



تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر هدفمند روی بستر الاستیک وینکلر - پسترناک تحت بارهای مکانیکی و حرارتی با استفاده از روش تحلیلی هموتوپي

حسین رفیعی پور^۱، امیر لطف‌آور^{۲*}، صغری حمزه شلمزاری^۳

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز
۲- استادیار دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز
۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز
* شیراز، صندوق پستی ۳۱۳-۷۱۵۵۵، Lotfavar@sutech.ac.ir

چکیده- در این مقاله روش تحلیلی هموتوپي برای آنالیز ارتعاشات آزاد غیرخطی تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند بر روی بستر الاستیک غیرخطی، تحت بارهای مکانیکی و حرارتی ارائه شده است. ابتدا با فرض تئوری اویلر-برنولی و با استفاده از رابطه کرنش - جابجایی ون کارمن، معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر حرکت غیرخطی استخراج شده و سپس با به‌کار بردن روش تجزیه گالرکین، معادله حاکمه غیرخطی به یک معادله دیفرانسیل عادی غیرخطی کاهش داده شده است. به منظور بدست آوردن یک حل بسته برای این معادله دیفرانسیل، روش تحلیلی هموتوپي که دارای دقت بسیار بالایی است، پیشنهاد شده است. در پایان، اثر پارامترهای مختلفی همچون بزرگی دامنه، بستر الاستیک غیرخطی، بارهای مکانیکی و حرارتی و شرایط مرزی مختلف بر روی ارتعاشات تیر بررسی شده است.
کلیدواژگان: ارتعاشات غیرخطی، بستر الاستیک وینکلر-پسترناک، تیر هدفمند، تئوری اویلر-برنولی، روش تحلیلی هموتوپي.

Nonlinear vibration analysis of functionally graded beam on winkler-pasternak foundation under mechanical and thermal loading via homotopy analysis method

H. Rafeipour¹, A. Lotfavar^{2*}, S. Hamzeh Shalamzari³

1- MSc. Student of Mech. Eng. Dept., Shiraz Univ. of Tech., Shiraz, Iran
2- Assist. Prof. of Mech. Eng., Shiraz Univ. of Tech., Shiraz, Iran
3- MSc Student of Mech. Eng. Dept. Shiraz Univ. of Tech., Shiraz, Iran
* P.O.B. 71555-313 Shiraz, Iran. Lotfavar@sutech.ac.ir

Abstract- In this paper; the Homotopy Analysis Method is used to Nonlinear free Vibration analysis of a mechanical and thermal loaded Functionally Graded Beam on Nonlinear Elastic Foundation. At first, the governing partial differential equation of the problem has been derived based on the Euler-Bernoulli Theory and the Von-Karman strain-displacement relationship. Then, it was reduced to a nonlinear ordinary differential equation via the Galerkin method. The Homotopy analysis Method which has high accuracy was implemented in order to obtain a closed form solution and study the problem parametrically. The accuracy of the proposed method is verified by those available in literatures. The numerical results demonstrate that proposed method yields a very rapid convergence of the solution as well as low computational effort. Finally, the effects of different parameters such as amplitude, linear and Nonlinear Elastic Foundation, thermal and mechanical loads and boundary conditions were investigated on the beam vibration and their results are presented for future work.

Keywords: Nonlinear Vibration, Winkler-Pasternak Foundation, Functionally Graded Beam, Euler-Bernoulli Theory, Homotopy Analysis Method.

۱- مقدمه

پیشرفت‌های بوجود آمده در زندگی بشر و بویژه صنایع مختلف، انسان را بر آن داشته است تا از موادی با خواص بهتر بهره‌گیرد. مواد هدفمند^۱، مواد کامپوزیتی با ریزساختار ناهمگن می‌باشند که خواص مکانیکی آنها بطور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. این حالت با تغییر تدریجی کسر حجمی^۲ مواد تشکیل دهنده به صورت تابعی از موقعیت در امتداد ضخامت، حاصل می‌شود. در بیشتر موارد مواد هدفمند از ترکیب سرامیک و فلز ساخته می‌شوند تا استحکام فلز را به همراه مقاومت در برابر دمای بالای محیط ترکیب نمایند و در عین حال مشکلات سطح اشتراک را حذف کنند. ترکیبی که از اختلاط پودر فلز و سرامیک بدست آمده و تغییرات درصد ترکیب فلز و سرامیک از یک سطح به سطح دیگر کاملاً پیوسته می‌باشد به گونه‌ای که یک سطح از جنس سرامیک خالص و سطح دیگر فلز خالص است و بین دو سطح نیز یک ترکیب پیوسته از هر دو جنس وجود دارد. خواص مکانیکی نیز با توجه به نوع ترکیب، تغییرات پیوسته‌ای در جهت ضخامت خواهند داشت. با توجه به پیوستگی ترکیب مواد تشکیل دهنده تیرهای هدفمند، این نوع سازه‌ها دارای خواص مکانیکی مؤثری نسبت به مواد کامپوزیت لایه‌ای می‌باشند.

از زمانی که مفهوم مواد هدفمند در سال ۱۹۸۰ معرفی شد، به تدریج این مواد جدید در بسیاری از کاربردهای مهندسی همچون هوافضا، صنایع دفاعی، حس‌گرهای الکترونیکی و بیوپزشکی و هرجا که نیاز به حذف تمرکز تنش برای افزایش مقاومت مرزها بود، به کار برده شدند.

با پیشرفت دانش و تکنولوژی، تحقیق در استفاده از مواد هدفمند مانند مدل کردن سازه‌های ساخته شده از این مواد، خمش، کمانش، پس‌کمانش و ارتعاشات این مواد به یکی از موضوعات جالب در همه رشته‌های وابسته به مکانیک مواد تبدیل شد.

به علت استفاده روزافزون از تیرهای هدفمند در صنایع مدرن مختلف، فهمیدن رفتار دینامیکی آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. سنکار [۱]، یک حل الاستیسیته برای تیرهای با مواد هدفمند تحت بارهای عرضی استاتیکی با فرض تغییر

نمایی خصوصیات مواد در جهت ضخامت، ارائه نمود. حل الاستیسیته برای خمش تیرهای طره‌ای با مواد هدفمند با استفاده از روش معکوس در جملات تابع تنش ابری نیز توسط یو و زونگ [۲] گزارش شده است.

از آنجا که بسیاری از سازه‌های تیرشکل مورد استفاده در کاربردهای مختلف مهندسی همچون ریل‌های راه آهن، سکوها و سازه‌های ساختمانی بر روی زمین قرار می‌گیرند، برهم‌کنش بین مواد هدفمند و بستر الاستیک نیز از جمله مسایل مهم بوده که مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. او و همکارانش [۳] یک رهیافت اویلر - لاگرانژی را با توابع C^1 پیوسته برای تحلیل پایداری و ارتعاشات تیرهای غیریکنواخت بر روی بستر الاستیک، در نظر گرفتند. بینگ و همکارانش [۴] نیز برای ارتعاشات آزاد و خمش تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند که بر روی بستر الاستیک وینکلر- پسترناک^۳ قرار گرفته- اند، حل‌هایی را بر مبنای الاستیسیته دوبعدی ارائه نموده‌اند.

بیشتر مطالعات انجام شده در زمینه مواد هدفمند، روی رفتار خطی سازه‌ها متمرکز شده است و این در حالی است که اکثر پدیده‌ها در جهان اطراف ما و بویژه مسائل دینامیکی از جمله ارتعاشات، ذاتاً غیرخطی بوده و بوسیله معادلات غیرخطی تعریف می‌شوند. اگرچه معمولاً می‌توان مسائل غیرخطی را با فرض رفتار خطی حول شرایط کاری حل کرد، ولی همیشه این کار توجیه‌پذیر نیست. گاهی در سیستم‌های غیرخطی، رفتارهایی مشاهده می‌شود که امکان وقوع آنها در سیستم‌های خطی وجود ندارد. کی و همکارانش [۵] از روش انتگرال‌گیری عددی مستقیم به همراه روش رانج-کوتا^۴ استفاده کردند تا پاسخ ارتعاشات غیرخطی تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند با تکیه‌گاه‌های مختلف را پیدا کنند. ارتعاشات اجباری غیرخطی یک تیر تیموشینکو هدفمند تحت بار هارمونیک نیز توسط سیمسک [۶] بررسی شده است. فلاح و اقدم [۷] نیز به بررسی ارتعاشات غیرخطی و تحلیل پس‌کمانش تیرهای هدفمند بر روی بستر الاستیک غیرخطی پرداخته‌اند.

از طرف دیگر به منظور طراحی مؤثرتر و به علت تفاوت بین دمای ساخت و دمای کار سازه، مطالعه رفتار حرارتی - مکانیکی که می‌تواند شدیداً غیرخطی باشد، ضروری است. تحقیقات گوناگونی روی مواد هدفمند تحت محیط‌های حرارتی - مکانیکی

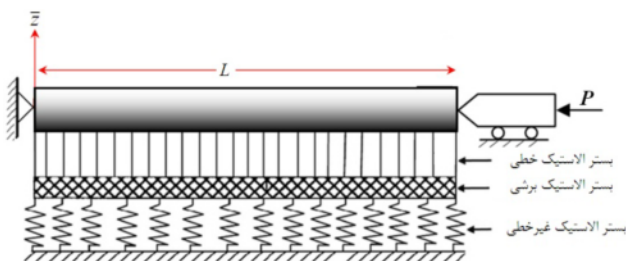
1. Functionally Graded Materials
2. Volume Fraction

3. Winkler-Pasternak
4. Runge-Kutta

در این مقاله، ابتدا با در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی در روابط کرنش - جابجایی و نکارمن^۵ و با فرض تئوری اویلر-برنولی و نوشتن معادلات انرژی پتانسیل و جنبشی تیر، به کمک اصل همیلتونین، معادلات حرکت غیرخطی سیستم بدست خواهد آمد. این معادله به صورت یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی در دو بعد جابجایی و زمان است که با تعریف یک سری پارامترهای بی‌بعد و به کمک روش گالرکین به یک معادله معمولی تک‌بعده تبدیل می‌شود. در مرحله بعد به منظور حل معادله دیفرانسیل غیرخطی تک‌بعده، از روش تحلیلی هموتوبی استفاده می‌شود تا با حل پارامتری معادله ارتعاشاتی، بتوان اثر پارامترهای مختلف را بر روی فرکانس غیرخطی سیستم بررسی نمود. علت استفاده از روش تحلیلی هموتوبی در مسئله مذکور، حضور پارامترهای غیرخطی شدید می‌باشد. این روش در عین سادگی، دقت بسیار بالایی خواهد داشت.

۲- استخراج معادلات حاکمه

مطابق شکل ۱، یک تیر مستقیم با سطح مقطع مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند به طول L در جهت x عرض b در جهت y و ضخامت h در جهت z در دستگاه مختصات کارتزین واقع بر یک بستر الاستیک وینکلر - پسترناک غیرخطی در نظر گرفته می‌شود. همچنین تیر تحت تاثیر نیروی فشاری P در راستای محور x قرار داشته و اثرات ناشی از تغییرات دمایی نیز در نظر گرفته می‌شود. خواص مکانیکی تیر هدفمند می‌تواند با هر تابعی در جهت ضخامت تغییر کند. در اینجا فرض شده است که تیر هدفمند از سرامیک و فلز ساخته شده و خواص مذکور بر حسب قانون مخلوط‌ها^۶ که تابعی از کسرهای حجمی اجزای سازنده می‌باشد، به طور پیوسته تغییر می‌کنند.



شکل ۱ شماتیک یک تیر هدفمند روی بستر الاستیک غیرخطی و تحت بار محوری فشاری

انجام شده است. لیبرسکو و همکارانش [۸] رفتار ارتعاشاتی و تحلیل ناپایداری تیرهای نازک ساخته شده از مواد هدفمند را با در نظر گرفتن اثرات گرادیان دما و کسر حجمی و همچنین با فرض دمای بالای کار، مطالعه نمودند. سنکار [۹] حل الاستیسیته تیرهای هدفمند را تحت بارهای عرضی سینوسی بدست آورد. لو و همکارانش [۱۰] فضای حالت را بر مبنای روش دیفرانسیل‌گیری درجه دو برای تحلیل خمش تیرهای هدفمند بکار برده‌اند. بیان و همکارانش [۱۱] به بررسی فضای حالت تیرهای هدفمند استاتیک و دینامیک به همراه حسگرهای پیزوالکتریک پرداخته‌اند. بیهنگیل و جینسان [۱۲] کماتش و ارتعاشات ترموالاستیک تیر ساندویچی هدفمند را با استفاده از روش المان محدود مورد بررسی قرار داده‌اند.

از سوی دیگر تاکنون برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر مسائل مهندسی، روش‌های عددی مختلفی ارائه شده است که می‌توان به روش‌های المان محدود [۱۳] و دیفرانسیل کوادریچر [۱۴] اشاره کرد. اما مسئله پیچیده‌تر، استخراج نتایج برای مسایل غیرخطی به نحوی است که امکان بررسی اثر پارامترهای مختلف مسئله امکان‌پذیر باشد. در سال‌های اخیر به منظور بررسی میزان تاثیر پارامترهای مختلف بر سیستم‌های مهندسی، حل‌های نیمه‌تحلیلی و یا تحلیلی - تقریبی مورد استقبال وسیعی قرار گرفته‌اند. یکی از پرکاربردترین روش‌های تحلیلی، روش اختلالات^۱ می‌باشد. اما این روش دارای یک نقص بزرگ بوده و آن وابستگی به ترم‌های غیرخطی ضعیف است. روش تکرار تغییراتی^۲ [۱۵]، روش توازن انرژی^۳ [۱۶] و روش تحلیلی هموتوبی^۴ [۱۷] نیز از روش‌های تحلیلی - تقریبی جدیدتر و پرکاربردتری می‌باشند که کوشیده‌اند تا این ضعف را جبران نمایند. باقانی و همکارانش [۱۸] ارتعاشات آزاد با دامنه بزرگ و پس‌کمانش یک تیر کامپوزیتی با لایه‌های نامتقارن بر روی بستر الاستیک را به روش تحلیلی مورد مطالعه قرار دادند. همچنین دینگ و همکارانش [۱۹] یک سری حل‌های تحلیلی برای تیرهای هدفمند غیرایزوتروپیک با شرایط تکیه‌گاهی گوناگون را با استفاده از یک تابع تنش آیری در فرم چندجمله‌ای عمومی استخراج کردند.

1. Perturbation Method
2. Variational Iteration Method
3. Energy Balance Method
4. Homotopy Analysis Method

5. Von Karman
6. Rule of Mixtures

و w و u به ترتیب جابجایی‌های عرضی و محوری تیر بوده و ثابت‌های دیگر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \iint Q_{11}(1, \bar{z}, \bar{z}^2) dA \quad (7)$$

که در آن ماتریس سختی کاهش یافته است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} \quad (8)$$

با فرض اینکه دمای اولیه صفر باشد، می‌توان تفاضل دما را با T نشان داد، با در نظر گرفتن افزایش دمای ثابت T ، منتجهای نیرو و ممان حرارتی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} N_{T\bar{x}} &= \iint -Q_{11} \alpha(\bar{z}) T dA \\ M_{T\bar{x}} &= \iint -Q_{11} \alpha(\bar{z}) T \bar{z} dA \end{aligned} \quad (9)$$

در نهایت نیروی محوری N و ممان خمشی M مربوط به منتجهای تنش را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$N = N_{M\bar{x}} + N_{T\bar{x}} = A_{11} \varepsilon + B_{11} \frac{1}{\rho} + N_{T\bar{x}} \quad (10)$$

$$M = M_{M\bar{x}} + M_{T\bar{x}} = B_{11} \varepsilon + D_{11} \frac{1}{\rho} + M_{T\bar{x}} \quad (11)$$

با فرض تئوری اویلر - برنولی، معادله حرکت به صورت زیر خواهد بود:

$$I \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} - \frac{\partial N}{\partial \bar{x}} = F_{\bar{x}} \quad (12)$$

$$I \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial \bar{x}^2} - N \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} = F_{\bar{z}} \quad (13)$$

که در آن $F_{\bar{x}}$ و $F_{\bar{z}}$ به ترتیب نیروهای محوری و عرضی، \bar{t} معرف زمان و I ترم اینرسی بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I = \iint \rho(\bar{z}) dA \quad (14)$$

با فرض اینکه اینرسی داخلی صفحه و نیروی حجمی در راستای طولی قابل چشم‌پوشی باشند، معادله (۱۲) به صورت زیر کاهش خواهد یافت:

$$\frac{\partial N}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (15)$$

با جایگذاری معادلات (۶) و (۱۰) در معادله (۱۵) می‌توان رابطه‌های (۱۶) و (۱۷) را نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(A_{11} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] + B_{11} \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \right] + N_{T\bar{x}} \right) = 0 \quad (16)$$

با توجه به قانون مخلوطها، هر خاصیت مؤثری از ماده مانند η ، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\eta = \eta_m V_m + \eta_c V_c \quad (1)$$

$$V_m + V_c = 1 \quad (2)$$

که در آنها η و V به ترتیب خاصیت ماده و کسر حجمی را نشان می‌دهند و زیر نویس های m و c به ترتیب نماینده فلز و سرامیک هستند. تاکنون توابع مختلفی برای توصیف تغییرات کسر حجمی اجزای سازنده مواد هدفمند ارائه شده است که یکی از متداولترین آنها قانون توانی است. با فرض آنکه صفحه پایینی از فلز خالص و صفحه بالایی از سرامیک خالص باشد و در بین آنها خواص به صورت پیوسته طبق قانون توانی تغییر کند، کسر حجمی برابر خواهد بود با:

$$V_c = \left(\frac{\bar{z} + 0.5h}{h} \right)^n ; V_m = 1 - \left(\frac{\bar{z} + 0.5h}{h} \right)^n \quad (3)$$

که در آن n توان کسر حجمی است و در نتیجه خصوصیات مکانیکی مؤثر یک ماده هدفمند مانند مدول یانگ E ، ضریب پواسون ν ، ضریب انبساط حرارتی α و دانسیته ρ با جایگذاری معادله (۳) در معادله (۱) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$E(\bar{z}) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{\bar{z} + 0.5h}{h} \right)^n$$

$$\alpha(\bar{z}) = \alpha_m + (\alpha_c - \alpha_m) \left(\frac{\bar{z} + 0.5h}{h} \right)^n$$

$$\rho(\bar{z}) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{\bar{z} + 0.5h}{h} \right)^n$$

$$\nu(\bar{z}) = \nu_m + (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{\bar{z} + 0.5h}{h} \right)^n \quad (4)$$

بر اساس تئوری کلاسیک تیرها^۱، منتجهای نیرو و ممان بر واحد طول شامل بخش‌های مکانیکی و حرارتی می‌باشند. منتجهای مکانیکی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} N_{M\bar{x}} &= A_{11} \varepsilon + B_{11} \frac{1}{\rho} \\ M_{M\bar{x}} &= B_{11} \varepsilon + D_{11} \frac{1}{\rho} \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن:

$$\varepsilon = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 ; \frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \quad (6)$$

1. Classical Theory of Beams

$$I\bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}} + \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - \left[\frac{A_{11}}{2L} \int_0^L \bar{w}_{,\bar{x}}^2 d\bar{x} - P + N_{T\bar{x}} \right] \bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}} - \left[\frac{B_{11}}{L} (\bar{w}_{,\bar{x}}(L, \bar{t}) - \bar{w}_{,\bar{x}}(0, \bar{t})) \right] \bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}} = F_{\bar{z}} \quad (25)$$

این معادله به صورت یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی در دو بعد جابجایی و زمان است که با تعریف پارامترهای بی بعد و کمک روش‌های پخشی به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی معمولی تبدیل می‌شود. یکی از متداولترین روش‌های پخشی که در این مقاله از آن استفاده خواهد شد، روش گالرکین است که در آن از خاصیت تعامد شکل مدها استفاده می‌گردد. همچنین به دلیل وجود بستر الاستیک غیرخطی وینکلر - پسترناک، طرف دوم تساوی فوق به صورت رابطه (26) تعریف می‌شود:

$$F_{\bar{z}} = -k_L \bar{w} - k_{NL} \bar{w}^3 + k_S \bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}} \quad (26)$$

که \bar{w} انحراف عرضی تیر در جهت z و k_L و k_{NL} به ترتیب ضرایب خطی و غیرخطی و k_S ضریب برشی بستر الاستیک است. به منظور استخراج نتایج کلی و عمومی مستقل از ابعاد و اندازه خاص می‌توان معادله حاکمه را به کمک تعریف یک سری پارامتر بدون بعد به صورت رابطه (27) بی بعد کرد:

$$x = \frac{\bar{x}}{L}, \quad w = \frac{\bar{w}}{r}, \quad t = \gamma \bar{t} \\ \gamma = \sqrt{\left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) / IL^4} \quad (27)$$

که در آن r شعاع ژیراسیون سطح مقطع است. با جایگذاری این پارامترها در معادله حاکمه، معادله دیفرانسیل (28) حاصل می‌شود.

$$w_{,\bar{x}\bar{x}} + w_{,\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - \beta w_{,\bar{x}\bar{x}} + K_L w + K_{NL} w^3 - K_S w_{,\bar{x}\bar{x}} = 0 \quad (28)$$

که در آن:

$$\beta = \Gamma \int_0^1 w_{,\bar{x}}^2 dx + \Lambda (w_{,\bar{x}}(1, t) - w_{,\bar{x}}(0, t)) - P + N_T \\ \Gamma = \frac{A_{11} r^2}{2\Sigma}, \quad \Lambda = \frac{B_{11} r}{\Sigma}, \quad N_T = \frac{N_{T\bar{x}} L^2}{\Sigma} \\ \Sigma = \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right), \quad P = \frac{PL^2}{\Sigma}, \quad K_L = \frac{k_L L^4}{\Sigma} \\ K_{NL} = \frac{k_{NL} r^2 L^4}{\Sigma}, \quad K_S = \frac{k_S L^2}{\Sigma} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{1}{A_{11}} (N_{T\bar{x}} + C_1) \quad (17)$$

با یک بار انتگرال گیری از رابطه (17) جابجایی محوری بدست می‌آید:

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{1}{2} \int_0^{\bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} - \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{x}}{A_{11}} (N_{T\bar{x}} + C_1) + C_2 \quad (18)$$

که ثابت‌های انتگرال گیری با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌گردند. با در نظر گرفتن هر سه نوع تکیه‌گاه ساده، گیردار و ساده-گیردار و همچنین با توجه به حضور نیروی محوری P می‌توان نوشت:

$$\bar{u}(0, \bar{t}) = 0 \quad (19)$$

$$\bar{u}(L, \bar{t}) = -\frac{PL}{A_{11}} \quad (20)$$

بدین ترتیب ثابت‌های C_1 و C_2 به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$C_1 = \frac{A_{11}}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} - \frac{B_{11}}{L} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}(L, \bar{t}) - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}(0, \bar{t}) \right) - N_{T\bar{x}} + P \\ C_2 = \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{\partial \bar{w}(0, \bar{t})}{\partial \bar{x}} \quad (21)$$

در نتیجه با جایگذاری معادله (21) در معادله (17) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} - \frac{B_{11}}{L} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}(L, \bar{t}) - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}(0, \bar{t}) \right) - \frac{P}{A_{11}} \quad (22)$$

اکنون معادله (10) به صورت (23) دوباره نویسی می‌شود:

$$N = -\frac{A_{11}}{2L} \int_0^L \bar{w}_{,\bar{x}}^2 d\bar{x} - \frac{B_{11}}{L} (\bar{w}_{,\bar{x}}(L, \bar{t}) - \bar{w}_{,\bar{x}}(0, \bar{t})) - P + N_{T\bar{x}} \quad (23)$$

از طرفی با استفاده از معادلات (11) و (17) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \bar{x}^2} = \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} \quad (24)$$

که در آنها علامت کاما، نشان دهنده مشتق نسبت به پارامتر \bar{x} می‌باشد. در نهایت با جایگذاری معادلات (23) و (24) در معادله (13)، معادله حاکمه ارتعاشات غیرخطی ترمو - مکانیکی یک تیر هدفمند به صورت (25) بدست می‌آید:

$$\alpha_3 = -\Gamma \alpha_p \int_0^1 \phi'^2 dx, \quad \alpha_L = K_L, \quad \alpha_{Sh} = -K_S \alpha_p$$

$$\alpha_{NL} = K_{NL} \frac{\int_0^1 \phi^4 dx}{\int_0^1 \phi^2 dx}, \quad \alpha_p = -\alpha_{N_T} = \frac{\int_0^1 \phi'' \phi dx}{\int_0^1 \phi^2 dx} \quad (34)$$

۳- روش تحلیلی هموتویی

از بین همه روش‌هایی که برای یافتن جواب تحلیلی معادلات دیفرانسیل غیرخطی وجود دارد، روش تحلیلی هموتویی یکی از بهترین و مؤثرترین روش‌ها است. با استفاده از این روش، مسئله غیرخطی به تعداد نامحدودی مسئله خطی تبدیل می‌شود. این فرایند توسط یک پارامتر دلخواه و محدود q که در بازه صفر تا یک قرار دارد، انجام می‌شود. به منظور معرفی مختصر این روش، مسئله غیرخطی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$N[x(\tau)] = 0 \quad (35)$$

که در آن N یک عملگر غیرخطی کلی، τ نشان‌دهنده زمان بی‌بعد و x یک تابع نامعلوم می‌باشد. معادله هموتویی در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(\phi; q, h, h(\tau)) = (1-q)L[\phi(\tau; q) - x_0(\tau)] - qhh(\tau)N[\phi(\tau; q)] \quad (36)$$

که در آن h یک پارامتر اختیاری غیرصفر، $h(\tau)$ یک تابع اختیاری غیر صفر و L یک عملگر خطی اختیاری است. هنگامی که q از صفر تا یک افزایش می‌یابد، $\phi(\tau; q)$ از یک تقریب اولیه به حل دقیق تغییر می‌کند. به عبارت دیگر $H(\phi; q, h, h(\tau)) = 0$ جواب معادله $\phi(\tau; q) = x_0(\tau)$ به ازای $q = 0$ می‌باشد و حل دقیق $\phi(\tau; q) = x(\tau)$ ، جواب معادله $H(\phi; q, h, h(\tau)) = 0$ به ازای $q = 1$ خواهد بود.

با در نظر گرفتن $H(\phi; q, h, h(\tau)) = 0$ ، معادله تغییر شکل مرتبه صفرم به صورت رابطه (۳۷) در می‌آید:

جدول ۱ مدارتعاشی اول برای تیرهای با شرایط مرزی مختلف

شرایط مرزی	$\phi(x)$
ساده	$\sin(\pi x)$
گیردار	$\frac{\sinh(q) - \sin(q)}{\cosh(q) - \cos(q)} (\cosh(qx) - \cos(qx)) + (\sinh(qx) - \sin(qx)), \quad q = 4.730041$
ساده - گیردار	$\frac{\sin(q) - \sinh(q)}{\cosh(q) - \cos(q)} (\cosh(qx) - \cos(qx)) + (\sin(qx) - \sinh(qx)), \quad q = 3.926602$

با فرض پاسخ به صورت $w(x, t) = V(t)\phi(x)$ که در آن $V(t)$ یک تابع ناشناخته وابسته به زمان بوده و $\phi(x)$ تابعی باشد که شرایط مرزی سینماتیک را ارضا کند، معادله (۲۸) به صورت رابطه (۳۰) تغییر می‌کند:

$$\frac{d^2 V(t)}{dt^2} \phi(x) + \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} V(t) - \left\{ \Gamma \int_0^1 \left(\frac{d\phi(x)}{dx} V(t) \right)^2 dx + \Lambda V(t) \left(\frac{d\phi(x)}{dx}(1, t) - \frac{d\phi(x)}{dx}(0, t) \right) - P + N_T \right\} \times \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} V(t) + K_L \phi(x) V(t) + K_{NL} (\phi(x) V(t))^3 - K_S \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} V(t) = 0 \quad (30)$$

با اعمال روش گالرکین بر روی معادله حرکت (۳۰)، رابطه (۳۱) حاصل می‌شود:

$$\int_0^1 \phi^2(x) \frac{d^2 V(t)}{dt^2} dx + \int_0^1 \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} V(t) \phi(x) dx - \left\{ \Lambda V(t) \left(\frac{d\phi(x)}{dx}(1, t) - \frac{d\phi(x)}{dx}(0, t) \right) - P + N_T + \Gamma \int_0^1 \left(\frac{d\phi(x)}{dx} V(t) \right)^2 dx \right\} \int_0^1 \left(\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \phi(x) V(t) \right) dx + K_L \int_0^1 \phi^2(x) V(t) dx + K_{NL} \int_0^1 \phi^4(x) V^3(t) dx - K_S \int_0^1 \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \phi(x) V(t) dx = 0 \quad (31)$$

در نهایت معادله حرکت (۲۸) بر حسب ترم‌های تابع ناشناخته $V(t)$ به صورت رابطه (۳۲) بدست می‌آید:

$$\frac{d^2 V(t)}{dt^2} + (\alpha_1 + P\alpha_p + N_T \alpha_{N_T} + \alpha_L + \alpha_S) V(t) + \alpha_2 V^2(t) + (\alpha_{NL} + \alpha_3) V^3(t) = 0 \quad (32)$$

بدون از دست دادن عمومیت مسئله اگر A ماکزیمم دامنه بی‌بعد نوسان باشد، شرایط اولیه نوسان را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$V(0) = A, \quad \frac{dV(0)}{dt} = 0 \quad (33)$$

تابع $\phi(x)$ برای شرایط مرزی مختلف در جدول ۱ ارائه شده است و ضرایب α_i به صورت (۳۴) تعریف می‌شوند.

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^1 \phi^{(iv)} \phi dx}{\int_0^1 \phi^2 dx}, \quad \alpha_2 = -\Lambda (\phi'(1) - \phi'(0)) \alpha_p$$

$$\omega^2 \frac{d^2 V(\tau)}{d\tau^2} + \alpha V(\tau) + \beta V^2(\tau) + \gamma V^3(\tau) = 0 \quad (44)$$

که در آن:

$$\alpha = \alpha_1 + P\alpha_p + N_T \alpha_{N_T} + \alpha_L + \alpha_{Sh} \quad (45)$$

$$\beta = \alpha_2, \quad \gamma = \alpha_{NL} + \alpha_3$$

و شرایط اولیه به صورت زیر می باشد:

$$V(0) = A, \quad \frac{dV(0)}{d\tau} = 0 \quad (46)$$

به منظور حل معادله (44) با استفاده از روش تحلیلی هموتویی، ابتدا باید یک جواب تقریبی حدس زده شود. از آنجا که ارتعاشات سیستم در نظر گرفته شده یک حرکت پریودیک است و با توجه به شرایط اولیه سیستم، حدس اولیه به صورت رابطه (47) خواهد بود:

$$V_0(\tau) = A \cos(\tau) \quad (47)$$

که در آن $A = W_{\max}/r$ و برابر با ماکزیمم دامنه بی بعد است. بنا بر آنچه پیش از این گفته شد، عملگر غیرخطی به صورت زیر تعریف می شود:

$$N[\phi(\tau; q), \omega(q)] = \omega(q)^2 \frac{d^2 \phi(\tau; q)}{d\tau^2} + \alpha \phi(\tau; q) + \beta \phi^2(\tau; q) + \gamma \phi^3(\tau; q) \quad (48)$$

و به منظور استفاده از روش تحلیلی هموتویی، عملگر خطی اختیاری به صورت رابطه (49) در نظر گرفته خواهد شد:

$$L[\phi(\tau; q)] = \omega_0^2 \left[\frac{\partial^2 \phi(\tau; q)}{\partial \tau^2} + \phi(\tau; q) \right] \quad (49)$$

تابع اختیاری $h(\tau)$ و پارامتر اختیاری h به ترتیب ناحیه و نرخ همگرایی حل تقریبی را تعیین می کنند. شکل ۲ تغییرات فرکانس غیرخطی یک تیر هدفمند را با تغییر در پارامتر مربوط به ناحیه همگرایی نشان می دهد. همان طور که مشاهده می شود، با محاسبه تقریب های مرتبه بالاتر، ناحیه همگرایی افزایش می یابد، ولی مشاهده می شود که حتی تقریب های مرتبه پایین نیز در یک ناحیه کوچک دقت قابل قبولی را نشان می دهند. به همین دلیل جهت استخراج همه نتایج، پارامترهای همگرایی به صورت $h = -1$ و $h(\tau) = 1$ لحاظ خواهد شد [۲۱]. با توجه به معادله (40) و با در نظر گرفتن معادلات (48) و (49)، برای تقریب اول می توان نوشت:

$$\omega_0^2 \left[\frac{\partial^2 V_1(\tau)}{\partial \tau^2} + V_1(\tau) \right] = \omega^2 \frac{d^2 V_0(\tau)}{d\tau^2} + \alpha V_0(\tau) + \beta \phi^2 V_0^2(\tau) + \gamma \phi^3 V_0^3(\tau) \quad (50)$$

$$(1-q)L[\phi(\tau; q) - x_0(\tau)] = qhh(\tau)N[\phi(\tau; q)] \quad (37)$$

که شرایط اولیه آن به شکل زیر می باشد:

$$\phi(\tau; q) = const., \quad \frac{d\phi(\tau; q)}{d\tau} = 0 \quad (38)$$

بر اساس قضیه تیلور، توابع $\phi(\tau; q)$ و $\omega(q)$ را می توان به صورت یک سری توانی بر حسب q بسط داد:

$$\phi(\tau; q) = \phi(\tau; 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(\tau; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} q^m$$

$$= x_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} x_m(\tau) q^m$$

$$\omega(q) = \omega_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \omega(q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} q^m = \omega_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m q^m \quad (39)$$

که $x_m(\tau)$ و ω_m مشتقات مرتبه m می باشند. با دیفرانسیل گیری از معادله تغییر شکل مرتبه صفرم نسبت به پارامتر q و قرار دادن $q = 0$ ، معادله تغییر شکل مرتبه اول بدست می آید که تقریب مرتبه اول $x(t)$ را می دهد:

$$L[x_1(\tau)] = hh(\tau)N[\phi(\tau; q)] \Big|_{q=0}$$

$$x_1(0) = 0, \quad \frac{dx_1(0)}{d\tau} = 0 \quad (40)$$

تقریب های مراتب بالاتر را می توان با استفاده از محاسبه معادله تغییر شکل مرتبه m بدست آورد. این عمل با m بار دیفرانسیل گیری از معادله (37) نسبت به پارامتر q ، به صورت زیر بدست می آید [۲۰].

$$L[v_m(\tau) - v_{m-1}(\tau)] = hh(\tau)R_m(\vec{v}_{m-1}, \vec{\omega}_{m-1}) \quad (41)$$

که پارامترهای آن به صورت زیر تعریف می شوند:

$$R_m(\vec{v}_{m-1}, \vec{\omega}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1} N[\phi(\tau; q), \omega(q)]}{dq^{m-1}} \Big|_{q=0}$$

$$\vec{v}_{m-1}(\tau) = \{v_{0,1}, v_{2,1}, \dots, v_{m-1,1}\}$$

$$\vec{\omega}_{m-1}(\tau) = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1}\} \quad (42)$$

و شرایط اولیه آن به صورت زیر می باشد:

$$v_m(0) = \dot{v}_m(0) = 0 \quad (43)$$

۴- کاربرد روش تحلیلی هموتویی برای حل

مسئله ارتعاشات غیرخطی تیر هدفمند

ابتدا با تعریف یک پارامتر زمانی بی بعد جدید به صورت $\tau = \omega t$ ، معادله (32) به صورت (44) در می آید:

و با توجه به معادله (۳۹)، تقریب فرکانس غیرخطی مرتبه اول به صورت زیر خواهد بود:

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \quad (56)$$

۵- نتایج

جهت بررسی دقت حل تحلیلی ارائه شده به مقایسه این روش با دیگر روش‌های موجود پرداخته می‌شود و در ادامه، نتایج مربوط به ارتعاشات غیرخطی یک تیر هدفمند ارائه می‌شود. ابتدا یک تیر ایزوتروپ تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار در نظر گرفته شد و به ازای دامنه‌های متفاوت، نسبت فرکانس غیرخطی به خطی آنان محاسبه گردید. این نتایج با حل‌های تحلیلی تقریبی موجود در مقالات دیگر مقایسه شده است و به منظور بررسی دقت نتایج بدست آمده، یک حل عددی مورد بررسی قرار گرفت [۲۲] تا به عنوان مرجع اصلی مقایسه قرار گیرد.

نتایج فوق در جدول ۲ نشان داده شده است. همانطور که دیده می‌شود جواب‌های حاصل از روش تحلیلی هموتوبی مطابقت بسیار خوبی با نتایج عددی را نشان می‌دهد.

جدول ۲ مقایسه بین نتایج بدست آمده از روش‌های مختلف برای نسبت فرکانس غیرخطی به خطی تیر ایزوتروپ تکیه‌گاه ساده:

دامنه بی‌بعد	مرجع [۲۳]	مرجع [۲۴]	مرجع [۱۷]	نتایج عددی جدید	نتایج
۱	۱/۰۸۹۱	۱/۰۸۹۷	۱/۰۸۹۷	۱/۰۸۹۲	۱/۰۸۹۱
۲	۱/۳۱۷۷	۱/۳۲۲۹	۱/۳۲۲۸	۱/۳۱۷۸	۱/۳۱۷۸
۳	۱/۶۲۵۶	۱/۶۳۹۴	۱/۶۳۹۳	۱/۶۲۵۹	۱/۶۲۵۹
۴	--	--	--	۱/۹۷۶۰	۱/۹۷۶۵

تکیه‌گاه گیردار:

دامنه بی‌بعد	مرجع [۲۴]	مرجع [۱۷]	نتایج عددی جدید	نتایج
۱	۱/۰۶۲۸	۱/۰۵۷۲	۱/۰۵۶۹	۱/۰۵۶۹
۲	۱/۲۱۴۰	۱/۲۱۲۵	۱/۲۰۹۸	۱/۲۰۹۸
۳	۱/۳۹۰۴	۱/۴۳۴۴	۱/۴۲۶۴	۱/۴۲۶۴
۴	۱/۵۶۳۵	۱/۶۱۷۱	۱/۶۱۱۸	۱/۶۱۱۸

در مرحله بعد ارتعاشات آزاد تیر هدفمند غیرخطی بررسی شده است. خواص مکانیکی این تیر هدفمند در جدول ۳ مشاهده می‌شود.

که در آن شرایط اولیه به صورت زیر خواهد بود:

$$V_1(0) = 0, \quad \frac{dV_1(0)}{d\tau} = 0 \quad (51)$$

حال با قراردادن معادله (۴۷) در رابطه (۵۰)، می‌توان نوشت:

$$\omega_0^2 \left[\frac{\partial^2 V_1(\tau)}{\partial \tau^2} + V_1(\tau) \right] = \left(\omega_0^2 - \alpha - \frac{3}{4} \gamma A^2 \right) A \cos(\tau) - \frac{1}{2} \beta A^2 \cos(2\tau) - \frac{\gamma}{4} W^3 \cos(3\tau) \quad (52)$$

سمت راست معادله (۵۲) شامل ترم‌هایی می‌باشد که باعث پیدایش جملات زمان‌رو در تابع V_1 می‌شوند و باید آنها را حذف نمود. این مسئله باعث پیدایش یک معادله جبری خواهد شد که حل آن تقریب مرتبه صفر فرکانس غیرخطی را نتیجه می‌دهد و لذا داریم:

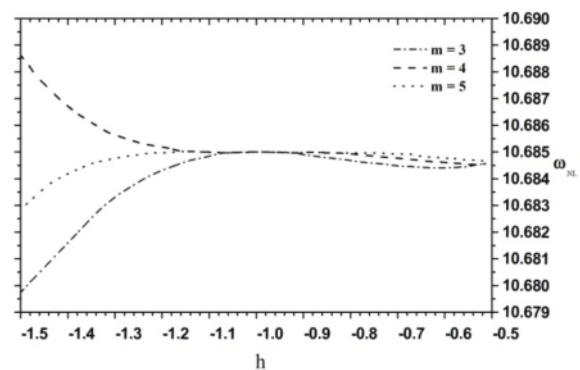
$$\omega_0 = \omega_{Nonlinear_0} = \sqrt{\alpha + \frac{3}{4} \gamma A^2} \quad (53)$$

همچنین با حل معادله (۵۲) و اعمال نکته فوق، تقریب مرتبه اول تابع زمانی به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$V(\tau) = V_0(\tau) + V_1(\tau) = \frac{1}{96\omega_0^2} \left((96\omega_0^2 A - 3\gamma A^3 + 32\beta A^2) \cos(\tau) + 16\beta A^2 \cos(2\tau) + 3\gamma A^3 \cos(3\tau) - 48\beta A^2 \right) \quad (54)$$

به همین ترتیب با قرار دادن m برابر با ۲ در معادله (۴۱) و اجتناب از حضور جملات زمان‌رو، تقریبی از فرکانس غیرخطی ω_1 به صورت زیر بدست می‌آید:

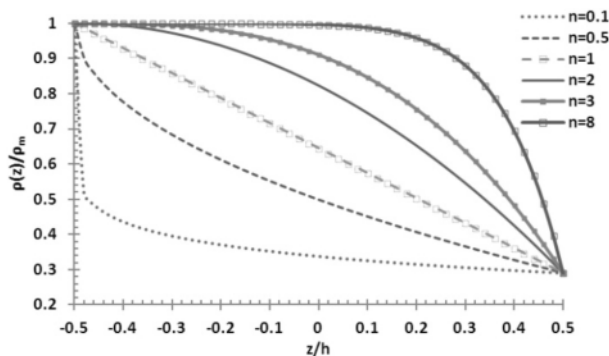
$$\omega_1 = \omega_{Nonlinear_1} = -\frac{A}{384\omega_0^2} \left(160\beta^2 A - 64\alpha\beta + 9\gamma^2 A^3 + 64\omega_0^2 \beta - 6\alpha\gamma A - 144\beta\gamma A^2 \right) \quad (55)$$



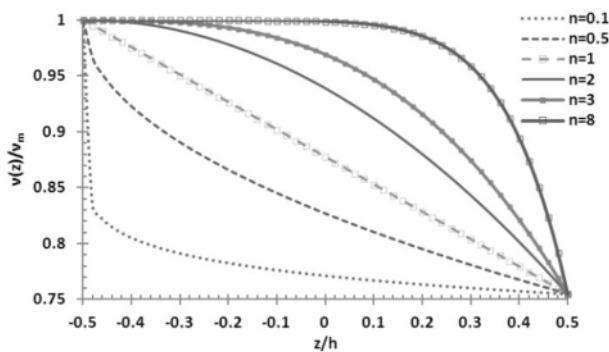
شکل ۲ بررسی اثر پارامتر مربوط به ناحیه همگرایی بر روی فرکانس غیرخطی یک تیر هدفمند

جدول ۳ خواص مواد تشکیل دهنده تیر هدفمند

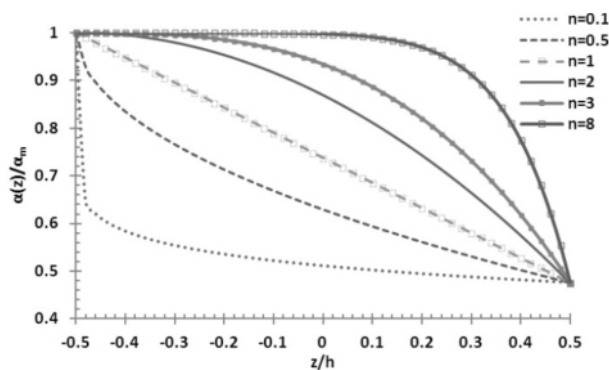
واحد	Si ₃ N ₄	SuS304	خاصیت ماده
GPa	۳۲۲/۳	۲۰۷/۸	مدول یانگ (E)
-	۰/۲۴	۰/۳۱۷۸	نسبت پواسون (ν)
kg/m ³	۲۳۷۰	۸۱۶۶	چگالی (ρ)
1/K	$5/87 \times 10^{-6}$	$12/33 \times 10^{-6}$	ضریب انبساط حرارتی (α)



ب) تغییرات چگالی

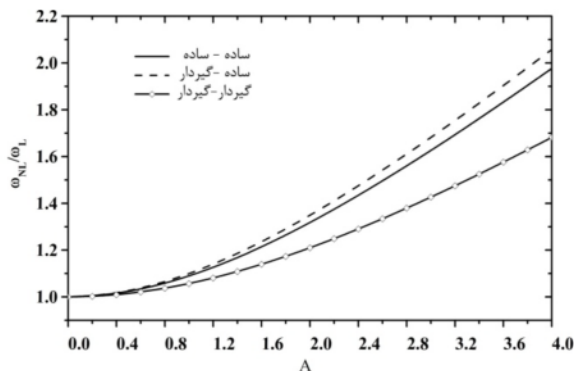


ج) تغییرات ضریب پواسون

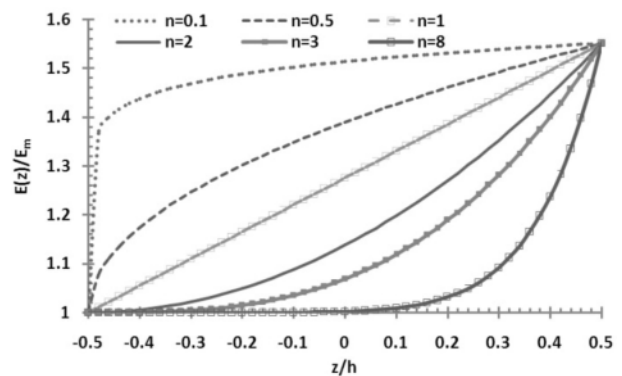


د) تغییرات ضریب انبساط حرارتی

شکل ۳ تغییرات خواص تیر هدفمند در راستای ضخامت



شکل ۴ اثر تکیه‌گاه‌های مختلف بر روی نسبت فرکانسی



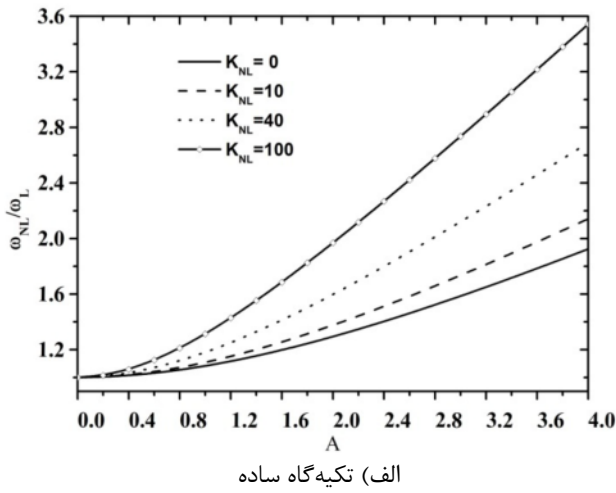
الف) تغییرات مدول یانگ

با توجه به معادله (۴) و از آنجا که پارامتر \bar{z} در صفحه پایینی برابر با $-h/2$ و در صفحه بالایی برابر با $h/2$ می‌باشد، با افزایش توان کسر حجمی، مدول یانگ مؤثر کاهش پیدا می‌کند و چگالی، ضریب پواسون و ضریب انبساط حرارتی افزایش می‌یابند. در شکل ۳ تغییرات خواص ماده در راستای ضخامت تیر به ازای تغییر در توان کسر حجمی نشان داده شده است.

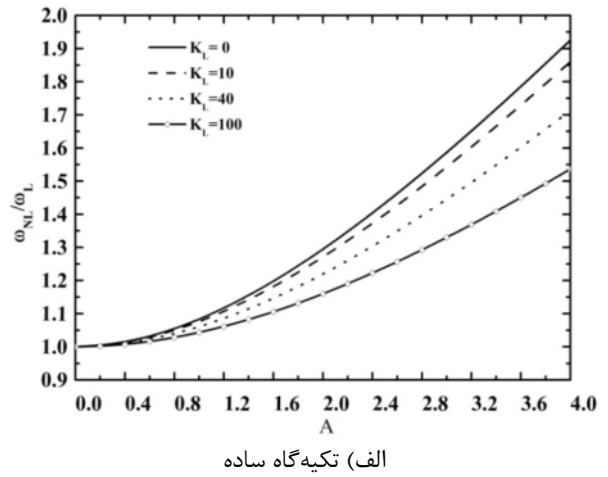
معادله (۳۲) شامل یک ترم غیرخطی درجه دو ناشی از کوپل خمشی-کششی می‌باشد که با توجه به روابط ارائه شده، برای تیرهای دوسرگیردار ایزوتروپ، کامپوزیت و هدفمند و همچنین زمانی که تیر تقارن داشته باشد، این ترم برابر با صفر خواهد بود و معادله (۳۲) به معادله دافینگ تبدیل می‌شود.

شکل ۴ تغییرات نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی را برای تکیه‌گاه‌های ساده، گیردار و ساده - گیردار نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود که کمترین نسبت فرکانسی مربوط به تکیه‌گاه گیردار و بیشترین آن مربوط به ساده - گیردار می‌باشد. باید به این نکته توجه داشت که هر چند انتظار می‌رفت بیشترین نسبت فرکانسی مربوط به تکیه‌گاه ساده باشد اما با توجه به هندسه تکیه‌گاه‌ها و عدم تقارن هندسی در تکیه‌گاه ساده - گیردار، بیشترین نسبت فرکانسی برای این نوع تکیه‌گاه مشاهده می‌شود.

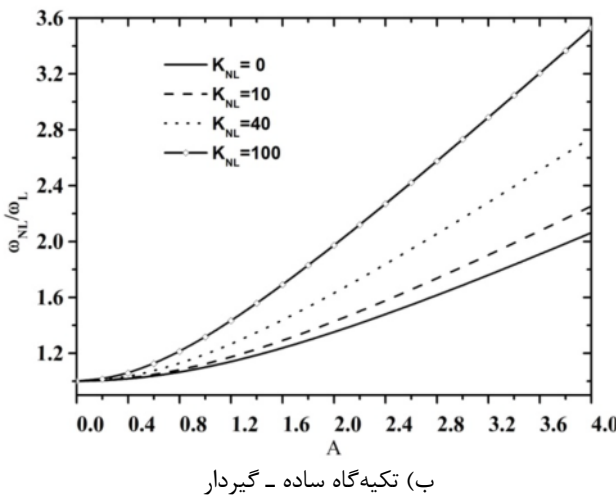
شکل‌های ۵ تا ۹ اثر ضرایب بستر الاستیک، نیروی محوری و همچنین اثر دما را بر روی نسبت فرکانس طبیعی نشان می‌دهند. در همه این موارد توان کسر حجمی برابر با ۲ در نظر گرفته شده است.



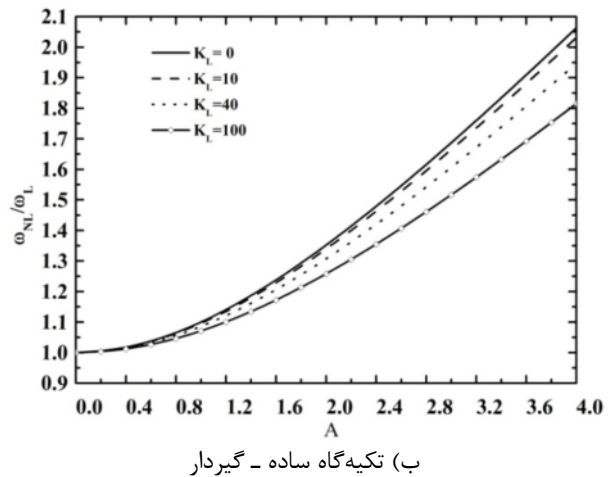
الف) تکیه‌گاه ساده



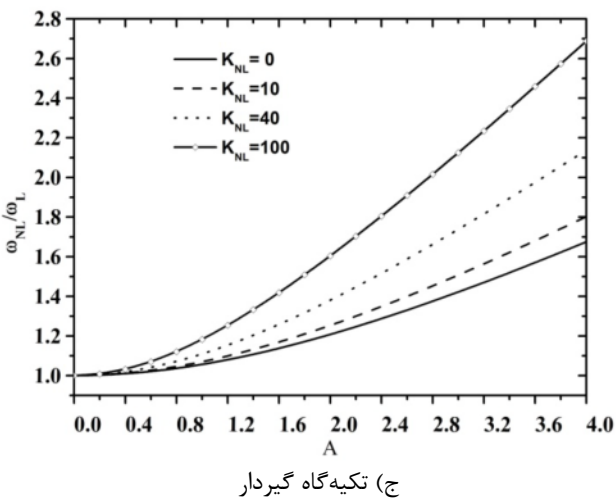
الف) تکیه‌گاه ساده



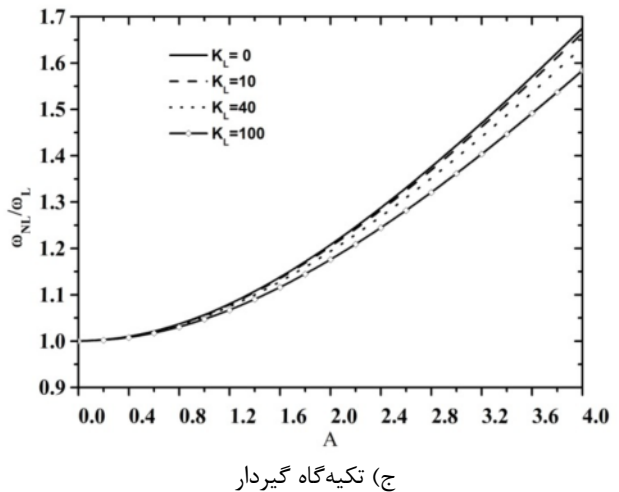
ب) تکیه‌گاه ساده - گیردار



ب) تکیه‌گاه ساده - گیردار



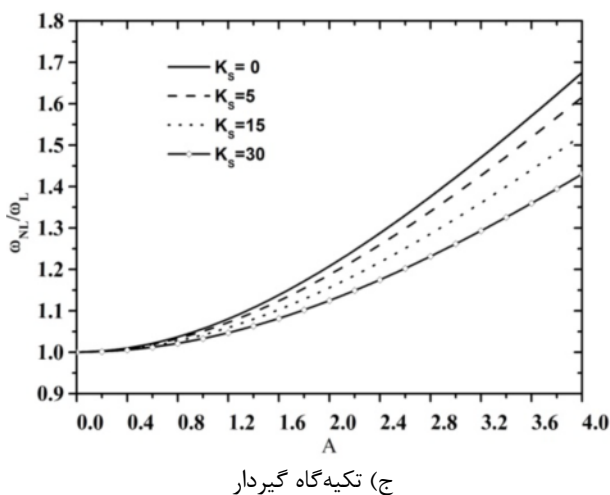
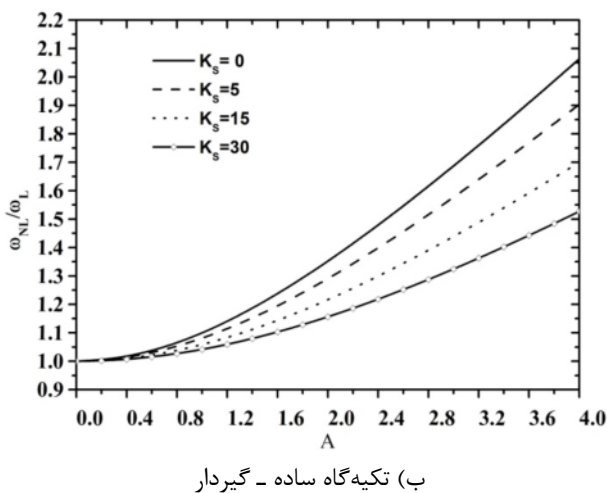
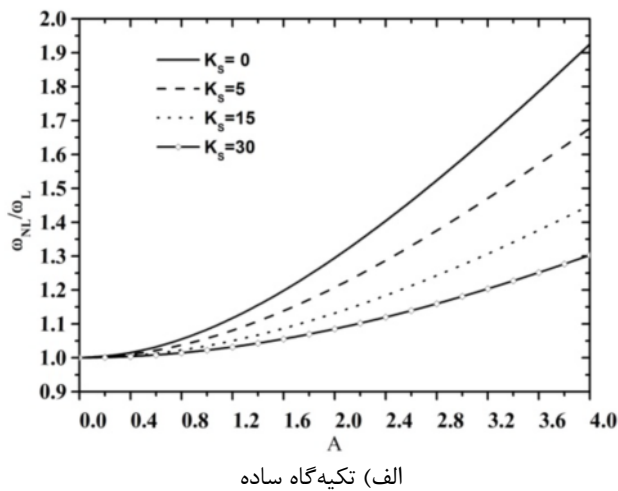
ج) تکیه‌گاه گیردار



ج) تکیه‌گاه گیردار

شکل ۶ اثر ضریب بستر وینکلر غیرخطی بر روی نسبت فرکانس غیرخطی به خطی تحت شرایط مرزی متفاوت

شکل ۵ اثر ضریب بستر وینکلر خطی بر روی نسبت فرکانس غیرخطی به خطی تحت شرایط مرزی متفاوت



شکل ۷ اثر ضریب بستر الاستیک برشی بر روی نسبت فرکانس غیرخطی به خطی تحت شرایط مرزی متفاوت

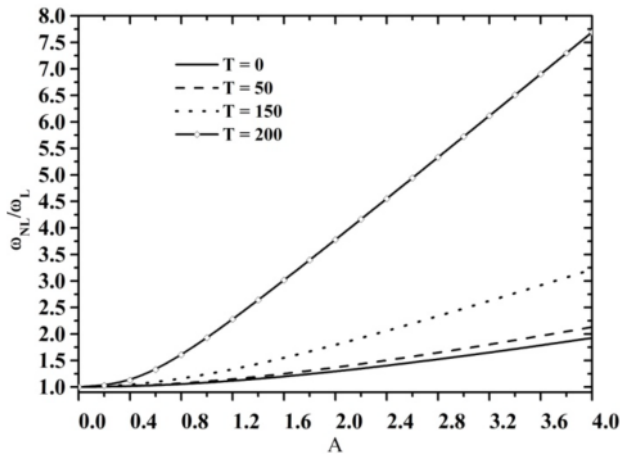
همانطور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، افزایش ضریب بستر الاستیک خطی منجر به کاهش نسبت فرکانس غیرخطی به خطی برای همه شرایط مرزی می‌شود. البته باید توجه داشت که حضور بستر الاستیک خطی باعث افزایش سختی تیر و در نهایت افزایش فرکانس خطی و غیرخطی می‌شود ولی میزان افزایش فرکانس خطی بیشتر از غیرخطی است. شکل ۶، افزایش نسبت فرکانسی ناشی از افزایش ضریب الاستیک غیرخطی را به خوبی مشخص می‌نماید.

شکل ۷ بیانگر کاهش نسبت فرکانس غیرخطی به خطی به دلیل افزایش ضریب بستر الاستیک برشی برای همه شرایط مرزی می‌باشد و این در حالی است که مشابه با بستر الاستیک وینکلر خطی، حضور بستر الاستیک برشی (پسترناک) باعث افزایش هر دو فرکانس خطی و غیرخطی می‌شود ولی میزان افزایش فرکانس خطی بیشتر از غیرخطی است.

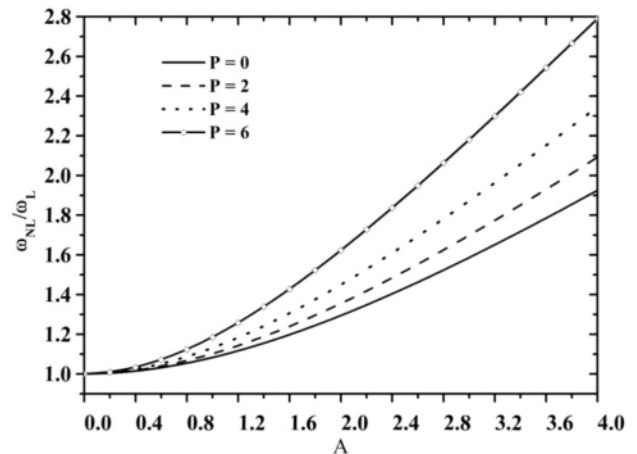
پس از آن و در ادامه به بررسی اثر بار محوری بر روی نسبت فرکانسی پرداخته می‌شود. شکل ۸ تغییرات نسبت فرکانس غیرخطی به خطی را برای بارهای محوری متفاوت نشان می‌دهد. اگرچه با افزایش بار محوری، هر دو فرکانس خطی و غیرخطی کاهش پیدا می‌کنند، اما افزایش مقدار بار محوری باعث افزایش نسبت فرکانس غیرخطی به خطی می‌شود و این به دلیل کاهش شدیدتر فرکانس خطی نسبت به فرکانس غیرخطی می‌باشد.

اثر آخرین پارامتر یعنی دما بر روی نسبت فرکانسی در شکل ۹ آورده شده است. همانطور که انتظار می‌رود، افزایش دمای محیط نسبت به دمای مرجع، اثری مشابه با اثر بار محوری دارد. البته باید به این موضوع توجه داشت که تغییرات نسبت فرکانسی با دما به شدت تابعی از نسبت طول به ارتفاع تیر یا همان ضریب لاغری تیر می‌باشد. در شکل فوق این نسبت برابر با ۲۰ در نظر گرفته شده است.

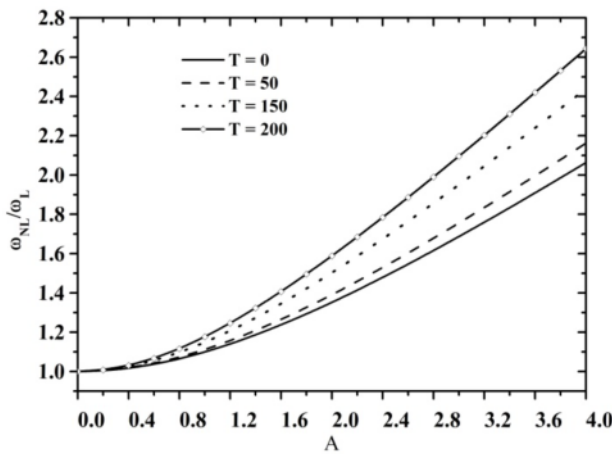
در پایان به منظور مشاهده بهتر اثر پارامترهای مختلف به صورت ترکیبی، بر روی فرکانس غیرخطی و همچنین نسبت فرکانسی یک تیر هدفمند، نتایج بیشتری استخراج شده است. این نتایج در قالب جداول ۴ تا ۶ برای شرایط مرزی متفاوت ارائه شده است. محاسبات مربوط به این جداول، بر اساس ضریب لاغری ۲۰ و توان کسر حجمی ۲ صورت گرفته است.



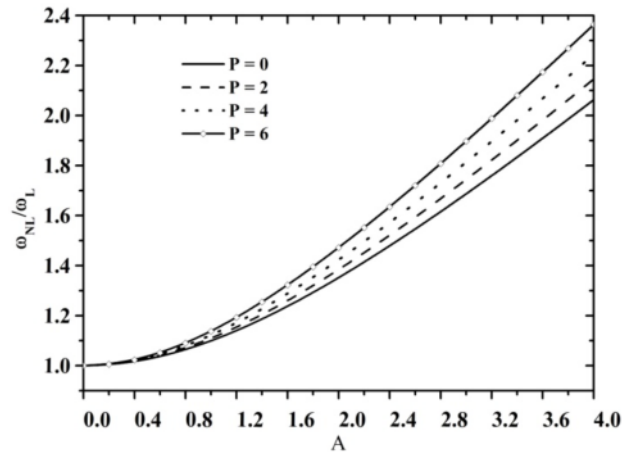
الف) تکیه‌گاه ساده



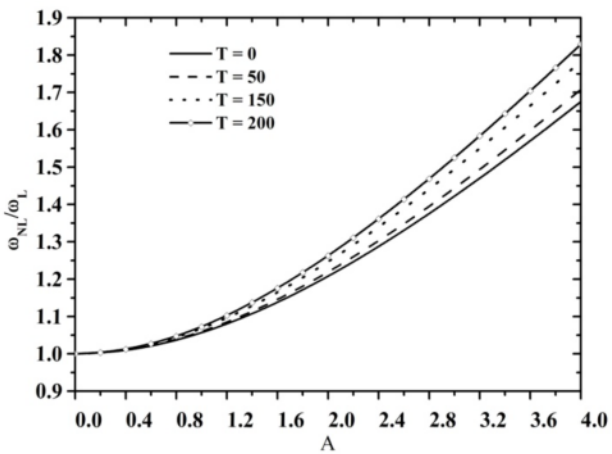
الف) تکیه‌گاه ساده



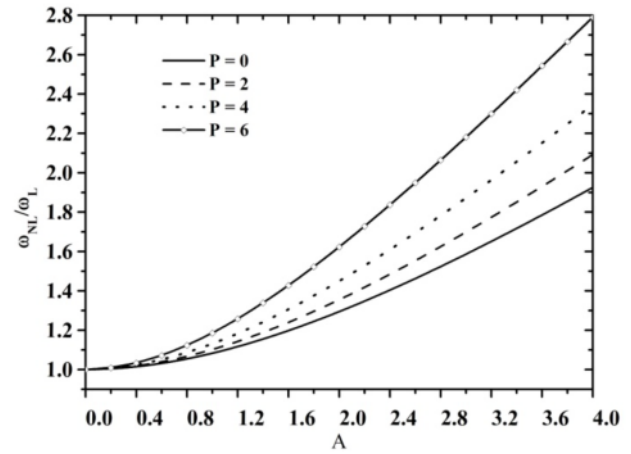
ب) تکیه‌گاه ساده - گیردار



ب) تکیه‌گاه ساده - گیردار



ج) تکیه‌گاه گیردار



ج) تکیه‌گاه گیردار

شکل ۹ اثر دما بر روی نسبت فرکانس غیرخطی به خطی تحت شرایط مرزی متفاوت

شکل ۸ اثر بار محوری بر روی نسبت فرکانس غیرخطی به خطی تحت شرایط مرزی متفاوت

جدول ۴ فرکانس غیرخطی و نسبت فرکانسی تیر هدفمند به ازای پارامترهای مختلف (تکیه‌گاه ساده)

نسبت فرکانس غیرخطی به خطی				فرکانس غیرخطی				T	P	A	K _L
K _{NL}				K _{NL}							
۵۰		۲۵		۵۰		۲۵					
K _S	۰	K _S	۲۵	K _S	۰	K _S	۲۵				
۱/۰۸۲۶	۱/۰۲۵۳	۱/۲۰۳۵	۱/۰۶۳۷	۱۰/۶۸۵	۱۹/۰۲۰	۱۱/۸۷۷	۱۹/۷۳۳	۰	۰	۱	۱
۱/۰۵۶۶	۱/۰۲۲۲	۱/۱۴۰۵	۱/۰۵۵۹	۱۲/۷۲۹	۲۰/۲۹۳	۱۳/۸۴۶	۲۰/۹۶۳				۵۰
۱/۲۹۴۱	۱/۰۹۶۴	۱/۶۶۵۳	۱/۲۳۳۲	۱۲/۷۷۲	۲۰/۳۳۹	۱۶/۴۳۵	۲۲/۸۵۸			۲	۰
۱/۲۰۶۵	۱/۰۸۵۰	۱/۴۷۷۹	۱/۲۰۵۷	۱۴/۶۴۸	۲۱/۵۴۰	۱۷/۹۴۳	۲۳/۹۳۶				۵۰
۱/۱۱۴۰	۱/۰۲۷۵	۱/۲۷۸۵	۱/۰۶۹۳	۹/۱۷۲۶	۱۸/۲۲۲	۱۰/۵۲۷	۱۸/۹۶۴	۳	۱		۰
۱/۰۶۹۵	۱/۰۲۳۹	۱/۱۷۱۷	۱/۰۶۰۲	۱۱/۶۰۹	۱۹/۵۴۹	۱۲/۷۱۸	۲۰/۲۴۳				۵۰
۱/۳۹۶۳	۱/۱۰۴۷	۱/۸۷۸۳	۱/۲۵۱۲	۱۱/۴۹۷	۱۹/۵۹۲	۱۵/۴۶۶	۲۲/۱۸۹			۲	۰
۱/۲۵۰۴	۱/۰۹۱۳	۱/۵۷۲۵	۱/۲۲۰۵	۱۳/۵۷۲	۲۰/۸۳۷	۱۷/۰۶۸	۲۳/۳۰۳				۵۰
۱/۱۴۵۸	۱/۰۲۹۱	۱/۳۵۴۵	۱/۰۷۳۱	۸/۱۷۵۱	۱۷/۷۵۴	۹/۶۶۴۶	۱۸/۵۱۳	۱۰۰	۰	۱	۰
۱/۰۸۰۱	۱/۰۲۵۰	۱/۱۹۷۳	۱/۰۶۳۱	۱۰/۸۵۰	۱۹/۱۱۲	۱۲/۰۲۷	۱۹/۸۲۱				۵۰
۱/۴۹۸۱	۱/۱۱۰۲	۲/۰۸۵۰	۱/۲۶۳۷	۱۰/۶۸۹	۱۹/۱۵۴	۱۴/۸۷۷	۲۱/۸۰۱			۲	۰
۱/۲۸۵۵	۱/۰۹۵۵	۱/۶۴۷۳	۱/۲۳۰۰	۱۲/۹۱۳	۲۰/۴۲۶	۱۶/۵۴۷	۲۲/۹۳۳				۵۰
۱/۲۹۴۵	۱/۰۳۲۰	۱/۷۰۹۴	۱/۰۸۰۶	۵/۹۷۴۳	۱۶/۸۹۶	۷/۸۸۹۱	۱۷/۶۹۲	۳	۱		۰
۱/۱۰۹۲	۱/۰۲۷۲	۱/۲۶۶۹	۱/۰۶۸۶	۹/۳۶۶۱	۱۸/۳۱۹	۱۰/۶۹۷	۱۹/۰۵۷				۵۰
۱/۹۶۲۹	۱/۱۲۱۲	۲/۹۸۴۷	۱/۲۸۸۸	۹/۰۵۷۵	۱۸/۳۵۷	۱۳/۷۷۴	۲۱/۱۰۱			۲	۰
۱/۳۸۰۶	۱/۳۸۰۶	۱/۸۴۵۵	۱/۲۴۸۷	۱۱/۶۵۸	۱۹/۶۸۱	۱۵/۵۸۳	۲۲/۲۶۹				۵۰

جدول ۵ فرکانس غیرخطی و نسبت فرکانسی تیر هدفمند به ازای پارامترهای مختلف (تکیه‌گاه ساده - گیردار)

نسبت فرکانس غیرخطی به خطی				فرکانس غیرخطی				T	P	A	K _L
K _{NL}				K _{NL}							
۵۰		۲۵		۵۰		۲۵					
K _S	۰	K _S	۲۵	K _S	۰	K _S	۲۵				
۱/۰۹۹۰	۱/۰۴۵۷	۱/۲۱۳۴	۱/۱۰۱۶	۱۶/۹۴۴	۲۳/۹۷۳	۱۸/۷۰۸	۲۵/۲۵۵	۰	۰	۱	۰
۱/۰۸۲۴	۱/۰۴۱۹	۱/۱۷۹۱	۱/۰۹۳۲	۱۸/۳۵۹	۲۴/۹۹۴	۲۰/۰۰۰	۲۶/۲۲۶				۵۰
۱/۳۵۱۷	۱/۱۷۲۰	۱/۶۹۲۶	۱/۳۵۸۹	۲۰/۸۴۰	۲۶/۸۶۸	۲۶/۰۹۶	۳۱/۱۵۳			۲	۰
۱/۲۹۷۳	۱/۱۵۸۱	۱/۵۹۴۴	۱/۳۳۱۷	۲۲/۰۰۵	۲۷/۷۸۳	۲۷/۰۴۴	۳۱/۹۴۸				۵۰
۱/۱۱۵۱	۱/۰۴۸۹	۱/۲۴۶۰	۱/۱۰۸۷	۱۵/۸۹۴	۲۳/۲۴۲	۱۷/۷۶۱	۲۴/۵۶۱	۳	۱		۰
۱/۰۹۳۱	۱/۰۴۴۵	۱/۲۰۱۴	۱/۰۹۸۹	۱۷/۳۹۴	۲۴/۲۹۴	۱۹/۱۱۷	۲۵/۵۵۹				۵۰
۱/۴۰۲۸	۱/۱۸۳۲	۱/۷۸۳۴	۱/۳۸۰۶	۱۹/۹۹۵	۲۶/۲۱۸	۲۵/۴۲۰	۳۰/۵۹۱			۲	۰
۱/۳۳۲۸	۱/۱۶۷۵	۱/۶۵۸۷	۱/۳۵۰۱	۲۱/۲۰۷	۲۷/۱۵۴	۲۶/۳۹۳	۳۱/۴۰۱				۵۰
۱/۲۹۰۲	۱/۰۶۵۷	۱/۵۸۰۳	۱/۱۴۴۳	۱۱/۱۷۳	۲۰/۲۹۹	۱۳/۶۸۵	۲۱/۷۹۶	۳۰۰	۰	۱	
۱/۱۸۱۹	۱/۰۵۷۹	۱/۳۷۷۸	۱/۱۲۷۸	۱۳/۲۱۴	۲۱/۴۹۵	۱۵/۴۰۴	۲۲/۹۱۴				۵۰
۱/۹۰۴۱	۱/۲۴۱۶	۲/۶۲۴۵	۱/۴۹۱۴	۱۶/۴۸۹	۲۳/۶۴۹	۲۲/۷۲۷	۲۸/۴۰۷			۲	
۱/۶۰۴۴	۱/۲۱۴۸	۲/۱۳۰۱	۱/۴۴۱۰	۱۷/۹۳۷	۲۴/۶۸۳	۲۳/۸۱۵	۲۹/۲۷۹				۵۰
۱/۴۹۶۸	۱/۰۷۲۵	۱/۹۴۳۱	۱/۱۵۸۵	۹/۵۱۹۸	۱۹/۴۳۱	۱۲/۳۵۹	۲۰/۹۸۹	۳	۱		۰
۱/۲۴۵۰	۱/۰۶۳۱	۱/۴۹۷۲	۱/۱۳۸۸	۱۱/۸۴۱	۲۰/۶۷۷	۱۴/۲۳۹	۲۲/۱۴۸				۵۰
۲/۴۲۲۸	۱/۲۶۴۳	۳/۴۴۹۸	۱/۵۳۳۸	۱۵/۴۱۰	۲۲/۹۰۷	۲۱/۹۴۲	۲۷/۷۸۹			۲	
۱/۷۸۲۲	۱/۲۳۲۶	۲/۴۲۵۶	۱/۴۷۴۶	۱۶/۹۵۰	۲۳/۹۷۳	۲۳/۰۶۹	۲۸/۶۸۰				۵۰

جدول ۶ فرکانس غیرخطی و نسبت فرکانسی تیر هدفمند به ازای پارامترهای مختلف (تکیه‌گاه گیردار)

نسبت فرکانس غیرخطی به خطی				فرکانس غیرخطی				T	P	A	K _L
K _{NL}				K _{NL}							
۰		۵۰		۰		۵۰					
K _S		K _S		K _S		K _S					
۰	۲۵	۰	۲۵	۰	۲۵	۰	۲۵				
۱/۰۵۶۲	۱/۰۳۵۲	۱/۱۲۱۴	۱/۰۷۷۰	۲۳/۶۳۰	۲۹/۴۲۹	۲۵/۰۸۹	۳۰/۶۱۷	۰	۰	۱	۰
۱/۰۵۱۲	۱/۰۳۳۲	۱/۱۱۱۰	۱/۰۷۲۷	۲۴/۶۶۶	۳۰/۲۶۶	۲۶/۰۶۸	۳۱/۴۲۳				۵۰
۱/۲۰۷۵	۱/۱۳۳۵	۱/۴۲۰۲	۱/۲۷۷۹	۲۷/۰۱۵	۳۲/۲۲۲	۳۱/۷۷۴	۳۶/۳۲۸			۲	۰
۱/۱۹۰۲	۱/۱۲۶۲	۱/۳۸۷۶	۱/۲۶۳۵	۲۷/۹۲۸	۳۲/۹۹۰	۳۲/۵۵۹	۳۷/۰۱۴				۵۰
۱/۰۶۰۵	۱/۰۳۶۹	۱/۱۳۰۴	۱/۰۷۰۶	۲۲/۸۳۵	۲۸/۷۹۵	۲۴/۳۴۱	۳۰/۰۰۸	۳	۱		۰
۱/۰۵۴۸	۱/۰۳۴۷	۱/۱۱۸۵	۱/۰۷۵۸	۲۳/۹۰۶	۲۹/۶۵۰	۲۵/۳۴۹	۳۰/۸۳۰				۵۰
۱/۲۲۲۳	۱/۱۳۹۴	۱/۴۴۸۱	۱/۲۸۹۶	۲۶/۳۱۹	۳۱/۶۴۳	۳۱/۱۸۲	۳۵/۸۱۳			۲	۰
۱/۲۰۲۷	۱/۱۳۱۵	۱/۴۱۱۱	۱/۲۷۴۰	۲۷/۲۵۷	۳۲/۴۲۵	۳۱/۹۸۲	۳۶/۵۰۹				۵۰
۱/۱۷۲۹	۱/۰۶۱۰	۱/۳۵۴۵	۱/۱۳۱۳	۱۴/۴۹۷	۲۲/۷۶۳	۱۶/۷۴۲	۲۴/۲۷۳	۶۰۰	۰	۱	۰
۱/۱۳۳۰	۱/۰۵۵۱	۱/۲۷۷۰	۱/۱۱۹۲	۱۶/۱۳۴	۲۳/۸۳۶	۱۸/۱۸۴	۲۵/۲۸۳				۵۰
۱/۵۷۵۶	۱/۲۲۳۸	۲/۰۷۲۵	۱/۴۵۰۹	۱۹/۴۷۴	۲۶/۲۵۶	۲۵/۶۱۶	۳۱/۱۲۸			۲	۰
۱/۴۵۶۰	۱/۲۰۳۸	۱/۸۶۷۶	۱/۴۱۳۴	۲۰/۷۳۴	۲۷/۱۹۵	۲۶/۵۹۵	۳۱/۹۲۹				۵۰
۱/۲۲۲۴	۱/۰۶۶۰	۱/۴۴۸۳	۱/۱۴۲۰	۱۳/۱۵۸	۲۱/۹۳۶	۱۵/۵۸۹	۲۳/۴۹۸	۳	۱		۰
۱/۱۶۰۳	۱/۰۵۹۳	۱/۳۳۰۲	۱/۱۲۷۹	۱۴/۹۴۳	۲۳/۰۴۸	۱۷/۱۳۲	۲۴/۵۴۱				۵۰
۱/۷۱۷۴	۱/۲۴۱۲	۲/۳۱۰۱	۱/۴۸۳۳	۱۸/۴۸۶	۲۵/۵۴۰	۲۴/۸۶۶	۳۰/۵۲۲			۲	۰
۱/۵۳۸۳	۱/۲۱۸۲	۲/۰۰۹۲	۱/۴۴۰۴	۱۹/۸۱۲	۲۶/۵۰۵	۲۵/۸۷۶	۳۱/۳۴۰				۵۰

۶- فهرست علائم

ضریب پواسون	ν
فرکانس غیر خطی (Rad/s)	ω
شکل مد تیر	$\varphi(x)$

ماکزیمم دامنه بی بعد نوسان	A
عرض تیر (m)	b
مدول یانگ (N/m ²)	E
ارتفاع تیر (m)	h
سفتی بستر الاستیک خطی وینکلر (N/m)	\bar{k}_L
سفتی بستر الاستیک غیر خطی وینکلر (N/m ³)	\bar{k}_{NL}
سفتی بستر خطی پسترناک (N/m)	\bar{k}_S
طول تیر (m)	L
منتجه ممان بر واحد طول (N)	$M_{\bar{x}}$
منتجه نیرو بر واحد طول (N/m)	$N_{\bar{x}}$
توان کسر حجمی	n
بار محوری (N)	\bar{P}
شعاع ژیراسیون (m)	r
زمان (s)	t
جابه جایی محوری (m)	\bar{u}
پارامتر تغییر شکل وابسته به زمان	V(t)
جابه جایی عرضی (m)	\bar{w}
چگالی (N/m ³)	ρ

۷- مراجع

- [1] Sankar B. V., "An Elasticity Solution for Functionally Graded Beams", *Composites Science and Technology*, Vol. 61, No. 5, 2001, pp. 689-696.
- [2] Zhong Z., Yu T., "Analytical Solution of a Cantilever Functionally Graded Beam", *Composites Science and Technology*, Vol. 67, No. 3-4, 2007, pp. 481-488.
- [3] Au F. T. K., Zheng D.Y., Cheung Y.K., "Vibration and Stability of Non-Uniform Beams with Abrupt Changes of Cross-Section by using C1 Modified Beam Vibration Functions", *Applied Mathematics and Modeling*, Vol. 23, No. 1, 1999, pp. 19-34.
- [4] Ying J., Lu C. F., Chen W. Q., "Two-Dimensional Elasticity Solutions for Functionally Graded Beams Resting on Elastic Foundations", *Composite Structures*, Vol. 84, No. 3, 2008, pp. 209-219.
- [5] Ke L. L., Yang J., Kitipornchai S., "An Analytical Study on the Nonlinear Vibration of Functionally

- [16] Younesian D., Askari H., Saadatnia Z., KalamiYazdi M., "Frequency Analysis of Strongly Nonlinear Generalized Duffing Oscillators using He's Frequency Amplitude Formulation and He's Energy Balance Method", *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 59, No. 9, 2010, pp. 3222-3228.
- [17] Pirbodaghi T., Ahmadian M. T., Fesanghary M., "On the Homotopy Analysis Method for Non-Linear Vibration of Beams", *Mechanics Research Communications*, Vol. 36, No. 2, 2009, pp. 143-148.
- [18] Baghani M., JafariTalookolaei R. A., Salarieh H., "Large Amplitudes Free Vibrations and Post-Buckling Analysis of Unsymmetrically Laminated Composite Beams on Nonlinear Elastic Foundation", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 35, No. 1, 2011, pp. 130-138.
- [19] Ding H. J., Huang D. J., Chen W. Q., "Elasticity Solutions for Plane Anisotropic Functionally Graded Beams", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, No. 1, 2007, pp. 176-196.
- [20] Li S., Liao S.J., "An Analytic Approach to Solve Multiple Solutions of a Strongly Nonlinear Problem", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 169, No. 2, 2005, pp. 854-865.
- [21] Liao S. J., "Beyond Perturbation: Introduction to Homotopy Analysis Method", *Chapman and Hall/CRC*, 2004.
- [22] Lai S. K., Lam C. W., Wu B.S., Wang C., Zeng Q.C., He X.F., "Newton-Harmonic Balancing Approach for Accurate Solutions to Nonlinear Cubic-Quintic Duffing Oscillators", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 33, No. 2, 2008, pp. 852-866.
- [23] Azrar L., Benamar R., White R. G., "A Semi-Analytical Approach to the Nonlinear Dynamic Response Problem of S-S and C-C Beams at Large Vibration Amplitudes, Part I: General Theory and Application to the Single Mode Approach to Free and Forced Vibration Analysis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 224, No. 2, 1999, pp. 183-207.
- [24] Qaisi M. I., "Application of the Harmonic Balance Principle to the Nonlinear Free Vibration of Beams", *Applied Acoustics*, Vol. 40, No. 2, 1993, pp. 141-151.
- Graded Beams", *Meccanica*, Vol. 45, No. 6, 2009, pp. 743-752.
- [6] Simsek M., "Non-Linear Vibration Analysis of a Functionally Graded Timoshenko Beam under Action of a Moving Harmonic Load", *Composite Structures*, Vol. 92, No. 10, 2010, pp. 2532-2546.
- [7] Fallah A., Aghdam M. M., "Nonlinear Free Vibration and Post Buckling Analysis of Functionally Graded Beams on Nonlinear Elastic Foundation", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 30, No. 4, 2011, pp. 571-583.
- [8] Librescu L., Oh S.Y., Song O., "Thin-Walled Beams Made of Functionally Graded Materials and Operating in a High Temperature Environment: Vibration and Stability", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 28, No. 6-7, 2005, pp. 649-712.
- [9] Sankar B.V., "An Elasticity Solution for Functionally Graded Beams", *Composites Science and Technology*, Vol. 61, No. 5, 2001, pp. 689-696.
- [10] Lu C. F., Chen W. Q., Xu R.Q., Lim C.W., "Semi-Analytical Elasticity Solutions for Bi-Directional Functionally Graded Beams", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 45, No. 1, 2008, pp. 258-275.
- [11] Bian Z. G., Lim C. W., Chen W. Q., "On Functionally Graded Beams with Integrated Surface Piezoelectric Layers", *Composite Structures*, Vol. 72, No. 3, 2006, pp. 339-351.
- [12] Bhangale R. K., Ganesan N., "Thermoelastic Vibration and Buckling Analysis of Functionally Graded Sandwich Beam with Constrained Viscoelastic Core", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 295, No. 1-2, 2006, pp. 294-316.
- [13] Bangera K. M., Chandrashekhara K., "Nonlinear Vibration of Moderately Thick Laminated Beams using Finite Element Method", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 9, No. 4, 1991, pp. 321-333.
- [14] Malekzadeh P., Vosoughi A. R., "DQM Large Amplitude Vibration of Composite Beams on Nonlinear Elastic Foundations with Restrained Edges", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 14, No. 3, 2009, pp. 906-915.
- [15] He J. H., "Variational Iteration Method: Some Recent Results and New Interpretations", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 207, No. 1, 2007, pp. 3-17.