11 و 12 ارائه و با نتایج نرم افزار آباکوس مقایسه شده است. با بی بعد سازی تغییر شکل طولی انتهای تیرها نسبت به جایه جایی تیر با بزرگترین طول، شکل 13 حاصل می شود که بیان گر مبہود تقریب با افزایش طول و نزدیک شدن به فرضیات تئوری تیر است.

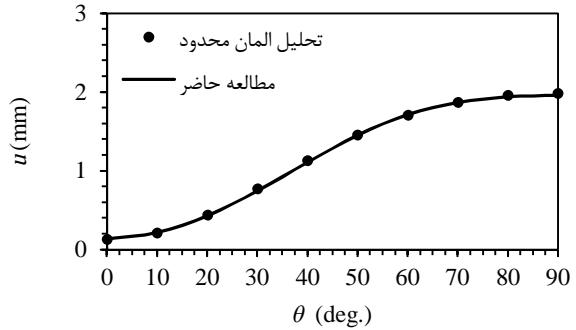
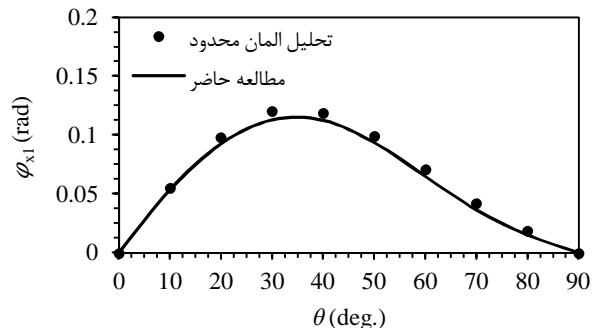
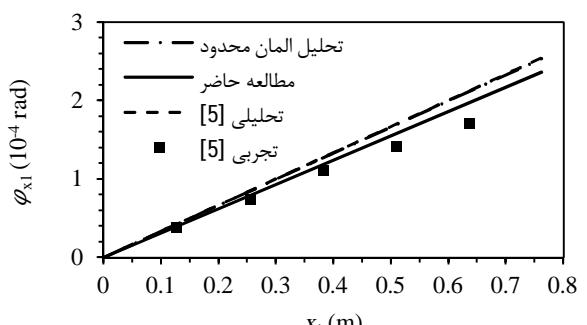
شکل 8 تغییرات سفتی خمشی، پیچشی و کوپل خمشی-پیچشی مقطع متقارن با تغییر زاویه θ شکل 9 خیز طولی انتهای تیر نامتقارن و $\theta = 15^\circ$ تحت بارهای کششی مختلف

شکل 17 پیچش در طول تیر نامتقارن و $\theta=15^\circ$ تحت بار پیچشیشکل 18 پیچش در طول تیر متقاضن و $\theta=15^\circ$ تحت بار پیچشیشکل 19 زاویه خمی در طول تیر نامتقارن و $\theta=15^\circ$ تحت بار پیچشیشکل 20 پیچش در طول تیر متقاضن و $\theta=45^\circ$ تحت بار پیچشیشکل 21 زاویه خمی در طول تیر نامتقارن و $\theta=45^\circ$ تحت بار پیچشی

نتایج تحلیلی و تجربی مرجع [5] و همچنین مدل المان محدود آباکوس مقایسه شده است. مرجع [5] از حلی تحلیلی جهت محاسبه سفتی‌های مقطع تیرهای جدارنازک کامپوزیتی استفاده می‌کند. مدل‌های تحلیلی مشابه [5] عموماً برای مقاطع جدارنازک مطرح شده و دارای فرضیات ساده‌سازی سینماتیکی و یا تنش و کرنش صفحه‌ای می‌باشند. در این دسته از تئوری‌ها در تحلیل سطح مقطع از مدل لایه‌های کامپوزیتی استفاده می‌شود. در عین حال روش‌های عددی حل مقطع مانند مراجع [13-11] دارای فرضیات ساده‌سازی و محدودیت هندسه مقطع در روش‌های تحلیلی نمی‌باشند. مطالعه حاضر با ارائه فرمول‌سازی مشابه مراجع [13-11] و بدون محدودیت‌های بیان شده مرجع [5] حلی تحلیلی از تیر کامپوزیتی ارائه می‌دهد.

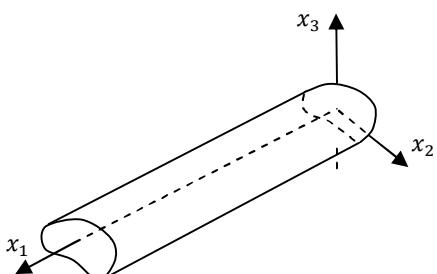
بر اساس شکل‌های 16 و 17 نتایج مطالعه حاضر برای مقطع با چیدمان نامتقارن همگرایی مناسبتری با نتایج تجربی نسبت به سایر روش‌های مقایسه شده نشان می‌دهد.

در شکل‌های 18 و 19 به ترتیب زوایای پیچشی و خمی در طول تیر متقاضن برای زاویه لایه‌چینی 15 درجه با طول 0/762 m و در شکل‌های 20 و 21 برای زاویه لایه‌چینی 45 درجه، تحت بار پیچشی 0/11 N.m نشان داده شده است.

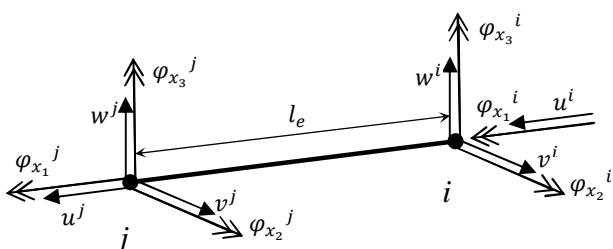
شکل 14 تغییرات خیز طولی انتهای تیر نامتقارن با تغییر زاویه لایه‌چینی θ شکل 15 تغییرات پیچش انتهای تیر نامتقارن با تغییر زاویه لایه‌چینی θ شکل 16 پیچش در طول تیر نامتقارن و $\theta=15^\circ$ تحت بار کششی

- [8] V. V. Volovoi, D. H. Hodges, Theory of anisotropic thin-walled beams, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 67, No. 3, pp. 453-459, 2000.
- [9] M. Borri, G. L. Ghiringhelli, T. Merlini, Linear analysis of naturally curved and twisted anisotropic beams, *Composites Engineering*, Vol. 2, No. 5-7, pp. 433-456, 1992.
- [10] W. Yu, V. V. Volovoi, D. H. Hodges, X. Hong, Validation of the variational asymptotic beam sectional analysis, *AIAA Journal*, Vol. 40, pp. 2105-2112, 2002.
- [11] W. Yu, D. H. Hodges, J. C. Ho, Variational asymptotic beam sectional analysis - An updated version, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 59, pp. 40-64, 2012.
- [12] B. Popescu, D. H. Hodges, On asymptotically correct Timoshenko-like anisotropic beam theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 37, pp. 535-558, 1999.
- [13] W. Yu, D. H. Hodges, V. V. Volovoi, C. E. S. Cesnik, On Timoshenko-like modeling of initially curved and twisted composite beams, *Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 19, pp. 5101-5121, 2002.
- [14] A. H. Sheikh, O. T. Thomsen, An efficient beam element for the analysis of laminated composite beams of thin-walled open and closed cross sections, *Composite Science and Technology*, Vol. 68, pp. 2273-2281, 2008.
- [15] D. H. Hodges, A. R. Atilgan, M. V. Fulton, L. W. Rehfield, Free-vibration analysis of composite beams, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 36, No. 3, pp. 36-47, 1991.

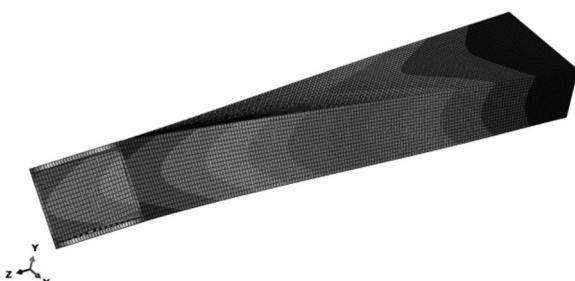
8- پیوست



شکل آ-1 مدل پک بعدی تیر



شکل آ-2 المان دو گره‌ای تیر با 12 درجه آزادی



شکل آ-3 مدل سه بعدی تیر قوطی کامپوزیت در آباکوس

با توجه به شکل‌های 18 تا 21، مشاهده می‌شود که روش حاضر برای مقطع متقارن، در زاویه چیدمان کوچکتر و برای پیچش انتهایی، همگرایی مناسب‌تری با نتایج تجربی نشان می‌دهد. همچنین می‌توان نتیجه گرفت روش حاضر دقیق‌تر برای مقاطع نامتقارن ارائه می‌دهد.

6- نتیجه‌گیری

استفاده از تئوری‌های کلاسیک جهت تحلیل تیرهای کامپوزیت که سازه‌های با اهمیت مهندسی و جزء اصلی سازه‌های هواپضا است، به علت در نظر نگرفتن اثرات غیرکلاسیک چون اعوجاج‌ها و کوپلهای مادی غیر قابل اعتماد می‌باشد. از طرف دیگر تحلیل سه‌بعدی این سازه‌ها با توجه به کم اهمیت بودن ابعاد سطح مقطع در مقایسه با طول تیر و صرف هزینه وقت زیاد مناسب نیست. مطالعه حاضر نشان دهنده امکان تفکیک مسئله الاستیسیته سه‌بعدی است. همچنین مطالعه پیش‌رو با پیشنهاد استفاده از روش ریلی-ریتز با توابع چندجمله‌ای ساده در مقابل حل المان محدود سطح مقطع روش‌های مشابه، از روندی ساده جهت اعمال برای تیرهای مختلف کامپوزیتی برخودار است. روش‌های تحلیلی متداول محاسبه سفتی‌های مقطع تیر کامپوزیتی مانند مراجع [۴,۵] دارای فرضیات ساده‌سازی سینماتیکی و محدودیت در هندسه مقطع می‌باشند اما مطالعه پیش‌رو بدون محدودیت‌های مدل‌های بیان شده، روشی تحلیلی جهت محاسبه سفتی‌های مقطع تیر کامپوزیتی ارائه می‌دهد. توابع چندجمله‌ای مورد استفاده در این مقاله نتایج مناسب‌تری برای مقطع قوطی نامتقارن مستطیلی ارائه می‌دهد و جهت دستیابی به دقت‌های بالاتر امکان بررسی و استفاده از توابع حدسی مختلف فراهم است. بررسی توابع اعوجاج درک دقیق‌تری نسبت به واقعیت تغییر شکل سه‌بعدی تیر در عین عدم تحلیل سه‌بعدی پیچیده فراهم می‌سازد. همچنین با ترکیب نتایج تحلیل سطح مقطع و طول تیر امکان دستیابی به نتایج سه‌بعدی فراهم می‌شود. با توجه به سرعت بالای حل در روش پیش‌رو با استفاده از نتایج ارائه شده تغییر سفتی‌های مقطع با تغییر زاویه فایبر و چیدمان لایه‌ها، امکان بهینه‌سازی تیر کامپوزیتی به سادگی فراهم می‌باشد. مقایسه نتایج تغییر شکل استاتیک تیر یکسرگیردار قوطی کامپوزیتی با مدل سه‌بعدی المان محدود در نرم‌افزار آباکوس، نتایج تجربی و سایر تئوری‌ها همگرایی مناسبی نشان می‌دهد.

7- مراجع

- W. Yu, D. H. Hodges, Generalized Timoshenko theory of the variational asymptotic beam sectional analysis, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 50, No. 1, pp. 46-55, 2005.
- M. Darvizeh, A. Darvizeh, R. Ansari, A. Alijani, One- and two-dimensional analysis of large deformations of beams using continuum mechanics theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 4, pp. 33-40, 2011. (In Persian)
- D. A. Danielson, D. H. Hodges, Nonlinear beam kinematics by decomposition of the rotation tensor, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, pp. 258-262, 1987.
- E. C. Smith, I. Chopra, Formulation and evaluation of an analytical model for composite box-beams, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 36, No. 3, pp. 23-35, 1990.
- R. Chandra, A. D. Stemple, I. Chopra, Thin-walled composite beam under bending, torsional and extensional loads, *Journal of Aircraft*, Vol. 27, No. 7, pp. 619-626, 1990.
- C. Kim, S. R. White, Thick-walled composite beam theory including 3D elastic effects and torsional warping, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, No. 31-32, pp. 4237-4259, 1997.
- V. L. Berdichevsky, On the energy of an elastic rod, *PMM*, Vol. 45, pp. 518-529, 1982.