مجله مهندسی مکانیک مدرس، آبان 1396، دوره 17، شماره 8، ص‌ص 97-104

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

کنترل بازخوردی توزیع دما در یک ورق ضخیم مستطیلی مدرج تابعی

شجاعت شفیعی[1]، بهروز رحمانی[2*]، امین موسائی[3] و حامد پناهی کالوس[1]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج
3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج
* یاسوج، صندوق پستی 353-75914، b_rahmani@yu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 23 اردیبهشت 1396
پذیرش: 12 تیر 1396
ارائه در سایت: 17 مرداد 1396

کلید واژگان:
معادله انتقال حرارت هدایت خطی
تبدیل فوریه سریع
کنترل گسترده
عدد موج اصلاح‌شده
مادهی مدرج تابعی

چکیده

در پژوهش پیش رو، روشی برای کنترل گسترده‌ی مبتنی بر بازخورد خروجی میدان دما در یک ورق مدرج تابعی ضخیم پیشنهاد شده است. معادله‌ی حاکمه‌ی این سیستم دینامیکی با یک معادله‌ی مشتق جزئی خطی با ضرایب متغیر با مکان که همان معادله‌ی انتقال حرارت سه‌بعدی است، قابل توصیف است. برای انجام این کار، ابتدا با استفاده از روش عدد موج اصلاح شده، که با ترکیب دو روش تبدیل سریع فوریه و تفاضل محدود ابداع شده است، معادله مشتق جزئی حاکم بر سیستم به مجموعه‌ای از معادلات مشتق معمولی تبدیل می‌شود. بر این اساس، هر کدام از این معادلات مشتق معمولی مربوط به ترکیبی خاص از اعداد موج در راستاهای مختلف دستگاه مختصات کارتزین می‌باشد. سپس برای پایدارسازی دینامیک هر کدام از این معادلات، از کنترل‌کننده‌ی خطی فیدبک حالت بهینه استفاده می‌شود. در این راستا، همچنین روشی برای تولید ورودی کنترلی ردیاب یا تنظیم‌کننده پیشنهاد شده است. همچنین از آن‌جا که این دستورات کنترلی، در فضای فوریه طراحی شده است، انتقال آنها به فضای فیزیکی باید صورت پذیرد؛ برای رسیدن به این هدف، از تبدیل معکوس فوریه استفاده می‌شود. شبیه سازی‌های عددی صورت گرفته، دلالت بر کارایی روش پیشنهادی در داشتن مشخصه‌های خوب پاسخ گذرا و همچنین خطای حالت ماندگار کوچک دارد.

Feedback control of temperature distribution in a thick rectangular functionally graded plate

Shojaat Shafiee, Behrooz Rahmani*, Amin Moosaie, Hamed Panahi Kalus

Department of Mechanical Engineering, Yasouj University, Yasouj, Iran
*P.O.B. 75914-353, Yasouj, Iran, b_rahmani@yu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 13 May 2017
Accepted 03 July 2017
Available Online 08 August 2017

Keywords:
Linear heat conduction equation
Fast Fourier transform
Distributed control
Modified wave number
Functionally graded material

ABSTRACT

In this paper, a method for distributed control of temperature distribution in a thick rectangular functionally graded plate is proposed. In this way, the linear nonhomogenous conduction whose governing dynamics is a linear partial differential equation (PDE) with spatially varying coefficients is considered and actively controlled. For this purpose, firstly, this PDE is converted into a set of ordinary differential equations (ODEs) using the modified wavenumber methodology. This approach is based on the combination of the fast Fourier transform (FFT) and finite difference techniques. Secondly, in order to stabilize each of these ODEs, linear optimal state feedback controller is utilized by minimizing a predefined performance index. The proposed controller is modified by adding a feedforward term to have a good tracking performance for the proposed method. The designed control inputs which are in the Fourier domain, are transferred to physical domain using the inverse Fast Fourier transform (IFFT). In order to solve the linear nonhomogenous conduction heat equation, a combination of finite difference and Runge-Kutta methodologies is implemented. Simulation studies show the performance of the proposed method, for example, the smaller settling time, overshoot and also steady-state error.

1- مقدمه

انتقال حرارت هدایت در بسیاری از شاخه‌های علمی از اهمیت فراوانی برخوردار است، به گونه‌ای که تحلیل آن‌ها بدون حل مسئله انتقال حرارت هدایت، امکان‌پذیر نیست. از جمله‌ی این شاخه‌ها می‌توان به ترموالاستیک[1] و ترموپلاستیک[2] اشاره کرد. در حل مسائل انتقال حرارت عوامل مهمی وجود دارند که در این حل تاثیر زیادی دارند، که می‌توان به شرایط مرزی و جنس مواد اشاره نمود. خواص مواد مانند چگالی، ضریب هدایت و ظرفیت گرمایی ویژه ممکن است ثابت، تابع مکان [1]، دما [2] و یا به صورت همزمان تابع دما و مکان [3] باشد. در این راستا، برای نزدیکتر شدن پاسخ محاسبه شده به واقعیت، مدل‌های متنوعی ارائه می‌شود؛ از جمله مدل ماده مدرج تابعی[3] که برای نمایش ویژگی‌های وابسته به مکان پیشنهاد شده است ([5,4]).

در سال‌های اخیر کنترل فعال سیستم‌های پارامتر گسترده، مانند توزیع

[1] Thermoelastic
[2] Thermoplastic
[3] Functionally Graded Materials: FGM

Please cite this article using:
برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
Sh. Shafiee, B. Rahmani, A. Moosaie, H. Panahi Kalus, Feedback control of temperature distribution in a thick rectangular functionally graded plate, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 8, pp. 97-104, 2017 (in Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.8.55.9]

دما در جسم جامد یا سیال، از اهمیت زیادی برخوردار شده است. هدف از این مسائل ایجاد توزیع دمای مشخص و دلخواه در محیط می‌باشد. فرآیندهای زیادی در صنعت وجود دارند که برای عملکرد بهینه نیاز به کنترل توزیع دما در ماده معینی دارند، مانند فرآیند ساخت نیمه‌رساناها و صنایع شیشه‌سازی. با بررسی ادبیات موجود می‌توان متوجه شد که کنترل سیستم‌های پیوسته با معادلات دیفرانسیلی مشتق جزئی[1] خطی یا غیرخطی نسبت به سیستم‌های گسسته با معادلات دیفرانسیل معمولی خطی یا غیرخطی در دوران طفولیت به سر می‌برد و به تکامل لازم برای پیاده‌سازی در عمل نزدیک نشده است. بر این اساس پژوهش‌هایی که تاکنون در زمینه تنظیم میدان دما صورت گرفته است با در نظر گرفتن فرضیات محدود کننده بسیار بوده است. هم از نظر تئوری و هم از نظر عملی کنترل بهینه‌ی پارامترهای سیستم یک چالش اساسی برای محققان و مهندسان محسوب می‌شود.

اگر ضریب رسانش هدایت حرارت تابعی از میدان مکان در نظر گرفته شود، معادله دیفرانسیل حاکم بر مدل یک معادله دیفرانسیل جزئی خطی با ضرائب متغیر می‌باشد. برای کنترل سیستم دینامیکی موردنظر، پایدارسازی معادلات مشتقی جزئی خطی حاکم بر مدل، به عنوان یکی از اهداف پژوهش باید در نظر گرفته شود. در این پژوهش، سعی می‌شود که از روش کنترل گسترده برای رساندن دما در گره‌های مختلف به مقدار مطلوب استفاده شود.

گلبهار و همکاران، با استفاده ازکنترل‌کننده‌ی پیش‌خور-پس‌خور مبتنی بر حل معکوس و کنترل‌کننده‌ی مشتقی-تناسبی میدان دمای یک صفحه از جنس مواد مدرج تابعی را کنترل کردند [6]، همچنین میدان دمای یک صفحه‌ی سه بعدی از جنس مواد مدرج تابعی را با استفاده از کنترل بهینه مرزی با روش گرادیان مزدوج کنترل کردند [7]. بوسکویک و همکاران یک کنترل کننده مرزی بازخوردی برای انتقال حرارت از یک میله‌ی نازک همراه با تولید گرما، طراحی کردند [8]. راست‌گفتار و همکاران یک تابع لیاپانوف برای معادله میدان دما در یک صفحه ناهمگن با چهار شرط مرزی نوع دوم، بدست آوردند و اثبات کردند که این معادله قابلیت کنترل مرزی را دارد [9]، همچنین یک تابع لیاپانوف برای معادله‌ی میدان دما در یک کره‌ی ناهمگن با شرایط مرزی نوع دوم، به‌دست آوردند و اثبات کردند که این معادله قابلیت کنترل مرزی را دارد [10]، نیلز و همکاران یک مدل برای کنترل گسترده و مرزی معادله انتقال حرارت پیش‌بینی کردند [11]، نیپون و همکاران یک کنترل‌کننده‌ی مرزی بازخوردی برای انتقال حرارت از یک میله با شرایط مرزی نیومن طراحی کردند [12]، اوزدمیر و همکاران کنترل مرزی بهینه‌ی تنش حرارتی در یک صفحه را براساس کسر زمانی معادله‌ی هدایت گرمایی بررسی کردند [13] و یویانگ و همکاران با استفاده از روش نامساوی ماتریسی خطی یک رویتگر و کنترل‌کننده برای معادلات مشتق جزئی سهموی طراحی کردند [14]. بلاو و همکاران روشی برای کنترل توزیع دمای رشته‌ها در قالب های فلزی ریختگری براساس سیستم توزیع گسترده ارائه دادند که این روش براساس کنترل مقاوم است [15]. عابدینی و همکاران یک روش کنترلی برای تنظیم درجه حرارت گیرنده‌ی خورشیدی ارائه دادند [16].

در این مقاله، روشی برای کنترل گسترده میدان دما در ورقی ضخیم از جنس مواد مدرج تابعی پیشنهاد شده است. برای انجام این کار ابتدا با استفاده از روش عدد موج اصلاح شده که ترکیب دو روش تبدیل سریع فوریه و تفاضل محدود می‌باشد معادله‌ی مشتق جزئی حاکم بر مدل به مجموعه‌ای از معادلات مشتق معمولی تبدیل می‌شود که هر کدام از این معادلات مشتق معمولی مربوط به ترکیبی خاص از اعداد موج راستاهای مختلف دستگاه مختصات کارتزین می‌باشد. سپس برای پایدارسازی دینامیک هر کدام از این معادلات، از کنترل کننده فیدبک حالت بهینه[2] استفاده می‌شود. همچنین روشی برای تولید ورودی کنترلی ردیاب یا تنظیم‌کننده پیشنهاد شده است. شبیه سازی‌های عددی کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد، که از آن جمله می‌توان به مشخصه‌های خوب پاسخ گذرا و همچنین خطای حالت ماندگار کوچک اشاره کرد.

نوآوری این مقاله نسبت به کارهای قبلی را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود: الف) استفاده از روش عدد موج اصلاح شده که ترکیبی از دو روش تفاضل محدود و تبدیل سریع فوریه می‌باشد، برای کنترل گسترده‌ی معادله انتقال حرارت هدایت خطی؛ ب) روش تبدیل سریع فوریه فقط برای شرایط مرزی متناوب است، در صورتی که روش عدد موج اصلاح شده برای هر شرایط مرزی قابل استفاده است؛ پ) ارائه‌ی روشی ساده برای طراحی کنترل‌کننده پایدارساز و همچنین ردگیر معادلات دیفرانسیل جزئی.

در ادامه، نخست در بخش 2 به بیان مدل ریاضی سیستم مورد بحث پرداخته و سپس در بخش 3 روش پیشنهادی برای گسسته‌سازی معادله‌ی مشتقی جزئی ارائه خواهد شد. در بخش 4 روش کنترلی پیشنهادی تشریح و روشی برای بررسی پایداری آن پیشنهاد می‌شود. با انجام چند شبیه‌سازی در بخش 5، کارایی روش پیشنهادی نشان داده می‌شود.

2- بیان مسأله

در پژوهش پیش رو، کنترل توزیع دما در یک ورق ضخیم مستطیلی مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفته است، که ماده مدرج تابعی از مدل توابع نمایی است. رابطه‌ی (1) حاکم بر انتقال حرارت هدایت در این جسم پیوسته، خطی و ناهمگن است:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

که با در نظر گرفتن دستگاه مختصات کارتزین، به‌صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z} + k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2}$$

همچنین در این رابطه، $T(x,y,z,t)$، $k(x,y,z)$، $\rho(x,y,z)$ و $c_p(x,y,z)$، به‌ترتیب، بیانگر دما در زمان t، ضریب هدایت، چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه‌ی یک نقطه فضایی با مختصات (x,y,z) است. برای این منظور، در ادامه، تنظیم هوشمند عبارت ورودی منبع $\dot{q}(x,y,z,t)$ به کمک روش بازخورد حالت خطی مدنظر قرار می‌گیرد.

3- گسسته‌سازی معادله مشتق جزئی حاکم با استفاده از روش عدد موج اصلاح شده

با توجه به پیچیدگی معادله‌ی (2)، محاسبه‌ی پاسخ تحلیلی آن با دشواری همراه است و بر این اساس، استفاده از روش‌های تقریبی عددی مورد توجه قرار گرفته است. از طرف دیگر، کنترل سیستم‌های دینامیکی پارامتری گسترده با معادلات حاکمه‌ی مشتقی جزئی در مقابل کنترل سیستم‌های گسسته با شمار محدود درجه‌ی آزادی در دوران طفولیت به‌سر می‌برد. برای حل این دو مشکل، چند روش عددی توسط پژوهشگران مورد استفاده قرار گرفته است که یکی از آنها، تبدیل فوریه سریع یا اف اف تی[3] است [17]. این روش، با دقت و سرعت بالا، سادگی و هزینه‌ی محاسباتی نسبتاً پایین نسبت

---

[1] Partial differential equation: PDE

[2] *Linear Quadratic Regulator (LQR)*

[3] Fast Fourier transform: FFT

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.8.55.9]

به روش‌های مشابه، توانایی حل معادلات دیفرانسیلی مشتقی جزئی با شرط مرزی متناوب را دارد. در این راستا، این معادلات مشتقی جزئی به شمار محدودی معادله‌ی دیفرانسیلی معمولی تبدیل شده که حل آن‌ها موجود می‌باشد [18]. اما ضعف این روش، محدودیت وجود شرایط مرزی متناوب در سیستم موردنظر است که در بسیاری از حالت‌ها محدودکننده بوده و با واقعیت موجود سازگار نیست. برای حل این مشکل، با ترکیب روش‌های تفاضل محدود و تبدیل فوریه سریع، روش عدد موج اصلاح شده پیشنهاد شده است. با استفاده از این روش می‌توان معادلات دیفرانسیلی مشتق جزئی با هر شرط مرزی دلخواه را به شمار محدودی معادله دیفرانسیلی معمولی تبدیل نمود که هر کدام از این معادلات مشتق معمولی مربوط به یکی از نقاط شبکه‌ای می‌باشد. بر این اساس، علاوه بر راحتی محاسبه‌ی پاسخ چنین سیستم‌هایی، استفاده از دانش رشد یافته کنترل سیستم‌های با معادلات حاکمه مشتق معمولی نیز فراهم می‌شود.

فرم کلی تبدیل فوریه سریع تابع $f(x,y,z,t)$ در جهت‌های پریودیک x، y و z بدین صورت می‌باشد:

$$f(x,y,z,t)=\sum_{k_x=1}^{N_x}\sum_{k_y=1}^{N_y}\sum_{k_z=1}^{N_z}\hat{f}_{k_x,k_y,k_z}(t)\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x+k_y y+k_z \mathrm{z})} \tag{3}$$

که در آن k_x، k_y و k_z اعداد موج در جهات x، y و z می‌باشد، $\mathrm{i}^2=-1$ و $\hat{f}_{k_x,k_y,k_z}(t)$ نیز ضرایب فوریه برای اعداد موج مختلف بوده که فقط تابع زمان است. به این ترتیب و به کمک این تبدیل، تابعیت پاسخ از مختصات فضایی به صورت توابع هارمونیک $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x+k_y y+k_z \mathrm{z})}$ در نظر گرفته می‌شود و تنها تابعیت زمانی ضرایب توابع هارمونیک $\hat{f}_{k_x,k_y,k_z}(t)$ مجهول است. در حقیقت، با به‌کارگیری این روند، معادلات به فضای زمانی برده شده و تبدیل به معادلات مشتق معمولی می‌شود. بنابراین، همان‌گونه که در ادامه نشان داده می‌شود، کنترل معادله‌ی (2) به کنترل شمار محدودی معادله‌ی مشتقی معمولی که بیانگر دینامیک معادله‌ی اصلی می‌باشد، تبدیل می‌شود.

در ادامه، برای سادگی نوشتار با در نظر گرفتن فرض $N_x=N_y=N_z=N$، عبارت $\sum_{k_x=1}^{N_x}\sum_{k_y=1}^{N_y}\sum_{k_z=1}^{N_z}\hat{f}_{k_x,k_y,k_z}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x+k_y y+k_z \mathrm{z})}$ به‌صورت عبارت، $\sum_{k_x,k_y,k_z=1}^{N}\hat{f}_{k_x,k_y,k_z}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x+k_y y+k_z \mathrm{z})}$ نمایش داده می‌شود.

از طرف دیگر، اگر مطلوب گسسته‌سازی رابطه (2) با استفاده از روش تفاضل محدود باشد، باید نخست مشتقات مختلف تابع $T(x,y,z,t)$ را به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{T(x+\Delta x,y,z,t)-T(x-\Delta x,y,z,t)}{2\Delta x} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{T(x+\Delta x,y,z,t)+T(x-\Delta x,y,z,t)}{(\Delta x)^2}-\frac{2T(x,y,z,t)}{(\Delta x)^2} \tag{5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{T(x,y+\Delta y,z,t)-T(x,y-\Delta y,z,t)}{2\Delta y} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{T(x,y+\Delta y,z,t)+T(x,y-\Delta y,z,t)}{(\Delta y)^2}-\frac{2T(x,y,z,t)}{(\Delta y)^2} \tag{7}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{T(x,y,z+\Delta z,t)-T(x,y,z-\Delta z,t)}{2\Delta z} \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{T(x,y,z+\Delta z,t)+T(x,y,z-\Delta z,t)}{(\Delta z)^2}-\frac{2T(x,y,z,t)}{(\Delta z)^2} \tag{9}$$

همچنین، با استفاده از روش اف اف تی، عبارت‌های دیفرانسیلی موجود در روابط (4)-(9) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$T(x,y,z,t)=\sum_{k_x,k_y,k_z=1}^{N}\hat{T}_{k_x,k_y,k_z}(t)\times e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)} \tag{10}$$

$$T(x+\Delta x,y,z,t)=\sum_{k_x,k_y,k_z=1}^{N}\hat{T}_{k_x,k_y,k_z}(t)\times e^{i(k_x(x+\Delta x)+k_y y+k_z z)} \tag{11}$$

$$T(x-\Delta x,y,z,t)=\sum_{k_x,k_y,k_z=1}^{N}\hat{T}_{k_x,k_y,k_z}(t)\times e^{i(k_x(x-\Delta x)+k_y y+k_z z)} \tag{12}$$

$$T(x,y+\Delta y,z,t)=\sum_{k_x,k_y,k_z=1}^{N}\hat{T}_{k_x,k_y,k_z}(t)\times e^{i(k_x x+k_y(y+\Delta y)+k_z z)} \tag{13}$$

$$T(x,y-\Delta y,z,t)=\sum_{k_x,k_y,k_z=1}^{N}\hat{T}_{k_x,k_y,k_z}(t)\times e^{i(k_x x+k_y(y-\Delta y)+k_z z)} \tag{14}$$

$$T(x,y,z+\Delta z,t)=\sum_{k_x,k_y,k_z=1}^{N}\hat{T}_{k_x,k_y,k_z}(t)\times e^{i\left(k_x x+k_y y+k_z(z+\Delta z)\right)} \tag{15}$$

$$T(x,y,z-\Delta z,t)=\sum_{k_x,k_y,k_z=1}^{N}\hat{T}_{k_x,k_y,k_z}(t)\times e^{i\left(k_x x+k_y y+k_z(z-\Delta z)\right)} \tag{16}$$

در این راستا، با استفاده از اف اف تی می‌توان عبارت‌های منبع حرارتی، ضریب هدایت حرارتی، چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه را به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\dot{q}(x,y,z,t)=\sum_{k_x,k_y,k_z=1}^{N}\hat{\dot{q}}_{k_x,k_y,k_z}(t)\times e^{3i(k_x x+k_y y+k_z z)} \tag{17}$$

$$k(x,y,z)=\sum_{k_x,k_y,k_z=1}^{N}k_0 e^{2i(k_x x+k_y y+k_z z)} \tag{18}$$

$$\rho(x,y,z)=\sum_{k_x=k_y=k_z=1}^{N}\rho_0 e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)} \tag{19}$$

$$c_p(x,y,z)=\sum_{k_x,k_y,k_z=1}^{N}c_{p0} e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)} \tag{20}$$

در حقیقت، برای برخی از عبارت‌ها از عدد موج متفاوتی استفاده شده است. اکنون، با در نظر گرفتن روابط (4)-(20) و استفاده از آن‌ها در رابطه‌ی (2)، معادله‌ی (21) که ترکیبی از معادله‌های مشتق معمولی است و به راحتی می‌توان آن را به فرم فضای حالت نوشت، به‌دست می‌آید. همچنین در این رابطه مشاهده می‌شود که معادله فقط دارای بخش زمانی است.

$$\sum_{k_x,k_y,k_z=1}^{N}\left[\frac{d\hat{T}_{k_x,k_y,k_z}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{(e^{ik_x\Delta x}-e^{-ik_x\Delta x})^2}{4(\Delta x)^2}+\frac{(e^{ik_y\Delta y}-e^{-ik_y\Delta y})^2}{4(\Delta y)^2}+\frac{(e^{ik_z\Delta z}-e^{-ik_z\Delta z})^2}{4(\Delta z)^2}+\frac{e^{ik_x\Delta x}+e^{-ik_x\Delta x}-2}{(\Delta x)^2}+\frac{e^{ik_y\Delta y}+e^{-ik_y\Delta y}-2}{(\Delta y)^2}\right.\right.$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.8.55.9]

$$+\frac{e^{ik_z\Delta z}+e^{-ik_z\Delta z}-2}{(\Delta z)^2}\Bigg)\frac{k_0}{\rho_0 c_{p0}}\hat{T}_{k_x,k_y,k_z}(t)+\frac{1}{\rho_0 c_{p0}}\hat{\dot{q}}_{k_x,k_y,k_z}(t)\Bigg]e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)} \tag{21}$$

که به صورت رابطه‌ی (22) قابل ساده‌سازی است:

$$\sum_{k_x,k_y,k_z=1}^{N}\Bigg[\frac{d\hat{T}_{k_x,k_y,k_z}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{k_0}{\rho_0 c_{p0}}\Bigg(\frac{-\sin^2(k_x\Delta x)}{(\Delta x)^2}-\frac{\sin^2(k_y\Delta y)}{(\Delta y)^2}-\frac{\sin^2(k_z\Delta z)}{(\Delta z)^2}+\frac{2\cos(k_x\Delta x)-2}{(\Delta x)^2}+\frac{2\cos(k_y\Delta y)-2}{(\Delta y)^2}+\frac{2\cos(k_z\Delta z)-2}{(\Delta z)^2}\Bigg)\hat{T}_{k_x,k_y,k_z}(t)+\frac{1}{\rho_0 c_{p0}}\hat{\dot{q}}_{k_x,k_y,k_z}(t)\Bigg]e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)} \tag{22}$$

فرض کنید که $\bar{k}$ به‌صورت شاخصی که مشخص‌کننده‌ی ترکیب اعداد موج $k_x=1,2,\dots,N$، $k_y=1,2,\dots,N$ و $k_z=1,2,\dots,N$ در جهت‌های مختلف دستگاه مختصات کارتزین است، تعریف شود. در این راستا، $\bar{k}=1,2,3,\dots,N^3$ در نظر گرفته می‌شود؛ به این معنا که به‌ازای هر ترکیب k_x، k_y و k_z، یک عدد طبیعی به شاخص $\bar{k}$ اختصاص داده می‌شود. در حقیقت، $\bar{k}$ به‌منظور ساده‌سازی نوشتار بیان شده است. بر این اساس، $\hat{T}_{\bar{k}}=\hat{T}_{k_x,k_y,k_z}$ و $\hat{\dot{q}}_{\bar{k}}=\hat{\dot{q}}_{k_x,k_y,k_z}$ در نظر گرفته می‌شود.

براساس رابطه‌ی (22)، دینامیک تغییرات دما در ورق سه‌بعدی ناهمگن را می‌توان به‌صورت ترکیب N^3 معادله‌ی دیفرانسیل معمولی زمانی نوشت که هرکدام از این معادلات برای یک $\bar{k}$ مشخص استخراج شده است. این معادله به‌صورت فضای حالت زیر نیز قابل بیان است:

$$\dot{\hat{T}}_{\bar{k}}(t)=A_{\bar{k}}\hat{T}_{\bar{k}}(t)+B_{\bar{k}}\hat{\dot{q}}_{\bar{k}}(t), \tag{23}$$

که در آن $A_{\bar{k}}$ و $B_{\bar{k}}$ به صورت روابط (24) و (25) محاسبه می‌شود،

$$A_{\bar{k}}=\frac{k_0}{\rho_0 c_{p0}}\Bigg(-\frac{\sin^2(k_x\Delta x)}{(\Delta x)^2}-\frac{\sin^2(k_y\Delta y)}{(\Delta y)^2}-\frac{\sin^2(k_z\Delta z)}{(\Delta z)^2}+\frac{2\cos(k_x\Delta x)-2}{(\Delta x)^2}+\frac{2\cos(k_y\Delta y)-2}{(\Delta y)^2}+\frac{2\cos(k_z\Delta z)-2}{(\Delta z)^2}\Bigg) \tag{24}$$

$$B_{\bar{k}}=\frac{1}{\rho_0 c_{p0}}. \tag{25}$$

4- روش کنترلی پیشنهادی

از آنجایی که روش عدد موج اصلاح شده با دقت بالا نسبت به روش‌های دیگر به حل معادلات دیفرانسیل جزئی و در نتیجه گسسته‌سازی آن‌ها می‌پردازد، طراحی کنترل‌کننده‌ی پایدارساز و ردگیر برای سیستم‌های (2) و (23) معادل است. در این راستا، برای پایدارسازی رابطه (23) از کنترل‌کننده‌ی خطی بازخورد حالت بهینه که به‌صورت رابطه (26) تعریف شده است، استفاده می‌شود:

$$\hat{\dot{q}}_{\bar{k}}=-K_{\bar{k}}\hat{T}_{\bar{k}}(t) \tag{26}$$

به این ترتیب، می‌توان معادله‌ی حلقه‌بسته به‌ازای هر $\bar{k}$ به‌صورت رابطه (27) نوشت:

$$\dot{\hat{T}}_{\bar{k}}(t)=(A_{\bar{k}}-B_{\bar{k}}K_{\bar{k}})\hat{T}_{\bar{k}}(t) \tag{27}$$

که در این رابطه، $K_{\bar{k}}$، معرف بهره‌ی کنترلی متناظر با عدد موج برآیند $\bar{k}^{th}$ است. به منظور ردگیری یک ورودی مرجع خاص، اضافه نمودن یک ورودی پیشخوراند به این ورودی پایدارساز پیشنهاد می‌شود. برای این منظور، با توجه به مشخص بودن تاریخچه‌ی زمانی ورودی مرجع $T_d(x,y,z,t)$ در فضای مکانی مورد نظر و گرفتن اف اف تی از آن، ضرائب فوریه‌ی مطلوب $\hat{T}_{d\bar{k}}(t)$ متناظر با آن در اعداد موج مختلف محاسبه می‌شود. بنابراین، در شرایط تعادل و ماندگاری مطلوب سیستم می‌توان نوشت،

$$\begin{bmatrix}0\\ \hat{T}_{d\bar{k}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{\bar{k}} & B_{\bar{k}}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{T}^*_{\bar{k}}(t)\\ \hat{\dot{q}}^*_{\bar{k}}(t)\end{bmatrix}. \tag{28}$$

در این‌جا، $\hat{T}^*_{\bar{k}}(t)$ و $\hat{\dot{q}}^*_{\bar{k}}(t)$، به‌ترتیب، توزیع دما و میزان شار حرارت ورودی در حالت تعادل می‌باشد. این مقادیر تعادلی از حل دستگاه رابطه (29) محاسبه می‌شود:

$$\begin{bmatrix}\hat{T}^*_{\bar{k}}(t)\\ \hat{\dot{q}}^*_{\bar{k}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{\bar{k}} & B_{\bar{k}}\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ T_d\end{bmatrix} \tag{29}$$

بر این اساس، ورودی کنترلی برای این سیستم به‌صورت رابطه (30) اصلاح می‌شود:

$$\hat{\dot{q}}_{\bar{k}}(t)=-K_{\bar{k}}\left(\hat{T}_{\bar{k}}(t)-\hat{T}^*_{\bar{k}}(t)\right)+\hat{\dot{q}}^*_{\bar{k}}(t). \tag{30}$$

ملاحظه 1. با توجه به این‌که ورودی کنترلی $\hat{\dot{q}}_{\bar{k}}(t)$ در فضای فوریه بیان شده است، باید به فضای فیزیکی منتقل شود؛ برای رسیدن به این هدف، از تبدیل معکوس فوریه استفاده می‌شود.

در ادامه با استفاده از روش تنظیم‌کننده‌ی مرتبه‌ی دوم خطی که در دسته‌ی روش‌های کنترلی بهینه قرار می‌گیرد، بهره‌های کنترلی محلی $K_{\bar{k}}$ طراحی می‌شود. برای این‌کار، معیار یا شاخص عملکرد زیر تعریف می‌شود:

$$J_{\bar{k}}=\int_0^\infty\left[\hat{T}^{\mathrm{T}}_{\bar{k}}(t)Q_{\bar{k}}\hat{T}_{\bar{k}}(t)+\hat{\dot{q}}^{\mathrm{T}}_{\bar{k}}(t)R_{\bar{k}}\hat{\dot{q}}_{\bar{k}}(t)\right]dt, \tag{31}$$

که در آن ماتریس‌های متقارن $Q_{\bar{k}}$ و $R_{\bar{k}}$، به‌ترتیب مثبت نیمه‌معین و مثبت معین ($Q_{\bar{k}}\geq 0\,, R_{\bar{k}}>0$) می‌باشد. اکنون، هدف طراحی کنترل‌کننده‌ی خطی بازخورد حالت $\hat{\dot{q}}_{\bar{k}}(t)$ است، به گونه‌ای که معیار عملکرد (31) کمینه شود. با به‌کارگیری رابطه‌ی (26)، (31) برای $\bar{k}=1,2,3,\dots,N^3$، به‌صورت (32) نوشته می‌شود:

$$J_{\bar{k}}=\int_0^\infty\hat{T}^{\mathrm{T}}_{\bar{k}}(t)\left[Q_{\bar{k}}+K^{\mathrm{T}}_{\bar{k}}R_{\bar{k}}K_{\bar{k}}\right]\hat{T}_{\bar{k}}(t)dt. \tag{32}$$

بهره‌ی کنترلی بازخورد حالت $K_{\bar{k}}$ که باعث کمینه شدن $J_{\bar{k}}$ می‌شود، از معادله‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$K_{\bar{k}}=R_{\bar{k}}^{-1}B^{\mathrm{T}}_{\bar{k}}P_{\bar{k}} \tag{33}$$

در این رابطه، $P_{\bar{k}}$ برای $\bar{k}=1,2,3,\dots,N^3$، یک ماتریس مثبت معین است که در معادله‌ی جبری ریکاتی (34) صدق می‌کند:

$$A^{\mathrm{T}}_{\bar{k}}P_{\bar{k}}+P_{\bar{k}}A_{\bar{k}}-P_{\bar{k}}B_{\bar{k}}R^{-1}_{\bar{k}}B^{\mathrm{T}}_{\bar{k}}P_{\bar{k}}+Q_{\bar{k}}=0 \tag{34}$$

می‌توان نشان داد که در صورت کنترل‌پذیری جفت $(A_{\bar{k}},B_{\bar{k}})$ و آشکارپذیری جفت $(A_{\bar{k}},Q_{\bar{k}})$، جواب مثبت معین $P_{\bar{k}}$ معادله‌ی (34) یکتاست [19].

5- شبیه‌سازی عددی

در این پژوهش، برای طراحی کنترل‌کننده، همان‌گونه که در بخش پیشین بیان شد، با استفاده از عدد موج اصلاح شده گسسته‌سازی صورت گرفته و معادلات مشتقی جزئی حاکمه به شماری معادله‌ی مشتقی معمولی زمانی تبدیل و سپس براساس آن‌ها ورودی کنترلی پایدارساز یا ردگیر در حوزه‌ی فوریه طراحی می‌شود. همچنین با استفاده از معکوس فوریه، ورودی کنترلی که در فضای غیرفیزیکی فوریه طراحی شد، به فضای فیزیکی منتقل می‌شود.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.8.55.9]

در ادامه، برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، معادلات انتقال حرارت هدایت در ورق ضخیم مستطیلی مدرج تابعی، در حالت حلقه‌بسته شبیه‌سازی می‌شود. برای رسیدن به این هدف، روش‌های زیادی وجود دارد، که در این پژوهش، از روش تفاضل محدود تقریب مرکزی برای گسسته‌سازی بخش مکانی و از روش رانگ-کوتا مرتبه چهار برای گسسته‌سازی بخش زمانی استفاده شده است. در این شبیه‌سازی چشمه حرارتی از طریق الگوریتم کنترلی طراحی شده و در طول شبیه‌سازی به سیستم اعمال می‌گردد، تا میدان دما به حد مطلوب برسد. در این راستا، خواص فیزیکی را می‌توان به صورت مدل‌های مختلف در نظر گرفت. در این پژوهش خواص فیزیکی ماده‌ی اف جی به‌صورت نمایی در نظر گرفته شده است؛ در این راستا، ضریب رسانش، چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه، به‌ترتیب به‌صورت $k(x,y,z)=k_0 e^{\frac{x}{l}} e^{\frac{y}{h}} e^{\frac{z}{w}}$ ، $\rho(x,y,z)=\rho_0 e^{\frac{x}{l}} e^{\frac{y}{h}} e^{\frac{z}{w}}$ و $c_p(x,y,z)=c_{p0} e^{\frac{x}{l}} e^{\frac{y}{h}} e^{\frac{z}{w}}$ در نظر گرفته شده است که در آن‌ها $k_0=50.16\ \mathrm{W/m°C}$، $\rho_0=7854\ \mathrm{kg/m^3}$ و $c_{p0}=434\ \mathrm{J/kg°C}$ می‌باشد. همچنین گام زمانی برابر 0.001 ثانیه و گام‌های مکانی در جهت‌های x، y و z به‌صورت $dx=dy=dz=0.01\mathrm{m}$ در نظر گرفته شده است. در این مسأله، شرایط مرزی با توجه به دمای مطلوب در نظر گرفته می‌شود. شرایط اولیه سیستم به صورت زیر است:

$$T(x,y,z,t=0)=0 \tag{35}$$

در ادامه چند شبیه‌سازی انجام می‌شود و کارایی روش پیشنهادی کنترل میدان دما برای چند تابع دمای مطلوب مختلف نمایش داده می‌شود.

الف) برای حالت اول، توزیع دمای مطلوب به‌صورت رابطه‌ی نامتغیر با زمان و متناوب زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$T_d(x,y,z)=100\sin x\sin y\sin z \tag{36}$$

"شکل 1" توزیع دمای مطلوب را در صفحه موازی با صفحه xy عبورکننده از نقطه z=20dz نشان می‌دهد.

در "شکل 2" توزیع دمای سیستم در جهت x و در نقاط متناظر با $y=z=20dz$ در شماری زمان نشان داده شده است. همچنین در "شکل 3 و 4" توزیع دمای دمای سیستم در جهت‌های y و z نمایش داده شده است.

در "شکل‌های 5 تا 7" توزیع دمای سیستم در صفحه موازی با xy عبور کننده از نقطه‌ی z=20dz در گذر زمان نشان داده شده است.

همان‌گونه که در شکل‌های قبل مشاهده می‌شود، پس از گذشت زمان اندکی توزیع دما به توزیع دمای مطلوب (شکل 1) رسیده است.

ب) برای حالت دوم، توزیع دمای مطلوب به‌صورت رابطه‌ی نامتغیر با زمان و نامتناوب زیر در نظر گرفته می‌شود:

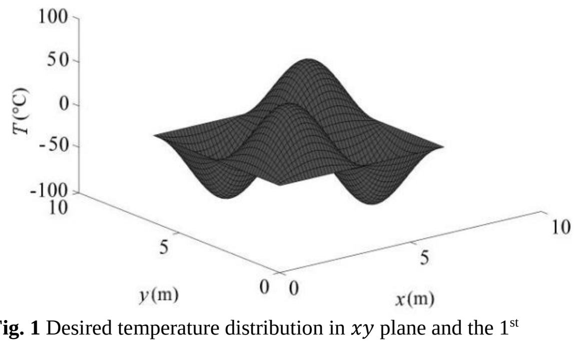

Fig. 1 Desired temperature distribution in xy plane and the 1st simulation

شکل 1 توزیع دمای مطلوب در صفحه موازی با صفحه‌ی xy گذرنده از نقطه‌ی $z=20dz$ در شبیه‌سازی نخست

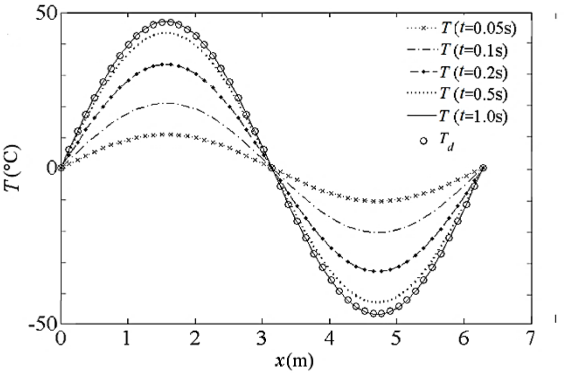

Fig. 2 The system response in x Direction and the 1st simulation

شکل 2 پاسخ سیستم در جهت x در شبیه‌سازی نخست

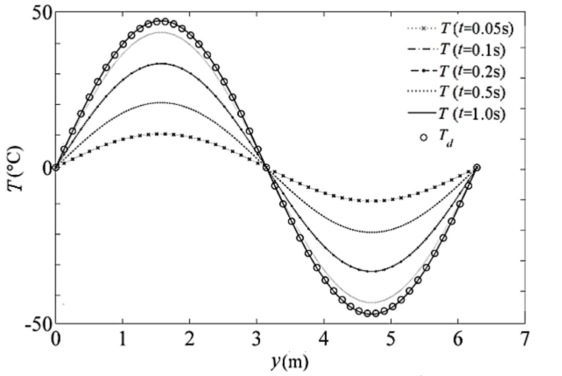

Fig. 3 The system response in y Direction and the 1st simulation

شکل 3 پاسخ سیستم در جهت y در شبیه‌سازی نخست

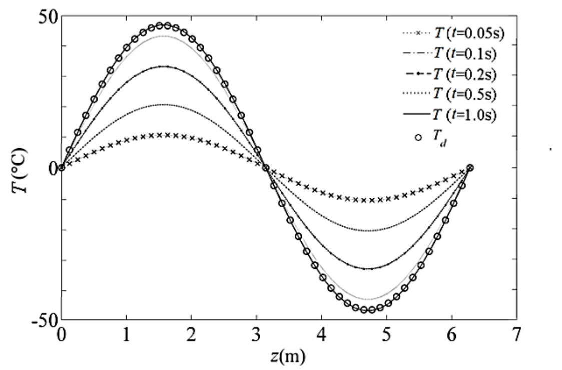

Fig. 4 The system response in z Direction and the 1st simulation

شکل 4 پاسخ سیستم در جهت z در شبیه‌سازی نخست

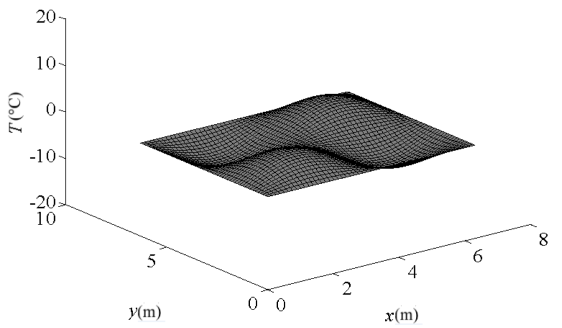

Fig. 5 The system response in xy plane & $nt=100$ in the 1st simulation

شکل 5 پاسخ سیستم در صفحه‌ی xy و $nt=100$ در شبیه‌سازی نخست

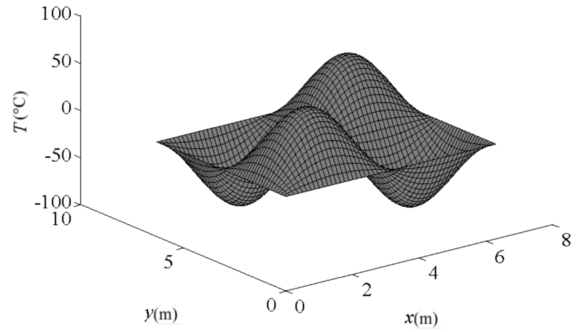

Fig. 6 The system response in xy plane & $nt = 500$ in the 1st simulation

شکل 6 پاسخ سیستم در صفحه xy و $nt = 500$ در شبیه‌سازی نخست

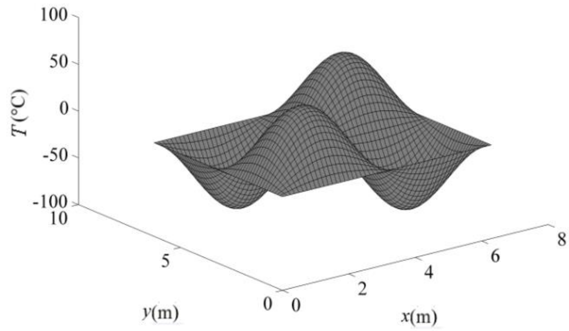

Fig. 7 The system response in xy plane & $nt = 1000$ in the 1st simulation

شکل 7 پاسخ سیستم در صفحه xy و $nt = 1000$ در شبیه‌سازی نخست

$$T_d(x, y, z, t) = 100 \cos x \cos y \cos z + 3xyz \quad (37)$$

"شکل 8" توزیع دمای مطلوب را در صفحه xy عبورکننده از نقطه z=20dz نشان می‌دهد.

در "شکل 9" توزیع دمای سیستم در جهت x و در نقاط متناظر با y=z=20dz در شماری زمان از شبیه‌سازی نشان داده شده است. همچنین در "شکل‌های 10 و 11" توزیع دمای سیستم در جهت‌های y و z نمایش داده شده است.

در "شکل‌های 12 تا 14" توزیع دمای سیستم را در صفحه xy عبورکننده از نقطه z=20dz در شماری زمان نشان داده شده است. همان‌گونه که در این نمودارها مشاهده می‌شود، پس از گذشت زمان اندکی توزیع دما به توزیع دمای مطلوب می‌رسد.

با توجه به نمودارهای نمایش داده شده در سه حالت متفاوت مشاهده می‌شود که توزیع دما از شرایط اولیه بعد از مدت زمان کوتاهی به توزیع

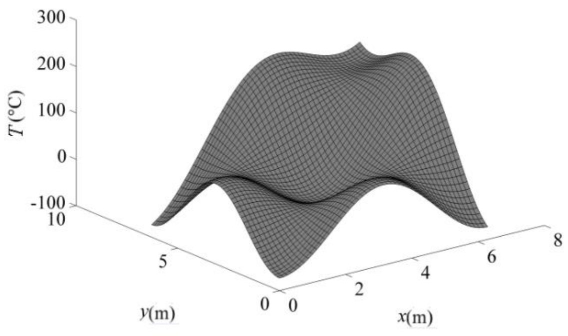

Fig. 8 Desired temperature distribution in xy plane in th 2nd simulation

شکل 8 توزیع دمای مطلوب در صفحه موازی با xy در شبیه‌سازی دوم

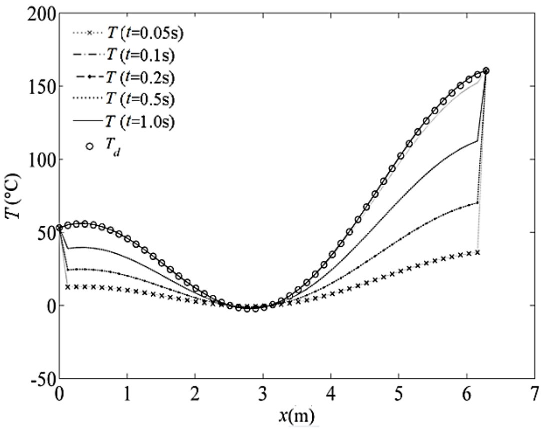

Fig. 9 The system response in x Direction for the 2nd simulation

شکل 9 پاسخ سیستم در جهت x در شبیه‌سازی دوم

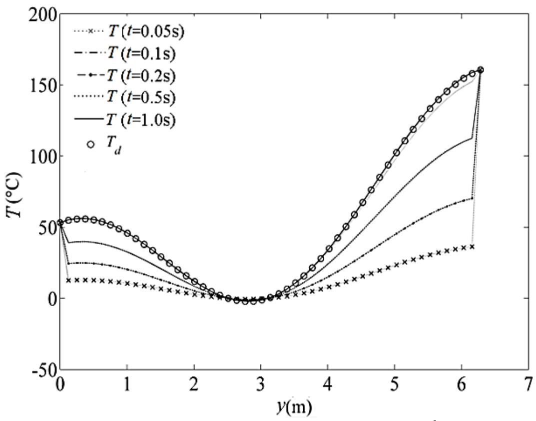

Fig. 10 The system response in y Direction for the 2nd simulation

شکل 10 پاسخ سیستم در جهت y در شبیه‌سازی دوم

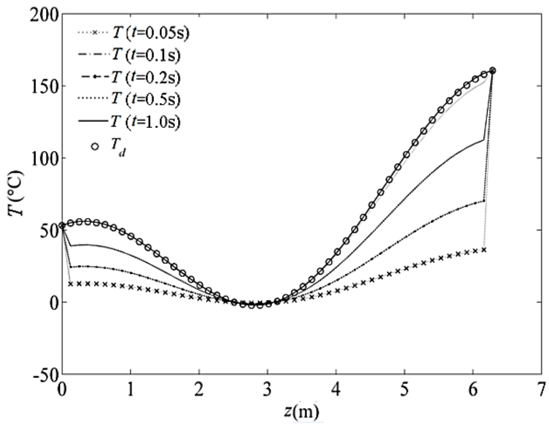

Fig. 11 The system response in z Direction for the 2nd simulation

شکل 11 پاسخ سیستم در جهت z در شبیه‌سازی دوم

دمای مطلوب می‌رسد.

د) برای حالت سوم، توزیع دمای مطلوب به‌صورت رابطه‌ی متغیر با زمان زیر در نظر گرفته می‌شود. تفاوت آن با شبیه‌سازی‌های پیشین در این است که تغییرات دمای مطلوب به‌صورت پله‌ای که تابعی نامتناوب است، می‌باشد:

$$T_d = \begin{cases} 10 & 0 \le t \le 1 \\ 100 & 1 < t \le 2 \\ 50 & 2 < t \le 3 \\ 200 & 3 < t \le 4 \end{cases} \quad (38)$$

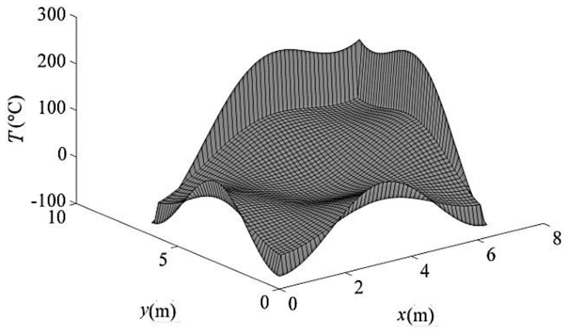

Fig. 12 The system response in xy plane & $nt = 100$ for the 2nd simulation

شکل 12 پاسخ سیستم در صفحه xy و $nt = 100$ در شبیه‌سازی دوم

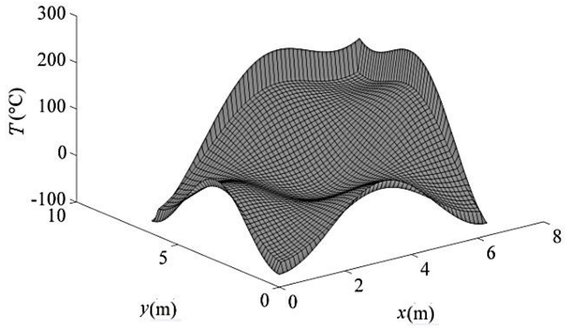

Fig.13 The system response in xy plane & $\mathrm{nt} = 200$ for the 2nd simulation

شکل 13 پاسخ سیستم در صفحه xy و $nt = 200$ در شبیه‌سازی دوم

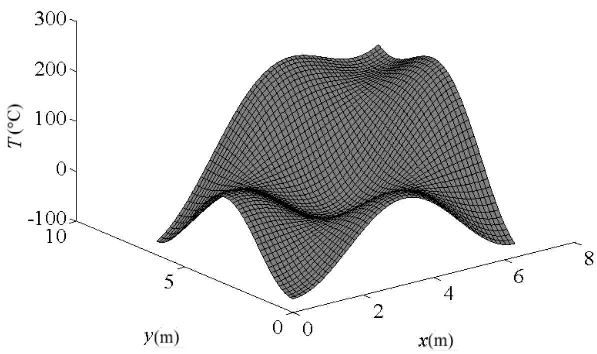

Fig. 14 The system response in xy plane & $\mathrm{nt} = 1000$ for the 2nd simulation

شکل 14 پاسخ سیستم در صفحه xy و $nt = 1000$ در شبیه‌سازی دوم

در این حالت، همچنین شرایط مرزی به‌صورت زیر در نظر گرفته شده که متناوب نیست:

$$T_d(x,y,z,t) = \begin{cases} T(0,y,z,t) = 0 \\ T(L,y,z,t) = 50 \\ T(x,0,z,t) = 10 \\ T(x,H,z,t) = 100 \\ T(x,y,0,t) = 20 \\ T(x,y,W,t) = 150 \end{cases} \tag{39}$$

در "شکل 15" دما در نقطه‌ای از این ورق ضخیم با مختصات x=20dx، y=20dy و z=20dz در طول زمان نشان داده شده است.

"شکل 16" توزیع دمای سیستم را در یک خط عبور کننده از نقاط متناظر با y=20dy و z=20dz در جهت محور x در طول زمان نمایش می‌دهد. به عبارتی این نمودار روند تغییرات دما و میل به سمت تابع هدف را روی یک خط در جهت x در طول زمان نشان می‌دهد.

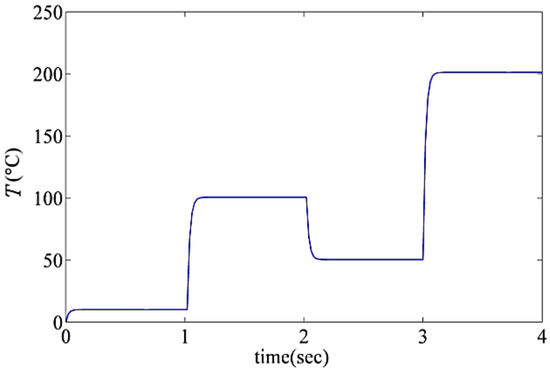

Fig. 15 The system response in a point of plate & $0 \le \text{time} \le 4.0$ for the 3rd simulation

شکل 15 پاسخ سیستم در یک نقطه در طول زمان در شبیه‌سازی سوم

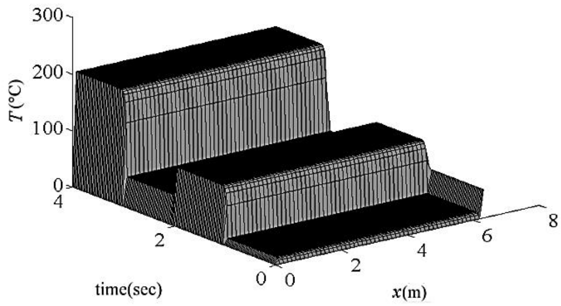

Fig. 16 The system response in x Direction & $0 \le \text{time} \le 4sec$ for the 3rd simulation

شکل 16 توزیع دما روی یک خط در جهت x و در مدت زمان 4 ثانیه در شبیه‌سازی سوم

بنابراین، روش پیشنهادی برخلاف روش مبتنی بر تبدیل سریع فوریه که فقط برای شرایط مرزی متناوب است، توانایی پایدارسازی و همچنین تنظیم خروجی سیستم را در حالت‌های با شرایط مرزی نامتناوب نیز دارد.

6- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی برای کنترل گسترده میدان دما در ورقی ضخیم از جنس مدرج تابعی پیشنهاد شد. در این راستا، نخست با استفاده از روش عدد موج اصلاح شده که ترکیب دو روش تبدیل سریع فوریه و تفاضل محدود می‌باشد، معادله‌ی مشتق جزئی حاکم بر سیستم تحت کنترل به مجموعه‌ای از معادلات مشتق معمولی تبدیل شد که هر کدام از این معادلات مشتق معمولی مربوط به ترکیبی خاص از اعداد موج راستاهای مختلف دستگاه مختصات کارتزین بود. سپس برای پایدارسازی دینامیک هر کدام از این معادلات، از کنترل‌کننده‌ی خطی فیدبک حالت بهینه استفاده شد. همچنین روشی برای تولید ورودی کنترلی ردیاب یا تنظیم‌کننده پیشنهاد شد. شبیه‌سازی‌های عددی، کارایی روش پیشنهادی، مانند مشخصه‌های خوب پاسخ گذرا و همچنین خطای حالت ماندگار کوچک در دنبال کردن ورودی‌های مرجع متناوب و نامتناوب را نشان داد.

7- مراجع

[1] S. S. Vel, R. C. Batra, Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates, *American Institute of Aeronautics and Astrnautiocs Journal*, Vol. 40, No. 7, pp. 1421-1433, 2002.

[2] A. Moosaie, Steady symmetrical temperature field in a hollow spherical particle with temperature-dependent thermal conductivity, *Archives of Mechanics*, Vol. 64, No. 4, pp. 405-422, 2012.

[3] A. Moosaie, Axisymmetric steady temperature field in FGM cylindrical shells with temperature-dependent heat conductivity and arbitrary linear

[11] N. altmuller, L. grune, Distributed and boundary model predictive control for the heat equation, *GmbH & Co. KGaA,Weinhei m, GAMM-Mitt*, Vol. 35, No. 2, pp. 131-145, 2012.

[12] N. Boonkumkrong, S. Kuantanapreeda, Backstepping boundary control, an application to rod temperature control with Neumann boundary condition, *Journal of Systems and Control Engineering*, Vol. 228, No. 5, pp. 295-302, 2014.

[13] N. Ozdemir, Y. Povstenko, D. Avci, B. B. Iskander , Optimal boundary control of thermal stresses in a plate based on time-fractional heat conduction equation, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 37, No. 8, pp. 969-980, 2014.

[14] Y. Yang, S. Dubljevic, Linear matrix inequalities (LMIs) observer and controller design synthesis for parabolic PDE, *European Journal of Control*, Vol. 20, No. 5, pp. 227-236, 2014.

[15] C. Belav, G. Hulk, L. Bartalsk, M. Kubis, Robust control of temperature fields in steel casting mould as distributed parameter systems, *IFAC-PapersOnLine*, Vol. 48, No. 14, pp. 408-413, 2015.

[16] H. Abedini Najafabadi, N. Ozalp, Development of a control model to regulate temperature in a solar receiver, *Journal of Renewable Energy*, Vol. 111, No. 11, pp. 95-104, 2017.

[17] P. Moin, *Fundamentals of Engineering Nummerical Analysis*, Cambridge, pp. 47-100, New york: Cambridge University Press, 2010.

[18] B. Rahmani, A. Moosaie, A. Mansourian Tabaei, Distributed control of nonlinear Burger's equation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 4, pp. 214-220, 2015. (In Persian فارسی)

[19] P. R. Belanger, *Control Engineering: A Modern Approach*, pp. 6-50, Oxford University Press, 2005.

boundary conditions, *Archives of Mechanics*, Vol. 67, No. 3, pp. 233-251, 2015.

[4] K. Khorshidi, E. Rezaei, A. A. Ghadimi, M. Pagoli, Active vibration control of circular plates coupled with piezoelectric layers excited by plane sound wave, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, No. 3, pp. 1217-1228, 2015.

[5] K. Khorshidi, A. Fallah, Buckling analysis of functionally graded rectangular nano-plate based on nonlocal exponential shear deformation theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 113, No. 4, pp. 94-104, 2016.

[6] M. R. Golbahar Haghighi, M. Eghtesad, D. S. Necsulescu, P. Malekzadeh, Temperature control of functionally graded plates using a feedforward–feedback controller based on the inverse solution and proportional-derivative controller, *International Journal of Energy Conversion and Management*, Vol. 51, No. 3, pp. 140-146, 2009.

[7] M. R. Golbahar Haghighi, P. Malekzadeh , H. rahideh, Three-dimensional transient optimal abaoundary heating of functionally graded plates, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 59, No. 1, pp. 76-95, 2011.

[8] D. M. Boskovic, M. Krstic, W. Liu, Boundary control of an unstable heat equation via measurement of domain- averaged temperature, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, No. 12, pp. 2022-2028, 2001.

[9] H. Rastgoftar, M. Eghtesad, A. Khayatian, Boundary control of temperature distribution in a rectangular functionally graded materia plate, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 133, No. 18, pp. 302-305, 2011.

[10] H. Rastgoftar, M. Eghtesad, A. Khayatian, Boundary control of temperature distribution in a spherical shell with spatially varying parameters, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 134, No. 18, pp. 304-306, 2012.