



بررسی ارتعاشات غیر خطی میکرو تیر منحنی تحت تحریک الکترواستاتیک با استفاده از مدل کاهش مرتبه و شبیه سازی اجزای محدود

محمد رضا صالحی کلاهی¹، حسین معین خواه^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان

* زاهدان، صندوق پستی 98155-987، hmoein@eng.usb.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 18 مهر 1396

پذیرش: 14 آذر 1396

ارائه در سایت: 01 دی 1396

کلید واژگان:

سیستم های میکروالکترومکانیکی

میکرو تیر منحنی

دوپایا

مدل کاهش مرتبه

کامسول مولتی فیزیکس

چکیده

در این مقاله به بررسی رفتار دینامیکی و ارتعاشات غیر خطی یک میکرو تیر دو سرگیردار با شکل اولیه منحنی و تحت تحریک الکترواستاتیک پله پرداخته شده است. میکرو تیرهای منحنی تحت بارگذاری عرضی، ممکن است دو حالت پایدار را از خود نشان دهند و این ویژگی اساس پیدایش سیستم های میکروالکترومکانیکی دوپایا می باشد. معادلات حرکت با استفاده از روش انرژی و اصل همبستگی استخراج شده و سپس با استفاده از پارامترهای بی بعد سازی مناسب، در فرم بی بعد نوشته شده است. با استفاده از یک مدل کاهش مرتبه بر مبنای روش گالرکین، معادله بی بعد به دست آمده گسسته سازی شده و به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و غیرخطی تبدیل شده است. روش رانگ-کوتا مرتبه چهار برای حل دستگاه معادلات به کار برده شده است. برای شبیه سازی اجزای محدود از نرم افزار کامسول مولتی فیزیکس استفاده شده است. در ادامه تأثیر پارامترهای مختلف نظیر پارامتر ولتاژ، میرایی، خیز اولیه نقطه میانی و طول گپ بر روی رفتار دینامیکی میکرو تیر بررسی شده است. نتایج نشان می دهد که با افزایش خیز اولیه نقطه میانی، ولتاژ بحرانی پولین کاهش می یابد. همچنین مشاهده شد که افزایش پارامتر میرایی از انتقال به دومین حالت پایدار جلوگیری می کند.

Non-linear vibration of curved microbeam under electrostatic actuation by using reduced order model and finite element simulation

Mohammad Reza Salehi Kolahi, Hossein Moeinkhah*

Department of Mechanical Engineering, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran

* P.O.B. 98155-987, hmoein@eng.usb.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 10 October 2017
Accepted 05 December 2017
Available Online 22 December 2017

Keywords:
Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)
Curved Microbeam
Bi-stable
Reduced Order Model
COMSOL Multiphysics

ABSTRACT

In this research, the dynamic behavior and nonlinear vibration of a clamped-clamped initially curved microbeam under electrostatic step actuation is investigated. The initially curved microbeams under transverse loading may exhibit two different stable states and this is the basis of the emergence of bi-stable micro electro mechanical systems (MEMS). The equation of motion is derived based on energy method and Hamiltonian principle, and re-written in non-dimensional form by using appropriate non-dimensional parameters. The resultant equation of motion in non-dimensional form is discretized and converts to a system of nonlinear ordinary differential equations by using a reduced order model based on the Galerkin procedure. Runge-kutta method of order four is employed to solve the resulting system of nonlinear ordinary differential equations. COMSOL Multiphysics software is used for finite element simulation. Then, the effect of various parameters including voltage parameter, damping, initial midpoint elevation and gap length is investigated. It is concluded that the critical voltage of pull-in is decreased by increasing of the initial midpoint elevation. Also The results depict that by increasing of the damping parameter, the possibility of transition between two stable states is eliminated.

1- مقدمه

اصلی کاربرد دارد [2]. یکی از ساختارهای موجود در این سیستم ها، استفاده از میکرو تیر تخت به عنوان الکترو د متحرک بوده که توسط یک فضای دی الکتریک از الکترو د ثابت جدا می شود [3، 4]. اعمال ولتاژ بین دو الکترو د منجر به ایجاد فشار کولمب² (فشار الکترواستاتیک) بر روی الکترو دها و در نتیجه تغییر شکل الکترو د متحرک می گردد. با رسیدن ولتاژ به یک مقدار

امروزه سیستم های میکرو الکترومکانیکی¹ با ویژگی های منحصر به فرد خود نظیر اندازه کوچک، دقت بالا و توان مصرفی پایین مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته اند [1]. در اکثر سیستم های میکروالکترومکانیکی سیلیکون به دلیل داشتن خواص مکانیکی و فیزیکی مناسب به عنوان ماده

² Coulomb Pressure

¹ Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)

Please cite this article using:

M. R. Salehi Kolahi, H. Moeinkhah, Non-linear vibration of curved microbeam under electrostatic actuation by using reduced order model and finite element simulation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 12, pp. 514-522, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. R. Salehi Kolahi, H. Moeinkhah, Non-linear vibration of curved microbeam under electrostatic actuation by using reduced order model and finite element simulation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 12, pp. 514-522, 2018 (in Persian)

هارمونیک تحریک کرده بودند، نتیجه گرفتند که مدل کاهش مرتبه^۱ با یک درجه آزادی برای پیش‌بینی پاسخ میکروتر به تحریک قابل قبول می‌باشد [20]. مدینا و همکاران با استفاده از مدل کاهش مرتبه، به تحلیل رفتار الکترواستاتیکی میکروتر با شکل منحنی ناشی از کماتش پرداختند [21]. در سال 2017 تجدیدیان فر و همکاران از آنالیز هموتوبی برای یافتن حل تحلیلی- تقریبی برای پاسخ فرکانسی میکروترهای تخت و منحنی استفاده کردند [22].

در مطالعه حاضر رفتار دینامیکی میکروتر منحنی دوسر گیردار، تحت تحریک الکترواستاتیک پله، بررسی شده است. مطالعات انجام شده نشان می‌دهند که بیشتر رفتار استاتیکی میکروتر منحنی مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به این‌که پدیده‌های اسنپ- ترو و پولین ذاتا پدیده‌هایی دینامیکی هستند، بنابراین تحلیل و شناسایی رفتار دینامیکی میکروترهای منحنی با توجه به کاربرد حساس آن‌ها در سیستم‌های میکرو اهمیت ویژه‌ای دارد. با استفاده از اصل همیلتون معادله دیفرانسیلی با مشتقات جزئی حرکت میکروتر به دست آمده است. از یک مدل کاهش مرتبه بر مبنای روش تجزیه گالرکین، برای گسسته سازی و تبدیل معادله حرکت به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و غیرخطی استفاده شده است. از روش‌های دیگری مانند آنالیز اغتشاش و یا حل عددی مستقیم نیز می‌توان برای حل معادله حرکت استفاده کرد، اما استفاده از این روش‌ها به دلیل طولانی بودن پروسه حل مقرون به صرفه نمی‌باشد. روش رانگ- کوتای مرتبه چهار برای حل دستگاه معادلات به کار برده شده است. برای شبیه‌سازی اجزای محدود از نرم‌افزار کامسول مولتی فیزیکس^۲ استفاده شده است. تا جایی که مطالعات نگارنده نشان می‌دهد، تا کنون برای تحلیل رفتار الکترواستاتیکی و الکترودینامیکی میکروترهای منحنی از نرم‌افزار کامسول استفاده نشده است. نرم‌افزار کامسول به دلیل چند منظوره بودن برای شبیه‌سازی و تحلیل پروژه‌های بین رشته‌ای مناسب می‌باشد.

در ادامه رفتار دینامیکی میکروتر به همراه تأثیر پارامترهای مختلف با رسم نمودارهای تاریخچه زمانی و فضای فاز نشان داده شده است. علاوه بر بررسی تغییر شکل، از شبیه‌سازی اجزای محدود برای محاسبه تنش و فرکانس‌های طبیعی نیز استفاده شده است. این پژوهش می‌تواند برای طراحی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی دوپایا مورد استفاده قرار گیرد.

2- مدل سازی

در این بخش یک میکروتر منشوری انعطاف‌پذیر و دارای شکل اولیه منحنی، به طول L و سطح مقطع مستطیلی A با پهنای b و ضخامت d مطابق با شکل 1 در نظر گرفته می‌شود. فرض ما بر این خواهد بود که میکروتر از جنس ماده‌ای همگن و همسانگرد با الاستیسیته خطی، مدول یانگ E و چگالی ρ ساخته شده باشد. از آنجایی که در میکروترها پهنای b از ضخامت d خیلی بزرگ‌تر است، می‌بایست از مدول یانگ مؤثر $\bar{E} = E/(1 - \nu^2)$ استفاده کرد (حالت کرنش صفحه‌ای). لازم به ذکر است که ν نسبت پواسون می‌باشد. همان‌طور که در شکل 1 مشاهده می‌شود، $\bar{w}_0$ شکل اولیه میکروتر ($\bar{e} = 0$)، $\bar{w}$ شکل میکروتر پس از بارگذاری، g_0 فاصله الکترو ثابت تا تکیه‌گاه میکروتر (گپ)، و $\bar{f}^e$ بار گسترده الکترواستاتیک ناشی از اعمال ولتاژ می‌باشد. علامت $(\cdot)$ نشان دهنده این است که کمیت مورد نظر دارای بعد می‌باشد.

معین نیروهای داخلی میکروتر از تعادل با فشار کولمب خارج شده و باعث می‌شوند که میکروتر به سمت الکترو ثابت کشیده شده (پدیده پولین^۱) و با آن تماس پیدا کند [5]. در سال‌های اخیر سیستم‌های الکترومکانیکی دوپایا که بر پایه میکروترهای منحنی پدیدار شده‌اند، به دلیل داشتن کاربردهای گوناگونی مانند حسگر، کلید نوری^۲، میکروشر^۳ و حافظه غیر فرار^۴ به طور فزاینده‌ای در کانون توجه قرار گرفته‌اند [6-8]. ساختارهای دوپایا ساختارهایی هستند که تحت بارگذاری عرضی یکسان ممکن است دو حالت پایدار از خود نشان دهند. به طور رایج انتقال بین دو حالت پایدار را اسنپ- ترو^۵ می‌گویند [9]. میکروترهای دوپایا لزوماً از بدو ساخت به شکل منحنی نیستند، شکل منحنی می‌تواند ناشی از بارگذاری محوری میکروتر تخت و در نتیجه کماتش آن نیز باشد [10]. یکی از مزیت‌های استفاده از میکروترهای دوپایا امکان استفاده بیش‌تر از فاصله بین الکترو ثابت و تکیه‌گاه میکروتر می‌باشد. میکروترهای دوپایا می‌توانند تا 84% این فاصله را بدون این‌که به سمت الکترو ثابت کشیده شوند، به خود اختصاص دهند. این در حالی است که این مقدار برای میکروترهای تخت حدود 75% می‌باشد [12,11].

مطالعات آزمایشگاهی و عددی گسترده‌ای برای بررسی رفتار الکترواستاتیکی و الکترودینامیکی میکروترهای تخت انجام شده است، و این در حالی است که کم‌تر به تحلیل رفتار میکروترهای منحنی پرداخته شده است.

پژوهش‌های انجام گرفته پیرامون بررسی رفتار الکترواستاتیکی و الکترودینامیکی میکروترهای منحنی نشان می‌دهند که، امکان گذار بین دو حالت پایدار به پارامترهایی چون میزان انحنای اولیه، ضخامت و شرایط مرزی وابسته می‌باشد [13]. پارک و ها با بررسی‌های تئوری نشان دادند که وجود دو حالت پایدار به تنش مانده محوری نیز بستگی دارد [14]. داس و باترا با استفاده از یک مدل اجزای محدود به این نتیجه دست یافتند که برای ولتاژهای زیاد امکان گذار بین دو حالت پایدار از بین می‌رود [15]. در سال 2010 کریلو و دیک با بررسی رفتار الکترودینامیکی میکروتر منحنی با میرایی ویسکوز، نشان دادند که میزان انحنای اولیه مورد نیاز برای گذار از حالت پایدار اولیه به ثانویه در بارگذاری دینامیکی نسبت به بارگذاری شبه استاتیکی بیش‌تر می‌باشد [16].

در سال 2008 کریلو و همکارانش نتایج تئوری و آزمایشگاهی پژوهش خودشان در زمینه تحلیل رفتار استاتیکی میکروترهای منحنی را منتشر کردند. تطابق خوبی بین نتایج تئوری و آزمایشگاهی این پژوهش مشاهده شد [11]. هو و همکاران با ارائه یک مدل که در آن تغییر شکل‌های غیر خطی نادیده گرفته شده بودند، به بررسی ناپایداری پولین در حالت استاتیکی پرداختند [17]. در سال 2012 مقیمی زند با استفاده از روش اجزای محدود به بررسی ناپایداری پولین برای میکروترهای منحنی در حالت دینامیکی و تحت تحریک ولتاژ پله پرداخت [18]. ساری و پاکدمیرلی پاسخ دینامیکی میکروتر منحنی بر روی بستر الاستیک و دارای شرایط مرزی غیر ایده‌آل را مورد بررسی قرار دادند. وجود تغییر شکل، شیب و یا گشتاور در تکیه‌گاه می‌تواند دلیل شرط مرزی غیر ایده‌آل باشد [19]. در سال 2013 رزیکنی و همکاران با تحلیل نمودارهای فازی و مطالعه پاسخ فرکانسی یک میکروتر تحت بارگذاری محوری، که آن را با استفاده از نیروی الکترواستاتیک

¹ Pull-in

² Optical Switch

³ Micro-valve

⁴ Non-volatile Memory

⁵ Snap-through

⁶ Reduced Order Model
⁷ COMSOL Multiphysics

$$+ \frac{\bar{E}A}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right)^2 d\bar{x} \quad (4)$$

که I_{yy} ممان دوم سطح و $\bar{u}$ جابه‌جایی در راستای محور $\bar{x}$ می‌باشد.

3-3- کار نیروی خارجی

نیروی خارجی در واقع همان بار گسترده الکترواستاتیک $\bar{f}^e$ می‌باشد. کار این نیرو در رابطه (5) نشان داده شده است.

$$W_e = \int_0^L -\bar{f}^e (\bar{w} - \bar{w}_0) d\bar{x} \quad (5)$$

3-4- معادله حرکت

با جایگذاری روابط (3) و (4) و (5) در رابطه (2) و با لحاظ کردن اثر میرایی ویسکوز رابطه (6) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \left\{ \frac{\bar{E}I_{yy}}{2} \int_0^L 2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2} \right) d\bar{x} d\bar{t} \right. \\ & + \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \left\{ \frac{\bar{E}A}{2} \int_0^L 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right) \delta \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right) d\bar{x} d\bar{t} \right. \\ & - \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \left\{ \frac{1}{2} \rho A \int_0^L 2 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \right) \delta \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \right) d\bar{x} d\bar{t} + \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \left\{ \bar{c} \int_0^L \delta \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \right) d\bar{x} d\bar{t} \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \left\{ \int_0^L -\bar{f}^e \delta (\bar{w} - \bar{w}_0) d\bar{x} \right\} d\bar{t} = 0 \right. \right. \end{aligned} \quad (6)$$

حال با استفاده از انتگرال جزء به جزء رابطه (6) ساده شده و معادلات حاکم بر رفتار میکروتر به شکل روابط (7,8) حاصل می‌شوند [23].

$$-\bar{E}A \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right) = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \bar{c} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \bar{E}I_{yy} \left(\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} - \frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^4} \right) \\ & - \bar{E}A \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{f}^e = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

این امکان وجود دارد که روابط (7) و (8) را به صورت یک رابطه مجزا نوشت. رابطه (7) نشان می‌دهد که کرنش ناشی از کشیدگی صفحه میانی فقط تابعی از زمان می‌باشد، بنابراین می‌توان از آن نسبت به $\bar{x}$ انتگرال گرفت. با انتگرال‌گیری از رابطه (7)، رابطه (9) بدست می‌آید.

$$\varepsilon_x(\bar{t}) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \quad (9)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (9) در طول میکروتر رابطه (10) حاصل می‌شود.

$$\varepsilon_x(\bar{t}) = \frac{1}{L} (\bar{u}(L, \bar{t}) - \bar{u}(0, \bar{t})) + \frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] d\bar{x} \quad (10)$$

با توجه به این‌که میکروتر دو سرگیردار می‌باشد بنابراین $\bar{u}$ در نقاط ابتدایی و انتهایی در هر لحظه، برابر صفر می‌باشد.

$$\varepsilon_x(\bar{t}) = \frac{1}{2L} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] d\bar{x} \quad (11)$$

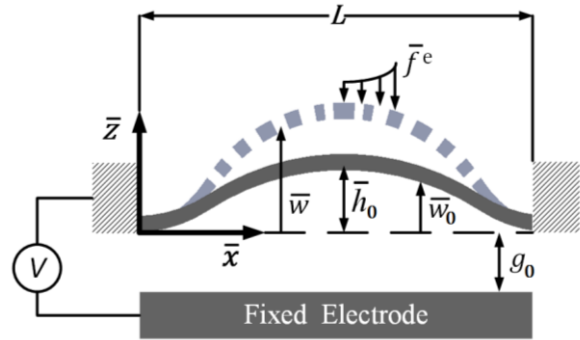


Fig. 1 Schematic model of curved microbeam under electrostatic actuation

شکل 1 مدل شماتیک میکروتر منحنی تحت تحریک الکترواستاتیک

رابطه (1) شکل اولیه میکروتر را توصیف می‌کند.

$$\bar{w}_0(\bar{x}) = \bar{w}(\bar{x}, 0) = \bar{h}_0 z_0(\bar{x}) \quad (1)$$

که $\bar{h}_0$ خیز اولیه نقطه میانی میکروتر نسبت به نقاط انتهایی، و z_0 یک تابع بدون بعد بوده و به گونه‌ای انتخاب می‌شود که $\max_{0 \leq \bar{x} \leq L} [Z_0(\bar{x})] = 1$ باشد. لازم به ذکر است که جابه‌جایی عرضی هر نقطه از میکروتر برابر $\bar{w} - \bar{w}_0$ می‌باشد. با فرض $\bar{d} \ll L$ و $\bar{h}_0 \ll L$ و نیز کوچک بودن تغییر شکل‌ها در برابر طول و ضخامت میکروتر می‌توان در چارچوب تئوری تیر اولیه-برنولی و ترکیب آن با تقریب کمان‌های کم عمق¹ رفتار میکروتر را توصیف کرد [24,23].

3- معادلات حاکم

با استفاده از اصل همیلتون تعمیم یافته می‌توان معادله حرکت میکروتر را استخراج کرد [25]. این اصل در رابطه (2) نشان داده شده است.

$$\delta \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} (U - T - W_e) d\bar{t} = 0 \quad (2)$$

که T انرژی جنبشی، U انرژی پتانسیل کرنشی و W_e کار نیروی خارجی می‌باشد.

3-1- انرژی جنبشی

با توجه به این‌که هدف بررسی رفتار دینامیکی میکروتر می‌باشد، بنابراین انرژی جنبشی از جمله انرژی‌های مبادله شده در طول حرکت میکروتر می‌باشد. رابطه (3) نشان دهنده انرژی جنبشی میکروتر می‌باشد.

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \right)^2 d\bar{x} \quad (3)$$

لازم به ذکر است در محاسبه انرژی جنبشی، از اثر اینرسی محوری به دلیل ناچیز بودن صرف‌نظر شده است.

3-2- انرژی پتانسیل کرنشی

انرژی پتانسیل کرنشی ناشی از خمش و کشیدگی صفحه میانی² میکروتر بوده و به صورت رابطه (4) قابل محاسبه است [23].

$$U = \frac{\bar{E}I_{yy}}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2} \right)^2 d\bar{x}$$

¹ Shallow arch approximation

² Mid-plane stretching

که λ_i پاسخ معادله $1 - \cos \lambda_i \cosh \lambda_i = 0$ می باشد، و ضریب C_i طوری در نظر گرفته می شود که $\max_{0 \leq x \leq 1} [\varphi_i(x)] = 1$ باشد.

شکل موده های دقیق میکروتر منحنی با استفاده از خطی سازی رابطه (16) به دست می آیند، و همچنین نشان داده شده است که تأثیر ناچیزی بر دقت نتایج دارند [27]. با جایگذاری رابطه (17) در رابطه (16) و با استفاده از روش گالرکین یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و غیرخطی به شکل رابطه (19) بدست می آید.

$$M\ddot{q} + cM\dot{q} + B(q - q_0) + \alpha(q^T S q - q_0^T S q_0) S q + \beta F = 0 \quad (19)$$

که $q = \{q_i\}$ بردار مختصات تعمیم یافته زمانی و $()^T$ نشان دهنده ترانپوز ماتریس می باشد. ماتریس های $B = [b_{ij}]$ و $M = [m_{ij}]$ و $S = [s_{ij}]$ به ترتیب مربوط به سفتی خمشی، جرم و کشیدگی می باشند. مولفه های این سه ماتریس به همراه مؤلفه های بردار نیروی تعمیم یافته $F = \{f_i^e\}$ در رابطه های (20) و (21) نشان داده شده اند.

$$b_{ij} = \delta_{ij} \int_0^1 \varphi_i'' \varphi_j'' dx \quad (20-الف)$$

$$m_{ij} = \delta_{ij} \int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx \quad (20-ب)$$

$$s_{ij} = \delta_{ij} \int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' dx \quad (20-پ)$$

$$f_i^e = \int_0^1 \frac{\varphi_i}{(1 + \sum_{j=1}^n q_j \varphi_j)^2} dx \quad (21)$$

که δ_{ij} دلتای کرونکر می باشد. از رابطه (13) با برابر صفر قرار دادن ترم های مشتقات زمانی می توان برای تحلیل رفتار الکترواستاتیکی استفاده کرد.

ساده ترین مدل فشرده، مدل یک درجه آزادی می باشد که از رابطه (19) و تنها با در نظر گرفتن اولین ترم رابطه (17) حاصل می شود. لازم به ذکر است که انتگرال رابطه (21) حتی در این مورد که ساده ترین شکل خود را دارد نیز حل تحلیلی ندارد، اما به طور جایگزین می توان φ_1 را به صورت $\varphi_1 \approx [1 - \cos(2\pi x)]/2$ تقریب زد [28] که در این صورت انتگرال مذکور حل تحلیلی خواهد داشت.

$$f_1^e = \int_0^1 \frac{\varphi_1}{(1 + q_1 \varphi_1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{(1 + q_1)^3}} \quad (22)$$

با در نظر گرفتن $h_0 \varphi_1$ به عنوان شکل اولیه میکروتر، یک معادله دیفرانسیل معمولی و غیرخطی بر حسب $q_1 = q$ به صورت رابطه (23) به دست می آید.

$$m_{11}\ddot{q} + cm_{11}\dot{q} + b_{11}(q - h_0) + \frac{\beta}{2\sqrt{(1 + q)^3}} = 0 \quad (23)$$

که $b_{11} = 198.462$ ، $m_{11} = 0.396$ و $s_{11} = 4.878$ بوده و دو شرط اولیه برای معادله به صورت $q(0) = h_0$ و $\dot{q}(0) = 0$ می باشد. لازم به ذکر است که $h_0 \leq q \leq -1$ می باشد.

از روش های دیگری مانند آنالیز اغتشاش و یا حل عددی مستقیم نیز می توان برای حل رابطه (16) استفاده کرد، اما استفاده از این روش ها به دلیل طولانی بودن پروسه حل مقرون به صرفه نمی باشد. دستگاه معادلات دیفرانسیل به دست آمده از مدل کاهش مرتبه نسبتاً ساده بوده و پروسه حل آن به مراتب ساده تر از سایر روش ها می باشد.

با جایگذاری رابطه (11) در رابطه (8) معادله حرکت میکروتر به شکل رابطه (12) به دست می آید.

$$\rho A \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \bar{c} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \bar{E} I_{yy} \left(\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} - \frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^4} \right) - \frac{\bar{E} A}{2L} \left\{ \int_0^L \left[\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] dx \right\} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{f}^e = 0 \quad (12)$$

رابطه های (13) و (14) شرایط مرزی و اولیه را نشان می دهند.

$$\bar{w}(0, \bar{t}) = \bar{w}(L, \bar{t}) = 0 \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}(0, \bar{t}) = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}(L, \bar{t}) = 0 \quad (13)$$

$$\bar{w}(\bar{x}, 0) = \bar{w}_0 \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}}(\bar{x}, 0) = 0 \quad (14)$$

برای سادگی کار از اثرات حاشیه ای میدان الکتریکی چشم پوشی کرده و بار گسترده الکترواستاتیک $\bar{f}^e$ ، با فرمول خازن های موازی تقریب زده می شود [26].

$$\bar{f}^e(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\epsilon_0 \bar{b} V^2}{2(g_0 + \bar{w}(\bar{x}, \bar{t}))^2} \quad (15)$$

که $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ضریب گذردهی فضای آزاد و ولتاژ اعمال شده بین الکترود ثابت و میکروتر می باشد.

در نهایت به جهت سهولت رابطه (12) را به صورت بی بعد بازنویسی کرده و در ادامه از آن استفاده می شود (رابطه 16).

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) - \alpha \left\{ \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\beta}{(1 + w)^2} = 0 \quad (16)$$

جدول 1 نشان دهنده تعریف پارامترهای بی بعد رابطه (16) می باشد.

4- مدل کاهش مرتبه

برای گسسته سازی معادله حرکت از یک مدل کاهش مرتبه بر مبنای روش گالرکین استفاده می شود. بدین منظور شکل میکروتر در حالت اولیه و پس از بارگذاری به صورت سری های روابط (17) در نظر گرفته می شود.

$$w(x, t) \approx \sum_{i=1}^n q_i(t) \varphi_i(x) \quad w(x, 0) = \sum_{i=1}^n q_{0i} \varphi_i(x) \quad (17)$$

که در آن $q_i(t)$ مختصات تعمیم یافته زمانی و $\varphi_i(x)$ آمین تابع شکل مود تیر تخت دوسر گیردار می باشد.

$$\varphi_i(x) = C_i (\cos \lambda_i x - \cosh \lambda_i x - \frac{\cos \lambda_i - \cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i - \sinh \lambda_i} (\sin \lambda_i x - \sinh \lambda_i x)) \quad (18)$$

جدول 1 کمیت های بدون بعد

تعریف	کمیت بدون بعد
مختصه طول	$x = \bar{x}/L$
زمان	$t = \bar{t} \sqrt{\bar{E} I_{yy} / (\rho A L^4)}$
شکل اولیه	$w_0 = \bar{w}_0 / g_0$
شکل پس از بارگذاری	$w = \bar{w} / g_0$
خیز نقطه میانی	$h_0 = \bar{h}_0 / g_0$
ضخامت	$d = \bar{d} / g_0$
پارامتر کشیدگی	$\alpha = (g_0^2 A) / (2 I_{yy}) = 6 / d^2$
پارامتر میرایی	$c = \bar{c} \sqrt{L^4 / (\rho A \bar{E} I_{yy})}$
پارامتر ولتاژ	$\beta = (\epsilon_0 \bar{b} V^2 L^4) / (2 g_0^3 \bar{E} I_{yy})$

5- شبیه‌سازی اجزای محدود

برای شبیه‌سازی اجزای محدود از نرم‌افزار کامسول مولتی فیزیکس استفاده شده است. نرم‌افزار کامسول به دلیل چند منظوره بودن برای پژوهش‌های بین رشته‌ای مناسب می‌باشد. البته نرم‌افزارهای چند فیزیکی دیگری نیز موجود می‌باشند، اما نقطه قوت نرم‌افزار کامسول در این است که، مدل سازی سیستم‌هایی که معادلات حاکم بر آن‌ها از حوزه‌هایی کاملاً متفاوت می‌باشد، بسیار ساده‌تر و سریع‌تر انجام می‌گیرد. دلیل این امر آن است که به صورت پیش فرض ماژول‌هایی برای شبیه‌سازی و تحلیل سیستم‌ها در نظر گرفته شده است.

در نرم‌افزار کامسول ماژول مخصوصی که برای شبیه‌سازی و تحلیل سیستم‌های میکروالکترومکانیکی در نظر گرفته شده، یکی از زیر شاخه‌های فیزیک مکانیک ساختاری¹ با عنوان الکترومکانیک² می‌باشد.

مزیت دیگر نرم‌افزار کامسول این است که در این نرم‌افزار امکان ترسیم اشکال هندسی توسط روابط ریاضی وجود دارد، بنابراین شکل میکروتر بررسی شده توسط نرم‌افزار دقیقاً همان $h_0\varphi_1$ می‌باشد.

مدل سازی انجام شده در نرم‌افزار به صورت دو بعدی بوده و سایر فرض‌ها مانند همگن و همسانگرد و با الاستیک خطی بودن میکروتر و حالت کرنش صفحه‌ای از طریق گزینه‌های موجود در نرم‌افزار نیز برای شبیه‌سازی اعمال شده است. با توجه به شکل هندسی میکروتر از مش مثلثی و با درجه کیفیت خیلی خوب استفاده شده است.

6- نتایج و بحث

در این بخش نتایج حاصل از حل دستگاه معادلات (19) به همراه نتایج شبیه‌سازی اجزای محدود، برای تحلیل رفتار الکترودینامیکی یک میکروتر منحنی زنگوله‌ای شکل ($w_0 = h_0\varphi_1$)، از جنس پلی سیلیکون با ابعاد و مشخصات داده شده در جدول 2 ارائه شده است. به منظور رسم نمودارهای تاریخچه زمانی، دستگاه معادلات (19) با در نظر گرفتن سه ترم اول رابطه (17) و با استفاده از روش رانگ-کوتا مرتبه چهار حل شده است. روش رانگ-کوتا یک روش قوی و پرکاربرد برای حل انواع معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد. از مدل یک درجه آزادی نیز برای رسم فضای فاز متناظر استفاده شده است.

برای اطمینان از درستی نتایج به دست آمده، ولتاژ اسنپ-ترو و پولین در حالت استاتیکی مورد بحث قرار می‌گیرد. در پژوهش آقایان اوکاد و یونس [29] برای میکروتر مورد نظر ولتاژ استاتیکی اسنپ-ترو برابر $V_S = 88 \text{ V}$ و ولتاژ استاتیکی پولین برابر $V_{PI} = 106 \text{ V}$ گزارش شده است. در تحقیق حاضر با توجه به شکل 2 ولتاژ استاتیکی اسنپ-ترو برابر $V_S = 90.7 \text{ V}$ و ولتاژ استاتیکی پولین برابر $V_{PI} = 111.6 \text{ V}$ می‌باشد (بر حسب پارامتر ولتاژ $\beta_S = 185$ و $\beta_{PI} = 280$). درصد خطا برای ولتاژ اسنپ-ترو برابر 3% و برای ولتاژ پولین برابر 5% می‌باشد. مشاهده می‌شود که تطابق خوبی وجود دارد. همچنین همان‌طور که در شکل 2 مشاهده می‌شود تطابق بسیار خوبی نیز بین مدل کاهش مرتبه و شبیه‌سازی اجزای محدود دیده می‌شود. مقادیر ولتاژ استاتیکی اسنپ-ترو و پولین محاسبه شده توسط نرم‌افزار کامسول به ترتیب برابر $V_S = 88.8 \text{ V}$ و $V_{PI} = 107 \text{ V}$ می‌باشد. این نتایج با تعداد مش 12407 حاصل شده است. لازم به ذکر است به دلیل کوچک بودن ابعاد میکروتر، تعداد مش تأثیری کمتر از 1% بر دقت نتایج دارد.

جدول 2 مشخصات هندسی و مکانیکی میکروتر منحنی

Table 2 Geometrical and mechanical properties of the curved microbeam

پارامتر	مقدار
طول (L)	1000 μm
پهنا ($\bar{b}$)	30 μm
ضخامت ($\bar{d}$)	2.4 μm
خیز اولیه نقطه میانی ($\bar{h}_0$)	3.5 μm
گپ (g_0)	10.1 μm
چگالی (ρ)	2332 kgm^{-3}
مدول یانگ موثر ($\bar{E}$)	166 GPa

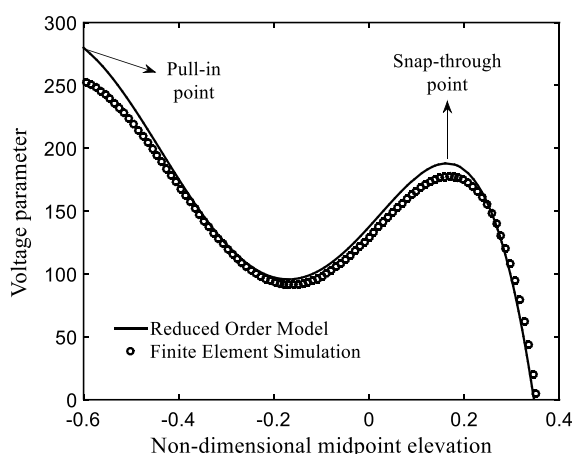


Fig. 2 Non-dimensional midpoint elevation of the curved microbeam versus different voltage parameter

شکل 2 خیز بی‌بعد نقطه میانی میکروتر بر حسب مقادیر مختلف پارامتر ولتاژ

در شکل 3 بیشترین مقدار تنش در طول میکروتر نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است در هنگام وقوع ناپایداری پولین احتمال شکست از ناحیه تکیه‌گاه‌ها به دلیل مقدار بالای تنش وجود دارد.

در تحقیق حاضر برای بررسی رفتار الکترودینامیکی میکروتر، تحریک به صورت ناگهانی و توسط ولتاژ پله‌ای صورت می‌گیرد. رابطه (23) نشان دهنده پارامتر ولتاژ برای این حالت می‌باشد.

$$\beta(t) = \beta_1 H(t) \quad (24)$$

که $H(t)$ تابع پله‌ای هویساید و β_1 بزرگی پارامتر ولتاژ می‌باشد.

اگرچه می‌توان بارگذاری‌های دینامیکی گوناگونی (ضربه‌ای، هارمونیک) را جهت تحریک در نظر گرفت، اما اغلب پایداری سازه‌ها در حالت بارگذاری ناگهانی برای یک مدت زمان نامحدود سنجیده می‌شوند. البته این نوع تحریک اهمیت کاربردی نیز دارد، برای مثال در سوییچ‌ها زمان عملکرد باید حداقل باشد و بارگذاری به شکل تابع پله موثر خواهد بود. در شکل 4 سه پاسخ ممکن برای میکروتر مورد نظر با نسبت میرایی $\zeta = 0.05$ تحت تحریک رابطه (23) نشان داده شده است. پارامتر میرایی توسط رابطه تخت دو سرگردار می‌باشد.

در شکل 4 برای سه مقدار متفاوت ولتاژ رفتار دینامیکی میکروتر نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل 4-a مشاهده می‌شود، برای یک مقدار ولتاژ پایین ($\beta_1 = 154$)، میکروتر حول یک موقعیت پایدار نزدیک به موقعیت اولیه نوسان می‌کند. برای ولتاژ با مقداری بیش‌تر از یک مقدار بحرانی مشخص ($\beta_1 > \beta_S$)، که با عنوان ولتاژ دینامیکی اسنپ-ترو شناخته

¹ Structural Mechanics

² Electromechanics

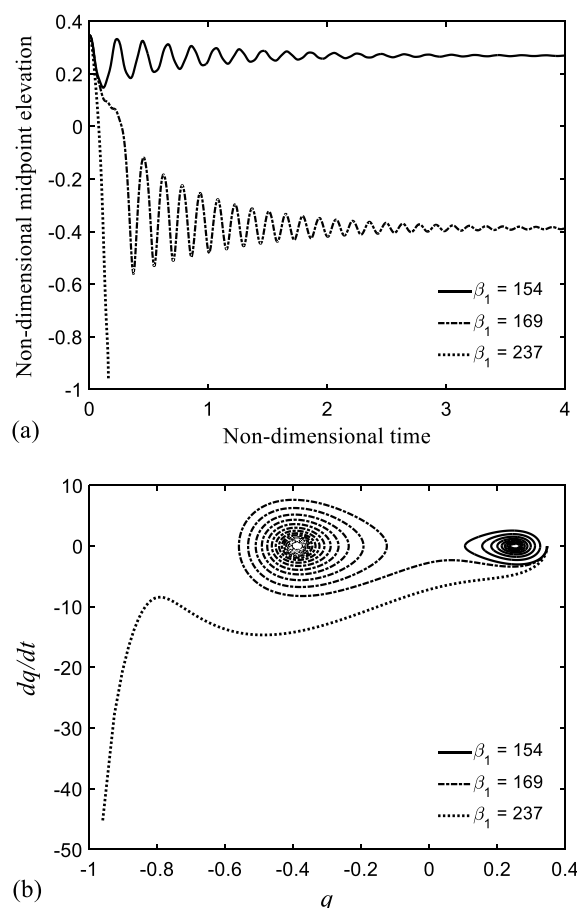


Fig. 4 Time history response of the microbeam to step actuation (a) and corresponding phase plane (b)

شکل 4 نمودار تاریخچه زمانی پاسخ میکروتیر به تحریک پله (a) و فضای فاز متناظر (b)

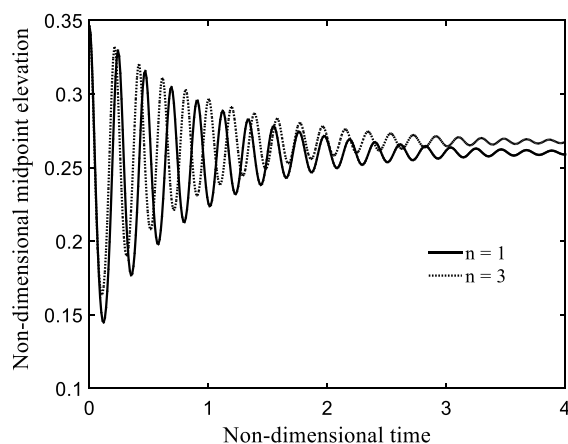


Fig. 5 Comparison between dynamic response of the microbeam to step actuation using first mode shape and three first mode shapes for $\beta_1 = 154$ & $\zeta = 0.05$

شکل 5 مقایسه بین پاسخ دینامیکی میکروتیر به تحریک پله با در نظر گرفتن شکل مود اول و سه شکل مود اول برای $\beta_1 = 154$ و $\zeta = 0.05$

$h_0 < 0.28$ میکروتیر به دومین حالت پایدار انتقال نمی‌یابد و تنها دچار ناپایداری پولین می‌گردد.

در شکل 9 اثر طول گپ بر رفتار دینامیکی میکروتیر نشان داده شده

می‌شود، انتقال میکروتیر به حالت پایدار دوم مشاهده می‌شود. در نهایت با افزایش ولتاژ به یک مقدار بزرگ ($\beta_1 = \beta_{p1}$) میکروتیر دچار ناپایداری پولین شده و با الکتروود ثابت تماس پیدا می‌کند. در شکل 4-b فضای فاز متناظر نشان داده شده است. برای هر سه حالت مشاهده می‌شود که نمودار فاز به موقعیت نهایی میکروتیر همگرا می‌باشد.

در شکل 5 تأثیر تعداد ترم‌های رابطه (17) بر پاسخ دینامیکی میکروتیر بررسی شده است. همان‌طور که در شکل 5 مشاهده می‌شود مدل یک درجه آزادی با دقت مطلوبی می‌تواند رفتار سیستم را توصیف نماید. دلیل این امر آن است که نحوه بارگذاری به گونه‌ای می‌باشد که سیستم تنها شکل مود اول را تجربه می‌کند.

افزایش میرایی ضمن کاهش مدت و دامنه نوسان می‌تواند، از انتقال میکروتیر به دومین حالت پایدار و یا حتی ناپایداری پولین نیز جلوگیری کند، این اثر در شکل 6 برای $\beta_1 = 169$ ، که ولتاژ دینامیکی اسنپ-ترو برای $\zeta = 0.05$ می‌باشد، نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل 6-a مشخص است، کاهش میرایی تأثیری بر پدیده اسنپ-ترو نداشته و تنها باعث افزایش مدت و دامنه نوسان شده است. این در حالی است که افزایش میرایی از انتقال میکروتیر به دومین حالت پایدار جلوگیری کرده است.

تغییرات میرایی بر روی ناپایداری پولین نیز اثر مشابهی دارد. کاهش میرایی باعث می‌شود تا میکروتیر سریع‌تر به سمت الکتروود ثابت جذب شود. و افزایش آن تا حد مشخصی می‌تواند از ناپایداری پولین جلوگیری کند. در شکل 7 برای $\beta_1 = 237$ ، که ولتاژ دینامیکی پولین برای $\zeta = 0.05$ می‌باشد، اثر افزایش میرایی نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود از ناپایداری پولین جلوگیری شده است.

در شکل 8 اثر مقدار خیز اولیه نقطه میانی، با ثابت بودن سایر ابعاد بر پدیده‌های اسنپ-ترو و پولین نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش خیز نقطه میانی، ولتاژ بحرانی پولین کاهش می‌یابد.

همان‌طور که در شکل 8 مشاهده می‌شود میکروتیر تخت بیشترین مقدار ولتاژ پولین را داراست. از طرف دیگر وجود دومین حالت پایدار برای مقادیر کوچک خیز اولیه نقطه میانی امکان پذیر نیست و می‌بایست مقدار خیز اولیه نقطه میانی از حد مشخصی بیشتر باشد. دلیل این مورد این است که با کوچک‌تر شدن h_0 شکل منحنی میکروتیر به حالت تخت نزدیک‌تر می‌شود و بنابراین رفتاری مانند میکروتیر تخت خواهیم داشت. با توجه به شکل 8 برای

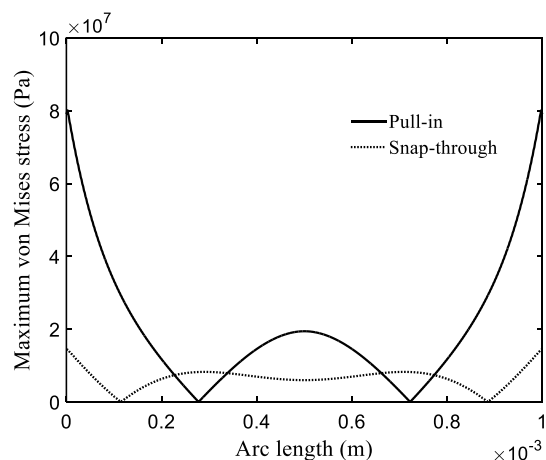


Fig. 3 Maximum von Mises stress for snap-through and pull-in configuration

شکل 3 ماکزیمم تنش در معیار ون مایسس برای حالت‌های اسنپ-ترو و پولین

می شود، روندی افزایشی به خود می گیرد. دلیل این امر تأثیر غیرخطی سفتی خمشی و کشیدگی صفحه میانی بر رفتار میکروتر منحنی می باشد. با توجه به شکل 9 پدیده اسنپ-ترو به طول گپ نیز وابسته می باشد.

نرم افزار کامسول اطلاعات مفید دیگری که محاسبه آن ها به صورت عددی مشکل است را می تواند در اختیار ما قرار دهد. به طور مثال در تحریک هارمونیک میکروتر، تابع ولتاژ به شکل زیر می باشد.

$$V(t) = V_{DC} + V_{AC} \cos(2\pi f t) \quad (25)$$

در این نوع تحریک، میکروتر برای انتقال به دومین حالت پایدار علاوه بر مقدار ولتاژ به فرکانس تحریک نیز وابسته می باشد. مطالعات انجام شده نشان می دهند که در فرکانس های تحریک نزدیک به فرکانس های طبیعی میکروتر پدیده اسنپ-ترو رخ می دهد. بنابراین در طراحی سیستم های میکروالکترومکانیکی دوپایا برای کاربردهایی که از این نوع تحریک استفاده می شود (مانند فیلتر و تشدیدگر) دانستن فرکانس های طبیعی اهمیت زیادی دارد. در جدول 3 پنج فرکانس طبیعی اول میکروتر مورد نظر که توسط نرم افزار محاسبه شده اند با مقادیر گزارش شده توسط مرجع [27] مقایسه شده اند. برای مقایسه با مرجع مقادیر بی بعد شده در جدول آورده شده است.

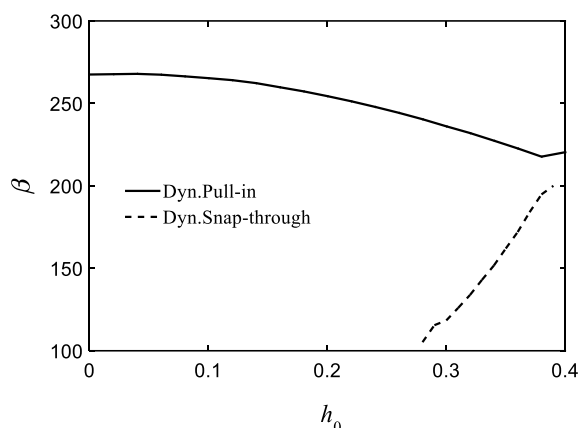


Fig. 8 Critical dynamic snap-through & dynamic pull-in values of the voltage parameter versus different initial midpoint elevation

شکل 8 مقادیر بحرانی ولتاژ دینامیکی اسنپ-ترو و پولین بر حسب مقادیر مختلف خیز اولیه نقطه میانی

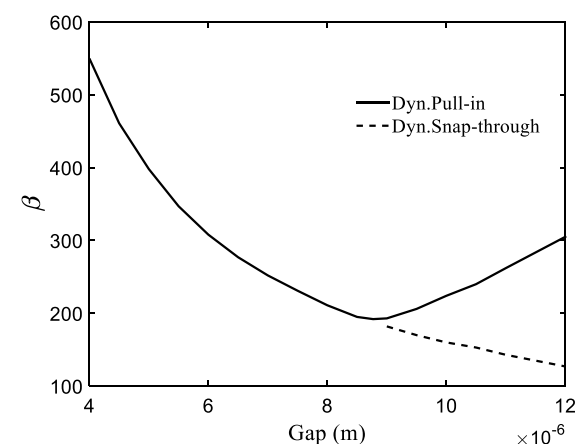


Fig. 9 Critical dynamic snap-through & dynamic pull-in values of the voltage parameter versus different gap values

شکل 9 مقادیر بحرانی ولتاژ دینامیکی اسنپ-ترو و پولین بر حسب مقادیر مختلف گپ

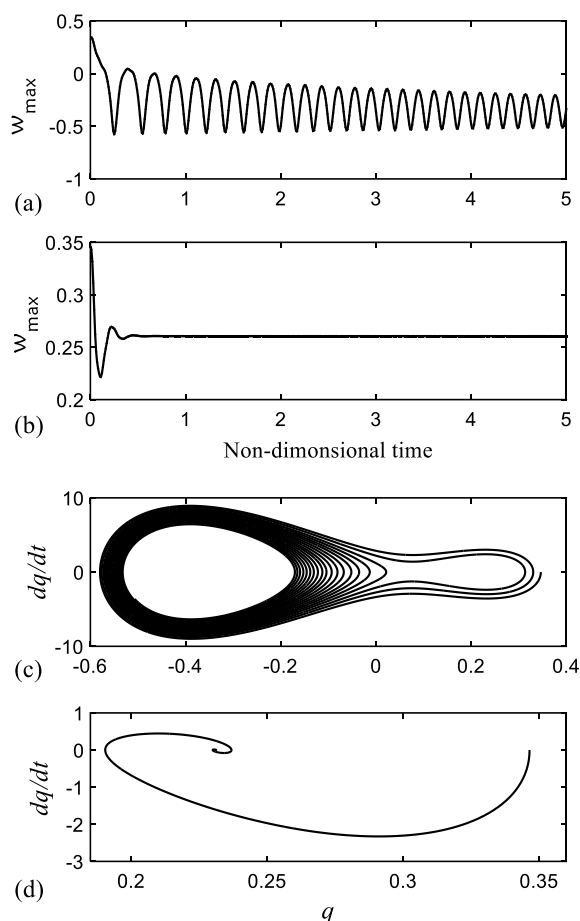


Fig. 6 Time history response of the microbeam to step actuation (a), (b) and corresponding phase plane (c), (d) for two different damping ratio, (a) & (c) for $\zeta = 0.005$, (b) & (d) for $\zeta = 0.5$, $\beta_1 = 169$

شکل 6 نمودار تاریخچه زمانی پاسخ میکروتر به تحریک پله (a)، (b) و فضای فاز متناظر (c)، (d) برای دو نسبت میرایی متفاوت، (a)، (c) برای $\zeta = 0.005$ و (b)، (d) برای $\zeta = 0.5$ ، هر دو نسبت میرایی $\beta_1 = 169$

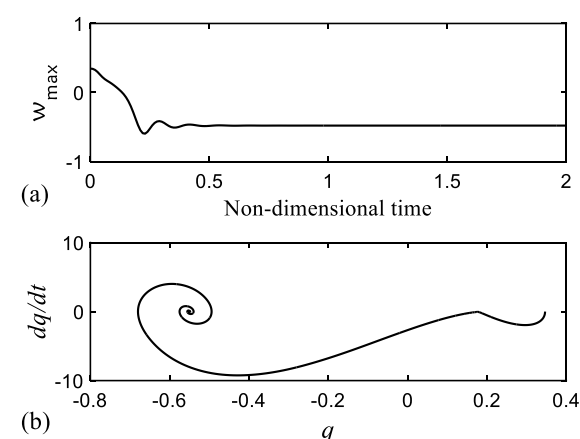


Fig. 7 Time history response of the microbeam to step actuation (a) and corresponding phase plane (b), for $\zeta = 0.5$ & $\beta_1 = 237$

شکل 7 نمودار تاریخچه زمانی پاسخ میکروتر به تحریک پله (a) و فضای فاز متناظر (b)، برای $\zeta = 0.5$ و $\beta_1 = 237$

است. همان طور که مشاهده می شود ابتدا با افزایش طول گپ ولتاژ بحرانی پولین کاهش می یابد و سپس از نقطه ای که پدیده اسنپ-ترو مشاهده

فضای فاز، تأثیر پارامترهای مختلف بر رفتار دینامیکی میکروتر بررسی شد. میکروتیرهای منحنی تحت بارگذاری عرضی، ممکن است دو حالت پایدار را از خود نشان دهند. به طور رایج انتقال بین دو حالت پایدار را اسنپ-ترو می‌گویند. ناپایداری پولین هنگامی اتفاق می‌افتد که نیروهای داخلی میکروتر از تعادل با فشار الکترواستاتیک خارج شده و میکروتر به سمت الکترو ثابت کشیده شده و با آن تماس پیدا می‌کند. نتایج نشان داد که افزایش میرایی ویسکوز تأثیر قابل توجهی بر رفتار دینامیکی میکروتر منحنی دارد، به طوری که می‌تواند از انتقال میکروتر به دومین حالت پایدار و یا حتی ناپایداری پولین جلوگیری کند. بنابراین به هنگام طراحی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی دوطایا باید به کم فشار یا پر فشار بودن محیط استفاده از این سیستم‌ها توجه شود. از طرفی دیگر رفتار دینامیکی میکروتر به هندسه نیز وابسته می‌باشد، در ترسیم مقادیر بحرانی ولتاژ اسنپ-ترو و پولین برحسب خیز اولیه نقطه میانی مشاهده شد که با کم‌تر شدن خیز اولیه نقطه میانی از مقداری خاص امکان انتقال به دومین حالت پایدار از بین می‌رود. همچنین مشاهده شد که طول گپ نیز بر رفتار دینامیکی میکروتر تأثیر دارد. مطابق شکل‌های 7 و 8 گذار به دومین حالت پایدار به ازای حداقلی از مقدار خیز اولیه و طول گپ امکان پذیر می‌باشد. بدین معنی که با کم‌تر شدن مقدار خیز اولیه و طول گپ از مقداری مشخص امکان صورت گرفتن پدیده اسنپ-ترو از بین می‌رود. تغییر نوع تحریک نیز بر رفتار دینامیکی

فرکانس‌های طبیعی میکروتر تابعی از ولتاژ نیز هستند. تغییرات اولین فرکانس طبیعی بر حسب ولتاژ در شکل 10 نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش ولتاژ فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. این اثر با عنوان نرم شدگی فزنی شناخته می‌شود [27].

همان‌طور که در مقدمه اشاره شد یکی از مزیت‌های میکروتیرهای منحنی نسبت به میکروتیرهای تخت، امکان نزدیک‌تر شدن میکروتر منحنی به الکترو ثابت بوده بدون این‌که دچار ناپایداری پولین گردد. از تحریک‌های مختلفی جهت این کار می‌توان استفاده کرد، یکی از انواع این تحریک‌ها تحریک دو پله‌ای می‌باشد.

رابطه (26) نشان دهنده پارامتر ولتاژ برای تحریک دو پله‌ای می‌باشد.

$$\beta(t) = \beta_1 H(t) - (\beta_1 - \beta_2) H(t - t_1) \quad (26)$$

که β_2 بزرگی پارامتر ولتاژ پله دوم بوده و پس از گذشت بازه زمانی t_1 جایگزین β_1 می‌شود. در شکل 11 یک حالت از پاسخ دینامیکی میکروتر مورد بحث به این تحریک نشان داده شده است. در این حالت شاهد رفتار پیچیده‌تری از میکروتر نیز هستیم، به‌طوری که در شکل 11 نشان داده شده است، میکروتر ابتدا به حالت پایدار دوم منتقل شده و پس از تعدادی نوسان به موقعیتی نزدیک به حالت اولیه باز می‌گردد.

7- نتیجه‌گیری

در این پژوهش رفتار دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی یک میکروتر با شکل اولیه منحنی تحت تحریک الکترواستاتیک پله بررسی شد. از یک مدل کاهش مرتبه جهت گسسته سازی معادله حرکت میکروتر و تبدیل آن به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده شد. دستگاه معادلات دیفرانسیل به دست آمده از مدل کاهش مرتبه نسبتاً ساده بوده و پروسه حل آن به مراتب ساده‌تر از سایر روش‌ها می‌باشد. همچنین از نرم‌افزار کامسول برای شبیه‌سازی اجزای محدود استفاده شد. با رسم نمودارهای تاریخچه زمانی و

جدول 3 فرکانس‌های طبیعی میکروتر

درصد خطا	روش عددی [27]	شبیه‌سازی	فرکانس طبیعی f_i
3.86	42.46	44.1	f_1
2.53	61.64	63.2	f_2
1.97	128.76	131.3	f_3
1.69	201.37	204.7	f_4
2	300	306.8	f_5

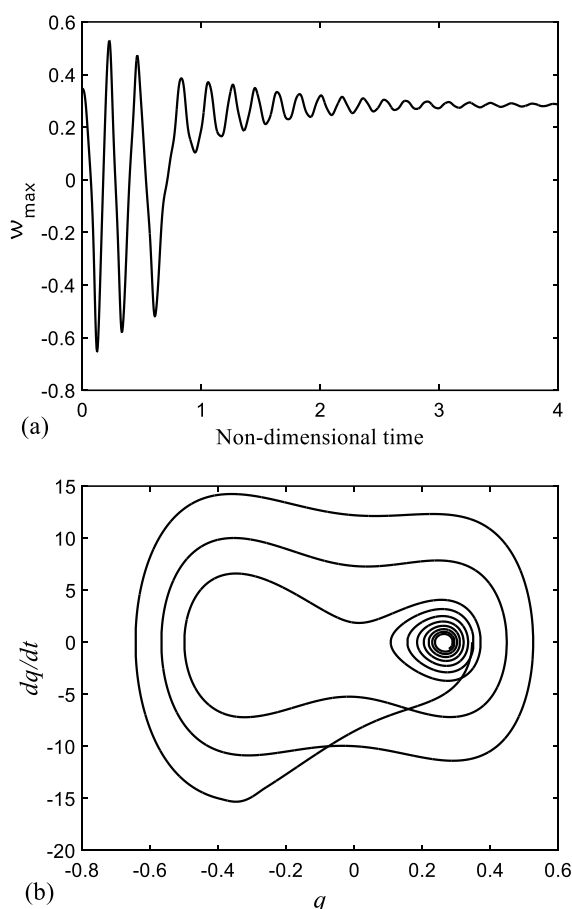


Fig. 11 Time history response of the microbeam to two step actuation (a) and corresponding phase plane (b), for $\beta_1 = 270$, $\beta_2 = 140$, $t_1 = 0.1$ & $\zeta = 0.05$

شکل 11 نمودار پاسخ زمانی میکروتر به تحریک دو پله‌ای (a) و فضای فاز متناظر (b)، برای $\beta_1 = 270$ ، $\beta_2 = 140$ ، $t_1 = 0.1$ و $\zeta = 0.05$

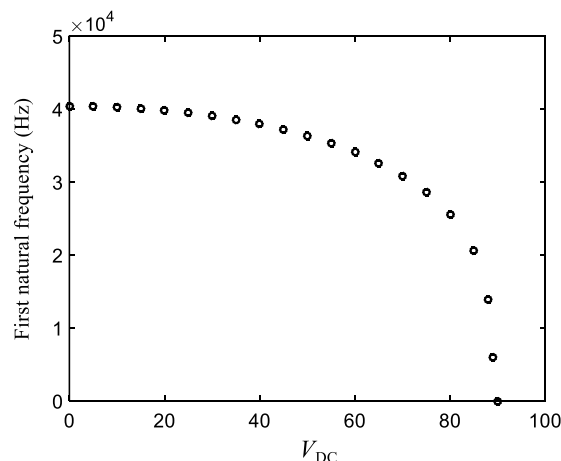


Fig. 10 First natural frequency versus voltage

شکل 10 تغییرات فرکانس طبیعی اول بر حسب ولتاژ

میکروتر موثر است. مشاهده شد که تحریک الکترواستاتیک دو پله‌ای می‌تواند باعث شود که میکروتر رفتار پیچیده‌تری را از خود نشان دهد. مقایسه نتایج شبیه‌سازی با نتایج مدل کاهش مرتبه و برخی از پژوهش‌های انجام شده نشان داد که با دقتی بسیار بالا می‌توان از نرم‌افزار کامسول برای تحلیل و طراحی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی دوپایا استفاده کرد.

8- فهرست علائم

$\bar{b}$	پهنای میکروتر (μm)
B	ماتریس سختی خمشی
$\bar{d}$	ضخامت میکروتر (μm)
E	مدول یانگ (GPa)
F	بردار نیروی تعمیم یافته
g_0	گپ (μm)
$\bar{h}_0$	خیز اولیه نقطه میانی (μm)
L	طول میکروتر
M	ماتریس جرم
q	بردار مختصات تعمیم یافته زمانی
S	ماتریس سختی کشیدگی
$\bar{w}_0$	شکل اولیه میکروتر
$\bar{w}$	شکل میکروتر پس از بارگذاری

علائم یونانی

α	پارامتر کشیدگی
β	پارامتر ولتاژ
ρ	چگالی (kgm^{-3})
φ_i	تأمین تابع شکل مود تیر تخت دوسر گیردار
ν	نسبت پواسون
ζ	نسبت میرایی

9- مراجع

- X. L. Jia, J. Yang, S. Kitipornchai, Pull-in instability of geometrically nonlinear micro-switches under electrostatic and Casimir forces, *Acta Mechanica*, Vol. 218, No. 1-2, pp. 161-174, 2011.
- T. R. Hsu, *MEMS and Microsystems: Design, Manufacture, and Nanoscale Engineering*, pp. 1-27, New Jersey, John Wiley & Sons, 2008.
- R. Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Review of modeling electrostatically actuated microelectromechanical systems, *Smart Materials and Structures*, Vol. 16, No. 6, pp. R23, 2007.
- A. Raheli, S. Azizi, S. Faroughi, Dynamic analysis of a micro beam based on sub-harmonic parametric excitation, *Modes Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 374-384, 2017. (in persian)
- Y. Hu, J. Yang, S. Kitipornchai, Snap-through and pull-in analysis of an electro-dynamically actuated curved micro-beam using a nonlinear beam model, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 15, pp. 3821-3832, 2013.
- V. Intaraprasong, S. Fan, Nonvolatile bistable all-optical switch from mechanical buckling, *Applied Physics Letters*, Vol. 98, No. 24, pp. 241104, 2011.
- C. Goll, W. Bacher, B. Büstgens, D. Maas, W. Menz, W. Schomburg, Microvalves with bistable buckled polymer diaphragms, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 6, No. 1, pp. 77, 1996.
- D. Roodenburg, J. Spronck, H. Van der Zant, W. Venstra, Buckling beam micromechanical memory with on-chip readout, *Applied Physics Letters*, Vol. 94, No. 18, pp. 183501, 2009.
- L. Medina, R. Gilat, S. Krylov, Symmetry breaking in an initially curved micro beam loaded by a distributed electrostatic force, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49, No. 13, pp. 1864-1876, 2012.
- S. Krylov, B. R. Ilic, S. Lulinsky, Bistability of curved microbeams actuated by fringing electrostatic fields, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 66, No. 3, pp. 403, 2011.
- S. Krylov, B. R. Ilic, D. Schreiber, S. Seretensky, H. Craighead, The pull-in behavior of electrostatically actuated bistable microstructures, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 18, No. 5, pp. 055026, 2008.
- W. M. Zhang, H. Yan, Z. K. Peng, G. Meng, Electrostatic pull-in instability in MEMS/NEMS: A review, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 214, pp. 187-218, 2014.
- X. Chen, S. Meguid, Snap-through buckling of initially curved microbeam subject to an electrostatic force, *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 471, No. 2177, pp. 20150072, 2015.
- S. Park, D. Hah, Pre-shaped buckled-beam actuators: theory and experiments, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 148, No. 1, pp. 186-192, 2008.
- K. Das, R. Batra, Pull-in and snap-through instabilities in transient deformations of microelectromechanical systems, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 19, No. 3, pp. 035008, 2009.
- S. Krylov, N. Dick, Dynamic stability of electrostatically actuated initially curved shallow micro beams, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Vol. 22, No. 6, pp. 445-468, 2010.
- Y. Hu, J. Yang, S. Kitipornchai, Pull-in analysis of electrostatically actuated curved micro-beams with large deformation, *Smart Materials and Structures*, Vol. 19, No. 6, pp. 065030, 2010.
- M. M. Zand, The dynamic pull-in instability and snap-through behavior of initially curved microbeams, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 19, No. 6, pp. 485-491, 2012.
- G. Sari, M. Pakdemirli, Vibrations of a slightly curved microbeam resting on an elastic foundation with nonideal boundary conditions, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2013, 2013.
- L. Ruzziconi, M. I. Younis, S. Lenci, An efficient reduced-order model to investigate the behavior of an imperfect microbeam under axial load and electric excitation, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 8, No. 1, pp. 011014, 2013.
- L. Medina, R. Gilat, S. Krylov, Symmetry breaking in an initially curved pre-stressed micro beam loaded by a distributed electrostatic force, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51, No. 11, pp. 2047-2061, 2014.
- F. Tajaddodianfar, M. R. H. Yazdi, H. N. Pishkenari, Nonlinear dynamics of MEMS/NEMS resonators: analytical solution by the homotopy analysis method, *Microsystem Technologies*, Vol. 23, No. 6, pp. 1913-1926, 2017.
- P. Villaggio, *Mathematical Models for Elastic Structures*, pp. 267-302, New York, Cambridge University Press, 2005.
- G. J. Simitses, D. H. Hodges, *Fundamentals of Structural Stability*, pp. 200-206, Amsterdam, Elsevier, 2006.
- S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, pp. 107-119, New Jersey, John Wiley & Sons, 2007.
- D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, pp. 58-103, New Jersey, Prentice Hall, 1981.
- H. M. Ouakad, M. I. Younis, The dynamic behavior of MEMS arch resonators actuated electrically, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 45, No. 7, pp. 704-713, 2010.
- S. Pamidighantam, R. Puers, K. Baert, H. A. Tilmans, Pull-in voltage analysis of electrostatically actuated beam structures with fixed-fixed and fixed-free end conditions, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 12, No. 4, pp. 458, 2002.
- H. M. Ouakad, M. I. Younis, On using the dynamic snap-through motion of MEMS initially curved microbeams for filtering applications, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, No. 2, pp. 555-568, 2014.