



## بررسی ارتعاشات غیر خطی میکرو تیر منحنی تحت تحریک الکترواستاتیک با استفاده از مدل کاهش مرتبه و شبیه سازی اجزای محدود

محمد رضا صالحی کلاهی<sup>1</sup>، حسین معین خواه<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان  
2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان  
\* زاهدان، صندوق پستی 987-98155، hmoein@eng.usb.ac.ir

### چکیده

در این مقاله به بررسی رفتار دینامیکی و ارتعاشات غیر خطی یک میکرو تیر دو سر گیردار با شکل اولیه منحنی و تحت تحریک الکترواستاتیک پله پرداخته شده است. میکروتیرهای منحنی تحت بارگذاری عرضی، ممکن است دو حالت پایدار را از خود نشان دهند و این ویژگی اساس پیدایش سیستم های میکروالکترومکانیکی دوپایا می باشد. معادلات حرکت با استفاده از روش انرژی و اصل همپلتون استخراج شده و سپس با استفاده از پارامترهای بی بعد سازی مناسب، در فرم بی بعد نوشته شده است. با استفاده از یک مدل کاهش مرتبه بر مبنای روش گالرکین، معادله بی بعد به دست آمده گسسته سازی شده و به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و غیرخطی تبدیل شده است. روش رانگ-کوتای مرتبه چهار برای حل دستگاه معادلات به کار برده شده است. برای شبیه سازی اجزای محدود از نرم افزار کامسول مولتی فیزیکس استفاده شده است. در ادامه تأثیر پارامترهای مختلف نظیر پارامتر ولتاژ، میرایی، خیز اولیه نقطه میانی و طول گپ بر روی رفتار دینامیکی میکروتیر بررسی شده است. نتایج نشان می دهد که با افزایش خیز اولیه نقطه میانی، ولتاژ بحرانی پولین کاهش می یابد. همچنین مشاهده شد که افزایش پارامتر میرایی از انتقال به دومین حالت پایدار جلوگیری می کند.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 18 مهر 1396  
پذیرش: 14 آذر 1396  
ارائه در سایت: 01 دی 1396  
کلید واژگان:  
سیستم های میکروالکترومکانیکی  
میکروتیر منحنی  
دوپایا  
مدل کاهش مرتبه  
کامسول مولتی فیزیکس

## Non-linear vibration of curved microbeam under electrostatic actuation by using reduced order model and finite element simulation

Mohammad Reza Salehi Kolahi, Hossein Moeinkhah\*

Department of Mechanical Engineering, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran  
\* P.O.B. 98155-987, hmoein@eng.usb.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 10 October 2017  
Accepted 05 December 2017  
Available Online 22 December 2017

#### Keywords:

Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)  
Curved Microbeam  
Bi-stable  
Reduced Order Model  
COMSOL Multiphysics

### ABSTRACT

In this research, the dynamic behavior and nonlinear vibration of a clamped-clamped initially curved microbeam under electrostatic step actuation is investigated. The initially curved microbeams under transverse loading may exhibit two different stable states and this is the basis of the emergence of bi-stable micro electro mechanical systems (MEMS). The equation of motion is derived based on energy method and Hamiltonian principle, and re-written in non-dimensional form by using appropriate non-dimensional parameters. The resultant equation of motion in non-dimensional form is discretized and converts to a system of nonlinear ordinary differential equations by using a reduced order model based on the Galerkin procedure. Runge-kutta method of order four is employed to solve the resulting system of nonlinear ordinary differential equations. COMSOL Multiphysics software is used for finite element simulation. Then, the effect of various parameters including voltage parameter, damping, initial midpoint elevation and gap length is investigated. It is concluded that the critical voltage of pull-in is decreased by increasing of the initial midpoint elevation. Also The results depict that by increasing of the damping parameter, the possibility of transition between two stable states is eliminated.

### 1- مقدمه

اصلی کاربرد دارد [2]. یکی از ساختارهای موجود در این سیستم ها، استفاده از میکروتیر تخت به عنوان الکتروود متحرک بوده که توسط یک فضای دی الکتریک از الکتروود ثابت جدا می شود [3,4]. اعمال ولتاژ بین دو الکتروود منجر به ایجاد فشار کولمب<sup>2</sup> (فشار الکترواستاتیک) بر روی الکتروودها و در نتیجه تغییر شکل الکتروود متحرک می گردد. با رسیدن ولتاژ به یک مقدار

امروزه سیستم های میکرو الکترومکانیکی<sup>1</sup> با ویژگی های منحصر به فرد خود نظیر اندازه کوچک، دقت بالا و توان مصرفی پایین مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته اند [1]. در اکثر سیستم های میکروالکترومکانیکی سیلیکون به دلیل داشتن خواص مکانیکی و فیزیکی مناسب به عنوان ماده

<sup>2</sup> Coulomb Pressure

<sup>1</sup> Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)

#### Please cite this article using:

M. R. Salehi Kolahi, H. Moeinkhah, Non-linear vibration of curved microbeam under electrostatic actuation by using reduced order model and finite element simulation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 12, pp. 514-522, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

هارمونیک تحریک کرده بودند، نتیجه گرفتند که مدل کاهش مرتبه<sup>1</sup> با یک درجه آزادی برای پیش‌بینی پاسخ میکروترنر به تحریک قابل قبول می‌باشد [20]. مدینا و همکاران با استفاده از مدل کاهش مرتبه، به تحلیل رفتار الکترواستاتیکی میکروترنر با شکل منحنی ناشی از کمناش پرداختند [21]. در سال 2017 تجدیدیان فر و همکاران از آنالیز هموتویی برای یافتن حل تحلیلی- تقریبی برای پاسخ فرکانسی میکروترنرهای تخت و منحنی استفاده کردند [22].

در مطالعه حاضر رفتار دینامیکی میکروترنر منحنی دوسر گیردار، تحت تحریک الکترواستاتیک پله، بررسی شده است. مطالعات انجام شده نشان می‌دهند که بیشتر رفتار استاتیکی میکروترنر منحنی مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به این‌که پدیده‌های اسنپ- ترو و پولین ذاتا پدیده‌هایی دینامیکی هستند، بنابراین تحلیل و شناسایی رفتار دینامیکی میکروترنرهای منحنی با توجه به کاربرد حساس آن‌ها در سیستم‌های میکرو اهمیت ویژه‌ای دارد. با استفاده از اصل همیلتون معادله دیفرانسیلی با مشتقات جزئی حرکت میکروترنر به دست آمده است. از یک مدل کاهش مرتبه بر مبنای روش تجزیه گالرکین، برای گسسته سازی و تبدیل معادله حرکت به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و غیرخطی استفاده شده است. از روش‌های دیگری مانند آنالیز اغتشاش و یا حل عددی مستقیم نیز می‌توان برای حل معادله حرکت استفاده کرد، اما استفاده از این روش‌ها به دلیل طولانی بودن پروسه حل مقرون به صرفه نمی‌باشد. روش رانگ- کوتای مرتبه چهار برای حل دستگاه معادلات به کار برده شده است. برای شبیه‌سازی اجزای محدود از نرم‌افزار کامسول مولتی فیزیکس<sup>2</sup> استفاده شده است. تا جایی که مطالعات نگارنده نشان می‌دهد، تا کنون برای تحلیل رفتار الکترواستاتیکی و الکترودینامیکی میکروترنرهای منحنی از نرم‌افزار کامسول استفاده نشده است. نرم‌افزار کامسول به دلیل چند منظوره بودن برای شبیه‌سازی و تحلیل پروژه‌های بین رشته‌ای مناسب می‌باشد.

در ادامه رفتار دینامیکی میکروترنر به همراه تأثیر پارامترهای مختلف بر رسم نمودارهای تاریخچه زمانی و فضای فاز نشان داده شده است. علاوه بر بررسی تغییر شکل، از شبیه‌سازی اجزای محدود برای محاسبه تنش و فرکانس‌های طبیعی نیز استفاده شده است. این پژوهش می‌تواند برای طراحی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی دوپایا مورد استفاده قرار گیرد.

## 2- مدل سازی

در این بخش یک میکروترنر منشوری انعطاف‌پذیر و دارای شکل اولیه منحنی، به طول  $L$  و سطح مقطع مستطیلی  $A$  با پهنای  $b$  و ضخامت  $d$  مطابق با شکل 1 در نظر گرفته می‌شود. فرض ما بر این خواهد بود که میکروترنر از جنس ماده‌ای همگن و همسانگرد با الاستیسیته خطی، مدول یانگ  $E$  و چگالی  $\rho$  ساخته شده باشد. از آنجایی که در میکروترنرها پهنای  $b$  از ضخامت  $d$  خیلی بزرگتر است، می‌بایست از مدول یانگ مؤثر  $\bar{E} = E/(1 - \nu^2)$  استفاده کرد (حالت کرنش صفحه‌ای). لازم به ذکر است که  $\nu$  نسبت پواسون می‌باشد. همان‌طور که در شکل 1 مشاهده می‌شود،  $\bar{w}_0$  شکل اولیه میکروترنر ( $\bar{e} = 0$ )،  $\bar{w}$  شکل میکروترنر پس از بارگذاری،  $g_0$  فاصله الکتروود ثابت تا تکیه‌گاه میکروترنر (گپ)، و  $\bar{f}^e$  بار گسترده الکترواستاتیک ناشی از اعمال ولتاژ می‌باشد. علامت  $(\bar{\cdot})$  نشان دهنده این است که کمیت مورد نظر دارای بعد می‌باشد.

معین نیروهای داخلی میکروترنر از تعادل با فشار کولمب خارج شده و باعث می‌شوند که میکروترنر به سمت الکتروود ثابت کشیده شده (پدیده پولین<sup>3</sup>) و با آن تماس پیدا کند [5]. در سال‌های اخیر سیستم‌های الکترومکانیکی دوپایا که بر پایه میکروترنرهای منحنی پدیدار شده‌اند، به دلیل داشتن کاربردهای گوناگونی مانند حسگر، کلید نوری<sup>4</sup>، میکروشرآ و حافظه غیر فرار<sup>5</sup> به طور فزاینده‌ای در کانون توجه قرار گرفته‌اند [6-8]. ساختارهای دوپایا ساختارهایی هستند که تحت بارگذاری عرضی یکسان ممکن است دو حالت پایدار از خود نشان دهند. به طور رایج انتقال بین دو حالت پایدار را اسنپ- ترو<sup>5</sup> می‌گویند [9]. میکروترنرهای دوپایا لزوماً از بدو ساخت به شکل منحنی نیستند، شکل منحنی می‌تواند ناشی از بارگذاری محوری میکروترنر تخت و در نتیجه کمناش آن نیز باشد [10]. یکی از مزیت‌های استفاده از میکروترنرهای دوپایا امکان استفاده بیش‌تر از فاصله بین الکتروود ثابت و تکیه‌گاه میکروترنر می‌باشد. میکروترنرهای دوپایا می‌توانند تا 84% این فاصله را بدون این‌که به سمت الکتروود ثابت کشیده شوند، به خود اختصاص دهند. این در حالی است که این مقدار برای میکروترنرهای تخت حدود 75% می‌باشد [11,12].

مطالعات آزمایشگاهی و عددی گسترده‌ای برای بررسی رفتار الکترواستاتیکی و الکترودینامیکی میکروترنرهای تخت انجام شده است، و این در حالی است که کم‌تر به تحلیل رفتار میکروترنرهای منحنی پرداخته شده است.

پژوهش‌های انجام گرفته پیرامون بررسی رفتار الکترواستاتیکی و الکترودینامیکی میکروترنرهای منحنی نشان می‌دهند که، امکان گذار بین دو حالت پایدار به پارامترهایی چون میزان انحنای اولیه، ضخامت و شرایط مرزی وابسته می‌باشد [13]. پارک و ها با بررسی‌های تئوری نشان دادند که وجود دو حالت پایدار به تنش مانده محوری نیز بستگی دارد [14]. داس و باترا با استفاده از یک مدل اجزای محدود به این نتیجه دست یافتند که برای ولتاژهای زیاد امکان گذار بین دو حالت پایدار از بین می‌رود [15]. در سال 2010 کریلو و دیک با بررسی رفتار الکترودینامیکی میکروترنر منحنی با میرایی ویسکوز، نشان دادند که میزان انحنای اولیه مورد نیاز برای گذار از حالت پایدار اولیه به ثانویه در بارگذاری دینامیکی نسبت به بارگذاری شبه استاتیکی بیش‌تر می‌باشد [16].

در سال 2008 کریلو و همکارانش نتایج تئوری و آزمایشگاهی پژوهش خودشان در زمینه تحلیل رفتار استاتیکی میکروترنرهای منحنی را منتشر کردند. تطابق خوبی بین نتایج تئوری و آزمایشگاهی این پژوهش مشاهده شد [11]. هو و همکاران با ارائه یک مدل که در آن تغییر شکل‌های غیر خطی نادیده گرفته شده بودند، به بررسی ناپایداری پولین در حالت استاتیکی پرداختند [17]. در سال 2012 مقیمی زند با استفاده از روش اجزای محدود به بررسی ناپایداری پولین برای میکروترنرهای منحنی در حالت دینامیکی و تحت تحریک ولتاژ پله پرداخت [18]. ساری و پاکدمیرلی پاسخ دینامیکی میکروترنر منحنی بر روی بستر الاستیک و دارای شرایط مرزی غیر ایده‌آل را مورد بررسی قرار دادند. وجود تغییر شکل، شیب و یا گشتاور در تکیه‌گاه می‌تواند دلیل شرط مرزی غیر ایده‌آل باشد [19]. در سال 2013 رزیکنی و همکاران با تحلیل نمودارهای فازی و مطالعه پاسخ فرکانسی یک میکروترنر تحت بارگذاری محوری، که آن را با استفاده از نیروی الکترواستاتیک

<sup>1</sup> Pull-in

<sup>2</sup> Optical Switch

<sup>3</sup> Micro-valve

<sup>4</sup> Non-volatile Memory

<sup>5</sup> Snap-through

<sup>6</sup> Reduced Order Model  
<sup>7</sup> COMSOL Multiphysics

$$+ \frac{\bar{E}A}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right)^2 d\bar{x} \quad (4)$$

که  $I_{yy}$  ممان دوم سطح و  $\bar{u}$  جابه جایی در راستای محور  $\bar{x}$  می باشد.

### 3-3- کار نیروی خارجی

نیروی خارجی در واقع همان بار گسترده الکترواستاتیک  $\bar{f}^e$  می باشد. کار این نیرو در رابطه (5) نشان داده شده است.

$$W_e = \int_0^L -\bar{f}^e (\bar{w} - \bar{w}_0) d\bar{x} \quad (5)$$

### 3-4- معادله حرکت

با جایگذاری روابط (3) و (4) و (5) در رابطه (2) و با لحاظ کردن اثر میرایی ویسکوز رابطه (6) بدست می آید.

$$\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \left\{ \frac{\bar{E}I_{yy}}{2} \int_0^L 2 \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2} \right) d\bar{x} d\bar{t} \right. \\ \left. + \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \left\{ \frac{\bar{E}A}{2} \int_0^L 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right) \delta \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right) d\bar{x} d\bar{t} \right. \right. \\ \left. - \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \left\{ \frac{1}{2} \rho A \int_0^L 2 \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \right) \delta \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \right) d\bar{x} d\bar{t} + \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \left\{ \bar{c} \int_0^L \delta \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \right) d\bar{x} d\bar{t} \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \left\{ \int_0^L -\bar{f}^e \delta (\bar{w} - \bar{w}_0) d\bar{x} \right\} d\bar{t} = 0 \right. \right. \quad (6)$$

حال با استفاده از انتگرال جزء به جزء رابطه (6) ساده شده و معادلات حاکم بر رفتار میکرو تیر به شکل روابط (7,8) حاصل می شوند [23].

$$-\bar{E}A \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right) = 0 \quad (7)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \bar{c} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \bar{E}I_{yy} \left( \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} - \frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^4} \right) - \bar{E}A \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{f}^e = 0 \quad (8)$$

این امکان وجود دارد که روابط (7) و (8) را به صورت یک رابطه مجزا نوشت. رابطه (7) نشان می دهد که کرنش ناشی از کشیدگی صفحه میانی فقط تابعی از زمان می باشد، بنابراین می توان از آن نسبت به  $\bar{x}$  انتگرال گرفت. با انتگرال گیری از رابطه (7)، رابطه (9) بدست می آید.

$$\varepsilon_x(\bar{t}) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \quad (9)$$

با انتگرال گیری از رابطه (9) در طول میکرو تیر رابطه (10) حاصل می شود.

$$\varepsilon_x(\bar{t}) = \frac{1}{L} (\bar{u}(L, \bar{t}) - \bar{u}(0, \bar{t})) + \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] d\bar{x} \quad (10)$$

با توجه به این که میکرو تیر دو سرگیردار می باشد بنابراین  $\bar{u}$  در نقاط ابتدایی و انتهایی در هر لحظه، برابر صفر می باشد.

$$\varepsilon_x(\bar{t}) = \frac{1}{2L} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] d\bar{x} \quad (11)$$

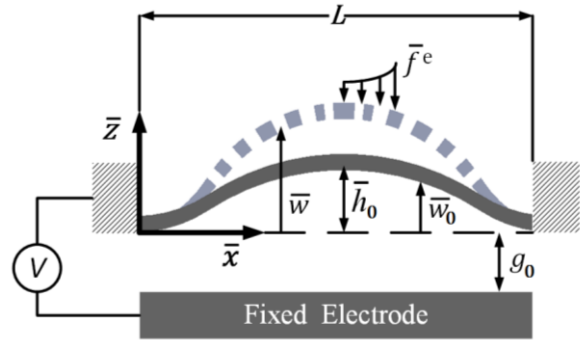


Fig. 1 Schematic model of curved microbeam under electrostatic actuation

شکل 1 مدل شمای میکرو تیر منحنی تحت تحریک الکترواستاتیک

رابطه (1) شکل اولیه میکرو تیر را توصیف می کند.

$$\bar{w}_0(\bar{x}) = \bar{w}(\bar{x}, 0) = \bar{h}_0 z_0(\bar{x}) \quad (1)$$

که  $\bar{h}_0$  خیز اولیه نقطه میانی میکرو تیر نسبت به نقاط انتهایی، و  $z_0$  یک تابع بدون بعد بوده و به گونه ای انتخاب می شود که  $\max_{0 \leq \bar{x} \leq L} [Z_0(\bar{x})] = 1$  باشد. لازم به ذکر است که جابه جایی عرضی هر نقطه از میکرو تیر برابر  $\bar{w} - \bar{w}_0$  می باشد. با فرض  $\bar{d} \ll L$  و  $\bar{h}_0 \ll L$  و نیز کوچک بودن تغییر شکل ها در برابر طول و ضخامت میکرو تیر می توان در چارچوب تئوری تیر اویلر-برنولی و ترکیب آن با تقریب کمان های کم عمق<sup>1</sup> رفتار میکرو تیر را توصیف کرد [24,23].

### 3- معادلات حاکم

با استفاده از اصل همپلتون تعمیم یافته می توان معادله حرکت میکرو تیر را استخراج کرد [25]. این اصل در رابطه (2) نشان داده شده است.

$$\delta \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} (U - T - W_e) d\bar{t} = 0 \quad (2)$$

که  $T$  انرژی جنبشی،  $U$  انرژی پتانسیل کرنشی و  $W_e$  کار نیروی خارجی می باشد.

### 3-1- انرژی جنبشی

با توجه به این که هدف بررسی رفتار دینامیکی میکرو تیر می باشد، بنابراین انرژی جنبشی از جمله انرژی های مبادله شده در طول حرکت میکرو تیر می باشد. رابطه (3) نشان دهنده انرژی جنبشی میکرو تیر می باشد.

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \right)^2 d\bar{x} \quad (3)$$

لازم به ذکر است در محاسبه انرژی جنبشی، از اثر اینرسی محوری به دلیل ناچیز بودن صرف نظر شده است.

### 3-2- انرژی پتانسیل کرنشی

انرژی پتانسیل کرنشی ناشی از خمش و کشیدگی صفحه میانی<sup>2</sup> میکرو تیر بوده و به صورت رابطه (4) قابل محاسبه است [23].

$$U = \frac{\bar{E}I_{yy}}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2} \right)^2 d\bar{x}$$

<sup>1</sup> Shallow arch approximation

<sup>2</sup> Mid-plane stretching

که  $\lambda_i$  پاسخ معادله  $1 - \cos \lambda_i \cosh \lambda_i = 0$  می‌باشد، و ضریب  $C_i$  طوری در نظر گرفته می‌شود که  $\max_{0 \leq x \leq 1} [\varphi_i(x)] = 1$  باشد.

شکل موده‌های دقیق میکروتیر منحنی با استفاده از خطی سازی رابطه (16) به دست می‌آیند، و همچنین نشان داده شده است که تأثیر ناچیزی بر دقت نتایج دارند [27]. با جایگذاری رابطه (17) در رابطه (16) و با استفاده از روش گالرکین یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و غیرخطی به شکل رابطه (19) بدست می‌آید.

$$M\ddot{q} + cM\dot{q} + B(q - q_0) + \alpha(q^T S q - q_0^T S q_0) S q + \beta F = 0 \quad (19)$$

که  $q = \{q_i\}$  بردار مختصات تعمیم یافته زمانی و  $( )^T$  نشان دهنده ترانهاده ماتریس می‌باشد. ماتریس‌های  $B = [b_{ij}]$  و  $M = [m_{ij}]$  و  $S = [s_{ij}]$  به ترتیب مربوط به سفتی خمشی، جرم و کشیدگی می‌باشند. مولفه‌های این سه ماتریس به همراه مؤلفه‌های بردار نیروی تعمیم یافته  $F = \{f_i^e\}$  در رابطه‌های (20) و (21) نشان داده شده‌اند.

$$b_{ij} = \delta_{ij} \int_0^1 \varphi_i'' \varphi_j'' dx \quad (20-الف)$$

$$m_{ij} = \delta_{ij} \int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx \quad (20-ب)$$

$$s_{ij} = \delta_{ij} \int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' dx \quad (20-پ)$$

$$f_i^e = \int_0^1 \frac{\varphi_i}{(1 + \sum_{j=1}^n q_j \varphi_j)^2} dx \quad (21)$$

که  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر می‌باشد. از رابطه (13) با برابر صفر قرار دادن ترم‌های مشتقات زمانی می‌توان برای تحلیل رفتار الکترواستاتیکی استفاده کرد.

ساده‌ترین مدل فشرده، مدل یک درجه آزادی می‌باشد که از رابطه (19) و تنها با در نظر گرفتن اولین ترم رابطه (17) حاصل می‌شود. لازم به ذکر است که انتگرال رابطه (21) حتی در این مورد که ساده‌ترین شکل خود را دارد نیز حل تحلیلی ندارد، اما به طور جایگزین می‌توان  $\varphi_1$  را به صورت  $\varphi_1 \approx [1 - \cos(2\pi x)]/2$  تقریب زد [28] که در این صورت انتگرال مذکور حل تحلیلی خواهد داشت.

$$f_1^e = \int_0^1 \frac{\varphi_1}{(1 + q_1 \varphi_1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{(1 + q_1)^3}} \quad (22)$$

با در نظر گرفتن  $h_0 \varphi_1$  به عنوان شکل اولیه میکروتیر، یک معادله دیفرانسیل معمولی و غیرخطی بر حسب  $q_1 = q$  به صورت رابطه (23) به دست می‌آید.

$$m_{11}\ddot{q} + cm_{11}\dot{q} + b_{11}(q - h_0) + \alpha s_{11}^2 (q^2 - h_0^2) q + \frac{\beta}{2\sqrt{(1 + q)^3}} = 0 \quad (23)$$

که  $b_{11} = 198.462$ ،  $m_{11} = 0.396$  و  $s_{11} = 4.878$  بوده و در شرط اولیه برای معادله به صورت  $q(0) = h_0$  و  $\dot{q}(0) = 0$  می‌باشد. لازم به ذکر است که  $-1 \leq q \leq h_0$  می‌باشد.

از روش‌های دیگری مانند آنالیز اغتشاش و یا حل عددی مستقیم نیز می‌توان برای حل رابطه (16) استفاده کرد، اما استفاده از این روش‌ها به دلیل طولانی بودن پروسه حل مقرون به صرفه نمی‌باشد. دستگاه معادلات دیفرانسیل به دست آمده از مدل کاهش مرتبه نسبتاً ساده بوده و پروسه حل آن به مراتب ساده‌تر از سایر روش‌ها می‌باشد.

با جایگذاری رابطه (11) در رابطه (8) معادله حرکت میکروتیر به شکل رابطه (12) به دست می‌آید.

$$\rho A \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \bar{c} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \bar{E} I_{yy} \left( \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} - \frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^4} \right) - \frac{\bar{E} A}{2L} \left\{ \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] dx \right\} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{f}^e = 0 \quad (12)$$

رابطه‌های (13) و (14) شرایط مرزی و اولیه را نشان می‌دهند.

$$\bar{w}(0, \bar{t}) = \bar{w}(L, \bar{t}) = 0 \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}(0, \bar{t}) = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}(L, \bar{t}) = 0 \quad (13)$$

$$\bar{w}(\bar{x}, 0) = \bar{w}_0 \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}}(\bar{x}, 0) = 0 \quad (14)$$

برای سادگی کار از اثرات حاشیه‌ای میدان الکتریکی چشم پوشی کرده و بار گسترده الکترواستاتیکی  $\bar{f}^e$ ، فرمول خازن‌های موازی تقریب زده می‌شود [26].

$$\bar{f}^e(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\epsilon_0 \bar{b} V^2}{2(g_0 + \bar{w}(\bar{x}, \bar{t}))^2} \quad (15)$$

که  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$  F/m ضریب گذردهی فضای آزاد و ولتاژ اعمال شده بین الکتروود ثابت و میکروتیر می‌باشد.

در نهایت به جهت سهولت رابطه (12) را به صورت بی‌بعد بازنویسی کرده و در ادامه از آن استفاده می‌شود (رابطه 16).

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) - \alpha \left\{ \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\beta}{(1 + w)^2} = 0 \quad (16)$$

جدول 1 نشان دهنده تعریف پارامترهای بی‌بعد رابطه (16) می‌باشد.

#### 4- مدل کاهش مرتبه

برای گسسته‌سازی معادله حرکت از یک مدل کاهش مرتبه بر مبنای روش گالرکین استفاده می‌شود. بدین منظور شکل میکروتیر در حالت اولیه و پس از بارگذاری به صورت سری‌های روابط (17) در نظر گرفته می‌شود.

$$w(x, t) \approx \sum_{i=1}^n q_i(t) \varphi_i(x) \quad w(x, 0) = \sum_{i=1}^n q_{0i} \varphi_i(x) \quad (17)$$

که در آن  $q_i(t)$  مختصات تعمیم یافته زمانی و  $\varphi_i(x)$  آمین تابع شکل مود تیر تخت دوسر گیردار می‌باشد.

$$\varphi_i(x) = C_i (\cos \lambda_i x - \cosh \lambda_i x - \frac{\cos \lambda_i - \cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i - \sinh \lambda_i} (\sin \lambda_i x - \sinh \lambda_i x)) \quad (18)$$

جدول 1 کمیت‌های بدون بعد

تعریف	کمیت بدون بعد
مختصه طول	$x = \bar{x}/L$
زمان	$t = \bar{t} \sqrt{\bar{E} I_{yy} / (\rho A L^4)}$
شکل اولیه	$w_0 = \bar{w}_0 / g_0$
شکل پس از بارگذاری	$w = \bar{w} / g_0$
خیز نقطه میانی	$h_0 = \bar{h}_0 / g_0$
ضخامت	$d = \bar{d} / g_0$
پارامتر کشیدگی	$\alpha = (g_0^2 A) / (2 I_{yy}) = 6 / d^2$
پارامتر میرایی	$c = \bar{c} \sqrt{L^4 / (\rho A \bar{E} I_{yy})}$
پارامتر ولتاژ	$\beta = (\epsilon_0 \bar{b} V^2 L^4) / (2 g_0^3 \bar{E} I_{yy})$

## 5- شبیه سازی اجزای محدود

برای شبیه سازی اجزای محدود از نرم افزار کامسول مولتی فیزیکس استفاده شده است. نرم افزار کامسول به دلیل چند منظوره بودن برای پژوهش های بین رشته ای مناسب می باشد. البته نرم افزارهای چند فیزیکی دیگری نیز موجود می باشند، اما نقطه قوت نرم افزار کامسول در این است که، مدل سازی سیستم هایی که معادلات حاکم بر آن ها از حوزه هایی کاملاً متفاوت می باشد، بسیار ساده تر و سریع تر انجام می گیرد. دلیل این امر آن است که به صورت پیش فرض ماژول هایی برای شبیه سازی و تحلیل سیستم ها در نظر گرفته شده است.

در نرم افزار کامسول ماژول مخصوصی که برای شبیه سازی و تحلیل سیستم های میکروالکترومکانیکی در نظر گرفته شده، یکی از زیر شاخه های فیزیک مکانیک ساختاری<sup>1</sup> با عنوان الکترومکانیک<sup>2</sup> می باشد.

مزیت دیگر نرم افزار کامسول این است که در این نرم افزار امکان ترسیم اشکال هندسی توسط روابط ریاضی وجود دارد، بنابراین شکل میکرو تیر بررسی شده توسط نرم افزار دقیقاً همان  $h_0\phi_1$  می باشد.

مدل سازی انجام شده در نرم افزار به صورت دو بعدی بوده و سایر فرض ها مانند همگن و همسانگرد و با الاستیک خطی بودن میکرو تیر و حالت کرنش صفحه ای از طریق گزینه های موجود در نرم افزار نیز برای شبیه سازی اعمال شده است. با توجه به شکل هندسی میکرو تیر از مش مثلثی و با درجه کیفیت خیلی خوب استفاده شده است.

## 6- نتایج و بحث

در این بخش نتایج حاصل از حل دستگاه معادلات (19) به همراه نتایج شبیه سازی اجزای محدود، برای تحلیل رفتار الکترو دینامیکی یک میکرو تیر منحنی زنگوله ای شکل ( $w_0 = h_0\phi_1$ )، از جنس پلی سیلیکون با ابعاد و مشخصات داده شده در جدول 2 ارائه شده است. به منظور رسم نمودارهای تاریخچه زمانی، دستگاه معادلات (19) با در نظر گرفتن سه ترم اول رابطه (17) و با استفاده از روش رانگ-کوتا مرتبه چهار حل شده است. روش رانگ-کوتا یک روش قوی و پر کاربرد برای حل انواع معادلات دیفرانسیل معمولی می باشد. از مدل یک درجه آزادی نیز برای رسم فضای فاز متناظر استفاده شده است.

برای اطمینان از درستی نتایج به دست آمده، ولتاژ اسنپ-ترو و پولین در حالت استاتیکی مورد بحث قرار می گیرد. در پژوهش آقایان اوکاد و یونس [29] برای میکرو تیر مورد نظر ولتاژ استاتیکی اسنپ-ترو برابر  $V_S = 88 V$  و ولتاژ استاتیکی پولین برابر  $V_{PI} = 106 V$  گزارش شده است. در تحقیق حاضر با توجه به شکل 2 ولتاژ استاتیکی اسنپ-ترو برابر  $V_S = 90.7 V$  و ولتاژ استاتیکی پولین برابر  $V_{PI} = 111.6 V$  می باشد (بر حسب پارامتر ولتاژ  $\beta_S = 185$  و  $\beta_{PI} = 280$ )، درصد خطا برای ولتاژ اسنپ-ترو برابر 3% و برای ولتاژ پولین برابر 5% می باشد. مشاهده می شود که تطابق خوبی وجود دارد. همچنین همان طور که در شکل 2 مشاهده می شود تطابق بسیار خوبی نیز بین مدل کاهش مرتبه و شبیه سازی اجزای محدود دیده می شود. مقادیر ولتاژ استاتیکی اسنپ-ترو و پولین محاسبه شده توسط نرم افزار کامسول به ترتیب برابر  $V_S = 88.8 V$  و  $V_{PI} = 107 V$  می باشد. این نتایج با تعداد مش 12407 حاصل شده است. لازم به ذکر است به دلیل کوچک بودن ابعاد میکرو تیر، تعداد مش تأثیری کمتر از 1% بر دقت نتایج دارد.

جدول 2 مشخصات هندسی و مکانیکی میکرو تیر منحنی

Table 2 Geometrical and mechanical properties of the curved microbeam

پارامتر	مقدار
طول ( $L$ )	1000 $\mu\text{m}$
پهنا ( $\bar{b}$ )	30 $\mu\text{m}$
ضخامت ( $\bar{d}$ )	2.4 $\mu\text{m}$
خیز اولیه نقطه میانی ( $\bar{h}_0$ )	3.5 $\mu\text{m}$
گپ ( $g_0$ )	10.1 $\mu\text{m}$
چگالی ( $\rho$ )	2332 $\text{kgm}^{-3}$
مدول یانگ موثر ( $\bar{E}$ )	166 GPa

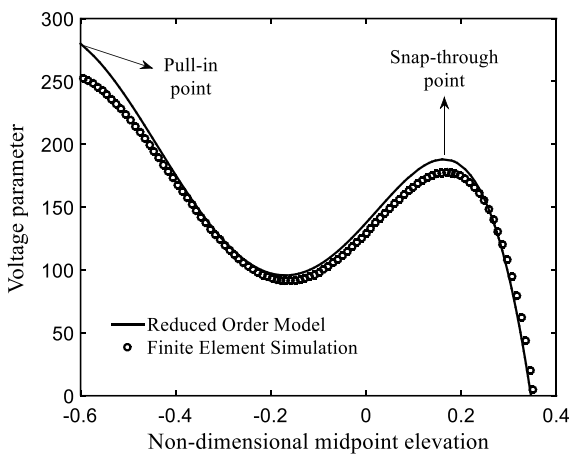


Fig. 2 Non-dimensional midpoint elevation of the curved microbeam versus different voltage parameter

شکل 2 خیز بی بعد نقطه میانی میکرو تیر بر حسب مقادیر مختلف پارامتر ولتاژ

در شکل 3 بیشترین مقدار تنش در طول میکرو تیر نشان داده شده است. همان طور که مشخص است در هنگام وقوع ناپایداری پولین احتمال شکست از ناحیه تکیه گاه ها به دلیل مقدار بالای تنش وجود دارد.

در تحقیق حاضر برای بررسی رفتار الکترو دینامیکی میکرو تیر، تحریک به صورت ناگهانی و توسط ولتاژ پله ای صورت می گیرد. رابطه (23) نشان دهنده پارامتر ولتاژ برای این حالت می باشد.

$$\beta(t) = \beta_1 H(t) \quad (24)$$

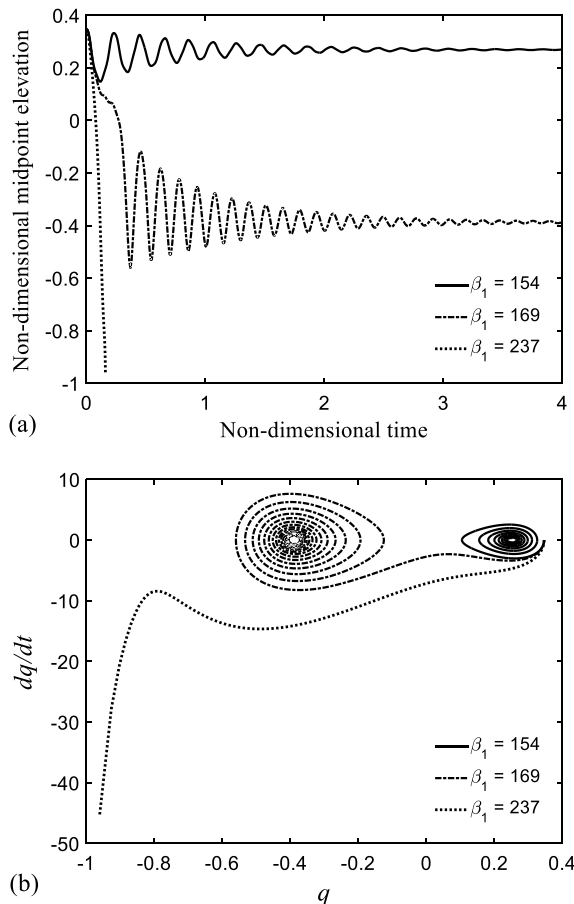
که  $H(t)$  تابع پله ای هویساید و  $\beta_1$  بزرگی پارامتر ولتاژ می باشد.

اگرچه می توان بارگذاری های دینامیکی گوناگونی (ضربه ای، هارمونیک) را جهت تحریک در نظر گرفت، اما اغلب پایداری سازه ها در حالت بارگذاری ناگهانی برای یک مدت زمان نامحدود سنجیده می شوند. البته این نوع تحریک اهمیت کاربردی نیز دارد، برای مثال در سویچ ها زمان عملکرد باید حداقل باشد و بارگذاری به شکل تابع پله موثر خواهد بود. در شکل 4 سه پاسخ ممکن برای میکرو تیر مورد نظر با نسبت میرایی  $\zeta = 0.05$  تحت تحریک رابطه (23) نشان داده شده است. پارامتر میرایی توسط رابطه تخت دو سرگیردار می باشد.

در شکل 4 برای سه مقدار متفاوت ولتاژ رفتار دینامیکی میکرو تیر نشان داده شده است. همان طور که در شکل 4-a مشاهده می شود، برای یک مقدار ولتاژ پایین ( $\beta_1 = 154$ )، میکرو تیر حول یک موقعیت پایدار نزدیک به موقعیت اولیه نوسان می کند. برای ولتاژ با مقداری بیش تر از یک مقدار بحرانی مشخص ( $\beta_1 > \beta_S$ )، که با عنوان ولتاژ دینامیکی اسنپ-ترو شناخته

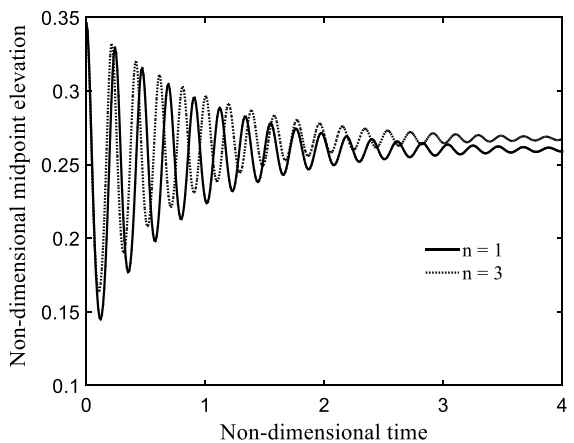
<sup>1</sup> Structural Mechanics

<sup>2</sup> Electromechanics



**Fig. 4** Time history response of the microbeam to step actuation (a) and corresponding phase plane (b)

شکل 4 نمودار تاریخچه زمانی پاسخ میکروتیر به تحریک پله (a) و فضای فاز متناظر (b)



**Fig. 5** Comparison between dynamic response of the microbeam to step actuation using first mode shape and three first mode shapes for  $\beta_1 = 154$  &  $\zeta = 0.05$

شکل 5 مقایسه بین پاسخ دینامیکی میکروتیر به تحریک پله با در نظر گرفتن شکل مود اول و سه شکل مود اول برای  $\beta_1 = 154$  و  $\zeta = 0.05$

$h_0 < 0.28$  میکروتیر به دومین حالت پایدار انتقال نمی‌یابد و تنها دچار ناپایداری پولین می‌گردد.

در شکل 9 اثر طول گپ بر رفتار دینامیکی میکروتیر نشان داده شده

می‌شود، انتقال میکروتیر به حالت پایدار دوم مشاهده می‌شود. در نهایت با افزایش ولتاژ به یک مقدار بزرگ ( $\beta_1 = \beta_{p1}$ ) میکروتیر دچار ناپایداری پولین شده و با الکتروود ثابت تماس پیدا می‌کند. در شکل 4-b فضای فاز متناظر نشان داده شده است. برای هر سه حالت مشاهده می‌شود که نمودار فاز به موقعیت نهایی میکروتیر همگرا می‌باشد.

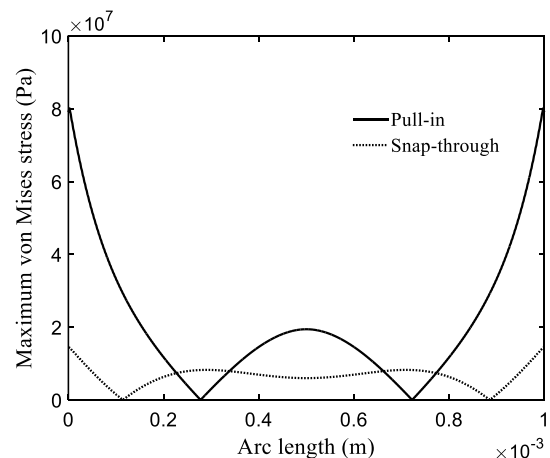
در شکل 5 تأثیر تعداد ترم‌های رابطه (17) بر پاسخ دینامیکی میکروتیر بررسی شده است. همان‌طور که در شکل 5 مشاهده می‌شود مدل یک درجه آزادی با دقت مطلوبی می‌تواند رفتار سیستم را توصیف نماید. دلیل این امر آن است که نحوه بارگذاری به گونه‌ای می‌باشد که سیستم تنها شکل مود اول را تجربه می‌کند.

افزایش میرایی ضمن کاهش مدت و دامنه نوسان می‌تواند، از انتقال میکروتیر به دومین حالت پایدار و یا حتی ناپایداری پولین نیز جلوگیری کند، این اثر در شکل 6 برای  $\beta_1 = 169$ ، که ولتاژ دینامیکی اسنپ-ترو برای  $\zeta = 0.05$  می‌باشد، نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل 6-a مشخص است، کاهش میرایی تأثیری بر پدیده اسنپ-ترو نداشته و تنها باعث افزایش مدت و دامنه نوسان شده است. این در حالی است که افزایش میرایی از انتقال میکروتیر به دومین حالت پایدار جلوگیری کرده است.

تغییرات میرایی بر روی ناپایداری پولین نیز اثر مشابهی دارد. کاهش میرایی باعث می‌شود تا میکروتیر سریع‌تر به سمت الکتروود ثابت جذب شود. و افزایش آن تا حد مشخصی می‌تواند از ناپایداری پولین جلوگیری کند. در شکل 7 برای  $\beta_1 = 237$ ، که ولتاژ دینامیکی پولین برای  $\zeta = 0.05$  می‌باشد، اثر افزایش میرایی نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود از ناپایداری پولین جلوگیری شده است.

در شکل 8 اثر مقدار خیز اولیه نقطه میانی، با ثابت بودن سایر ابعاد بر پدیده‌های اسنپ-ترو و پولین نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش خیز نقطه میانی، ولتاژ بحرانی پولین کاهش می‌یابد.

همان‌طور که در شکل 8 مشاهده می‌شود میکروتیر تخت بیشترین مقدار ولتاژ پولین را داراست. از طرف دیگر وجود دومین حالت پایدار برای مقادیر کوچک خیز اولیه نقطه میانی امکان پذیر نیست و می‌بایست مقدار خیز اولیه نقطه میانی از حد مشخصی بیشتر باشد. دلیل این مورد این است که با کوچک‌تر شدن  $h_0$  شکل منحنی میکروتیر به حالت تخت نزدیک‌تر می‌شود و بنابراین رفتاری مانند میکروتیر تخت خواهیم داشت. با توجه به شکل 8 برای



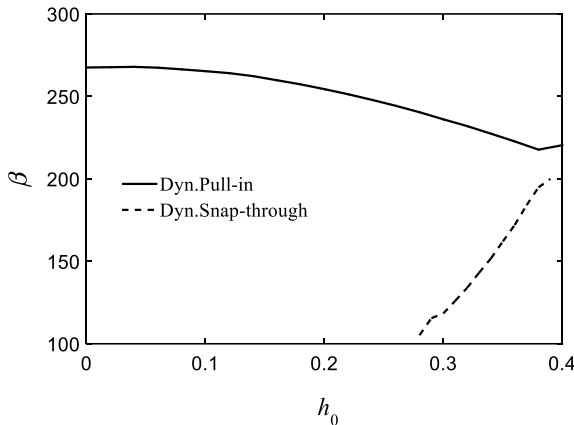
**Fig. 3** Maximum von Mises stress for snap-through and pull-in configuration

شکل 3 ماکزیمم تنش در معیار ون مایسس برای حالت‌های اسنپ-ترو و پولین

می‌شود، روندی افزایشی به خود می‌گیرد. دلیل این امر تأثیر غیرخطی سفتی خمشی و کشیدگی صفحه میانی بر رفتار میکروترنر می‌باشد. با توجه به شکل 9 پدیده اسنپ-ترو به طول گپ نیز وابسته می‌باشد. نرم‌افزار کامسول اطلاعات مفید دیگری که محاسبه آن‌ها به صورت عددی مشکل است را می‌تواند در اختیار ما قرار دهد. به طور مثال در تحریک هارمونیک میکروترنر، تابع ولتاژ به شکل زیر می‌باشد.

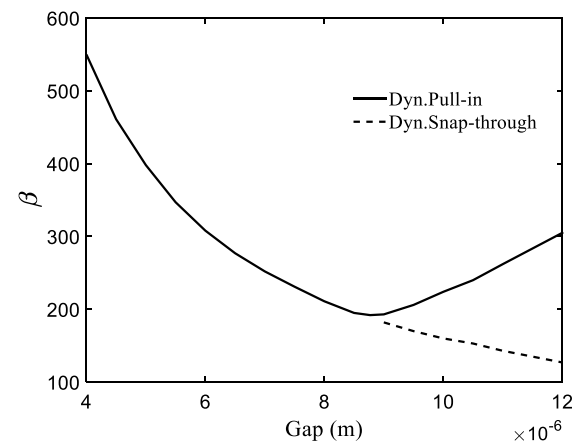
$$V(t) = V_{DC} + V_{AC} \cos(2\pi f t) \quad (25)$$

در این نوع تحریک، میکروترنر برای انتقال به دومین حالت پایدار علاوه بر مقدار ولتاژ به فرکانس تحریک نیز وابسته می‌باشد. مطالعات انجام شده نشان می‌دهند که در فرکانس‌های تحریک نزدیک به فرکانس‌های طبیعی میکروترنر پدیده اسنپ-ترو رخ می‌دهد. بنابراین در طراحی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی دوپایا برای کاربردهایی که از این نوع تحریک استفاده می‌شود (مانند فیلتر و تشدیدگر) دانستن فرکانس‌های طبیعی اهمیت زیادی دارد. در جدول 3 پنج فرکانس طبیعی اول میکروترنر مورد نظر که توسط نرم‌افزار محاسبه شده‌اند با مقادیر گزارش شده توسط مرجع [27] مقایسه شده‌اند. برای مقایسه با مرجع مقادیر بی‌بعد شده در جدول آورده شده است.



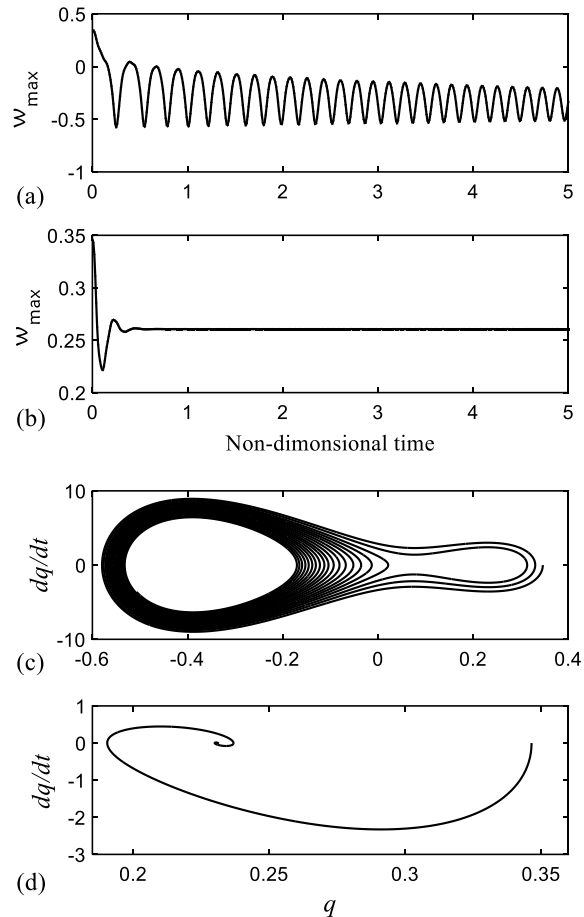
**Fig. 8** Critical dynamic snap-through & dynamic pull-in values of the voltage parameter versus different initial midpoint elevation

شکل 8 مقادیر بحرانی ولتاژ دینامیکی اسنپ-ترو و پولین بر حسب مقادیر مختلف خیز اولیه نقطه میانی



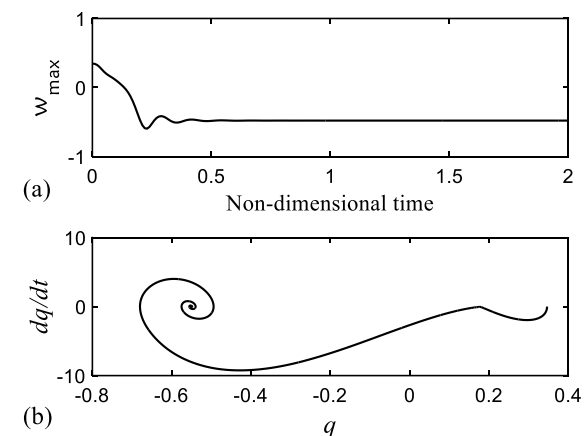
**Fig. 9** Critical dynamic snap-through & dynamic pull-in values of the voltage parameter versus different gap values

شکل 9 مقادیر بحرانی ولتاژ دینامیکی اسنپ-ترو و پولین بر حسب مقادیر مختلف گپ



**Fig. 6** Time history response of the microbeam to step actuation (a),(b) and corresponding phase plane (c),(d) for two different damping ratio, (a) & (c) for  $\zeta = 0.005$ , (b) & (d) for  $\zeta = 0.5$ ,  $\beta_1 = 169$

شکل 6 نمودار تاریخچه زمانی پاسخ میکروترنر به تحریک پله (a),(b) و فضای فاز متناظر (c),(d) برای دو نسبت میرایی متفاوت، (a),(c) برای  $\zeta = 0.005$  و (b),(d) برای  $\zeta = 0.5$ ، برای هر دو نسبت میرایی  $\beta_1 = 169$



**Fig. 7** Time history response of the microbeam to step actuation (a) and corresponding phase plane (b), for  $\zeta = 0.5$  &  $\beta_1 = 237$

شکل 7 نمودار تاریخچه زمانی پاسخ میکروترنر به تحریک پله (a) و فضای فاز متناظر (b)، برای  $\zeta = 0.5$  و  $\beta_1 = 237$

است. همان‌طور که مشاهده می‌شود ابتدا با افزایش طول گپ ولتاژ بحرانی پولین کاهش می‌یابد و سپس از نقطه‌ای که پدیده اسنپ-ترو مشاهده

فضای فاز، تأثیر پارامترهای مختلف بر رفتار دینامیکی میکرو تیر بررسی شد. میکرو تیرهای منحنی تحت بارگذاری عرضی، ممکن است دو حالت پایدار را از خود نشان دهند. به طور رایج انتقال بین دو حالت پایدار را اسنپ-ترو می گویند. ناپایداری پولین هنگامی اتفاق می افتد که نیروهای داخلی میکرو تیر از تعادل با فشار الکترواستاتیک خارج شده و میکرو تیر به سمت الکتروود ثابت کشیده شده و با آن تماس پیدا می کند. نتایج نشان داد که افزایش میرایی ویسکوز تأثیر قابل توجهی بر رفتار دینامیکی میکرو تیر منحنی دارد، به طوری که می تواند از انتقال میکرو تیر به دومین حالت پایدار و یا حتی ناپایداری پولین جلوگیری کند. بنابراین به هنگام طراحی سیستم های میکروالکترومکانیکی دو پایا باید به کم فشار یا پر فشار بودن محیط استفاده از این سیستم ها توجه شود. از طرفی دیگر رفتار دینامیکی میکرو تیر به هندسه نیز وابسته می باشد، در ترسیم مقادیر بحرانی ولتاژ اسنپ-ترو و پولین برحسب خیز اولیه نقطه میانی مشاهده شد که با کم تر شدن خیز اولیه نقطه میانی از مقداری خاص امکان انتقال به دومین حالت پایدار از بین می رود. همچنین مشاهده شد که طول گپ نیز بر رفتار دینامیکی میکرو تیر تأثیر دارد. مطابق شکل های 7 و 8 گذار به دومین حالت پایدار به ازای حداقلی از مقدار خیز اولیه و طول گپ امکان پذیر می باشد. بدین معنی که با کم تر شدن مقدار خیز اولیه و طول گپ از مقداری مشخص امکان صورت گرفتن پدیده اسنپ-ترو از بین می رود. تغییر نوع تحریک نیز بر رفتار دینامیکی

فرکانس های طبیعی میکرو تیر تابعی از ولتاژ نیز هستند. تغییرات اولین فرکانس طبیعی بر حسب ولتاژ در شکل 10 نشان داده شده است. مشاهده می شود که با افزایش ولتاژ فرکانس طبیعی کاهش می یابد. این اثر با عنوان نرم شدگی فزونی شناخته می شود [27].

همان طور که در مقدمه اشاره شد یکی از مزیت های میکرو تیرهای منحنی نسبت به میکرو تیرهای تخت، امکان نزدیک تر شدن میکرو تیر منحنی به الکتروود ثابت بوده بدون این که دچار ناپایداری پولین گردد. از تحریک های مختلفی جهت این کار می توان استفاده کرد، یکی از انواع این تحریک ها تحریک دو پله ای می باشد.

رابطه (26) نشان دهنده پارامتر ولتاژ برای تحریک دو پله ای می باشد.

$$\beta(t) = \beta_1 H(t) - (\beta_1 - \beta_2) H(t - t_1) \quad (26)$$

که  $\beta_2$  بزرگی پارامتر ولتاژ پله دوم بوده و پس از گذشت بازه زمانی  $t_1$  جایگزین  $\beta_1$  می شود. در شکل 11 یک حالت از پاسخ دینامیکی میکرو تیر مورد بحث به این تحریک نشان داده شده است. در این حالت شاهد رفتار پیچیده تری از میکرو تیر نیز هستیم، به طوری که در شکل 11 نشان داده شده است، میکرو تیر ابتدا به حالت پایدار دوم منتقل شده و پس از تعدادی نوسان به موقعیتی نزدیک به حالت اولیه باز می گردد.

### 7- نتیجه گیری

در این پژوهش رفتار دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی یک میکرو تیر با شکل اولیه منحنی تحت تحریک الکترواستاتیک پله بررسی شد. از یک مدل کاهش مرتبه جهت گسسته سازی معادله حرکت میکرو تیر و تبدیل آن به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده شد. دستگاه معادلات دیفرانسیل به دست آمده از مدل کاهش مرتبه نسبتاً ساده بوده و پروسه حل آن به مراتب ساده تر از سایر روش ها می باشد. همچنین از نرم افزار کامسول برای شبیه سازی اجزای محدود استفاده شد. با رسم نمودارهای تاریخچه زمانی و

جدول 3 فرکانس های طبیعی میکرو تیر

فرکانس طبیعی $f_i$	شبیه سازی	روش عددی [27]	درصد خطا
$f_1$	44.1	42.46	3.86
$f_2$	63.2	61.64	2.53
$f_3$	131.3	128.76	1.97
$f_4$	204.7	201.37	1.69
$f_5$	306.8	300	2

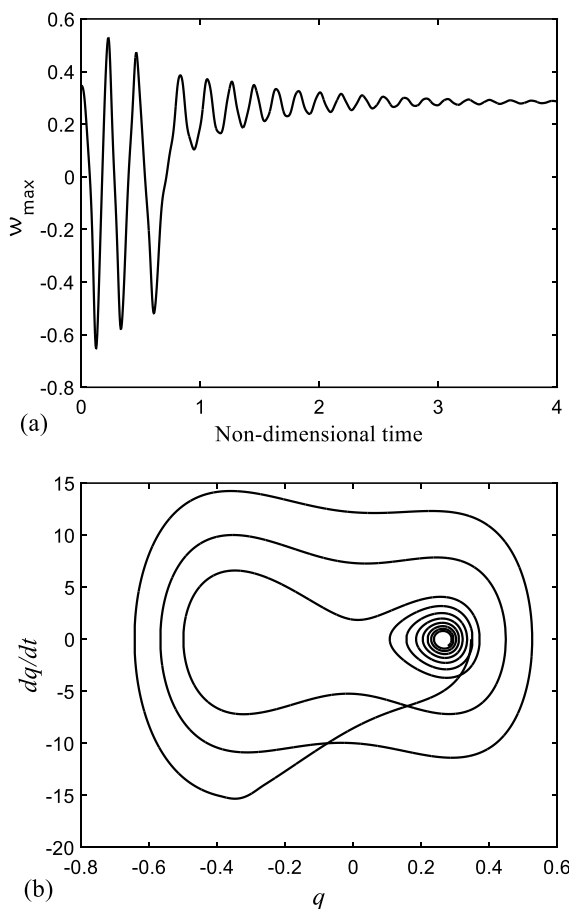


Fig. 11 Time history response of the microbeam to two step actuation (a) and corresponding phase plane (b), for  $\beta_1 = 270$ ,  $\beta_2 = 140$ ,  $t_1 = 0.1$  &  $\zeta = 0.05$

شکل 11 نمودار پاسخ زمانی میکرو تیر به تحریک دو پله ای (a) و فضای فاز متناظر (b)، برای  $\beta_1 = 270$ ،  $\beta_2 = 140$ ،  $t_1 = 0.1$  و  $\zeta = 0.05$

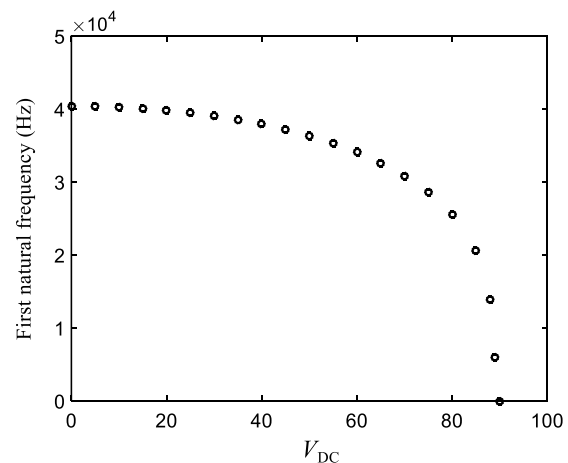


Fig. 10 First natural frequency versus voltage

شکل 10 تغییرات فرکانس طبیعی اول بر حسب ولتاژ



mechanical buckling, *Applied Physics Letters*, Vol. 98, No. 24, pp. 241104, 2011.

[7] C. Goll, W. Bacher, B. Büstgens, D. Maas, W. Menz, W. Schomburg, Microvalves with bistable buckled polymer diaphragms, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 6, No. 1, pp. 77, 1996.

[8] D. Roodenburg, J. Spronck, H. Van der Zant, W. Venstra, Buckling beam micromechanical memory with on-chip readout, *Applied Physics Letters*, Vol. 94, No. 18, pp. 183501, 2009.

[9] L. Medina, R. Gilat, S. Krylov, Symmetry breaking in an initially curved micro beam loaded by a distributed electrostatic force, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49, No. 13, pp. 1864-1876, 2012.

[10] S. Krylov, B. R. Ilic, S. Lulinsky, Bistability of curved microbeams actuated by fringing electrostatic fields, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 66, No. 3, pp. 403, 2011.

[11] S. Krylov, B. R. Ilic, D. Schreiber, S. Seretensky, H. Craighead, The pull-in behavior of electrostatically actuated bistable microstructures, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 18, No. 5, pp. 055026, 2008.

[12] W. M. Zhang, H. Yan, Z. K. Peng, G. Meng, Electrostatic pull-in instability in MEMS/NEMS: A review, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 214, pp. 187-218, 2014.

[13] X. Chen, S. Meguid, Snap-through buckling of initially curved microbeam subject to an electrostatic force, *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 471, No. 2177, pp. 20150072, 2015.

[14] S. Park, D. Hah, Pre-shaped buckled-beam actuators: theory and experiments, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 148, No. 1, pp. 186-192, 2008.

[15] K. Das, R. Batra, Pull-in and snap-through instabilities in transient deformations of microelectromechanical systems, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 19, No. 3, pp. 035008, 2009.

[16] S. Krylov, N. Dick, Dynamic stability of electrostatically actuated initially curved shallow micro beams, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Vol. 22, No. 6, pp. 445-468, 2010.

[17] Y. Hu, J. Yang, S. Kitipornchai, Pull-in analysis of electrostatically actuated curved micro-beams with large deformation, *Smart Materials and Structures*, Vol. 19, No. 6, pp. 065030, 2010.

[18] M. M. Zand, The dynamic pull-in instability and snap-through behavior of initially curved microbeams, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 19, No. 6, pp. 485-491, 2012.

[19] G. Sari, M. Pakdemirli, Vibrations of a slightly curved microbeam resting on an elastic foundation with nonideal boundary conditions, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2013, 2013.

[20] L. Ruzziconi, M. I. Younis, S. Lenci, An efficient reduced-order model to investigate the behavior of an imperfect microbeam under axial load and electric excitation, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 8, No. 1, pp. 011014, 2013.

[21] L. Medina, R. Gilat, S. Krylov, Symmetry breaking in an initially curved pre-stressed micro beam loaded by a distributed electrostatic force, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51, No. 11, pp. 2047-2061, 2014.

[22] F. Tajaddodianfar, M. R. H. Yazdi, H. N. Pishkenari, Nonlinear dynamics of MEMS/NEMS resonators: analytical solution by the homotopy analysis method, *Microsystem Technologies*, Vol. 23, No. 6, pp. 1913-1926, 2017.

[23] P. Villaggio, *Mathematical Models for Elastic Structures*, pp. 267-302, New York, Cambridge University Press, 2005.

[24] G. J. Simitses, D. H. Hodges, *Fundamentals of Structural Stability*, pp. 200-206, Amsterdam, Elsevier, 2006.

[25] S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, pp. 107-119, New Jersey, John Wiley & Sons, 2007.

[26] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, pp. 58-103, New Jersey, Prentice Hall, 1981.

[27] H. M. Ouakad, M. I. Younis, The dynamic behavior of MEMS arch resonators actuated electrically, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 45, No. 7, pp. 704-713, 2010.

[28] S. Pamidighantam, R. Puers, K. Baert, H. A. Tilmans, Pull-in voltage analysis of electrostatically actuated beam structures with fixed-fixed and fixed-free end conditions, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 12, No. 4, pp. 458, 2002.

[29] H. M. Ouakad, M. I. Younis, On using the dynamic snap-through motion of MEMS initially curved microbeams for filtering applications, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, No. 2, pp. 555-568, 2014.

میکروترنر موثر است. مشاهده شد که تحریک الکترواستاتیک دو پله‌ای می‌تواند باعث شود که میکروترنر رفتار پیچیده‌تری را از خود نشان دهد. مقایسه نتایج شبیه‌سازی با نتایج مدل کاهش مرتبه و برخی از پژوهش‌های انجام شده نشان داد که با دقتی بسیار بالا می‌توان از نرم‌افزار کامسول برای تحلیل و طراحی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی دویا استفاده کرد.

## 8- فهرست علائم

$\bar{b}$	پهنای میکروترنر ( $\mu\text{m}$ )
B	ماتریس سختی خمشی
$\bar{d}$	ضخامت میکروترنر ( $\mu\text{m}$ )
E	مدول یانگ (GPa)
F	بردار نیروی تعمیم یافته
$g_0$	گپ ( $\mu\text{m}$ )
$\bar{h}_0$	خیز اولیه نقطه میانی ( $\mu\text{m}$ )
L	طول میکروترنر
M	ماتریس جرم
q	بردار مختصات تعمیم یافته زمانی
S	ماتریس سختی کشیدگی
$\bar{w}_0$	شکل اولیه میکروترنر
$\bar{w}$	شکل میکروترنر پس از بارگذاری

## علائم یونانی

$\alpha$	پارامتر کشیدگی
$\beta$	پارامتر ولتاژ
$\rho$	چگالی ( $\text{kgm}^{-3}$ )
$\varphi_i$	تأمین تابع شکل مود تیر تخت دوسر گیردار
$\nu$	نسبت پواسون
$\zeta$	نسبت میرایی

## 9- مراجع

[1] X. L. Jia, J. Yang, S. Kitipornchai, Pull-in instability of geometrically nonlinear micro-switches under electrostatic and Casimir forces, *Acta Mechanica*, Vol. 218, No. 1-2, pp. 161-174, 2011.

[2] T. R. Hsu, *MEMS and Microsystems: Design, Manufacture, and Nanoscale Engineering*, pp. 1-27, New Jersey, John Wiley & Sons, 2008.

[3] R. Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Review of modeling electrostatically actuated microelectromechanical systems, *Smart Materials and Structures*, Vol. 16, No. 6, pp. R23, 2007.

[4] A. Raheli, S. Azizi, S. Faroughi, Dynamic analysis of a micro beam based on sub-harmonic parametric excitation, *Moderes Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 374-384, 2017. (فارسی)

[5] Y. Hu, J. Yang, S. Kitipornchai, Snap-through and pull-in analysis of an electro-dynamically actuated curved micro-beam using a nonlinear beam model, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 15, pp. 3821-3832, 2013.

[6] V. Intaraprasong, S. Fan, Nonvolatile bistable all-optical switch from