



## تعیین یک رابطه عمومی برای در نظرگیری رشد چگالی ترک ماتریسی و جدانشدگی بین لایه‌ای در مواد مرکب متعامد تحت بارگذاری محوری بر اساس مدل تاخیر برش ارتقایافته

امین فرخ آبادی<sup>1\*</sup>، مریم آقابراهیمی سامانی<sup>2</sup>

1- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه سمنان، سمنان

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه سمنان، سمنان

\*سمنان، صندوق پستی 35195363، amin.farrokh@profs.semnan.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 14 مرداد 1393  
پذیرش: 14 آبان 1393  
ارائه در سایت: 26 آذر 1393

کلید واژگان:

مدل تاخیر برش ارتقایافته  
ترک ماتریسی  
جدانشدگی بین لایه‌ای  
معیار بیشترین تنش  
معیار انرژی کرنشی آزاد شده

### چکیده

در این مقاله با استفاده از یک مدل تاخیر برش ارتقایافته، با در نظرگیری اثرات تنش‌های برشی خارج صفحه‌ای، میدانهای تنش، کرنش، جابجایی و انرژی کرنشی در چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد نمونه  $[0_m/90_n]_s$  محاسبه می‌شود. در ادامه روابطی برای تعیین افت سفتی ناشی از وجود ترک ماتریسی در چندلایه‌های کامپوزیتی متقارن متعامد ارائه می‌شود و پارامترهای خرابی ناشی از وجود ترک ماتریسی در ماتریس سفتی لایه کامپوزیتی تعریف می‌گردند. در ادامه با استفاده از مفاهیم مکانیک شکست و با بکارگیری دو معیار بیشترین تنش و معیار انرژی کرنشی آزاد شده، رشد مکانیزم های خرابی نظیر ترک ماتریسی و جدانشدگی بین لایه‌ای حاصل از آن مطالعه می‌شود و یک رابطه بسته تحلیلی برای رشد خرابی در مواد مرکب لایه‌ای بر حسب تنش محوری اعمال شده ارائه می‌گردد و در نهایت نتایج حاصل با نتایج تحلیلی و تجربی موجود مقایسه می‌گردد. نتایج ارائه شده نشان خواهد داد که روابط ارائه شده در این پژوهش در مقایسه با نتایج نیمه تحلیلی قبلی دارای دقت مناسبتر و خطای کمتر در مقایسه با نتایج تجربی می‌باشند، لازم به ذکر است که مدل ارائه شده در این مقاله، قابل توسعه به چندلایه‌های متقارن عمومی نیز می‌باشد.

## Determination of a general closed form relation for crack density and induced delamination evolution in cross ply laminates under uniaxial loading condition based on an extended shear lag model

Amin Farrokhbadi\*, Maryam Aghaebrahimi Samani

Department of Aerospace Engineering, Semnan University, Semnan, Iran

\*P.O.B. 35195363 Semnan, Iran, amin.farrokh@profs.semnan.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 05 August 2014  
Accepted 05 November 2014  
Available Online 17 December 2014

**Keywords:**  
shear lag model  
matrix cracking  
delamination  
max stress  
strain energy release rate

### ABSTRACT

In the present study, using shear lag parameter in an extended shear lag model, by considering the effects of out of plane shear stresses, the stress fields distribution as well as strain fields and displacement distributions will be obtained for a typical  $[0_m/90_n]_s$  cross ply composite laminate containing a specified matrix cracking density. Then, the stiffness degradation due to existence of matrix cracking in these cross-ply composite laminates will be evaluated and specific damage parameters that affect the stiffness matrix of composite ply will be defined. Furthermore, using the concept of fracture mechanics by applying two different criteria including the maximum stress and strain energy release rate, the matrix cracking initiation and evolution as well as induced delamination propagation will be studied. Finally, a closed form relation will be presented which predicts the evolution of matrix cracking under uniaxial loading conditions in cross-ply composite laminates. At last, the obtained results by the present study will be compared with available semi-analytical and experimental results. The obtained results reveal that the proposed closed form relations by the authors have less difference with experimental results in comparison with the previous semi analytic results.

### 1- مقدمه

خرابی‌هایی نظیر ترک ماتریسی و جدانشدگی بین لایه‌ای ناشی از آن می‌باشند. به منظور مطالعه این مکانیزمهای خرابی، روش‌های مختلفی نظیر روش مایکرومکانیک [1]، روش تجربی و روش المان محدود [2] وجود دارند. در روش مایکرومکانیک که به آن روش برپایه دانسیته ترک نیز گفته می‌شود، با فرض وجود هریک از موده‌های خرابی ذکر شده، یک سلول واحد از چندلایه

امروزه به سبب گسترش کاربرد مواد مرکب در صنایع هوافضا، مطالعه و بررسی رفتار این مواد از اهمیت خاصی برخوردار است. مواد مرکب به سبب خواص مناسب نظیر نسبت استحکام به دانسیته بالا و سفتی به دانسیته زیاد، همواره مورد توجه طراحان قرار گرفته‌اند. با این وجود این مواد مستعد وقوع

Please cite this article using:

A. Farrokhbadi, M. Aghaebrahimi Samani, Determination of a general closed form relation for crack density and induced delamination evolution in cross ply laminates under uniaxial loading condition based on an extended shear lag model, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 361-370, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مدل تاخیر برش اصلاح شده پیش‌بینی کردند. آنها توانستند اثرات تغییر دما و رطوبت را بر خواص مکانیکی چندلایه با استفاده از مدل مایکرومکانیک بدست آورند. کاترلوس و همکاران [11] جزئیاتی از محاسبات مربوط به اثرات ترک ماتریسی بر رفتار چندلایه‌های متعامد و غیربالاتس [0/45] کامپوزیت الیاف شیشه تحت بار کششی را با استفاده از روش تاخیر برش اصلاح شده ارائه کردند. آنها همچنین کاهش سفتی چندلایه‌های حاوی ترک را با نتایج تجربی مقایسه کردند. میچیا و همکاران [12] از روش تاخیر برش اصلاح شده جهت در نظر گیری مفهوم تنش برشی درون لایه‌ای استفاده کردند تا بتوانند اثرات ترک ماتریسی را بر کاهش سفتی چندلایه‌های متقارن هیبریدی گلاس اپوکسی و کربن اپوکسی محاسبه کنند. به این منظور، یک مدل تاخیر برش اصلاح شده پیشنهاد شد که در آن فرض می‌شد لایه‌های چسبیده بین دو لایه مجاور، علاوه بر تنش‌های برشی درون لایه، تنشهای نرمال را نیز تحمل می‌کنند. توزیع تنش پیشنهاد شده در این مدل، کلیه معادلات تعادل، شرایط مرزی و پیوستگی نیرویی را در صفحات تماس ارضاء می‌کرد. ونگ و همکاران [13] یک مدل تحلیلی جدید براساس مدل ساختاری معادل (ECM<sup>1</sup>) پیشنهاد دادند که از آن به منظور پیش‌بینی کاهش سفتی داخل صفحه و همچنین استحکام نهایی و شبیه‌سازی رفتار تنش- کرنش در چندلایه‌های عمومی متقارن تحت بارگذاری ترکیبی در حضور ترکهای ماتریسی استفاده می‌شد.

یکی از مدل‌های پایه‌ای بسیار مهم برای بیان تاخیر برش روش نورمن [14] بود. در این روش با استفاده از معادلات پایه، تنش در چندلایه‌های متعامد متقارن و با استفاده از فرضیات تحت بارگذاری تک محوره یکنواخت کششی بدست آمد. همچنین در ادامه برای چندلایه‌های متقارن متعامد مطالعات توسط اندرسون [15] ادامه یافت. این مدل با بهره‌گیری از معادلات نورمن به بیان یک معادله ریاضی جهت تخمین رابطه بین تنش با چگالی ترک پرداخت. همچنین وی توانست، با بیان رابطه‌ای بر حسب توابع احتمالی اندرسون [16]، در نهایت برای چندلایه‌های نمونه  $\theta/90_4$  پارامتر تاخیر برشی بصورت رابطه (1) ارائه دهد:

$$\kappa = \frac{(d+b)E_x^c 3G_{12} G_{23}}{\sqrt{dbE_1 E_2 (bG_{23} + dG_{12})}} \quad (1)$$

که در آن  $E_x^c$ ، مدول الاستیسیته چندلایه در جهت بارگذاری،  $E_1$  مدول الاستیسیته جنس کامپوزیت در جهت طولی،  $E_2$  در جهت عرضی،  $G_{12}$  مدول برشی داخل صفحه و  $G_{23}$  مدول برشی خارج صفحه می‌باشد. همچنین  $b$  ضخامت لایه  $0^\circ$  و  $d$  ضخامت لایه  $90^\circ$  می‌باشد.

در این مقاله، با بکارگیری یکی از مدل‌های تاخیر برش موجود و تغییر در پارامتر تاخیر برش، رابطه بسته‌ای برای محاسبه رشد ترک‌های ماتریسی و جدایشگی بین‌لایه‌ای در مواد مرکب متعامد تحت بارگذاری محوری با استفاده از دو دیدگاه برپایه بیشترین تنش و انرژی ارائه خواهد شد و نتایج حاصله با نتایج تجربی و نیمه تحلیلی موجود در پژوهش‌های پیشین مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

## 2- تئوری مدل تاخیر برشی ارتقا یافته

ابتدا فرض می‌شود در یک چندلایه متعامد، ترک ماتریسی با دانسیته مشخص ایجاد شده است. حال لازمست در این چندلایه، میدان‌های تنش ثانویه ناشی از وجود ترک ماتریسی تعیین شوند. بدین منظور از مدل مقید معادل

استخراج می‌شود. در ادامه تلاش می‌شود با فرض وجود مود خرابی، میدان‌های تنش و جابجایی در سلول واحد محاسبه و در نهایت افت سفتی چندلایه تعیین شود. یکی از روش‌های مطرح در دیدگاه مایکرومکانیک، روش تاخیر برش است که قادر است با ایجاد یک رابطه بسته، به محاسبه افت سفتی و تغییرات تنش بر حسب دانسیته ترک پردازد. رایج ترین مدل مورد استفاده در زمینه مطالعات تاخیر برش، آنالیزهای یک بعدی هستند که به علت سادگی مورد استفاده قرار می‌گیرند. این روشها در بدو توسعه، تنها ترک ماتریسی را به عنوان مود خرابی، مورد مطالعه قرار می‌داد. در این تحلیلها، تنشها و تغییر مکانهای در جهت عرضی برابر صفر در نظر گرفته می‌شد. با وجود این، این روش منجر به نتایج نادرستی از قبیل تنشهای برشی غیر صفر در سطح ترک می‌شود. در ادامه تحقیقاتی برای اصلاح خطای روش یک بعدی صورت گرفت و ترکهای عرضی ماتریسی در چندلایه‌های متعامد CFRP توسط های-اسمیت و رایف اشنایدرو اسمیت [3] مورد مطالعه قرار گرفت. رایف اشنایدرو [4] ترکهای درون‌لایه‌ای را به شکل تکرار شونده در یک‌لایه در نظر گرفت. وی یک لایه انتقال تنش برشی با ضخامت و سفتی نامعلوم بین لایه‌ها تعریف کرد و فرض کرد این لایه هنگامیکه تحت تنش کششی قرار گرفته، برش خالص را تحمل می‌کند. در ادامه رایف اشنایدرو و تالگ [5] روش ساده "تاخیر برش" را بگونه‌ای بسط دادند که کاهش سفتی ناشی از رشد ترک را محاسبه می‌کرد و بر اساس فرضیات زیر استوار بود:

الف) تنش نرمال در جهت بار محوری در راستای ضخامت لایه ثابت می‌ماند.

ب) تنش‌های برشی در داخل یک لایه فرضی با ضخامت نامعلوم در بین لایه‌ها در نظر گرفته می‌شود.

ج) ترکها به اندازه کافی دور از هم هستند به نحوی که تداخل متقابل بین آنها قابل صرف نظر میباشد.

با این وجود، این روش منجر به جوابهای خیلی دقیقی نگشت. در حالت خاص ضخامت لایه فرضی تا حدی بصورت اختیاری در نظر گرفته می‌شد و تنشهای نرمال عرضی قابل تخمین و بدست آوردن نبودند. این درحالی بود که این تنشها نقش مهمی در شکست لایه دارند. همچنین فرض عدم تداخل ترکهای عرضی با داده‌های تجربی همخوانی نداشتند. از طرفی پارامتر انتقال برشی ناشناخته بود و می‌بایست با استفاده از نتایج تجربی تعیین می‌گردید.

فلاکس [6]، از معیار شکست نرخ رهایی انرژی کرنشی در مدل تاخیر برش تقریبی دوبعدی جهت پیش‌بینی خرابی کششی در ماتریس استفاده کرد. روش دوبعدی "تاخیر برش" اصلاح شده برای آنالیز چندلایه‌های متعامد در حضور مکانیزمهای خرابی ترک عرضی و لایه‌لایه‌شدگی توسط ژنگ و همکاران [7] ادامه یافت. در این روش به منظور ساده سازی از تغییرات تغییر مکان عرضی نسبت به مختصات طولی صرف نظر شد. همچنین تغییر مکانهای داخل صفحه‌ای عرضی بصورت خطی و یا به فرم مرتبه دوم در نظر گرفته شد. ژنگ فرض کرد که تنشهای برشی در چندلایه متعامد متقارن بصورت خطی در راستای ضخامت لایه  $90^\circ$  درجه و عکس ضخامت لایه صفر درجه تغییر کرده و در دیگر لایه‌ها صفر می‌باشد. در ادامه برتولات [8] فرض کرد که وابستگی تغییر مکانهای عرضی به مختصات عرضی در لایه  $90^\circ$  درجه از مرتبه دوم و در لایه صفر درجه، خطی باشد. یاکوزکی و آکوی [9] چندلایه‌های حاوی ترکهای ماتریسی مورب را با کمک روش تاخیر برش دوبعدی مورد بررسی قرار دادند. آدایا و همکاران [10] کاهش سفتی چندلایه‌های زاویه‌دار متقارن حاوی ترک را در لایه‌های وسط با استفاده از

1- Equivalent constraint model

شکل 2 ایجاد ترک عرضی و جدشدگی بین لایه ای

$$\frac{d}{dX_2} \bar{\sigma}_{j2}^{(90^\circ)} + \frac{\tau_j}{h_2} = 0, \quad j=1,2 \quad (4)$$

که در رابطه فوق، مقدار میانگین تنش صفحه‌ای زیر لایه نود درجه است. تنش برشی  $\tau_j$ ، ماکزیمم تنش برشی اینترفیس در صفحه  $X_2OX_3$  است که از رابطه (5) بدست می‌آید [18].

$$\tau_j = k_{90^\circ} (u_2 - u_1) \quad (5)$$

به منظور حل معادلات تعادل و تعیین توزیع تنش‌های چندلایه حاوی خرابی در روش تاخیربرش، لازم است پارامتر تاخیربرش (رابطه 5) تعیین شود. سوتیس این پارامتر را بصورت رابطه (6) تعریف کرد [19].

$$k_{90^\circ} = \frac{3\hat{G}_{23}^{(0^\circ)} \hat{G}_{23}^{(90^\circ)}}{h_2 \hat{G}_{23}^{(0^\circ)} + (1 + (1 - \eta) / 2) \eta h_1 \hat{G}_{23}^{(90^\circ)}}, \quad \eta = \frac{h_2}{h_1} \quad (6)$$

که  $\hat{G}_{23}^{(0^\circ)}$  مدول برشی خارج صفحه‌ای لایه  $0^\circ$  و  $\hat{G}_{23}^{(90^\circ)}$  مدول برشی خارج صفحه‌ای لایه  $90^\circ$  است.

با اعمال پارامتر تاخیربرش و استفاده از معادلات تعادل، می‌توان میدان‌های تنش محوری و برشی را در چندلایه بصورت رابطه (7- الف، ب و ج) بدست آورد [17-19].

$$\bar{\sigma}_{22} = 0 \quad (7-الف)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{L_1} \left(1 - \frac{\cosh(\sqrt{L_1} X_2)}{\cosh(\sqrt{L_1} s)}\right) (\Omega_{11} \bar{\sigma}_{11} + \Omega_{22} \bar{\sigma}_{22}) \quad (7-ب)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = \frac{1}{L_1} \left(1 - \frac{\cosh(\sqrt{L_1} X_2)}{\cosh(\sqrt{L_1} s)}\right) (\Omega_{12} \bar{\sigma}_{12}) \quad (7-ج)$$

که  $L_2, L_1, \Omega_{12}, \Omega_{22}, \Omega_{11}$  ثابت‌های مربوط به ماتریس نرمی  $\hat{S}_{ij}^{(0^\circ, 90^\circ)}$  در چندلایه‌ای،  $\chi = \frac{h_1}{h_2}$  نسبت ضخامت و  $k_{90^\circ}$  ضریب تاخیربرشی می‌باشند. نحوه محاسبه ثابت در پیوست مقاله ذکر شده است.

## 2-2- محاسبه افت سختی در لایه حاوی ترک

در روش تاخیربرشی ارتقایافته، با فرض ایجاد ترک ماتریسی یا جدشدگی بین لایه‌ای در لایه  $90^\circ$ ، افت سختی ناشی از هر مکانیزم خرابی محاسبه می‌شود و لذا می‌توان معادلات ساختاری برای هر لایه حاوی خرابی را بشکل رابطه (8) نوشت [17].

$$\{\bar{\sigma}^{(90^\circ)}\} = [Q]^{(90^\circ)} \{\bar{\epsilon}^{(90^\circ)}\} \quad (8)$$

که  $[Q]^{(90^\circ)}$  ماتریس سختی کاهش یافته تک لایه حاوی خرابی است و از رابطه (9) بدست می‌آید [17].

$$[Q]^{(90^\circ)} = [\hat{Q}]^{(90^\circ)} - [R]^{(90^\circ)} \quad (9)$$

همچنین، ماتریس افت سختی  $[R]$  بصورت رابطه (10) تعریف می‌شود [17].

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{(Q_{12}^{(0^\circ)})^2}{Q_{22}^{(90^\circ)}} \varphi_{22} & Q_{12}^{(0^\circ)} \varphi_{22} & 0 \\ Q_{12}^{(0^\circ)} \varphi_{22} & Q_{22}^{(0^\circ)} \varphi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^{(0^\circ)} \varphi_{66} \end{bmatrix} \quad (10)$$

سوتیس [18,17]، که در آن تمامی لایه‌های حاوی خرابی با دو لایه همگن (دو مدل مقید) جایگزین می‌گردند، استفاده می‌شود. براین اساس لایه‌های صفر درجه حاوی خرابی بدون تغییر باقی مانده و لایه‌های  $90^\circ$  حاوی خرابی با لایه‌های هموزن با سختی کاهش یافته جایگزین می‌گردند.

در ادامه، تحلیل تنش مدلهای مقید در نظر گرفته شده صورت می‌پذیرد. شکل 1 تنش چندمحوره صفحه‌ای اعمال شده به یک چندلایه متعام  $[0_m/90_n]_s$  را نشان می‌دهد. در این مدل  $\bar{\sigma}_{22}$  و  $\bar{\sigma}_{11}$  تنشهای ریموت محوری و  $\bar{\sigma}_{12}$  تنش ریموت برشی اعمالی به چندلایه می‌باشد. در روش ارتقا یافته تاخیربرشی، لایه‌ای که ترک در آن شروع و رشد می‌کند، لایه  $90^\circ$  است و لایه مقید همان لایه صفر درجه. شکل 2 نحوه ایجاد ترک ماتریسی و جدشدگی بین لایه‌ای نشان داده شده است.

## 2-1- معادلات تعادل در هر زیر لایه

رابطه بین بار کل ریموت اعمال شده  $\bar{\sigma}_{j2}$  با تنشهای صفحه‌ای زیر لایه  $90^\circ$  دارای ضخامت  $h_2$  یعنی  $\bar{\sigma}_{j2}^{(90^\circ)}$  و زیر لایه  $0^\circ$  دارای ضخامت  $h_1$  یعنی  $\bar{\sigma}_{j2}^{(0^\circ)}$  طبق رابطه (2) می‌باشد [18].

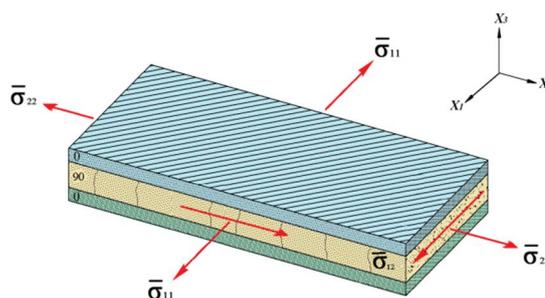
$$\chi \bar{\sigma}_{j2}^{(0^\circ)} + \bar{\sigma}_{j2}^{(90^\circ)} = (1 + \chi) \bar{\sigma}_{j2}, \quad j=1,2, \quad \chi = \frac{h_1}{h_2} \quad (2)$$

در روش تاخیربرشی ارتقایافته هر لایه بصورت ارتوتروپ همگن در نظر گرفته می‌شود، بنابراین تنشهای داخل صفحه‌ای هر زیر لایه را می‌توان بشکل معادلات ماتریسی (3) نوشت [19].

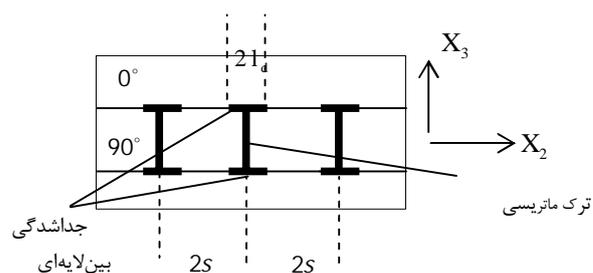
$$\left\{ \bar{\sigma} \right\}^{(0^\circ, 90^\circ)} = [\hat{Q}]^{(0^\circ, 90^\circ)} \left\{ \bar{\epsilon} \right\}^{(0^\circ, 90^\circ)} \quad (3)$$

که  $[\hat{Q}]^{(0^\circ, 90^\circ)}$  به ترتیب ماتریس سختی صفحه‌ای در لایه‌های  $0^\circ$  و  $90^\circ$  می‌باشند. با در نظر گرفتن لایه مقید  $0^\circ$  و لایه حاوی ترک  $90^\circ$ ، کاهش خواص الاستیسیته در ناحیه تحت آسیب محاسبه می‌شود.

معادلات تعادل در صفحه تعادل  $X_2OX_3$  در ناحیه اتصال کامل بین لایه‌ها، طبق رابطه (4) عبارتند از [19].



شکل 1 اعمال تنش متوسط چند محوره در یک چند لایه مستعد ترک ماتریسی



شکل 2 جدشدگی بین لایه‌ای

بسط تیلور در معادله تنش مربوط به معیار بیشترین تنش و استفاده از فرضیات نحوه بارگذاری در لایه حاوی خرابی با بسط ریاضی در معادله تنش مربوط به معیار بیشترین کرنش، این روش را ارتقا داده و معادلات مربوط به آن بیان می‌شود. از آنجاییکه دو معیار مهم برای رشد خرابی شامل معیار تنش ماکزیمم و معیار انرژی کرنشی است. در این بخش سعی می‌شود براساس این دو معیار، رشد خرابی در چندلایه‌های متعامد براساس بار اعمالی به چندلایه مدل ارتقا یافته تاخیربرشی و با کمک تحقیقات قبلی انجام شده در روش تاخیربرشی، با فرضهای جدید اعمال شده در این مدل، دو معیار بیشترین تنش و بیشترین کرنش این مدل را ارتقاء داد.

### 3-1- مدل ارائه شده برای رشد ترک ماتریسی براساس معیار تنش

در این بخش سعی می‌شود با ترکیب مطالعات اندرسون و مدل مقید سوتیس رابطه‌های برای تنش در مدل تاخیربرشی ارتقا یافته بدست آورد. مدل اندرسون قادر است تنها با بهره گیری از میدان تنش تک جهته و اعمال بسط تیلور در این میدان تنش، به بیان رابطه بسته میدان تنش برحسب چگالی ترک با استفاده از دو معیار گفته شده بپردازد، طبق معادله (6-الف) در مقید سوتیس میدان تنش صفحه‌های موجود در چندلایه‌های حاوی ترک عرضی قابل محاسبه است. در ادامه با استفاده از بسط تیلور به بازنویسی معادله مذکور با استفاده از روش ارتقا یافته پرداخته می‌شود. برای نوشتن میدان تنش لازم است مبدا ترک تعیین شود.

از آنجایی که در وسط دو ترک ماتریسی، تنش عرضی ماکزیمم می‌باشد، هرگاه این تنش به مقدار بحرانی  $\sigma_{init}$  برسد می‌توان گفت ترک ماتریسی اتفاق می‌افتد. با جایگذاری مقدار معیار  $\sigma_{init}$  در  $x_3 = 0$  در رابطه (7-ب) بجای تنش عرضی لایه  $90^\circ$ ، رابطه تنش بر حسب دانسیته ترک ماتریسی بدست خواهد آمد. بمنظور ساده‌سازی از فرض مثلثاتی  $\cosh x = 1 + 2\sinh^2 \frac{x}{2}$  در روابط استفاده می‌شود. بنابراین با جایگذاری بسط فوق، معادله (7-ب) به شکل رابطه (15) نوشته می‌شود.

$$\sigma_{init} = \frac{\Omega_{11}\bar{\sigma}_{11} + \Omega_{22}\bar{\sigma}_{22}}{L_1} \cdot \left( \frac{2\sinh^2[\sqrt{L_1} \frac{s}{4}]}{1 + 2\sinh^2[\sqrt{L_1} \frac{s}{4}]} \right) \quad (15)$$

بدلیل کم بودن فاصله بین دو ترک و کوچک بودن کمان تابع سینوس هیپربولیک، می‌توان فرض  $\sinh^2 \sqrt{L_1} (s/4) \approx (\sqrt{L_1} (s/4))^2$  را اعمال نمود و سپس با جایگذاری فرض فوق در معادله (15) پس از ساده‌سازی و جایگذاری ثوابت موجود در پیوست و استخراج ضریب تاخیربرشی  $k_{90^\circ}$  معادله را بصورت رابطه (16) بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} \frac{C_1\bar{\sigma}_{11} + C_2\bar{\sigma}_{22}}{\sigma_{init}} - C_3 &= \frac{8h_1}{k_2s^2} \\ C_1 &= (1 + \chi)(S_{12}^{(0^\circ)} + a_1S_{11}^{(0^\circ)}) \\ C_2 &= (1 + \chi)(S_{22}^{(0^\circ)} + a_1S_{12}^{(0^\circ)}) \\ C_3 &= S_{22}^{(0^\circ)} + a_1S_{12}^{(0^\circ)} + \chi(S_{22}^{(90^\circ)} + a_1S_{12}^{(90^\circ)}) \end{aligned} \quad (16)$$

با توجه به اینکه  $\rho = \frac{1}{s}$  (شکل 2) و با در نظر گیری ثوابت  $C_1$ ،  $C_2$  و  $C_3$  که با فاکتورگیری از عبارت  $\frac{k_{90^\circ}}{h_1}$  از ثوابت  $\Omega_{11}$ ،  $\Omega_{22}$  و  $L_1$  بدست آورده شده

هرگاه خرابی موجود در چندلایه‌های از نوع ترک ماتریسی باشد، پارامترهای خرابی  $\phi_{22}$  و  $\phi_{66}$  از روابط (11-الف و ب) حاصل می‌شوند [17,18].

$$\phi_{22} = 1 - \frac{1 - \frac{D^{mc}}{\lambda_1} \tanh\left(\frac{\lambda_1}{D^{mc}}\right)}{1 + \alpha_1 \frac{D^{mc}}{\lambda_1} \tanh\left(\frac{\lambda_1}{D^{mc}}\right)} \quad (11-الف)$$

$$\phi_{66} = 1 - \frac{1 - \frac{D^{mc}}{\lambda_2} \tanh\left(\frac{\lambda_2}{D^{mc}}\right)}{1 + \alpha_2 \frac{D^{mc}}{\lambda_2} \tanh\left(\frac{\lambda_2}{D^{mc}}\right)} \quad (11-ب)$$

لازم بذکر است، هرگاه با اعمال تنش علاوه بر ترک ماتریسی، جدادگی بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی نیز در چندلایه ایجاد شود، تابع تاثیر خرابی در چندلایه بشکل رابطه (12-الف) و (12-ب) اصلاح می‌شود [17].

$$\phi_{22} = 1 - \frac{1 - \frac{D^{mc}}{\lambda_1(1-D^{ld})} \tanh\left[\frac{\lambda_1(1-D^{ld})}{D^{mc}}\right]}{\frac{1 + \lambda_1 D^{ld}}{(1-D^{ld})} + \alpha_1 \frac{D^{mc}}{\lambda_1(1-D^{ld})} \tanh\left[\frac{\lambda_1(1-D^{ld})}{D^{mc}}\right]} \quad (12-الف)$$

$$\phi_{66} = 1 - \frac{1 - \frac{D^{mc}}{\lambda_2(1-D^{ld})} \tanh\left[\frac{\lambda_2(1-D^{ld})}{D^{mc}}\right]}{\frac{1 + \lambda_2 D^{ld}}{(1-D^{ld})} + \alpha_2 \frac{D^{mc}}{\lambda_2(1-D^{ld})} \tanh\left[\frac{\lambda_2(1-D^{ld})}{D^{mc}}\right]} \quad (12-ب)$$

که  $D^{ld} = l/s$  چگالی ترک بی بعد جدادگی بین لایه‌های می باشد.

### 3-2- تعیین افت سختی با روش تاخیربرشی ارتقا یافته

با مشخص شدن ماتریس سختی کاهش یافته حاوی خرابی و استفاده از ماتریس ABD، می‌توان افت خواص الاستیسته کششی و برشی چندلایه را تعیین کرد (رابطه (13)).

$$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} = \int_{-H}^H Q_{ij}^{(90^\circ)}(1, X_3, X_3^2) dX_3 \quad (13)$$

محاسبه افت سختی در یک چندلایه متقارن با تعداد لایه های  $N$  مستلزم محاسبه ماتریس A است. پس از محاسبه ماتریس فوق، افت سختی چندلایه در جهت‌های  $X_1$  و  $X_2$  بصورت رابطه (14) محاسبه می‌شود [17].

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{bmatrix} A_{X_1X_1} & A_{X_1X_2} & A_{X_1X_3} \\ A_{X_2X_1} & A_{X_2X_2} & A_{X_2X_3} \\ A_{X_3X_1} & A_{X_3X_2} & A_{X_3X_3} \end{bmatrix} = \sum_k [Q^{(k)}] h_k, \\ E_x &= \frac{1}{ha_{xx}}, E_y = \frac{1}{ha_{yy}} \end{aligned} \quad (14)$$

که در معادلات فوق برای محاسبه  $a_{xx}, a_{yy}$  بایستی  $[a] = [A]^{-1}$  باشد.

### 3-3- معیارهای رشد خرابی مورد استفاده در روش تاخیربرشی ارتقا یافته

در این بخش با بهره گیری از مطالعات اندرسون که با استفاده از بسط تیلور در معادلات تنش در معیار بیشترین تنش و بیشترین کرنش انجام شده بود [17]، مطالعات جدیدی را در روش تاخیربرشی مدل مقید سوتیس با کمک

با جایگذاری رابطه (21) در (26) ارتباط تنش با کرنش طبق معادله (27) بدست می‌آید.

$$\sigma_x \cdot t \cdot A_{11}^{-1} = \varepsilon_{xx} \quad (27)$$

با جایگذاری  $\varepsilon_{xx}$  از رابطه (27) در رابطه (19)، رابطه ای حاصل می‌شود که انرژی رها شده ناشی از ترک ماتریسی در چندلایه برحسب توزیع تنش اعمالی به چندلایه با استفاده از مدل تاخیربرش ارتقا یافته بدست می‌آید (رابطه (28)).

$$\begin{aligned} \sigma_x = & (G^{mc})^{-1} (\bar{\varepsilon}_{xx}, D^{mc}) t \cdot A_{11}^{-1} \times \left( \left[ h_2 \left( \frac{\hat{Q}_{12}^{(90)}}{\hat{Q}_{22}^{(90)}} \cos^4 \Phi \right. \right. \right. \\ & + 2\hat{Q}_{12}^{(90)} \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi + \hat{Q}_{22}^{(90)} \sin^4 \Phi \left. \left. \left. \frac{\partial \phi_{22}}{\partial D^{mc}} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 4\hat{Q}_{66}^{(90)} \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi \times \frac{\partial \phi_{66}}{\partial D^{mc}} \right] \sin \Phi \right)^{0.5} \quad (28) \end{aligned}$$

توابع تاثیر خرابی IDEF در رابطه (28) با استفاده از توابع (11- الف و ب) بدست می‌آید.

### 3-3- مدل ارائه شده برای رشد جدانشدگی بین لایه‌های بر اساس معیار انرژی کرنشی

در بخش 2-2 به نحوه در نظر گیری اثرات خرابی، اعم از ترک ماتریسی و جدانشدگی بین لایه‌های، با تعریف یک ماتریس سختی کاهش یابنده بر طبق معادله (9)، پرداخته و در ادامه توابع تاثیر خرابی برای هر یک از خرابی‌ها آورده شد. در حالت ترک ماتریسی ماتریس تاثیر خرابی تابعی از  $D^{mc}$  و در حالت جدانشدگی بین لایه‌های تابعی از  $D^{mc}, D^{ld}$  می‌باشد. لذا با داشتن ماتریس سختی خرابی می‌توان در یک چندلایه‌ای تحت کرنش محوری، انرژی کرنشی رها شده برای ایجاد جدانشدگی بین لایه‌های حاصل از کرنش محوری را بصورت رابطه (29) در نظر گرفت.

$$G^{ld}(\varepsilon, D^{mc}, D^{ld}) = \frac{h}{2} [\bar{\varepsilon}_{xx}]^T \frac{\partial [\bar{Q}]}{\partial D^{ld}} [\bar{\varepsilon}_{xx}] \sin \Phi \quad (29)$$

با جایگذاری ماتریس سختی کاهش یافته در رابطه فوق، در نهایت انرژی کرنشی رها شده ناشی از ایجاد جدانشدگی بین لایه‌های در یک دانسیته مشخص ترک ماتریسی مطابق رابطه (30) می‌باشد.

$$\begin{aligned} G^{ld}(\bar{\varepsilon}_{xx}, D^{mc}, D^{ld}) = & \frac{h}{2} (\bar{\varepsilon}_{xx})^2 \times \left[ \left( \frac{\hat{Q}_{12}^{(90)}}{\hat{Q}_{22}^{(90)}} \cos^4 \Phi + 2\hat{Q}_{12}^{(90)} \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi \right. \right. \\ & \left. \left. + \hat{Q}_{22}^{(90)} \sin^4 \Phi \right) \times \frac{\partial \phi_{22}}{\partial D^{ld}} + 4\hat{Q}_{66}^{(90)} \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi \frac{\partial \phi_{66}}{\partial D^{ld}} \right] \sin \Phi \quad (30) \end{aligned}$$

بدیهی است که رشد جدانشدگی بین لایه‌های زمانی رخ می‌دهد که برابر با چقرمگی شکست جنس چندلایه شود. با برابر قراردادن رابطه فوق با چقرمگی شکست و جایگذاری کرنش  $\varepsilon_{xx}$  برحسب تنش اعمالی از رابطه (27)، می‌توان تنش لازم برای ایجاد جدانشدگی با یک طول مشخص در یک دانسیته ترک معلوم را بصورت رابطه (31) تعیین کرد.

$$\begin{aligned} \sigma_x = & (G^{ld})^{-1} (\bar{\varepsilon}_{xx}, D^{ld}) t \cdot A_{11}^{-1} \left( \left[ h_2 \left( \frac{\hat{Q}_{12}^{(90)}}{\hat{Q}_{22}^{(90)}} \cos^4 \Phi \right. \right. \right. \\ & + 2\hat{Q}_{12}^{(90)} \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi + \hat{Q}_{22}^{(90)} \sin^4 \Phi \left. \left. \left. \frac{\partial \phi_{22}}{\partial D^{ld}} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 4\hat{Q}_{66}^{(90)} \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi \frac{\partial \phi_{66}}{\partial D^{ld}} \right] \sin \Phi \right)^{0.5} \quad (31) \end{aligned}$$

که در این رابطه توابع تاثیر خرابی حاصل از جدانشدگی بین لایه‌های از معادله (12- الف و ب) بدست می‌آید.

است، رشد دانسیته ترک ماتریسی براساس معیار تنش ماکزیمم براساس مدل ارتقایافته تاخیربرشی بصورت رابطه (17) بیان می‌شود.

$$\frac{1}{8h_1} \left( \frac{C_1 \bar{\sigma}_{11} + C_2 \bar{\sigma}_{22}}{\sigma_{init}} - C_3 \right) = \left( \frac{\rho}{\sqrt{k_{90}}} \right)^2 \quad (17)$$

2-3- مدل ارائه شده برای رشد ترک ماتریسی بر حسب انرژی کرنشی  
هرگاه چندلایه تحت کرنش محوری باشد، انرژی کرنشی در حضور ترک ماتریسی طبق رابطه (18) عبارت است از [19].

$$G^{mc}(\bar{\varepsilon}_{xx}, D^{mc}) = h_2 [\bar{\varepsilon}_{xx}]^T \frac{\partial [\bar{Q}]}{\partial D^{mc}} [\bar{\varepsilon}_{xx}] \sin \Phi \quad (18)$$

با تعیین  $[\bar{Q}]$ ، انرژی کرنشی رها شده ناشی از ترک ماتریسی طبق رابطه (19) نتیجه می‌شود [19].

$$\begin{aligned} G^{mc}(\bar{\varepsilon}_{xx}, D^{mc}) = & h_2 (\bar{\varepsilon}_{xx})^2 \times \\ & \left[ \left( \frac{\hat{Q}_{12}^{(90)}}{\hat{Q}_{22}^{(90)}} \cos^4 \Phi + 2\hat{Q}_{12}^{(90)} \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi \right. \right. \\ & \left. \left. + \hat{Q}_{22}^{(90)} \sin^4 \Phi \right) \times \frac{\partial \phi_{22}}{\partial D^{mc}} \right. \\ & \left. + 4\hat{Q}_{66}^{(90)} \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi \frac{\partial \phi_{66}}{\partial D^{mc}} \right] \sin \Phi \quad (19) \end{aligned}$$

در مدل ارتقایافته تاخیر برشی در مطالعه حاضر با توجه به اینکه فرض چندلایه‌ای تحت تنش تک محوره کششی در نظر گرفته شده و مقدار کرنش اعمالی نیز در چندلایه‌ای دارای ترک ماتریسی، ثابت است. رابطه بین برآیند نیروهای اعمالی با تنش طبق معادله (20) بدست می‌آید.

$$N_x = \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_x dx \quad (20)$$

که  $t$  ضخامت تک لایه است. اگر فرض شود که بار اعمالی به چندلایه ثابت بماند، می‌توان نوشت (رابطه (21)).

$$N_x = \sigma_x \times t \quad (21)$$

از طرفی ارتباط بین برآیند نیرو با کرنش طبق معادله (22) می‌باشد.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_k \\ \int \varepsilon_x \\ \int \varepsilon_y \\ \int \varepsilon_z \end{Bmatrix} dz \quad (22)$$

از آنجایی که  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  کرنشهای سطح میانی چندلایه است، این مقادیر نمی‌تواند تابعی از  $z$  باشد، از اینرو روابط فوق بصورت (23) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad (23)$$

که سختی محوری  $A_{ij}$  از رابطه (14) قابل بیان است.

فرض شود چندلایه تحت بارگذاری محوری در جهت  $x$  قرار گرفته باشد (رابطه (24)).

$$N_y = 0, N_z = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0 \quad (24)$$

بنابراین معادله (21) با فرضیات (24)، به رابطه (25) تبدیل می‌شود.

$$N_x = A_{11} \cdot \varepsilon_{xx} \quad (25)$$

بنابراین کرنش محوری حاصل آن از رابطه (26) به دست می‌آید.

$$\varepsilon_{xx} = N_x \cdot A_{11}^{-1} \quad (26)$$

## 3-4- رشد جدایشگی بین لایه‌ای ناشی از ترک ماتریسی

در این بخش، تلاش می‌شود با استفاده از معیار انرژی، وضعیت رشد جدایشگی بین لایه‌ای از نوک ترک ماتریسی مورد مطالعه قرار گیرد. بدین منظور، در یک چگالی ترک معین، محدوده طول جدایشگی بین لایه‌ای را بدست آورده و تنش‌های لازم برای ایجاد آن از معیار انرژی کرنشی محاسبه می‌شود. هرگاه فاصله بین دو ترک،  $2s$  فرض شود، چگالی ترک  $\rho = \frac{1}{2s}$  خواهد بود. از اینرو محدوده طول جدایشگی بین لایه‌ای بین  $0 < l_d \leq s$  خواهد بود. بنابراین چگالی ترک معادل حاصل از جدایشگی بین لایه‌ای با طول  $l_d$  از رابطه (32) بدست می‌آید.

$$\rho_{eq} = \frac{1}{2(s-l_d)} \quad (32)$$

حال به ازای این چگالی ترک معادل، تنش اعمالی برای ایجاد آن یادداشت و با تنش حاصل از چگالی ترک اولیه مقایسه می‌شود. هرگاه تنش محاسبه شده بیش تر از تنش اولیه باشد، جدایشگی بین لایه‌ای اتفاق می‌افتد و بالعکس.

## 4- بحث و نتایج

در این قسمت ابتدا صحت روابط استخراج شده برای افت سفتی چندلایه‌های متعامد بررسی و با نتایج تجربی موجود مقایسه می‌شود. در ادامه با استفاده از دو معیار ذکر شده، رشد ترک ماتریسی بر حسب بارگذاری محوری اعمالی بر چندلایه‌های مختلف، محاسبه و با نتایج تجربی و تحلیلی موجود مقایسه می‌گردد. در نهایت در بخش جمع‌بندی و نتیجه‌گیری، علت استفاده از مدل تاخیربرشی بشکل ارتقایافته بطور مفصل توضیح داده شده و نقاط قوت و ضعف آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

## 4-1- نتایج حاصل از افت سفتی

برای چندلایه‌های متعامد  $[0/90]_1$ ،  $[0/90]_2$ ، با وارد کردن خواص چند لایه برای جنس کامپوزیت الیاف شیشه طبق جدول 1، با تغییر فاصله دو ترک متوالی  $s$ ، چگالی ترک و چگالی ترک بی بعد  $D_{III}$  در لایه عرضی افزایش می‌یابد. با تغییر این پارامترها، تابع تاثیر خرابی نیز تغییر کرده و در نهایت ماتریس سفتی تغییر می‌کند.

در نهایت با بدست آمدن ماتریس سفتی در حالت قبل و بعد از ایجاد ترک، مدول الاستیسیته متناظر با چگالی ترک مفروض بدست می‌آید. این نتایج در شکل 3 برای چندلایه‌های فوق آورده شده است که با مشاهده آنها می‌توان پی برد تطابق قابل ملاحظه ای بین نتایج ارائه شده توسط مدل تاخیربرش ارتقایافته و داده‌های تجربی وجود دارد. براساس نتایج حاصله، اختلاف مقادیر افت سختی در هر دو لایه‌چینی مذکور برای تمامی دانسیته‌های ترک کمتر از 3 درصد می‌باشد.

## 4-2- نتایج رشد چگالی ترک عرضی بر حسب تنش

## 4-2-1- معیار تنش

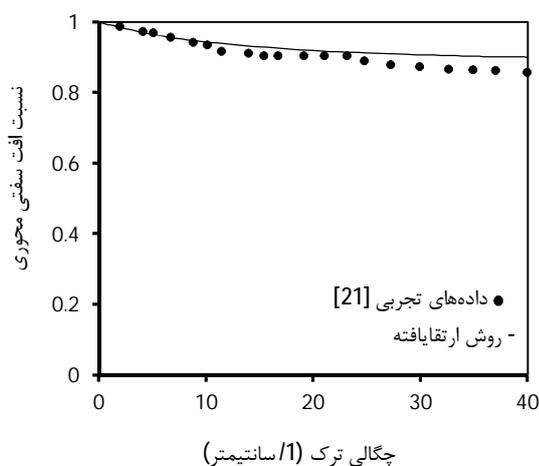
در این حالت سه لایه‌چینی متعامد  $[0_2/90_2]$ ،  $[0_2/90_2]$  و  $[0/90_4]$  جهت مطالعه در نظر گرفته می‌شوند. تنش خرابی  $\sigma_{init}$  برای خواص لایه ارائه شده در جدول 2 برابر 103MPa [15] می‌باشد.

با تغییر چگالی ترک ماتریسی، سفتی تغییر کرده و بدنبال تغییر ماتریس سفتی، مقدار ماتریس ABD چندلایه اصلاح می‌شود.

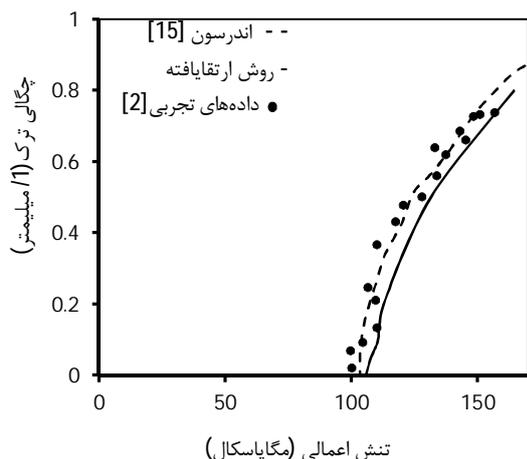
در ادامه با ایجاد این تغییرات، مقدار تنش لازم برای ایجاد دانسیته ترک مفروض براساس معادله (17) محاسبه و ثبت می‌گردد. نتایج حاصله برای لایه‌چینی‌های مذکور، در شکل 4 ارائه شده و با نتایج تجربی و نیمه تحلیلی موجود مقایسه گردیده است [15]. همانگونه که در شکل 4 مشاهده می‌شود، نتایج ارائه شده حاصل از مدل تاخیربرشی ارتقایافته برای چندلایه‌های  $[0_2/90_2]_s$  و  $[0/90_2]_s$  دارای تطابق بهتری با نتایج تجربی نسبت به مدل نیمه تحلیلی اندرسون [15] می‌باشند و در تمامی لایه‌چینی‌ها اختلاف نتایج حاصله با نتایج تجربی کمتر از 3/5 درصد می‌باشد. باید توجه شود که در مطالعه اندرسون [16]، نتایج ارائه شده برای چندلایه  $[0/90_4]_s$  دارای تطابق بهتری نسبت به نتایج تجربی در مقایسه با دو لایه‌چینی  $[0_2/90_2]_s$  و  $[0/90_2]_s$  می‌باشد.

جدول 1 خواص جنس کامپوزیت الیاف شیشه با ضخامت داده شده [19]

مقدار	خواص
41/7	$E_L$ (GPa)
13	$E_T$ (GPa)
3/40	$G_{12}$ (GPa)
4/58	$G_{23}$ (GPa)
0/3	$\nu_{12}$
0/42	$\nu_{23}$
0/203	ضخامت هر لایه (میلیمتر)



(الف)



(ج)

شکل 4 نتایج حاصل از تاخیر برشی ارتقایافته با استفاده از معیار تنش برای

چندلایه‌های (الف)  $[0_2/90_2]_S$  (ب)  $[0/90_2]_S$  (ج)  $[0/90_4]_S$ .

روش تاخیر برشی ارتقایافته، نقص مدل ارائه شده توسط اندرسون را برطرف نموده و معیار قابل قبولی را بر طبق انطباقی که نتایج آن با داده‌های تجربی دارد، ارائه می‌دهد.

#### 2-2-4- معیار انرژی کرنشی

##### 2-2-4-1- چند لایه‌های متعامد حاوی ترک ماتریسی

با در نظر گیری معیار انرژی کرنشی رابطه (28) و در نظر گیری انرژی رهانده بحرانی  $G_c^{mc}$  برابر  $400 \text{ J/m}^2$  برای جنس کامپوزیت الیاف شیشه با خواص ارائه شده در جدول 2، می‌توان رابطه رشد دانسیته ترک ماتریسی را بر حسب تنش اعمالی در چندلایه‌های متعامد مختلف ذکر شده در بخش 1-2-4 بدست آورد. نتایج حاصله در شکل 5 با نتایج تجربی و تحلیلی موجود مقایسه شده است.

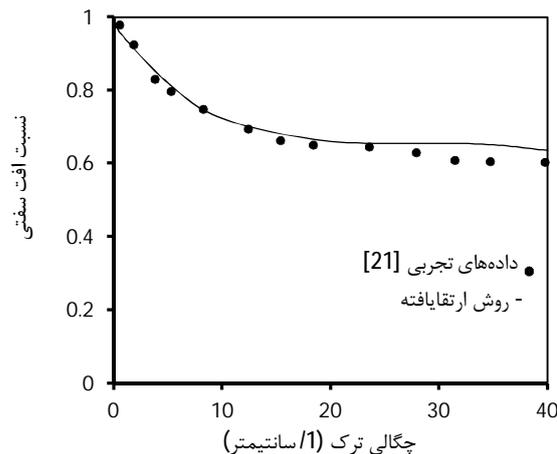
همانطور که مشاهده می‌شود مقادیر تنش حاصل از مدل تاخیر برشی ارتقایافته دارای مقادیر بزرگتری در مقایسه با مطالعات اندرسون می‌باشند [15]. در چندلایه‌های نازک شامل  $[0_2/90_2]_S$  و  $[0/90_2]_S$ ، در روش اندرسون انطباق قابل قبولی در مقایسه با داده‌های تجربی مشاهده می‌شود.

با وجود این، مطالعات انجام شده توسط اندرسون در چندلایه ضخیم نمونه  $[0/90_4]_S$  نشان می‌دهد که معیار انرژی کرنشی، خطای زیادی در مقایسه با داده‌های تجربی دارد (بیش از 15 درصد).

با مراجعه به شکل (5) و مقایسه مدل تاخیر برشی ارتقایافته با روش اندرسون مشاهده می‌شود که مدل ارتقایافته نسبت به مطالعه اندرسون پیش‌بینی دقیقتر و خطای کمتری را در مقایسه با داده‌های تجربی دارا است. این اختلاف برای چندلایه‌های  $[0_2/90_2]_S$  و  $[0/90_2]_S$  کمتر از 2 درصد و برای لایه‌چینی  $[0/90_4]_S$  زیر 8 درصد می‌باشد.

همچنین، با مشاهده همزمان شکل‌های 4 و 5 می‌توان پی برد که معیار تنش در چندلایه‌های ضخیم نسبت به معیار انرژی کرنشی مناسبتر می‌باشد. تعبیر فیزیکی این این پدیده اینست که در چندلایه‌های ضخیم، تنش در هر لایه در حین ایجاد خرابی تقریباً ثابت می‌ماند.

##### 2-2-2-4- چندلایه‌های متعامد حاوی جدایشگی بین لایه‌ای

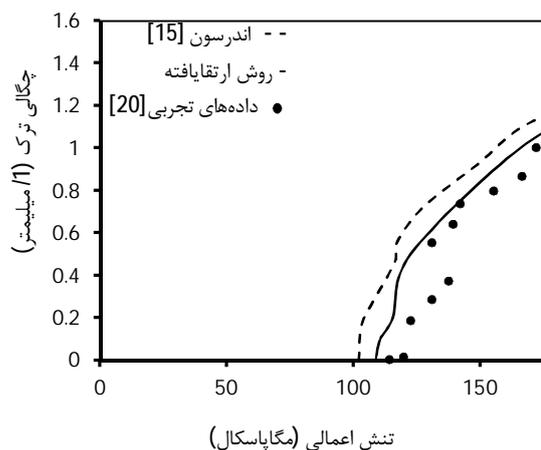


(ب)

شکل 3 نتایج افت سفتی نسبت به چگالی ترک با مدل ارتقایافته تاخیر برشی. (الف)

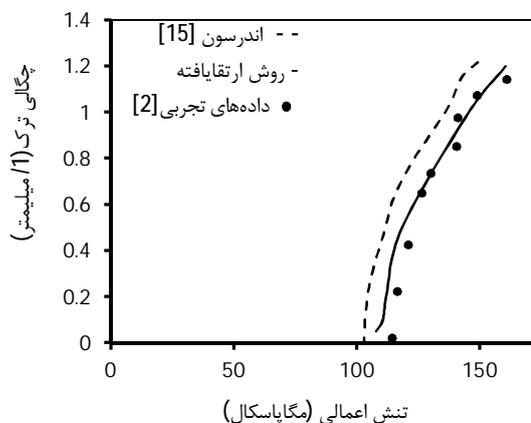
$[0/90]_S$  (ب)  $[0/90_3]_S$ .

این در حالیست که نتایج ارائه شده توسط مطالعه موجود، برای کلیه چندلایه‌ها دارای تطابق قابل قبولی با نتایج تجربی میباشد لذا، استفاده از



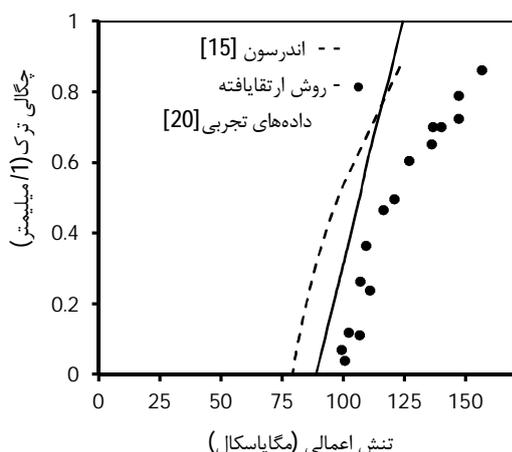
تنش اعمالی (مگاپاسکال)

(الف)



تنش اعمالی (مگاپاسکال)

(ب)



(ج)

شکل 5 نتایج حاصل روش تاخیر برشی ارتقایافته با استفاده از معیار انرژی کرنشی برای چندلایه‌های (الف)  $[0_2 / 90_2]_s$  (ب)  $[0 / 90_2]_s$  (ج)  $[0 / 90_4]_s$ .

در کد موجود، داده‌های ورودی شامل خواص الاستیسیته و ضخامت لایه‌ها وارد شده و ماکزیمم نرخ انرژی کرنشی رها شده  $G_c^{ld}$  برابر  $400 \text{ J/m}^2$  در نظر گرفته می‌شود [15]. حال در یک چگالی ترک معین، محدوده طول جدایشی بین لایه‌های  $l_d$  تعیین می‌شود. به ازای یک طول جدایشی بین لایه‌های دلخواه از این محدوده، چگالی ترک معادل محاسبه می‌شود برای تعیین جدایشی بین لایه‌های حاصل از ترک ماتریسی، تنش معادل از چگالی ترک اولیه با تنش حاصل از چگالی ترک معادل مقایسه می‌شود. میدان تنش حاصل از چگالی ترک اولیه از معادله (28) و میدان تنش حاصل از چگالی ترک معادل با جایگذاری توابع تاثیر خرابی معادله (12-الف و ب) در معادله تنش (31) بدست می‌آید. هرگاه تنش ثانویه بیشتر از تنش اولیه باشد، جدایشی بین لایه‌های اتفاق می‌افتد و بالعکس. این نتایج در شکل 6 آورده شده است.

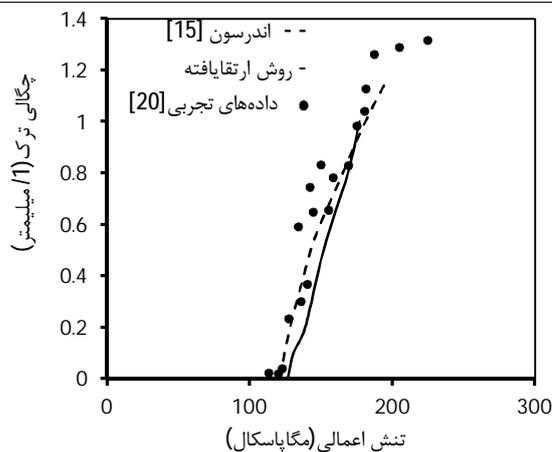
باتوجه به شکل 6-الف در چندلایه‌های متعامد  $[0_2 / 90_2]_s$ ، با در نظر گیری مقدار چگالی ترک  $\rho = 0.8 (1/\text{mm})$ ، مقادیر طول ترک بین لایه‌ای می‌تواند بین  $0 < l_d \leq 0.625 \text{ mm}$  تغییر کند. در طول جدایشی بین لایه‌های  $l_d = 0.5 \text{ mm}$ ، چگالی ترک معادل عبارتست از  $\rho_{eq} = 1 (1/\text{mm})$ . مطابق شکل 6، تنش معادل  $\sigma_1$  در چگالی ترک معادل  $\rho_{eq}$  برابر  $176/9 \text{ MPa}$  می‌باشد.

حال با مراجعه به دیاگرام خط-نقطه در شکل 6-الف، در دانسیته ترک  $\rho = 0.8 (1/\text{mm})$  و طول جدایشی بین لایه‌های  $l_d = 0.5 \text{ mm}$ ، مقدار تنش  $\sigma_2$  برابر  $177/4 \text{ MPa}$  می‌باشد. از آنجائیکه  $\sigma_2 > \sigma_1$  می‌باشد، نتیجه می‌شود که در این دانسیته ترک، جدایشی بین لایه‌های اتفاق می‌افتد. با توجه به شکل 6-ب در چندلایه متعامد  $[0 / 90_2]_s$  با در نظر گیری مقدار چگالی ترک  $\rho = 0.5 (1/\text{mm})$ ، طول جدایشی بین لایه‌های می‌تواند بین  $0 < l_d \leq 1 \text{ mm}$  تغییر کند. در طول ترک بین لایه‌های  $l_d = 0.5 \text{ mm}$ ، چگالی ترک معادل با استفاده از معادله (32)،  $\rho_{eq} = 1 (1/\text{mm})$  می‌باشد که طبق شکل 6-ب در تنش معادل  $\sigma_1$ ، چگالی ترک معادل آن برابر  $163/367 \text{ MPa}$  می‌باشد. حال با مراجعه به دیاگرام نقطه‌چین شکل 6-ب، در  $\rho = 0.5 (1/\text{mm})$  و  $l_d = 0.5 \text{ mm}$ ، مقدار تنش  $\sigma_2$  برابر  $148/3 \text{ MPa}$

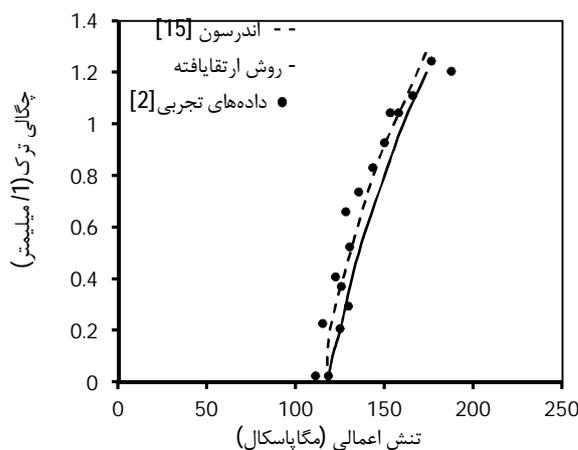
با مطالعه کامل انرژی کرنشی، سرانجام اساسی‌ترین نتایج حاصل از مطالعه مدل تاخیر برشی ارتقایافته ارائه می‌شود. لازم به ذکر است، در کلیه تحقیقات انجام شده قبلی در این زمینه همچون مدل اندرسون، تنها به اثر ایجاد ترک ماتریسی در رفتار چندلایه‌های متعامد اشاره شده است و این مدل قادر به ارائه یک مدل پیشرونده در پیش‌بینی خرابی‌های بعد از ترک ماتریسی نظیر جدایشی بین لایه‌های نیستند. با وجود این، مدل ارتقایافته تاخیر برشی در این مقاله برچگونگی ایجاد جدایشی بین لایه‌های بر اثر وقوع ترک ماتریسی می‌پردازد.

جدول 2 خواص کامپوزیت الیاف شیشه با ضخامت داده شده [15]

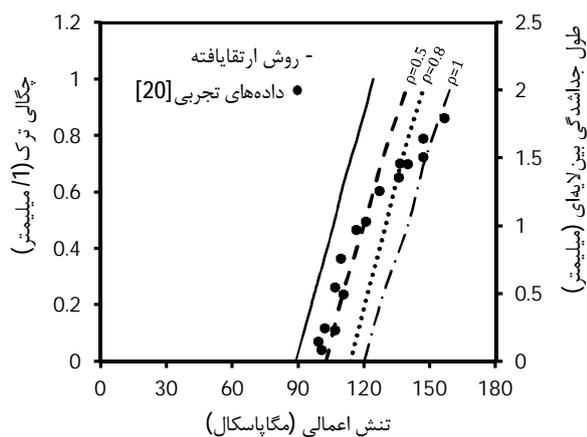
مقدار	خواص
41/7	$E_L$ (GPa)
16	$E_T$ (GPa)
3/40	$G_{12}$ (GPa)
4/58	$G_{23}$ (GPa)
0/3	$\nu_{12}$
0/42	$\nu_{23}$
0/26	ضخامت هر لایه (میلیمتر)



(الف)



(ب)



(ج)

شکل 6 نتایج حاصل برای انرژی کرنشی چندلایه‌های دارای ترک بین‌لایه‌ای (الف)  $[0_2/90_2]_s$ ، (ب)  $[0/90_2]_s$ ، (ج)  $[0/90_4]_s$  نقاط پراکنده داده‌های حاصل از آزمایش. خط توپر نشان دهنده تغییرات رشد چگالی ترک ماتریسی بر حسب تنش اعمالی معیار انرژی کرنشی مدل تاخیر برشی ارتقایافته، خط چین نشان دهنده تغییرات طول جدایشگی بین‌لایه‌ای  $l_d$  در  $\rho=1/5$ ، نقطه چین طول جدایشگی بین‌لایه‌ای در  $\rho=1/8$ ، خط - نقطه چین طول جدایشگی بین‌لایه‌ای در  $\rho=1$ .

و تجربی موجود مقایسه گردید. نتایج نشان داد، روابط ارائه شده دارای دقت قابل قبولی نسبت به نتایج تجربی می‌باشند. لازم به ذکر است، مدل اندرسون قادر است تنها با بهره‌گیری از میدان تنش تک‌جهته و اعمال بسط تیلور در این میدان تنش، به بیان رابطه بسته میدان تنش بر حسب چگالی ترک با استفاده از دو معیار گفته شده بپردازد. در مدل مقید سوتیس نیز هیچ رابطه بسته‌ای برای بیان رشد چگالی ترک بر حسب میدان تنش موجود نمی‌باشد. لذا با اعمال تغییراتی در میدان تنش و استفاده از دو معیار گفته شده، روابط بسته‌ای برای رشد ترک ماتریسی و جدایشگی بین‌لایه‌ای در این مقاله ارائه گردید. همچنین قابلیت‌های مهم مدل ارتقایافته در مقایسه با مدل‌های مشابه که می‌تواند در آینده مد نظر قرار گیرد عبارتند از:

- مطالعه ترک ماتریسی در هر لایه دلخواه علاوه بر لایه 90 درجه.
- گسترش مدل تاخیر برشی در انواع چندلایه‌های زوایه دار.
- ارتقاء مدل با هدف در نظر گیری تنش‌های چندمحوره و بارگذاری

خستگی

## 6- پیوست

ثوابت مدل تاخیر برشی ارتقایافته

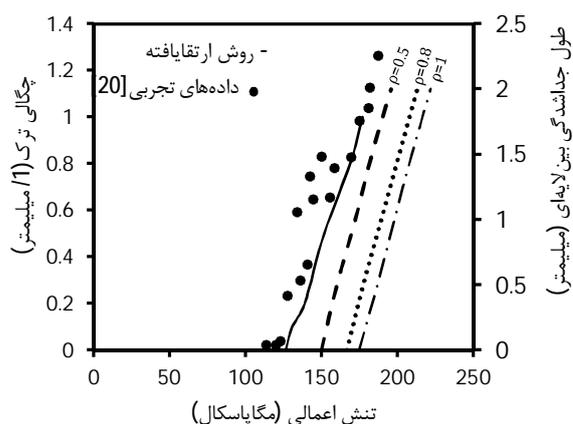
باشد. با توجه به اینکه  $\sigma_2 < \sigma_1$  می‌باشد، نتیجه می‌دهد که در این دانسیته ترک، جدایشگی بین‌لایه‌ای اتفاق نمی‌افتد.

با توجه به شکل 6- ج در چندلایه‌ای متعامد  $[0/90_4]_s$  با در نظر گیری مقدار چگالی ترک  $\rho=0.5(1/mm)$ ، مقادیر طول جدایشگی بین‌لایه‌ای می‌تواند بین  $0 < l_d \leq 1mm$  تغییر کند. در  $l_d = 1mm$ ، چگالی ترک معادل با استفاده از معادله (32)،  $\rho_{eq} = 1(1/mm)$  می‌باشد. طبق شکل (6- ج) تنش معادل  $\sigma_1$  ترک برابر  $118/35$  MPa می‌باشد. حال با استفاده از دیاگرام خط‌چین در شکل (6-ج)، در  $\rho=0.5(1/mm)$  و  $l_d = 0.5mm$  مقدار تنش  $\sigma_2 = 110/25$  MPa می‌باشد. لذا  $\sigma_2 < \sigma_1$  نتیجه می‌دهد که در دانسیته ترک جدایشگی بین‌لایه‌ای رخ نمی‌دهد.

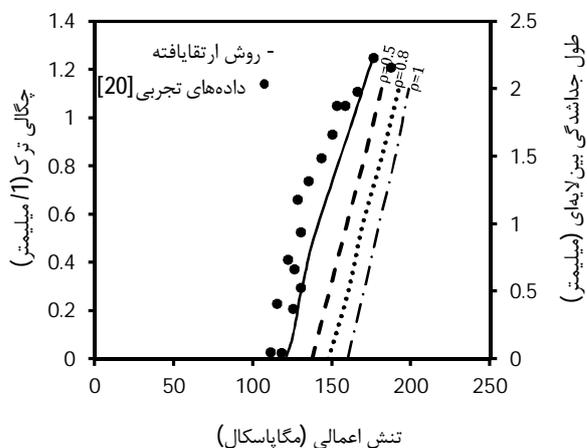
## 5- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله نخست با مطالعه روش‌های ارائه شده پیشین در مدل تاخیر برش، مدل کاملتری ارائه گشت که نه تنها دارای دقت بهتری در پیش بینی رفتار خرابی ناشی از ترک ماتریسی در چندلایه‌های متعامد است، بلکه قادر به پیش‌بینی خرابی‌های همچون جدایشگی بین‌لایه‌ای ناشی از ترک ماتریسی می‌باشد.

در ادامه با بکارگیری دو معیار بیشترین تنش و معیار انرژی کرنشی، یک رابطه عمومی بسته برای در نظر گیری رشد مکانیزم‌های خرابی نظیر ترک ماتریسی و جدایشگی بین‌لایه‌ای ارائه و سرانجام نتایج حاصله با نتایج تحلیلی



(الف)



(ب)

- [14] N. laws, Progressive transverse cracking in composite laminate. *Journal of Composite Materials* Vol. 24, pp. 1225-1242, 1990.
- [15] J. Anderson, E. spanish, O. Rubenis, R. Joe , Estimation of laminate stiffness reduction due to cracking of a transverse ply by employing crack initional and propagation based mastercurve. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 44 , No. 5, pp. 441-450, 2008.
- [16] J. Andersons, R. Joffe, E. Spärniöð, O. Rubenis, Progressive cracking mastercurves of the transverse ply in a laminate. *Polym. Compos.* (inpress). *Polm.compos*, Vol. 30, pp. 1175-1182, 2009.
- [17] M. Kashtalyan, C. Soutis, Damage Mechanisms in Cross-Plyfiber inforced Composite laminate. *Wiley online library, Inc. DOI: 10.1002/97811180978.weco 64*, 2012.
- [18] M. Kashtalian, C. Sutes, Stiffness degradation in cross-ply laminates damaged by transverse cracking and splitting, *composites*, Vol. 31, No. 4, pp. 335-351, 2000.
- [19] ] M. Kashtalyan, C. Soutis, Analysis of composite laminates with intra and interlaminar damage, *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 41, No. 2, pp. 152-173, 2005.
- [20] J. Fan, J. Zhang, In situ damage evolution and micro/macro transition laminate for composite, *composites science and technolony*, Vol. 47, No. 2, pp. 107-118, 1993.
- [21] D. Nuismer, S. C. Tan. Constitutive Relations of a Cracked Composite Lamina, *Journal of Composite Materials*, Vol. 22, No. 4, pp. 306-321, 1998.

$$L_1 = \frac{k}{h_1} (S_{22}^{(0^\circ)} + a_1 S_{12}^{(0^\circ)} + \chi (\hat{S}_{22}^{(90^\circ)} + a_1 \hat{S}_{12}^{(90^\circ)}))$$

$$L_2 = \frac{k}{h_1} (S_{66}^{(0^\circ)} + \chi \hat{S}_{66}^{(0^\circ)})$$

$$\Omega_{11} = \frac{k}{h_1} (1 + \chi) (S_{12}^{(0^\circ)} + a_1 S_{11}^{(0^\circ)})$$

$$\Omega_{22} = \frac{k}{h_1} (1 + \chi) (S_{22}^{(0^\circ)} + a_1 S_{12}^{(0^\circ)})$$

$$\Omega_{12} = \frac{k}{h_1} (1 + \chi) S_{66}^{(0^\circ)}$$

$$k_{0^\circ} = \frac{3\hat{G}_{23}^{(0^\circ)}\hat{G}_{23}^{(90^\circ)}}{h_2\hat{G}_{23}^{(90^\circ)} + (1 + (1 - \eta) / 2)\eta h\hat{G}_{23}^{(0^\circ)}}, \eta = \frac{h_2}{h_1}$$

$$a_1 = \frac{S_{12}^{(0^\circ)} + \chi \hat{S}_{12}^{(90^\circ)}}{S_{11}^{(0^\circ)} + \chi \hat{S}_{11}^{(90^\circ)}}, b_1 = \frac{S_{12}^{(0^\circ)} + \chi S_{12}^{(90^\circ)}}{S_{22}^{(0^\circ)} + \chi S_{22}^{(90^\circ)}}, \chi = \frac{h_1}{h_2}$$

$$\lambda_1 = h_2 \sqrt{L_1}, \quad \lambda_2 = h_2 \sqrt{L_2}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\chi} (\hat{Q}_{22}^{(90^\circ)} (S_{11}^{(0^\circ)} + b S_{12}^{(0^\circ)}) + \hat{Q}_{12}^{(90^\circ)} (S_{12}^{(0^\circ)} + b S_{22}^{(0^\circ)}))$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\chi} \hat{Q}_{66}^{(90^\circ)} S_{66}^{(0^\circ)}$$

## 7- مراجع

- [1] Z. Hashin, Analysis of Cracked Laminates: A Variational Approach, *Mechanics of Materials*, Vol. 4, No. 2, pp. 121-136, 1985.
- [2] J. Andersons, R. Joffe, E. Spärniöð, Statistical model of the transverse ply cracking in cross-ply laminates by strength and fracture toughness based failure criteria, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, pp. 2651-2665, 2008.
- [3] A. L. Highsmith, K. L. Reifsnider, Stiffness-Reduction Mechanisms in Composite Laminates, *ASTMSTP*, Vol. 775, pp. 103, 1982..
- [4] K. L. Reifsnider, Some fundamental aspects of the fatigue and fracture response of composite materials, *Proceedings 14th Annual Meeting of Society of Engineering Science*, Vol. 19, No. 14, pp. 335-375, 1972.
- [5] K. L. Reifsnider, A. Talug, Analysis of fatigue damage in composite laminates. *International Journal of Fatigue*, Vol. 2, No. 1, pp. 3-11, 1980.
- [6] D.L. Flaggs, Prediction of Tensile Matrix Failure in Composite Laminate, *Journal of Composite Materials*, Vol. 19, No. 1, pp.29-40, 1985.
- [7] J. Zhang, J. Fan, C. Soutis, Analysis of multiple matrix cracking in  $[0_m, 90_n]_s$  composite laminates, *Part 1: in-plane stiffness properties*, *Composites*, Vol. 23, No. 5, pp.291-298, 1992.
- [8] J-M. Berthelot, Analysis of the transverse cracking of cross-ply laminates: a generalized approach, *Journal of Composite Materials*, Vol. 31, No. 18, pp. 780-805, 1997.
- [9] T. Yokozeki, T. Aoki, Overall thermoelastic properties of symmetric laminates containing obliquely crossed matrix cracks. *Composites Science and Technology*, Vol. 65, NO. 11-12, pp. 1647-1654, 2005.
- [10] E. A. Adda-bedia, M. Bouazza, A. Tounsi, A. Benzair, M. Maachou, Prediction of stiffness degradation in hygrothermal aged  $[0_m, 90_n]_s$  composite laminates with transverse cracking, *Journal of materials processing technology*, Vol. 199, pp. 199-205, 2008.
- [11] D. T. G. Katerelos, M. Kashtalyan , C. Soutis, C. Galiotis, Matrix cracking in polymeric composites laminates: Modelling and experiments, *Composites Science and Technology*, Vol. 68, No. 13, pp. 2310-2317, 2008.
- [12] N. El . Meichea, A. Tounsi, E.A. Adda-Bedia, A. Megueni, Analysis of the transverse cracking in hybrid cross-ply composite laminates, *Computational Materials Science*, Vol. 46, No. 4, pp. 1102-1108, 2009.
- [13] F. Wang, X. Zeng, J. Zhang, Predictive Approach to Failure of Copposite Lamiminate With Equivalent Constrain model, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 23, No. 3, pp. 240-247, 2010.