



تحلیل دینامیکی و بررسی ارتعاشات کوپل ملخ گام متغیر

سیدعلی موسوی¹، محمدرضا الهامی^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه جامع امام حسین(ع)، تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران

* تهران، صندوق پستی 15861-16987، melhami@ihu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 13 خرداد 1394

پذیرش: 28 تیر 1394

ارائه در سایت: 24 مرداد 1394

کلید واژگان:

بالگرد، ملخ

گام متغیر

گالرکین

ارتعاشات کوپل

چکیده

ملخ‌های گام متغیر به دلیل استفاده در بالگردهای پیشرفته، جهت حصول به راندمان بیشتر، پایداری بهتر و دستیابی به ارتفاعات بالاتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، به همین دلیل در این مقاله به بررسی رفتار این نوع ملخ‌ها با جابه‌جایی غیرخطی کوپل‌شده سه درجه آزادی پرداخته شده است. بر این اساس رفتار ملخ گام متغیر برحسب تغییرات مرکز الاستیک، طول، جرم، سرعت، شعاع ژیراسیون قطبی، سختی‌های موجود در سه درجه آزادی و گام بررسی شده است. در مقاله حاضر جهت استخراج فرکانس‌های طبیعی از روش گالرکین استفاده شده و نتایج به‌دست‌آمده با نتایج گزارش‌شده توسط محققان دیگر مورد ارزیابی قرار گرفته است، همچنین نتایج به خوبی گواه بر همگرایی و دقت روش به کار رفته دارد، مشخص شد که پارامترهای جرم، طول و سرعت دورانی ملخ بر فرکانس‌های طبیعی تمامی مدهای ارتعاشی پره ملخ تأثیر دارند، ولی سایر پارامترها به جز زاویه تغییر گام بر فرکانس‌های مدهای زوج یا فرد تأثیرگذار است، همچنین در بررسی‌های انجام شده بر زاویه تغییر گام مشخص شد که این پارامتر در حالت استاتیکی بر فرکانس‌های طبیعی هیچ‌گونه تأثیری ندارد، ولی در حالت دوران ملخ، بر فرکانس‌های طبیعی مدهای ارتعاشی به‌صورت سینوسی یا کسینوسی تأثیرگذار است.

Dynamic Analysis and Coupled Vibration of Variable pitch Propeller

Seyed Ali Mousavi, Mohamad Reza Elhami*

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Imam Hossein University, Tehran, Iran.

* P.O.B. 15861-16987, Tehran, Iran, melhami@ihu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 03 June 2015
Accepted 19 July 2015
Available Online 15 August 2015

Keywords:
Helicopter
Propeller
Variable Pitch
Gallerkin
Coupled vibration

ABSTRACT

Variable pitch propeller (VPP) is used in advanced helicopters in order to achieve greater efficiency, better stability and attain higher altitudes. This study assesses the behavior of VPP propeller with coupled non-linear displacement in three degrees of freedom. Accordingly, the behavior of this type of propeller with changes of elastic axis distance, length, mass, speed, polar radius of gyration, stiffness in three degrees of freedom, and pitch have been investigated. In this paper, Gallerkin method is used to extract natural frequencies and the results compared with the results reported by other researchers. The results show convergence and accuracy of the used method. In this study, it was found that parameters of mass, length and rotational speed of the propeller have an effect on the natural frequencies, and all modes of vibration. However, other parameters except for the pitch angle effect on the odd or even number of frequency modes. It was also found that the pitch angle in the static mode does not influence on natural frequencies, but in the case of rotation of propeller, affects the natural frequency of vibration modes as sine or cosine form.

1- مقدمه

تغییر می‌کند که این می‌تواند سبب ناپایداری و ایجاد پدیده‌هایی مانند تشدید در ملخ شود و اگر ارتعاشات ملخ با روش‌های مناسب کنترل نشود، سبب اختلال در عملکرد بالگرد، خستگی زودرس قطعات و در نتیجه کاهش عمر سیستم‌شده و حتی ممکن است سبب شکست پره و سقوط بالگرد شود. از سوی دیگر نیز کاهش ارتعاشات ملخ سبب افزایش راحتی خدمه و کنترل‌پذیری بهتر بالگرد می‌شود.

در بررسی ارتعاشات ملخ بالگردها، معمولاً پره‌های آن به‌عنوان یک تیر دورانی در نظر گرفته می‌شود و معادلات حاکم بر تیرهای دورانی برای آن‌ها استفاده می‌شود.

امروزه در بالگردها و پهبادهای پیشرفته به دنبال پیشرفت تکنولوژی ساخت ملخ‌ها، در کنار ملخ‌های گام ثابت (متعارف)، ملخ‌های گام متغیر نیز ساخته شده‌اند. در این نوع ملخ‌ها زاویه حمله پره ملخ متغیر و قابل کنترل بوده که به دنبال آن پیمایش یا گام پره، در حرکت افقی (رو به جلو) تغییر می‌یابد در نتیجه به وسیله این ملخ‌ها می‌توان گام متناسب و بهینه را به پره‌های آن داد تا بدین‌وسیله با دور کمتر موتور، راندمان، تراست و در نتیجه سرعت و ارتفاع بیشتر را (ضمن کنترل و پایداری بهتر) در بالگرد ایجاد کرد. بر همین اساس در اثر استفاده از این نوع ملخ‌ها ارتعاشات و فرکانس‌های طبیعی پره‌های ملخ

Please cite this article using:

S. A. Mousavi, M. R. Elhami, Dynamic Analysis and Coupled Vibration of Variable pitch Propeller, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 9, pp. 170-178, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

هوبولت و بروکس [1] نخستین کسانی بودند که معادلات دیفرانسیل را برای حرکات خمش طولی، خمش عرضی و پیچش به همراه زاویه پیچشی اولیه به دست آوردند. پره در نظر گرفته شده توسط هوبولت و بروکس به صورت غیریکنواخت بود. متأسفانه حل تحلیلی و دقیق برای معادلات بالا تقریباً غیرممکن بود؛ بنابراین روش‌های متعددی برای حل تقریبی این معادلات ارائه شد.

هانتر [2]، وایت و مالتینو [3] روش ماتریس انتگرالی¹ را برای حل معادلات بالا ارائه کردند، همچنین مورسی [4, 5] علاوه بر روش پیش از روش دیگری به نام انتقال ماتریسی² برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و خصوصیات دینامیکی پره استفاده کرد. رایت و همکاران [6] تحلیل دینامیکی تیرهای دوار همگن دارای توزیع جرم و سختی خطی را با استفاده از سری‌های فریبینیوس انجام دادند در این روش معادله دیفرانسیل حرکت به طور مجزا در نظر گرفته شده و در جواب معادله به صورت تابعی از سری‌های فریبینیوس فرض شده است.

ردی [7] روش‌های گالرکین، رایلی ریتز و باقی‌مانده‌های وزنی را برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی تیرها ارائه کرده و این روش‌ها را مورد مقایسه قرار داده است.

سوریس و همکاران [8] ارتعاشات خمشی- پیچشی تیر دارای زاویه پیچش اولیه را به کمک توابع انتگرالی گرین تحلیل کردند. بازون [9] روابط بین فرکانس‌های طبیعی خارج صفحه و داخل صفحه دوران را برحسب ضرایب ساوتول³ مورد بحث قرار داد و همچنین بازون و همکاران [10] در مقاله‌ای مشخصه‌های ارتعاشی یک تیر تیموشینکو با سطح مقطع متغیر را با استفاده از روش المان محدود بررسی کردند.

هو و شین [11] معادلات حرکت را به صورت جداگانه برای یک پره دوار در خمش خارج از صفحه و خمش درون صفحه استخراج و بسامدهای آن را محاسبه کردند. برامول [12] به استخراج معادلات دیفرانسیل خارج از صفحه و داخل صفحه پره‌های روتور بالگرد پرداخته و روش‌های انرژی و مایکل استاد را برای حل این معادلات ارائه کرد. در این راستا موسوی و همکاران در مقالاتی [13, 14] به چگونگی تست و آنالیز مودال پره‌های بالگرد در جهات خمش خارج و داخل صفحه دوران پرداختند و نتایج تست تجربی را با نتایج المان محدود مورد مقایسه قرار دادند.

لین و همکاران [15] به بررسی پایداری و ارتعاشات آزاد تیر همگن دوار با شرایط مرزی الاستیک و دارای زاویه پیچش اولیه پرداخته، همچنین در تحقیق مجزایی [16] به بررسی ارتعاشات آزاد تیر غیرهمگن دارای زاویه پیچش اولیه و جرم متمرکز در انتها پرداخته است و تحلیل دینامیکی جرم متمرکز را همراه با اثر استهلاکی نیز بررسی [17] و تابع گرین را برای این تیر به دست آورده است. راثو و گوپتا [18] روش المان محدود را برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیر دورانی با سطح مقطع متغیر به کار بردند. معینی فرد و همکارانش [19] در مقاله‌ای به بررسی ناپایداری دینامیکی تیرهای با مقطع متغیر در اثر تحریکات آیرودینامیکی و باد پرداختند و الگوریتم جدیدی جهت حل فرکانس‌ها و شکل مودها با توجه به اثرات موجود براساس فضای حالت ارائه کردند.

واریکو و هادارا [20] با استفاده از دیدگاه نیوتن به بررسی ارتعاشات ملخ یک درجه آزادی پرداختند، ایشان با در نظر گرفتن تغییر شکل برشی، اینرسی

چرخشی به بررسی ارتعاشات عرضی ملخ و محور آن پرداختند. بیشاپ و همکارانش [21] با ترکیب تئوری تیر اوایلر برنولی انعطاف‌پذیر و تئوری سن‌ونان برای پیچش، به بررسی ارتعاشات خمشی پیچشی تیر یکنواخت پرداختند و اثرات پیچش سطح مقطع را نیز مورد بررسی قرار دادند. جان و همکارانش [22] به بررسی ارتعاشات کوپل تیر یکنواخت جدار نازک اوایلر برنولی پرداختند. تیر در نظر گرفته شده توسط ایشان u شکل و نامتقارن بود. آن‌ها با استفاده از روش ماتریس انتقال فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای این سیستم را در شرایط مرزی گوناگون بررسی کردند و همچنین اثرات بار محوری و سفتی پیچشی بر فرکانس‌های طبیعی این نوع تیر را مطالعه کردند. یاردیموگلو و همکارش [23] مدل المان محدودی را برای ارتعاشات کوپل تیر تیموشینکو نامتقارن، با زاویه پیچش اولیه ارائه کردند. عناصر المان محدود آن‌ها دارای دو گره با هفت درجه آزادی بودند که با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل برشی و دوران سطح مقطع ماتریس‌های سفتی و جرمی حاصل را اصلاح کردند. کودداگ و همکارش [24] به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری خمشی- پیچشی یک تیر دارای جرم اضافه در انتها و ابتدا پرداختند و اثرات جرم اضافه در انتهای تیر، فنرهای خطی و پیچشی متصل به آن را بر فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها، برای دو تیر جدارنازک گیردار با سطح مقطع نیم‌دایره و u شکل مورد مطالعه قرار دادند.

پاتل و دارپ [25] به بررسی قابلیت اطمینان و سلامت یک روتور دورانی پرداختند. ایشان با در نظر گرفتن مدل ارتعاشی خمشی و پیچشی یک روتور دارای ترک و سایش، پاسخ فرکانسی آن را در حضور و غیاب این پارامترها به وسیله روش المان محدود بررسی کرد. وروس [26] در مقاله‌ای به بررسی ارتعاشات کوپل تیر یکنواخت دارای بار جانبی پایدار پرداخت و معادلات حرکت ارتعاشات را با استفاده از تئوری اوایلر- برنولی- ولاسو و اصل کار مجازی استخراج کرد و با استفاده از حل کلوز فرم به بررسی ارتعاشات تیر متقارن با شرایط مرزی ساده تحت بار خمشی یکنواخت پرداخت.

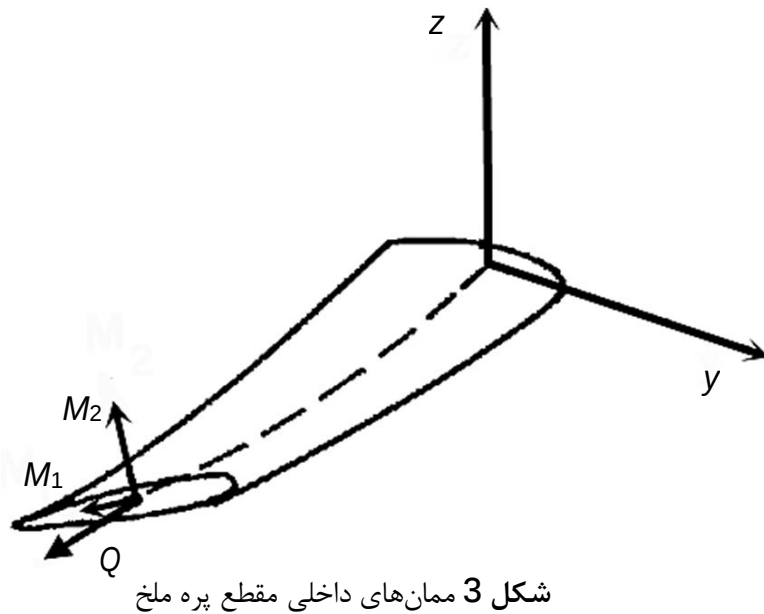
در کارهای گذشته عموماً ارتعاشات پره‌ها به عنوان تیرهای دورانی به صورت جداگانه در جهات مختلف و یا در دو جهت به صورت کوپل همراه با ساده‌سازی‌های فراوان مورد بررسی قرار گرفته است. در مقاله حاضر سعی شده تمامی پارامترهای مؤثر در ارتعاشات ملخ با کمینه ساده‌سازی بررسی شود و همچنین تغییر گام در ارتعاشات ملخ لحاظ گردد که این امر سبب پیچیدگی بیشتر موضوع می‌گردد و از سوی دیگر نیز سعی شده، ارتعاشات این نوع ملخ‌ها به صورت واقعی و کوپل شده در تمامی جهات یعنی خمش خارج از صفحه دوران، خمش داخل صفحه دوران و پیچشی مورد بررسی قرار گیرد. در این راستا در گام نخست به امر ارتعاشات آزاد ملخ گام متغیر پرداخت شده تا با توجه به شرایط موجود در گام بعد تغییرات فرکانس‌های طبیعی ملخ در اثر تغییرات مرکز الاستیک، طول، جرم، سرعت، شعاع ژیراسیون قطبی، سختی‌های موجود در سه درجه آزادی و گام بررسی شود.

2- استخراج معادلات حرکت ملخ

با توجه به شکل 1 هر پره چرخان ملخ با سرعت زاویه‌ای Ω دارای سه محور مرکز جرم، فشار (حاصل از دوران) و الاستیک است که این محورها با توجه به مراکز جرم، فشار و سطح هر مقطع ملخ رسم می‌شود. در این سیستم، مبدا مختصات ملخ در ابتدای ریشه آن و منطبق بر محور الاستیک است.

برای یک مقطع پره ملخ شکل 2 با در نظر گرفتن شرایط تنش صفحه‌ای (با صرف نظر از تغییر شکل بسیار کوچک برشی عرضی) روابط کلی کرنش و تنش برحسب تغییر شکل‌های v ، w و θ به صورت معادلات (1، 2) خواهد بود

1- IMM
2- TMM
3- South Well



شکل 3 ممان‌های داخلی مقطع پره ملخ

که I_1 و I_2 ممان اینرسی محوره‌های اصلی و B_1 و B_2 ثابت‌های سطح مقطع پره است.

جهت سهولت در تعادل بین ممان‌ها و نیروها از ممان‌های موازی و عمود بر محوره‌های اصلی M_x ، M_y و M_z استفاده می‌شود. با فرض کوچک بودن ϕ ، رابطه (9) برای ممان‌های محوره‌های اصلی به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} M_x &= Q + M_1(\cos\beta - \phi\sin\beta)v' + M_1(\sin\beta - \phi\cos\beta)w' + M_2(\sin\beta - \phi\cos\beta)v' \\ &\quad - M_2(\cos\beta - \phi\sin\beta)w' \\ M_y &= M_1(\cos\beta - \phi\sin\beta) + M_2(\sin\beta + \phi\cos\beta) - Qv' \\ M_z &= -M_1(\sin\beta + \phi\cos\beta) + M_2(\cos\beta - \phi\sin\beta) - Qw' \end{aligned} \quad (9)$$

با جایگزینی معادلات (8-6) در معادله (9) و همچنین ساده‌سازی و حذف عبارت‌های مرتبه 2، ممان‌های بالا برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی به صورت روابط (12-10) است.

$$\begin{aligned} M_x &= [GJ + TK_A^2 + EB_1(\beta')^2]\phi' + TK_A^2\beta' \\ &\quad - EB_2\beta'(v''\cos\beta + w''\sin\beta) - Te_A v'\sin\beta \\ &\quad + Te_A w'\cos\beta \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} M_y &= (EI_1\cos^2\beta - EI_2\sin^2\beta)w'' + (EI_2 - EI_1)\sin\beta\cos\beta v'' \\ &\quad - (Te_A + EB_2\beta'\phi')\sin\beta - Te_A\phi\cos\beta \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} M_z &= (EI_2 - EI_1)\sin\beta\cos\beta w'' + (EI_1\sin^2\beta + EI_2\cos^2\beta)v'' \\ &\quad - (Te_A + EB_2\beta'\phi')\cos\beta + Te_A\phi\sin\beta \end{aligned} \quad (12)$$

معادلات تعادل نیز به صورت رابطه (13) تعریف می‌شوند [1].

$$\begin{aligned} M'_x - M'_y v' + M'_z w' - \bar{q}_y v' + \bar{q}_z w' + \bar{q}_x &= 0 \\ M''_y - (Tw')' + \bar{q}_y' - \bar{p}_z &= 0 \\ M''_z - (Tv')' + \bar{q}_z' - \bar{p}_y &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

با جایگزینی روابط (12-10) در معادلات تعادل روابط (14-16) حاصل خواهد شد.

$$\begin{aligned} &-([GJ + TK_A^2 + EB_1(\beta')^2]\phi' + TK_A^2\beta' \\ &\quad - EB_2\beta'(v''\cos\beta + w''\sin\beta))' \\ &\quad + Te_A v''\sin\beta - Te_A w''\cos\beta \\ &\quad - \bar{q}_y v' + \bar{q}_z w' + \bar{q}_x = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &[(EI_1\cos^2\beta + EI_2\sin^2\beta)w'' + (EI_2 - EI_1)\sin\beta\cos\beta v'' \\ &\quad - (Te_A + EB_2\beta'\phi')\sin\beta - Te_A\phi\cos\beta]'' - (Tw')' + \bar{q}_y' \\ &\quad - \bar{p}_z = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &[(EI_2 - EI_1)\sin\beta\cos\beta w'' + (EI_1\sin^2\beta + EI_2\cos^2\beta)v'' \\ &\quad - (Te_A + EB_2\beta'\phi')\cos\beta + Te_A\phi\sin\beta]'' - (Tv')' + \bar{q}_z' - \bar{p}_y \\ &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

[1]

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\varepsilon_T + (e_A - \eta)(v''\cos\beta + w''\sin\beta) \\ &\quad + \xi(v''\sin\beta + w''\cos\beta) + (\xi^2 + \eta^2 - K_A^2)\beta'\phi' \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma &= E[-\varepsilon_T + (e_A - \eta)(v''\cos\beta + w''\sin\beta) \\ &\quad + \xi(v''\sin\beta + w''\cos\beta) \\ &\quad + (\xi^2 + \eta^2 - K_A^2)\beta'\phi'] \end{aligned} \quad (2)$$

در این روابط ε_T کرنش حاصل از فشار دوران ($\varepsilon_T = \frac{T}{EA}$) است و e_A فاصله بین مرکز فشار و مرکز الاستیک سطح مقطع پره، β زاویه حمله یا تغییر گام ملخ، K_A شعاع ژیراسیون قطبی سطح مقطع پره حول محور الاستیک آن است.

مطابق شکل 3 جهت محاسبه ممان‌ها، تنش‌های توزیع شده در طول المان ملخ به دو جزء یکی در راستای محور الاستیک و دیگری عمود بر آن به صورت روابط (3-4) تجزیه شده است.

$$M_1 = - \int_{\eta_{te}}^{\eta_{le}} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma \xi d\xi d\eta \quad (3)$$

$$M_2 = - \int_{\eta_{te}}^{\eta_{le}} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma \eta d\xi d\eta \quad (4)$$

علامت منفی به این دلیل انتخاب شده که وقتی ممان فشاری است علامت آن مثبت شود و ممان پیچشی نیز به صورت رابطه (5) تعریف می‌شود.

$$Q = GJ\phi' + \int_{\eta_{te}}^{\eta_{le}} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma(\beta + \phi)'(\eta^2 + \xi^2) d\xi d\eta \quad (5)$$

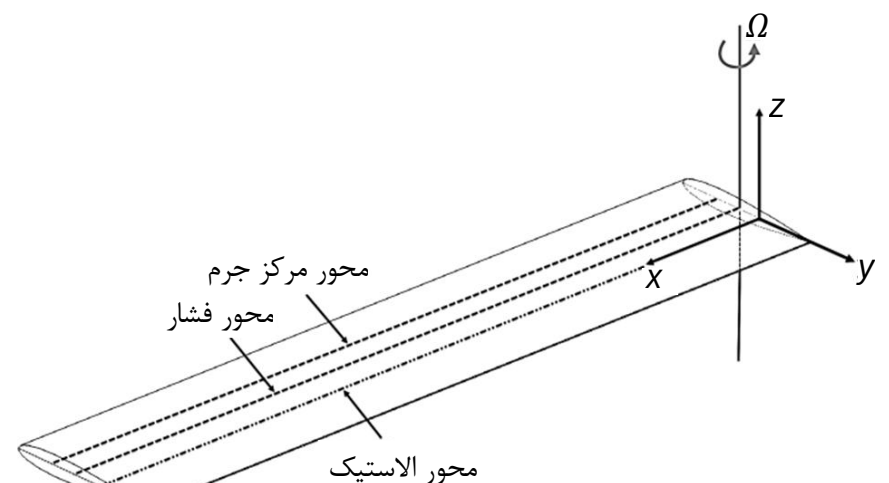
در این معادله مؤلفه اول ناشی از ممان موجود در صفحه عمود بر محور الاستیک و مؤلفه دوم ناشی از گشتاور پیچشی سرنوان است.

با جایگزینی معادله (2) در معادلات (3-5) معادلات (8-6) برای گشتاورهای الاستیک کل برحسب تغییر مکان به دست می‌آید.

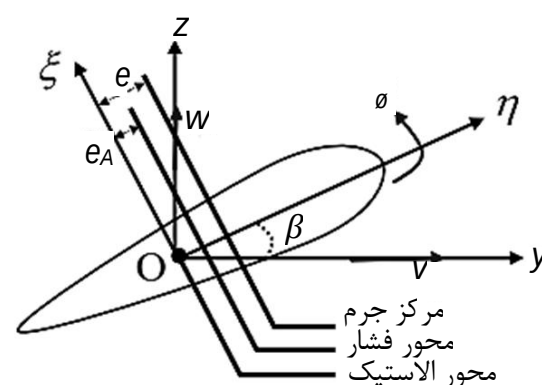
$$M_1 = EI_1(-v''\sin\beta + w''\cos\beta) \quad (6)$$

$$M_2 = EI_2(v''\cos\beta + w''\sin\beta) - Te_A - EB_2\beta'\phi' \quad (7)$$

$$\begin{aligned} Q &= [GJ + TK_A^2 + EB_1(\beta')^2]\phi' + TK_A^2\beta' \\ &\quad - EB_2\beta'(v''\cos\beta + w''\sin\beta) \end{aligned} \quad (8)$$



شکل 1 ارتعاشات ملخ گام متغیر



شکل 2 مقطع پره ملخ و مشخصات هندسی آن

شکل مود این تیرها رابطه (22) جهت تقریب شکل مود ملخ استفاده شده است. برای تخمین دقیق فرکانس‌ها، تعداد شکل موده‌ای به کار رفته در تخمین باید بی‌نهایت باشد، ولی در صورت استفاده از یک یا چند شکل مود هم عموماً نتایج قابل قبولی به دست می‌آید که در ادامه صحت این ادعا با نتایج بخش پسین اثبات می‌شود.

$$\begin{aligned} V_i(x) &= \cosh(\beta_i x) - \cos(\beta_i x) - \sigma_i [\sinh(\beta_i x) - \sin(\beta_i x)] \\ W_i(x) &= \cosh(\beta_i x) - \cos(\beta_i x) - \sigma_i [\sinh(\beta_i x) - \sin(\beta_i x)] \\ \sigma_i &= \frac{\cosh(\beta_i) + \cos(\beta_i)}{\sinh(\beta_i) + \sin(\beta_i)} \\ \Phi_i(x) &= \sqrt{2} \sin(\gamma_i x) \\ \gamma_i(x) &= 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (22)$$

جهت سهولت استخراج معادلات ارتعاشات آزاد پره ملخ به روش گالرکین ابتدا معادلات (18-20) را بی‌بعد کرده که این بی‌بعدسازی برحسب طول کل پره ملخ R ، انجام می‌شود. در نتیجه معادلات بی‌بعدشده برحسب پارامتر $r = x/R$ به صورت روابط (23-25) است.

$$\begin{aligned} - (GJ/R^2) \phi'' + \Omega^2 m (k_{m2}^2 - k_{m1}^2) \phi \cos 2\beta \\ + \Omega^2 m e x (-v' \sin \beta + w' \cos \beta) \\ + \Omega^2 m e v \sin \beta - \omega^2 m k_m^2 \phi \\ + \omega^2 m e (v \sin \beta - w \cos \beta) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} [(EI_1 \cos^2 \beta + EI_2 \sin^2 \beta) w'' \\ + (EI_2 - EI_1) \sin \beta \cos \beta v''] / R^4 \\ - (Tw')' / R^2 - (\Omega^2 m e x \cos \beta \phi)' \\ - \omega^2 m (w + e \phi \cos \beta) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} [(EI_2 - EI_1) \sin \beta \cos \beta w'' \\ + (EI_1 \sin^2 \beta + EI_2 \cos^2 \beta) v''] / R^4 \\ - (Tv')' / R^2 + (\Omega^2 m e x \phi \sin \beta)' \\ + \Omega^2 m e \phi \sin \beta \\ - \omega^2 m (v - e \phi \sin \beta) - \Omega^2 m v = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

روابط (23-25) را در توابع وزن مربوطه ضرب کرده و بر طول بی‌بعد پره ملخ انتگرال گرفته و نتیجه براساس روابط (26-28) خواهد بود.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left\{ \phi_j \left\{ - (GJ/R^2) \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} \right. \right. \\ + \Omega^2 m (k_{m2}^2 - k_{m1}^2) \phi_i \cos 2\beta \\ \left. \left. - \omega^2 m k_m^2 \phi_i \right\} \right. \\ + \int_0^1 v_j \left\{ \Omega^2 m e r \left(- \frac{\partial v_i}{\partial r} \sin \beta \right) \right. \\ + \Omega^2 m e v_i \sin \beta + \omega^2 m e v_i \sin \beta \left. \right\} \\ + \int_0^1 w_j \left\{ \Omega^2 m e r \left(- \frac{\partial w_i}{\partial r} \cos \beta \right) \right. \\ \left. \left. + \omega^2 m e (-w_i \cos \beta) \right\} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ w_j \left\{ \left(\frac{EI_1 \cos^2 \beta + EI_2 \sin^2 \beta}{R^4} \right) \frac{\partial^4 w_i}{\partial r^4} \right. \right. \\ - \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(T \frac{\partial w_i}{\partial r} \right) \right) / R^2 - \omega^2 m w_i \left. \right\} \\ + \int_0^1 v_j \left\{ \left(\frac{(EI_2 - EI_1) \sin \beta \cos \beta}{R^4} \right) \frac{\partial^4 v_i}{\partial r^4} \right. \\ \left. \left. + \int_0^1 \phi_j \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (\Omega^2 m e r \cos \beta \phi_i) + \omega^2 m e \phi_i \cos \beta \right\} \right\} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

p و q به ترتیب بارها و ممان‌های وارده به پره ملخ است که از بارها و ممان‌های اینرسی و آیرودینامیکی تشکیل شده‌اند. بارهای اینرسی حاصل از نیروی کوریولیس، شتاب‌های عرضی و جانب مرکز و بارهای آیرودینامیکی L_y و L_z به ترتیب در اثر نیروی آیرودینامیکی جانبی و عمودی وارد بر صفحه دوران و M ممان آیرودینامیکی است بارها و ممان‌های آیرودینامیکی (به دلیل آن که بارهای خارجی هستند) به همان شکل سمبلیک در معادلات باقی می‌مانند. معادلات این نیروها و ممان‌ها در رابطه (17) ارائه شده است.

$$\begin{aligned} \bar{p}_x &= -T' = \Omega^2 m x \\ \bar{p}_y &= L_y - m[\ddot{v} - \Omega^2(v + e_o)] \\ &\quad + m e [\ddot{\phi} \sin \beta \\ &\quad + \Omega^2(\cos \beta - \phi \sin \beta)] \\ \bar{p}_z &= L_z - m[\ddot{w} + e \ddot{\phi} \cos \beta] \\ \bar{q}_x &= M - \Omega^2 m e [(v + e_o) \sin \beta + e_o \phi \cos \beta] \\ &\quad + m e (\ddot{v} \sin \beta - \ddot{w} \cos \beta) \\ &\quad - \Omega^2 m (k_{m2}^2 - k_{m1}^2) (\sin \beta \cos \beta \\ &\quad + \phi \cos 2\beta) - m k_A^2 \ddot{\phi} \\ \bar{q}_y &= -\Omega^2 m e x (\sin \beta + \phi \cos \beta) \\ \bar{q}_z &= -\Omega^2 m e x (\cos \beta - \phi \sin \beta) \end{aligned} \quad (17)$$

با جایگزینی رابطه (17) در معادلات (14-16) و حذف نیروهای آیرودینامیکی و فرض این که سطح مقطع پره ملخ متقارن ($e_A = B_1 = B_2 = 0$) و ریشه آن از مرکز دوران فاصله ای ندارد ($e_0 = 0$) معادلات دیفرانسیل حرکت به صورت روابط (18-20) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} - (GJ) \phi'' + \Omega^2 m (k_{m2}^2 - k_{m1}^2) \phi \cos 2\beta \\ + \Omega^2 m e x (-v' \sin \beta + w' \cos \beta) \\ + \Omega^2 m e v \sin \beta - \omega^2 m k_m^2 \phi \\ + \omega^2 m e (v \sin \beta - w \cos \beta) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} [(EI_1 \cos^2 \beta + EI_2 \sin^2 \beta) w'' \\ + (EI_2 - EI_1) \sin \beta \cos \beta v''] / R^4 \\ - (Tw')' - (\Omega^2 m e x \cos \beta \phi)' \\ - \omega^2 m (w + e \phi \cos \beta) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} [(EI_2 - EI_1) \sin \beta \cos \beta w'' \\ + (EI_1 \sin^2 \beta + EI_2 \cos^2 \beta) v''] / R^4 \\ - (Tv')' + (\Omega^2 m e x \phi \sin \beta)' \\ + \Omega^2 m e \phi \sin \beta \\ - \omega^2 m (v - e \phi \sin \beta) - \Omega^2 m v = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید این معادلات کاملاً کوپل شده و غیرخطی است و نمی‌توان آن‌ها را به صورت تحلیلی و دقیق حل کرد.

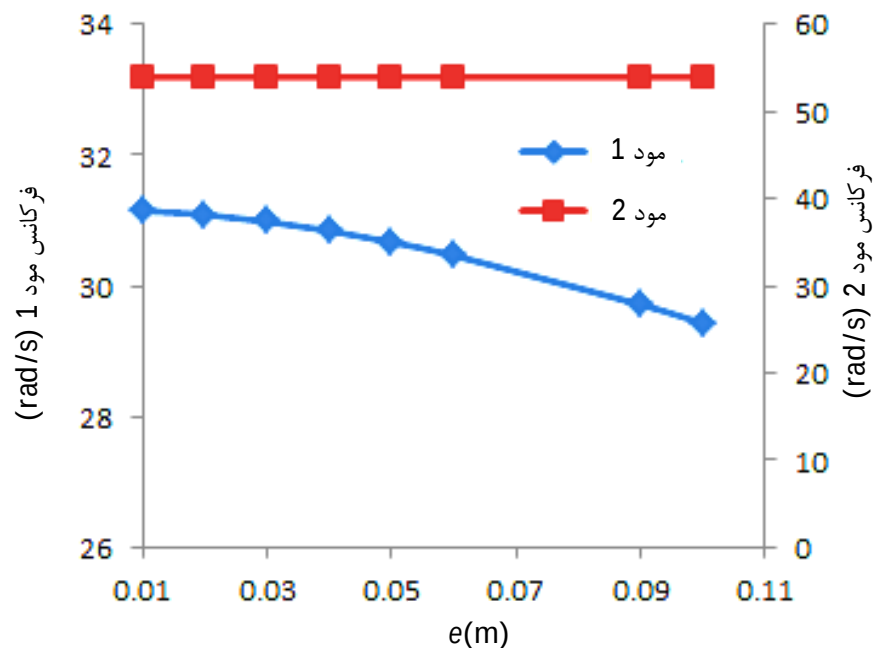
معادلات بالا توسط دو پارامتر زاویه تغییر گام (حمله) β و فاصله محور الاستیک در سه جهت به یکدیگر کوپل شده‌اند. در صورتی که $\beta = 0$ باشد معادلات در دو جهت پیچشی و خمشی خارج از صفحه کوپل شده و اگر $e = 0$ باشد معادلات در دو جهت خمشی خارج از صفحه و خمشی داخل صفحه کوپل می‌شوند.

3- استخراج معادلات فرکانسی با استفاده از روش گالرکین

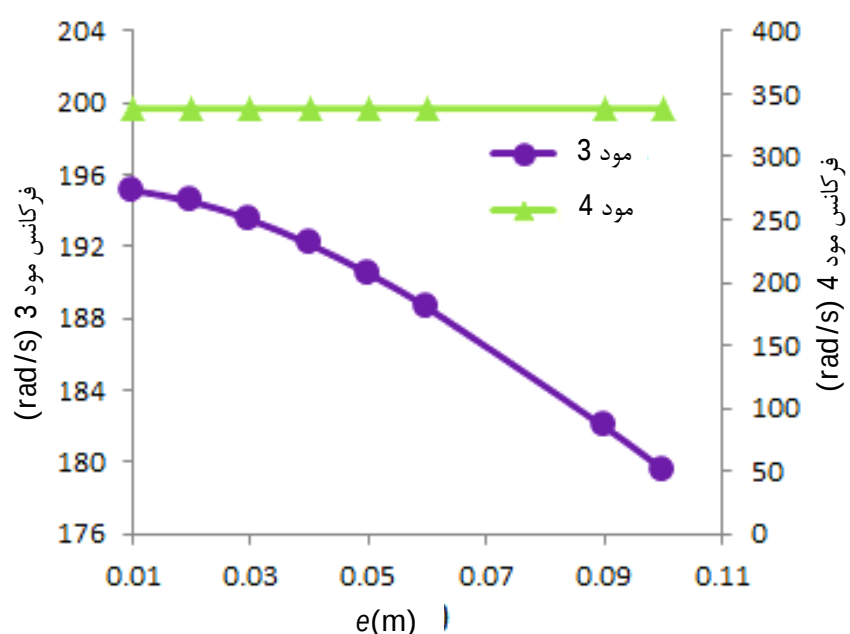
با توجه به این که برای معادلات بالا حل تحلیلی وجود ندارد جهت حل این معادلات از روش گالرکین استفاده می‌شود. در روش گالرکین از عبارت انتگرال وزنی رابطه (21) استفاده می‌شود. بر این اساس توابع تقریبی (γ_i) به عنوان شکل مود در معادلات قرار داده می‌شود و با ضرب تابع وزن (ψ_i) در معادله و انتگرال گیری از آن ماتریس مقادیر ویژه تشکیل می‌شود. در روش گالرکین باید تابع وزن ψ_i برابر تابع تقریب γ_i باشد.

$$A_{i,j} = \int \psi_i A(\gamma_i) \quad (21)$$

با توجه به این که شکل مود پره ملخ مشابه تیر یکسرگیردار است از توابع



شکل 4 تغییرات فرکانس‌های طبیعی مود اول و دوم ملخ برحسب فاصله محور الاستیک از محور مرکز جرم



شکل 5 تغییرات فرکانس‌های طبیعی مود سوم و چهارم ملخ برحسب فاصله محور الاستیک از محور مرکز جرم

سیر نزولی به خود می‌گیرند در حالی که فرکانس‌های مودهای زوج بدون تغییر باقی می‌مانند.

5-2- بررسی اثر طول پره ملخ (R)

در مورد طول ملخ بررسی‌ها نشان می‌دهد که مطابق شکل 6 با افزایش طول پره ملخ همه فرکانس‌های طبیعی، چه زوج و چه فرد کاهش می‌یابد، ولی مودهای بالاتر تغییرات نزولی بیشتری دارند در حالی که مودهای پایین‌تر با شیب ملایم‌تری کاهش می‌یابند.

5-3- بررسی اثر سختی پیچشی (GJ)

در مورد سختی پیچشی بررسی‌ها نشان می‌دهد، مطابق شکل‌های 7 و 8 با افزایش این سختی فرکانس‌های مودهای فرد با شیب بسیار کمی افزایش می‌یابد و فرکانس‌های مودهای زوج بدون تغییر باقی می‌ماند، در صورتی که این سختی به‌صورت تئوری صفر گردد، فرکانس‌های مودهای فرد از بین رفته و صفر می‌شوند که نشان‌دهنده وابستگی زیاد مودهای فرد به سختی پیچشی است.

5-4- بررسی اثر سختی داخل صفحه دوران (EI_1)

با توجه به نمودار شکل 9 برای سختی داخل صفحه دوران می‌توان مشاهده کرد که با افزایش این سختی (مانند سختی پیچشی) مودهای فرد افزایش

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[v_j \left\{ \left(\frac{EI_1 \sin^2 \beta + EI_2 \cos^2 \beta}{R^4} \right) \frac{\partial^4 v_i}{\partial r^4} - \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(T \frac{\partial v_i}{\partial r} \right) \right) / R^2 - \omega^2 m v_i - \Omega^2 m v_i \right\} + \int_0^1 w_j \left\{ \left(\frac{EI_2 - EI_1}{R^4} \right) \frac{\partial^4 w_i}{\partial r^4} \right\} + \int_0^1 \phi_j \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (\Omega^2 m e r \phi_i \sin \beta) + \omega^2 m e \phi_i \sin \beta + \Omega^2 m e \phi_i \sin \beta \right\} \right] = 0 \quad (28)$$

معادلات بالا با استفاده از شرایط تعامد تا حدودی ساده شده و یک معادله ماتریسی را تولید می‌کند، که برای داشتن جواب غیر صفر معنی‌دار باید دترمینان آن صفر شود. با بسط معادله مشخصه دترمینان، فرکانس‌های طبیعی پره ملخ استخراج می‌شود.

4- صحت‌سنجی روش حل ارائه‌شده

برای اطمینان از صحت روش حل گالرکین ارائه‌شده برای پره ملخ، روابط (26-28) به زبان متلب کدنویسی و با استفاده از سه مود حل شده و نتایج به‌دست‌آمده با یکی از مقالات مرجع [4] که از روش ماتریس انتقال استفاده کرده در جدول 1 آورده شده است. ورودی‌های مسئله به شرح زیر است.

$$EI_1 = 7.316 \text{ kg.m}^2, EI_2 = 21.948 \text{ kg.m}^2, GJ = 2.634 \text{ kg.m}^2, R = 1.016 \text{ m}, \beta = 45^\circ, m = 0.862 \text{ kg/m}, e = 0.036 \text{ m}, k_m = 0.036 \text{ m}$$

مقایسه نتایج به‌دست‌آمده در جدول 1 تطابق خوبی را نشان می‌دهد و همان‌طور که مشهود است نتایج، هم‌خوانی بسیار خوبی با مرجع [4] دارد و تفاوت پاسخ‌ها ناچیز است.

5- تحلیل فرکانسی

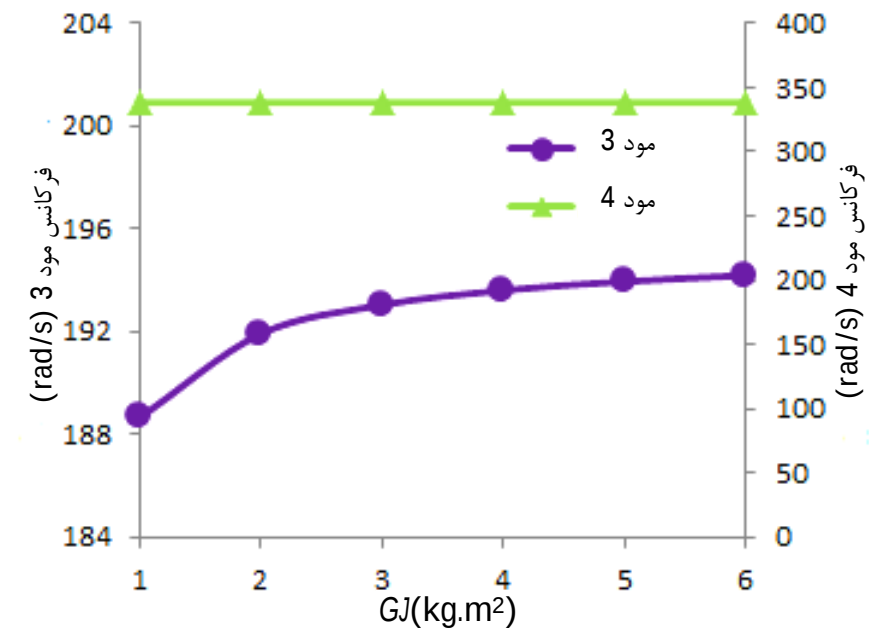
حال می‌توان به روش ارائه‌شده اطمینان حاصل کرد و به بررسی عناصر مختلف بر رفتار فرکانسی ملخ پرداخت تا بدین وسیله تأثیرات این پارامترها مشخص شود. در مرجع [4] نشان داده شده است که اگر فرکانس‌های طبیعی به‌دست‌آمده به‌ترتیب از کمترین فرکانس تا بیشترین آن شماره‌گذاری شوند، فرکانس مودهای ارتعاشی به دو دسته فرد و زوج تقسیم‌بندی می‌شوند و مشاهده می‌شود که فرکانس مودهای فرد در اثر کوپل پیچشی - خمشی داخل صفحه اتفاق می‌افتند و فرکانس مودهای زوج، تنها به خمش خارج از صفحه دوران وابسته‌اند. بر این اساس می‌توان انتظار داشت که تغییرات فرکانس‌های مودهای زوج یا فرد نسبت به برخی پارامترها اتفاق افتد.

5-1- بررسی اثر فاصله بین مرکز جرم و مرکز الاستیک

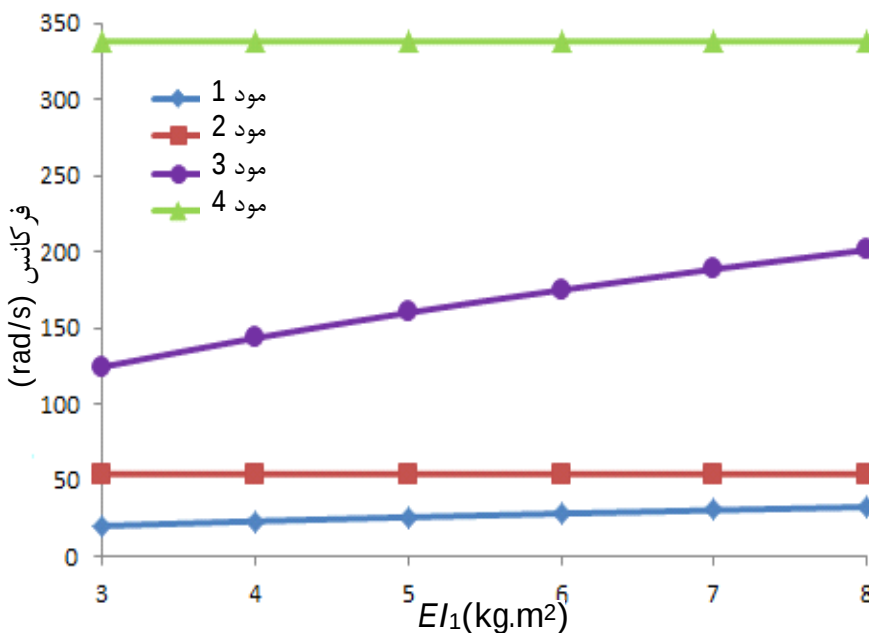
نمودارهای شکل 4 و 5 که در هر کدام فرکانس‌های یک مود زوج و یک مود فرد قرار دارد، نشان می‌دهد که با تغییر فاصله بین مرکز جرم و مرکز الاستیک فرکانس مودهای فرد تغییر کرده و با افزایش این فاصله فرکانس‌ها

جدول 1 مقایسه فرکانس‌های ارتعاشی ملخ

شماره مود	روش حاضر	انتقال ماتریسی [4]
1	30/9044	30/8374
2	53/9936	53/8403
3	192/726	184/5628
4	338/2605	337/4104
5	529/6149	482/3053



شکل 8 تغییرات فرکانس‌های طبیعی مود سوم و چهارم ملخ برحسب سختی پیچشی

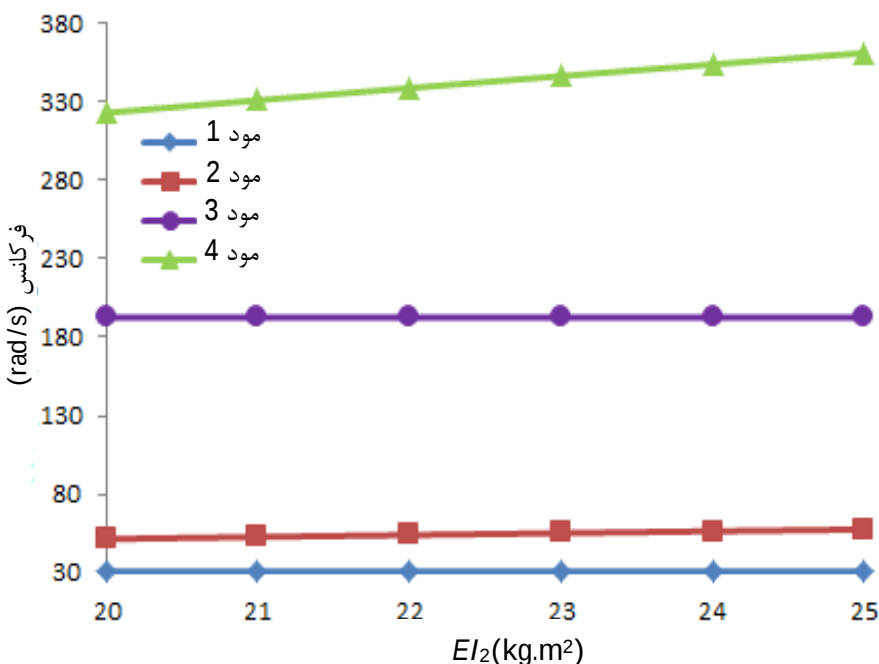


شکل 9 تغییرات فرکانس‌های طبیعی ملخ برحسب سختی داخل صفحه دوران

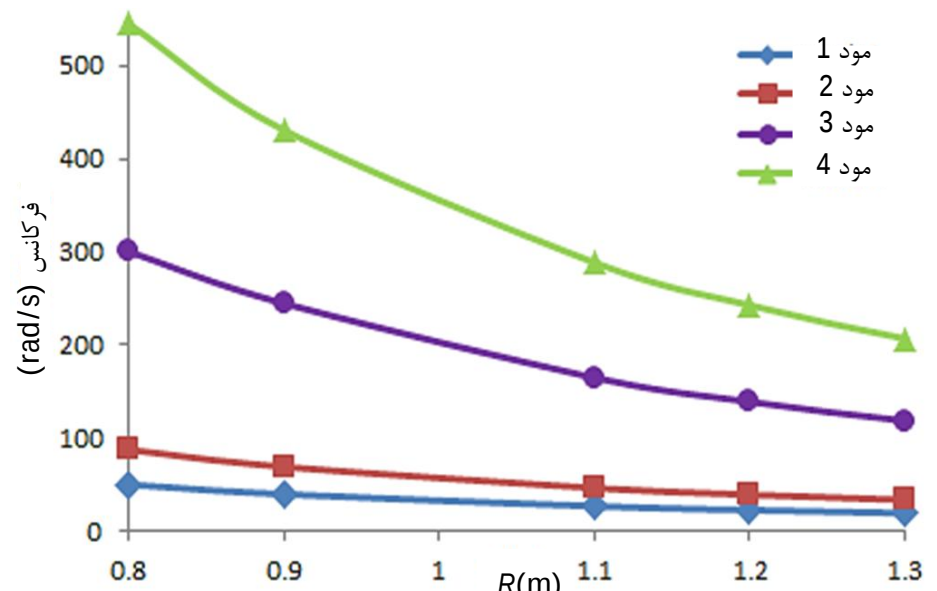
می‌یابند که مشابه تأثیر پارامتر طول ملخ و همین‌طور مودهای بالاتر با شیب بیشتری و مودهای پایین‌تر با شیب ملایم‌تری کاهش می‌یابند.

5-7- بررسی اثر شعاع ژیراسیون قطبی محور الاستیک ملخ

تغییرات این پارامتر نیز مشابه پارامتر فاصله محور الاستیک از مرکز جرم است که نتایج آن در شکل‌های 12 و 13 آمده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود با افزایش شعاع ژیراسیون قطبی مودهای فرد کاهش یافته یعنی مودهای فرد تغییر می‌یابند و فرکانس مودهای زوج تغییری نمی‌یابد. به دلیل



شکل 10 تغییرات فرکانس‌های طبیعی مود اول و دوم ملخ برحسب سختی خارج از صفحه دوران



شکل 6 تغییرات فرکانس‌های طبیعی برحسب طول ملخ

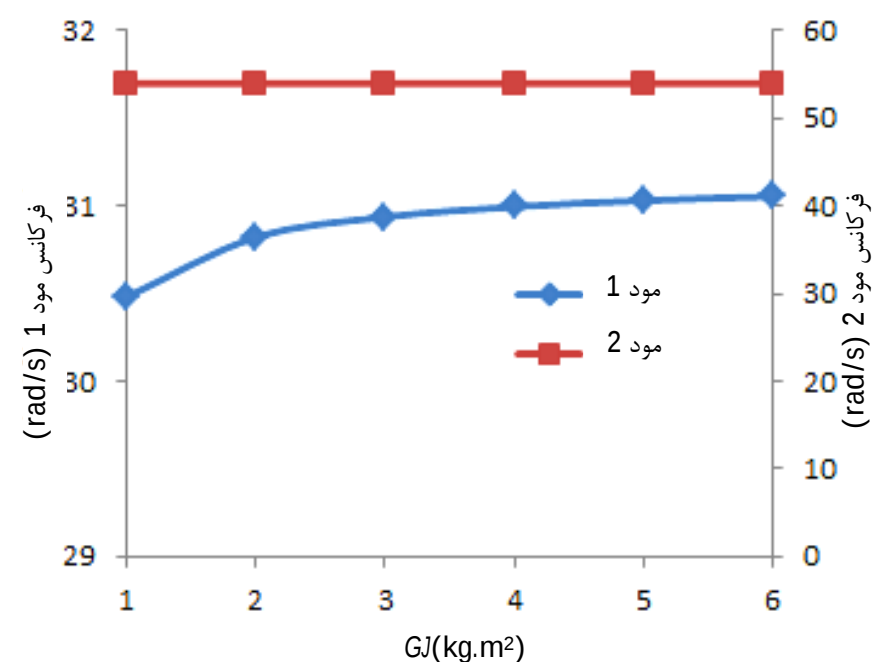
می‌یابد و مودهای زوج بدون هیچ‌گونه تغییری باقی می‌مانند با این تفاوت که تأثیر این سختی نسبت به سختی پیچشی بر مودهای فرد بسیار بیشتر است. در این حالت فرکانس‌های مودهای فرد با سرعت بیشتری افزایش می‌یابند و مودهای فرد بالاتر تغییرات صعودی بیشتری دارند در حالی که مودهای فرد پایین‌تر با شیب ملایم‌تری افزایش می‌یابند، همچنین در صورت صفر شدن این سختی به‌صورت تئوری مانند سختی پیچشی فرکانس‌های مربوط به مودهای فرد صفر می‌شود و فرکانس‌های زوج همچنان بدون تغییر باقی می‌ماند.

5-5- بررسی اثر سختی خارج از صفحه دوران (EI_2)

مطابق نمودار شکل 10، با افزایش سختی خارج از صفحه دوران برخلاف دو سختی داخل صفحه و پیچشی این بار مودهای فرد هیچ‌گونه تغییری نمی‌یابند، ولی فرکانس‌های مودهای زوج افزایش می‌یابد و همچنین برخلاف دو سختی پیش با صفر شدن این سختی در معادلات به‌صورت تئوری فرکانس‌های مودهای زوج صفر می‌شود و مودهای فرد بدون هیچ تغییری باقی می‌مانند که این نشان از آن دارد که مودهای زوج کاملاً به این سختی وابستگی دارند.

5-6- بررسی اثر جرم پره ملخ

در مورد جرم بر واحد طول ملخ مطابق شکل 11 می‌توان مشاهده کرد که با افزایش چگالی طولی پره ملخ تمامی فرکانس‌های مودهای فرد و زوج کاهش



شکل 7 تغییرات فرکانس‌های طبیعی مود اول و دوم ملخ برحسب سختی پیچشی

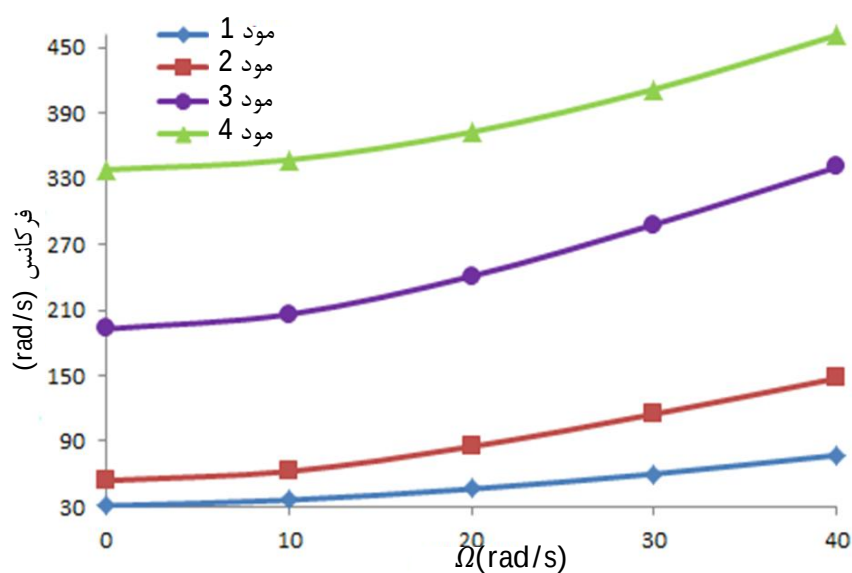
دورانی ملخ همه فرکانس‌های طبیعی پره آن، اعم از زوج یا فرد افزایش یافته به‌طوری که با افزایش دوران ملخ به 40 رادیان بر ثانیه فرکانس‌های طبیعی مودهای اول تا سوم آن تقریباً دو برابر شده‌اند که این مورد نشان از تأثیر به‌سزای دوران ملخ بر فرکانس‌های طبیعی آن دارد و این اثر کاملاً برخلاف اثرات افزایش جرم و طول واحد ملخ است.

5-9- بررسی اثر تغییر گام بر ارتعاشات ملخ

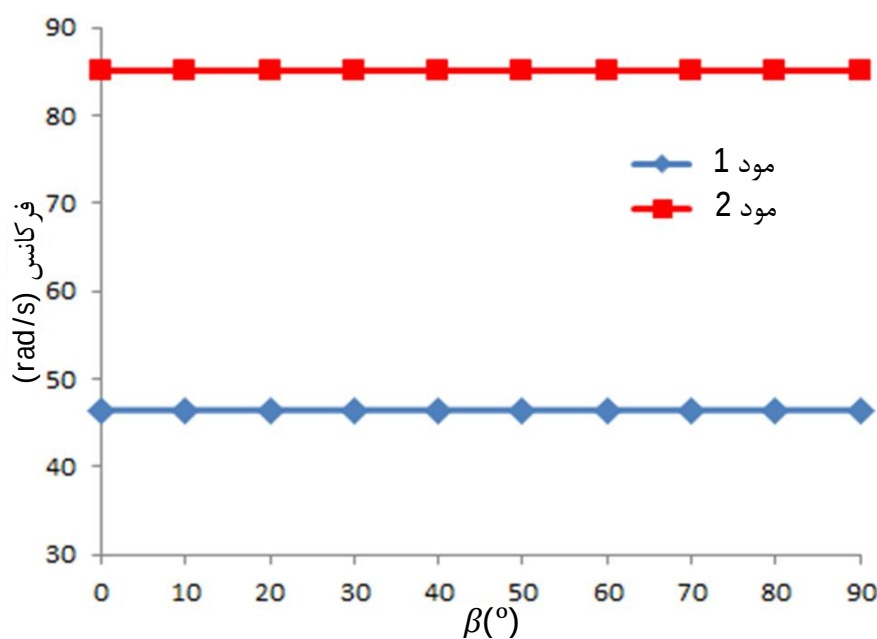
این پارامتر در دو حالت استاتیک (بدون سرعت دورانی) و با سرعت دورانی مورد مقایسه قرار گرفت. این زاویه همان زاویه حمله پره است که در اصطلاح به آن زاویه تغییر گام می‌گویند، زیرا بدین‌وسیله مقدار پیمایش پره ملخ در حرکت افقی در یک دور کامل پره تغییر می‌یابد. مطابق شکل 15 با افزایش زاویه گام ملخ در حالت استاتیک هیچ تأثیری بر فرکانس‌های طبیعی پره مشاهده نگردید، ولی در حالت دورانی ملخ براساس نمودار 16 با افزایش آن فرکانس‌های طبیعی ملخ به‌صورت سینوسی و کسینوسی کم یا زیاد می‌شوند. بدین‌صورت که مودهای فرد سینوسی و مودهای زوج کسینوسی تغییر می‌یابند و دارای دوره تناوب 90 درجه است. تمامی مودها دارای دو بیشینه، که مقدار بیشینه اول کوچک‌تر از بیشینه دوم است. در مود اول، بیشینه اول در زاویه 10 درجه و بیشینه دوم در 55 درجه رخ می‌دهد. شایان یاد است که در مودهای بالاتر اختلافات بین این دو بیشینه به‌طور متناسب کاهش می‌یابد.

6- نتیجه‌گیری

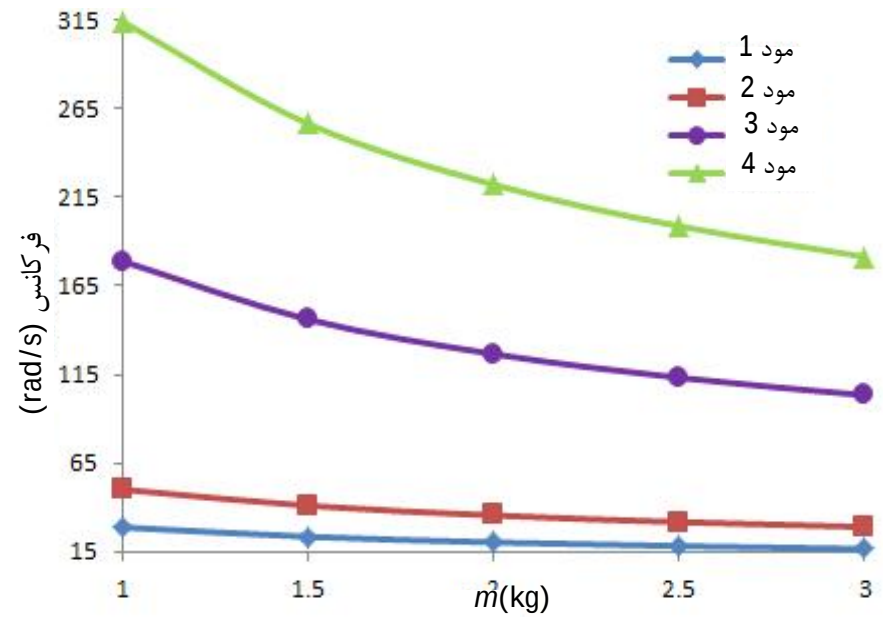
همان‌طور که از نمودارها (نتایج) پیداست پارامترهای سرعت دورانی، طول و



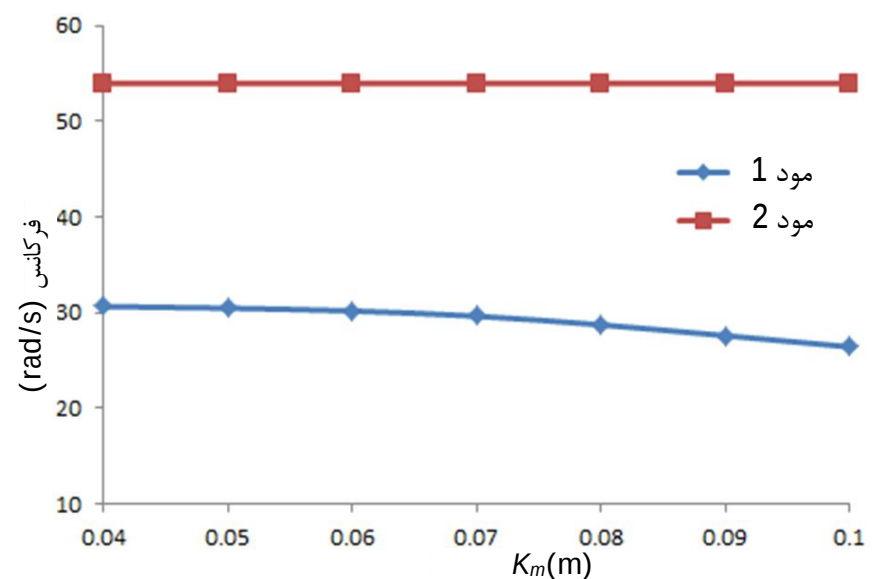
شکل 14 تغییرات فرکانس‌های طبیعی ملخ برحسب سرعت دورانی



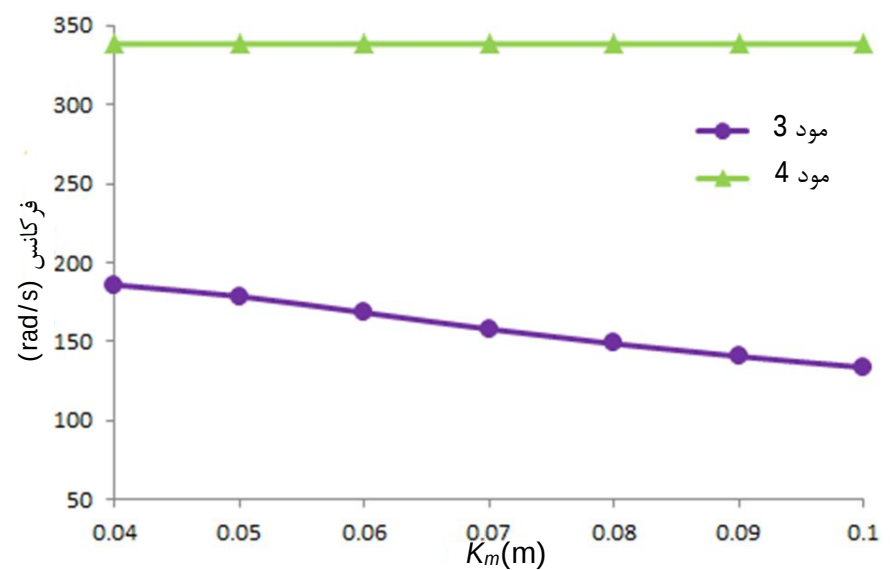
شکل 15 تغییرات فرکانس‌های طبیعی مود اول و دوم ملخ برحسب زاویه گام در حالت غیردورانی (استاتیک)



شکل 11 تغییرات فرکانس‌های طبیعی برحسب جرم ملخ



شکل 12 تغییرات فرکانس‌های طبیعی مود اول و دوم ملخ برحسب شعاع ژیراسیون قطبی جرمی



شکل 13 تغییرات فرکانس‌های طبیعی مود سوم و چهارم ملخ بر حسب شعاع ژیراسیون قطبی جرمی

این که در معادلات (معادله 26) شعاع ژیراسیون قطبی تنها به حرکت پیچشی وابسته است، تغییرات این پارامتر قابل پیش‌بینی بود، همچنین تغییرات این پارامتر (مشابه پارامتر فاصله محور الاستیک)، در واقعیت به شکل ظاهری ایرفویل و جنس مواد به‌کار رفته در آن بستگی دارد.

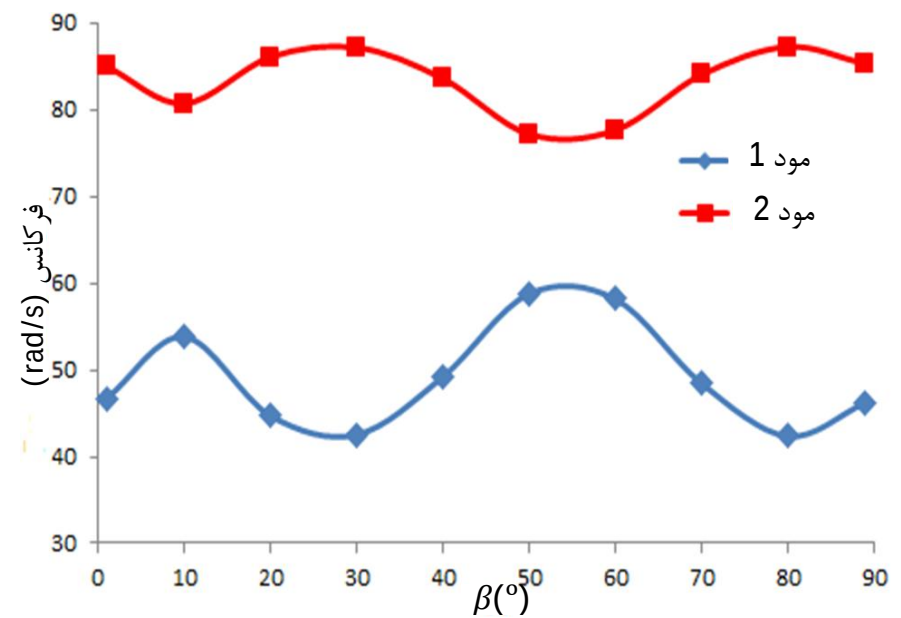
5-8- بررسی اثر سرعت دورانی پره ملخ

اثرات سرعت دورانی پره ملخ بر فرکانس‌های طبیعی آن در شکل 14 به‌طور یک‌جا نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش سرعت

بارهای وارده به پره	p_x, p_y, p_z
گشتاور پیچشی حول محور الاستیک	Q
ممان‌های وارده به پره	q_x, q_y, q_z
طول پره ملخ (m)	R
کشش طولی پره	T
ضخامت مقطع پره ملخ	T
جابه‌جایی‌های خمشی پره	v, w
محورهای مختصات اصلی	x, y, z
علائم یونانی	
زاویه حمله پره	β
کرنش پره	ε
کرنش حاصل از کشش پره (دوران)	ε_T
محورهای فرعی پره	ξ, η
تنش پره	σ
تغییر شکل پیچشی پره	Φ
سرعت دورانی پره	Ω
فرکانس طبیعی پره	ω

8- مراجع

- [1] J. C. Houbolt, G.W. Brooks, Differential equations of motions for combined flap wise bending and torsion of twisted non-uniform rotor blades. NACA Report 1346, 1958.
- [2] Hunter, W.F., The Integrating Matrix Method for Determining the Natural Vibration Characteristics of Propeller Blades. NASA TN D-6064, 1970.
- [3] W. F. White, R.E. Malatino, A Numerical Method for Determining the Natural Vibration Characteristics of Rotating Nonuniform Cantilever Blades. NASA TM X-72,751, 1975.
- [4] Murthy, V.R., Dynamic characteristics of rotor blades. Journal of Sound and Vibration, Vol.49: p. 483-500, 1976.
- [5] Murthy, V.R., Dynamic characteristics of rotor blades, Integrating matrix method. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal(AIAA), Vol. 115(4): p. 595-597, 1977.
- [6] A.D. Wright, E. Smith, R.W. Thresher, J.L.C. Wang, Vibration modes of centrifugally stiffened beams. ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.49(3): p. 197-202, 1982.
- [7] Reddy, J.N., An Introduction to Finite Element Method, 2nd ed. Vol. 1. 2000.
- [8] G. Surace, V. Anghel, C. Mares, Coupled bending-bending-torsion vibration analysis of rotating pretwisted blades: an integral formulation and numerical examples. Journal of Sound and Vibration, Vol. 206(4): p. 473-486, 1997.
- [9] Bazoune, A., Relationship between Softening and Stiffening Effects in Terms of South Well Coefficients. Journal of Sound Vibration, 287: p. 1027-1030, 2005.
- [10] A. Bazoune, Y.A. Khulief., N.G. Stephen, Further Results for Modal Characteristics of Rotating Tapered Timoshenko Beams. Journal of Sound and Vibration, 129: p. 157-174, 1999.
- [11] H. H. Yoo, S.H. Shin, Vibration analysis of rotating cantilever beams. Journal of Sound and Vibration, 212(5): p. 807-828, 1998.
- [12] Bramwell, A.R.S., Helicopter Dynamic's. 2001.
- [13] S. A. Mousavi, M.R.Elhami, H. Taeb, The Rotorcraft blades modal testing and analysis. Journal of Sound and Vibration, 6: p. 22-32, 2015. (In Persian)
- [14] S.A. Mousavi, M.R. Elhami, Modal analysis of a rotor with two blades with finite element method and experimental test. 4th International Conference on Acoustics and Vibration, 2014. (In Persian)
- [15] Lin, S.M., The instability and vibration of rotating beams with arbitrary pretwist and an elastically restrained root. ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.68: p. 844-853, 2001.
- [16] S. M. Lin, C. Tien, S. Y. Lee, Free vibrations of rotating non-uniform beam with arbitrary pretwist, an elastically restrained root and a tip mass. Journal of Sound and Vibration, 273(3): p. 477-492, 2004.
- [17] S.M. Lin, S.Y. Lee, W.R. Wang, Dynamic analysis of rotating damped beams with an elastically restrained root. International Journal of Mechanical Sciences, Vol.46: p. 673-693, 2004.
- [18] S.S. Rao, R.S. Gupta, Finite Element Vibration Analysis of Rotating Timoshenko Beams. Journal of Sound and Vibration, 242: p. 103-124, 2001.
- [19] H. Moeenfarid, B.Moetakef Imani, M. Davoudi, A. Rahimzadeh, Dynamic instability in tapered beams under wind excitation, Modares Mechanical



شکل 16 تغییرات فرکانس‌های طبیعی مود اول و دوم ملخ برحسب زاویه گام در حالت دورانی

جرم پره ملخ بر فرکانس‌های طبیعی تمامی مودهای ارتعاشی تأثیر می‌گذارند. با افزایش طول و جرم واحد پره ملخ، فرکانس‌ها کاهش یافته، ولی با افزایش سرعت دورانی فرکانس‌ها افزایش می‌یابند.

در مورد پارامترهای سختی پیچشی، سختی داخل صفحه دوران، فاصله بین مرکز جرم تا محور الاستیک و شعاع ژیراسیون قطبی، می‌توان بیان کرد که این پارامترها تنها بر فرکانس‌های طبیعی مودهای ارتعاشی فرد تأثیر گذاشته و فرکانس مودهای زوج ثابت باقی می‌مانند که با افزایش فاصله بین مرکز جرم و الاستیک و شعاع ژیراسیون قطبی فرکانس‌های طبیعی کاهش، ولی با افزایش سختی پیچشی و سختی داخل صفحه دوران، فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند. در مورد پارامتر سختی خارج از صفحه همان‌طور که ملاحظه شد، تنها پارامتری است که بر فرکانس طبیعی مودهای ارتعاشی زوج تأثیر می‌گذارد و بر فرکانس مودهای فرد بی‌تأثیر است و با افزایش آن فرکانس‌های زوج افزایش می‌یابند.

در پایان نیز با افزایش یا کاهش زاویه تغییر گام پره ملخ، همان‌طور که مشاهده شد فرکانس‌های طبیعی تمامی مودهای ارتعاشی ملخ در حالت غیردورانی هیچ‌گونه تغییری نمی‌یابند، ولی با افزایش یا کاهش آن در حالت دورانی فرکانس‌های مودهای فرد به‌صورت سینوسی و مودهای زوج به‌صورت کسینوسی حول فرکانس‌های حالت استاتیکی (میانگین) تغییر می‌یابند.

7- فهرست علائم

B_1, B_2	ثابت‌های سطح مقطع ملخ (Pa)
E	مدول الاستیک (Pa)
E	فاصله بین مرکز جرم و محور الاستیک (m)
e_A	فاصله بین محور فشار و محور الاستیک (m)
e_0	فاصله ریشه پره از محور دوران (m)
G	مدول الاستیسیته برشی (Pa)
I_1, I_2	ممان‌های اینرسی حول محورهای فرعی (m^4)
J	ممان اینرسی پیچشی (m^4)
K_m	شعاع ژیراسیون قطبی (m)
L_y, L_z	بارهای آیرودینامیکی جانبی و عمود بر صفحه دوران
M	ممان آیرودینامیکی وارد بر پره
M_1, M_2	ممان‌های اینرسی حول محور الاستیک
M_x, M_y, M_z	ممان‌های اینرسی حول محورهای اصلی
m	جرم واحد طول پره (kgm^{-1})

- [23] B. Yardimoglu, D.J. Inman, Coupled bending-bending-torsion vibration of a pre-twisted beam with airfoil cross-section by the finite element method, *Shock and Vibration*, 10: p. 223-230, 2003.
- [24] H. Gokdag, O. Kopmaz, Coupled bending and torsional vibration of a beam with in-span and tip attachments. *Journal of Sound and Vibration*, 287: p. 591-610, 2005.
- [25] T.H. Patel, A.K. Darpe, Coupled bending-torsional vibration analysis of rotor with rub and crack. *Journal of Sound and Vibration*, 326: p. 740-752, 2009.
- [26] Voros, G.M., On coupled bending-torsional vibrations of beams with initial loads. *Mechanics Research Communications*, 36: p. 603-611, 2009.
- Engineering, 15: p. 153-161, 2015. (In Persian)
- [20] R. Warikoo, M.R. Haddara, Analysis of Propeller Shaft Transverse Vibrations, *Marine Structures*, p. 255-279, 1992.
- [21] R.E.D. Bishop, S.M. Cannon, S. Miao, On Coupled Bending and Torsional Vibration of Uniform Beams. *Journal of Sound and Vibration*, 3: p. 457-464, 1989.
- [22] L. Jun, L. Wanyou, S. Rongying, H. Hongxing, Coupled bending and torsional vibration of nonsymmetrical axially loaded thin-walled Bernoulli-Euler beams. *Mechanics Research Communications*, p. 697-711, 2004.