



## بررسی قوانین هم‌راستایی و ترکیب ترک‌های مجاور هم

علی عباس‌زاده بیدختی<sup>۱</sup>، امیررضا شاهانی<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی، تهران

۲- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی، تهران

\* تهران، صندوق پستی ۱۹۹۹-۱۹۳۹۵، shahani@kntu.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۲۷ مهر ۱۳۹۲

پذیرش: ۲۸ آبان ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۳۱ خرداد ۱۳۹۳

کلید واژگان:

ترک‌های مجاور هم

قوانین هم‌راستایی و ترکیب

رشد ترک

مکانیک شکست خطی

روش المان محدود توسعه یافته

### چکیده

عیوب چندگانه اغلب در سازه‌های مهندسی نظیر اجزای نیروگاه‌ها و مخازن تحت فشار اتفاق می‌افتد. این عیوب در برخی موارد، اثرات مخرب بیشتری نسبت به هر کدام از عیوب به صورت جداگانه دارد. ارزیابی برهم‌کنش این ترک‌ها براساس تعیین هم‌راستایی و ترکیب آن‌ها صورت می‌پذیرد. در استانداردهای موجود، ترک‌های چندگانه در مجاورت هم با ارضاکردن شرایط لازم، هم‌راستا شده و در صورت لزوم ترکیب می‌شوند. در پژوهش حاضر، ابتدا قوانین هم‌راستایی و ترکیب استانداردهای مختلف برای دو ترک راهبر مجاور هم بررسی می‌شود. سپس برای بررسی تأثیر و برهم‌کنش ترک‌های مجاور، شکست یک ورق با دو ترک راهبر در مجاورت هم، شبیه‌سازی شده و تأثیر فواصل ترک‌ها و اندازه آن‌ها بر ضرایب شدت تنش بررسی می‌شود. همچنین چگونگی رشد ترک‌ها در حالت‌های مختلف تحت شرایط شکست الاستیک خطی، شبیه‌سازی می‌شود. از روش المان محدود توسعه یافته برای شبیه‌سازی مسأله استفاده شده است. این روش به این دلیل انتخاب شده که توانایی مناسبی در تحلیل مسائل مکانیک شکست خطی و فرایند رشد ترک، دارد. در این روش، المان‌بندی ثابت بوده و نیاز به فرایند مش‌بندی مجدد جهت شبیه‌سازی رشد ترک وجود ندارد. براساس نتایج به‌دست آمده، قوانین جدیدی جهت تعیین هم‌راستایی و ترکیب ترک‌های مجاور هم ارائه می‌شود.

## Study and analysis of alignment and combination rules for offset cracks

Ali Abbaszadeh Bidokhti<sup>1</sup>, Amir Reza Shahani<sup>2\*</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

2- Department of Mechanical Engineering, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

\*P.O.B. 19395-1999 Tehran, shahani@kntu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 19 October 2013  
Accepted 19 November 2013  
Available Online 21 June 2014

#### Keywords:

Offset Cracks  
Alignment and Combination Rules  
Crack Growth  
Linear Elastic Fracture Mechanics  
Extended Finite Element Method

### ABSTRACT

Multiple flaws are frequently occurred in actual components, such as pressure vessels and power plants. These flaws will in some circumstances lead to more severe effects than single flaw alone. Assessment of the interaction behavior is based on an evaluation of the alignment and combination of these multiple flaws. In the current standards, multiple cracks are treated as an equivalent single crack if the distance between two cracks satisfies a prescribed criterion. First, this study introduces the current alignment and combination rules for through cracks. Following, to investigate the effects of the interaction of cracks, brittle fracture of a plate containing two adjacent cracks is simulated. The effect of cracks distances and crack lengths on stress intensity factors is evaluated. Also, crack growth analysis is simulated based on linear elastic fracture mechanics approach. The extended finite element method has been utilized to model the problem. This method enables the domain to be modeled by finite elements without explicitly meshing the crack surfaces, and hence crack propagation simulations can be carried out without remeshing. Based on the results, a new alignment and combination rule is proposed.

### ۱- مقدمه

اهمیت مهندسی شده است، زیرا در اغلب مسائل مهندسی با وجود دو یا چند نقص در فواصل نزدیک به هم روبه‌رو می‌شویم که در طی فرایند ساخت قطعات یا در طی کارکرد آن‌ها ایجاد شده‌اند. به‌خصوص در مخازن و پایپینگ، نمونه‌های متعددی از این موارد، مشاهده می‌شود. عیوب چندگانه در سازه‌های فلزی در برخی مواقع، نسبت به نقایص مجزا، اثرات مخرب بیشتری دارد که این امر ناشی از اثرات برهم‌کنش نقایص نزدیک به هم، می‌باشد. ارزیابی برهم‌کنش این نقایص، بر اساس بررسی هم‌راستایی<sup>۱</sup> و ترکیب<sup>۲</sup> این عیوب چندگانه است. برای نقایصی که در صفحات جداگانه قرار

سازه‌های مهندسی ممکن است دارای نقایصی باشند که معمولاً در طول فرایند ساخت قطعات و یا در طی عمر کاری آن‌ها ایجاد می‌شوند. برای جلوگیری از شکست قطعات در طی کارکرد، این نقایص به‌خصوص نقایص از نوع ترک، باید ارزیابی شوند. چنان‌چه ترکی در قطعه مشاهده شود، معمولاً براساس یک استاندارد مهندسی یا تحلیل‌های نرم‌افزاری، باید مشخص شود که آیا قطعه می‌تواند به کارکرد خود ادامه دهد و یا باید تعویض شود. در بسیاری از موارد واقعی، با چندین نقص یا عیب در قطعه مواجه می‌شویم. در نظرگرفتن عیوب چندگانه در طراحی سازه‌ها، تبدیل به یک موضوع با

1- Alignment  
2- Combination

### Please cite this article using:

A. Abbaszadeh Bidokhti, A.R. Shahani, Study and analysis of alignment and combination rules for offset cracks, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 5, pp. 91-101, 2014 (In Persian)

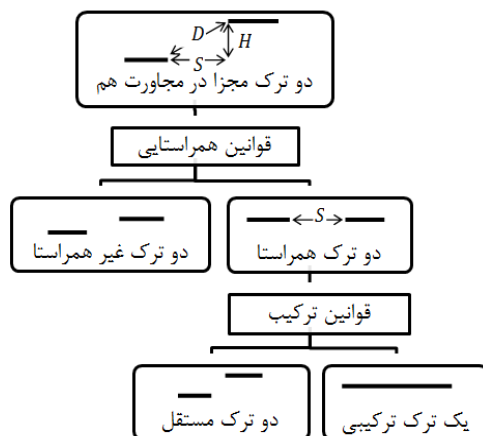
برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

شد، معمولاً برای ترک‌هایی که در صفحات جداگانه قرار می‌گیرند، ابتدا هم‌راستایی آن‌ها بررسی می‌شود و در صورت ارضا کردن شرایط استاندارد، بر یک سطح مقطع در نظر گرفته می‌شوند. سپس برای ترک‌های مجاور هم بر یک صفحه، قوانین ترکیب اعمال می‌شود تا در صورت لزوم ترکیب شوند. در صورت عدم ارضا شرایط، هر ترک به صورت جداگانه باید در نظر گرفته شود. این روند در شکل ۱ به صورت شماتیک نشان داده شده است.

قوانین هم‌راستایی و ترکیب ترک‌های مجاور هم در استانداردهای مختلف توسط روابطی ارائه شده است. خلاصه‌ای از این شرایط در جدول ۱ فراهم شده است. همان‌طور که از جدول ۱ مشاهده می‌شود، شروط هم‌راستایی و ترکیب ترک‌های مجاور هم در استانداردهای مختلف، متفاوت است. برای نمونه، در مورد شروط هم‌راستایی در برخی استانداردها، فاصله عمودی دو ترک با یک عدد ثابت سنجیده می‌شود. در برخی دیگر از استانداردها، فاصله عمودی دو ترک با نسبتی از طول ترک‌ها و در برخی دیگر، فاصله مستقیم بین دو ترک با عبارتی از طول ترک‌ها سنجیده می‌شود (این پارامترها در شکل ۲ نشان داده شده‌اند). همچنین قوانین بالا در طول زمان در ویرایش‌های مختلف استانداردهای فوق، مورد بازنگری قرار گرفته است. به دلیل این که معمولاً در ویرایش‌های اولیه استانداردهای فوق، ایمنی قطعات و سازه‌ها مورد توجه بوده و معمولاً قوانین محافظه‌کارانه‌ای ارائه شده است. این قوانین محافظه‌کارانه در برخی موارد سبب افزایش هزینه‌های بازرسی و تعویض قطعات می‌شود. با پیشرفت ابزارهای تحلیل مهندسی و افزایش قابلیت اطمینان تحلیل‌ها، در قوانین استانداردهای فوق نیز بازنگری صورت گرفته تا با حفظ ایمنی، بتوان از قطعات و سازه‌ها در بازه زمانی بیشتری بهره‌برداری کرده و هزینه تعویض و نگهداری قطعات را کاهش داد. [۱۲]

با توجه به موارد یاد شده، در سال‌های اخیر پژوهش‌هایی بر تأثیر ترک‌های چندگانه بر یکدیگر انجام شده است. در این موارد، اشکال مختلف ترک در مجاورت هم و تحت بارگذاری‌های مختلف با استفاده از روش‌های گوناگون تحلیل شده‌اند. همچنین شکست قطعات در حالت الاستیک (شکست ترد)، الاستیک-پلاستیک (شکست نرم) و تحلیل بار حدی شکست مورد بررسی قرار گرفته است.

کونوسو [۱۳] با استفاده از روش نیروی جسمی، تأثیر دو ترک غیریکسان نیمه‌بیضی در حالت شکست الاستیک را بررسی کرده و برای هم‌راستایی آن‌ها قوانینی ارائه کرده است. همچنین کونوسو و کاساهارا [۱۴] همین مسأله را تحت نیروی خستگی مورد بررسی قرار داده‌اند.



شکل ۱ روند چگونگی برخورد با ترک‌های در مجاورت هم

می‌گیرند، ابتدا هم‌راستایی آن‌ها بررسی می‌شود. برای فواصلی کمتر از فاصله بحرانی، این نقایص باید بر یک سطح مقطع، هم‌راستا در نظر گرفته شوند. سپس برای عیوب هم‌صفحه، برهم‌کنش هر نقص با نقایص مجاور آن مورد ارزیابی قرار گیرد و براساس اندازه نقایص مجاور، قوانین ترکیب عیوب اعمال شود. این رویه، منجر به در نظر گرفتن اثرات برهم‌کنش عیوب چندگانه و طراحی ایمن سازه‌ها می‌شود.

در سال‌های اخیر، استانداردهای مختلف، قوانینی برای در نظر گرفتن عیوب چندگانه در مجاور هم ارائه داده‌اند. این استانداردها به‌خصوص در طراحی قطعات و مخازن نیروگاه‌های اتمی و سازه‌های هوایی مورد توجه بوده‌اند. در این استانداردها معمولاً عیوب را به شکل ترک در نظر می‌گیرند و ترک‌های چندگانه در مجاورت هم با ارضا کردن شرایط مورد اشاره در استاندارد مربوطه، هم‌راستا شده و در صورت لزوم ترکیب می‌شوند، یعنی به صورت یک ترک بزرگ‌تر در نظر گرفته می‌شوند. در صورتی که شرایط لازم ارضا نشود، هر ترک باید به صورت جداگانه در نظر گرفته شود. از جمله این استانداردها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: استاندارد انجمن مهندسان مکانیک آمریکا بخش یازدهم [۱]، استاندارد انجمن مهندسان مکانیک ژاپن [۲]، استاندارد بریتانیا [۳]، استاندارد مؤسسه نفت و پتروشیمی آمریکا [۴]، استاندارد انجمن مهندسی جوش ژاپن [۵]، استاندارد چین [۶]، استاندارد اتحادیه اروپا [۷]، استاندارد سازمان انرژی اتمی فرانسه [۸]، استاندارد آلمان [۹]، استاندارد انجمن طراحی و ساخت قطعات نیروگاه‌های اتمی فرانسه [۱۰]، استاندارد وزارت انرژی بریتانیا [۱۱].

پس از ارزیابی اندازه اولیه ترک‌ها با استفاده از روش‌های ارزیابی غیرمخرب، شرایط استاندارد و تعیین هم‌راستایی و ترکیب و یا عدم هم‌راستایی و ترکیب ترک‌های در مجاورت هم، بر این ترک‌ها اعمال می‌شود و سپس، تخمین عمر باقی‌مانده قطعه و بررسی شکست قطعه و رشد ترک با استفاده از ترک‌های جدید، تحلیل می‌شود. بنابراین قوانین هم‌راستایی و ترکیب ترک‌های مجاور هم، در تعیین شرایط کارکرد و یا تعویض قطعه و همچنین کارکرد ایمن قطعه نقش دارد.

در پژوهش حاضر، ابتدا قوانین هم‌راستایی و ترکیب استانداردهای مختلف برای دو ترک راه‌بدر مجاور هم بررسی می‌شود. سپس برای بررسی تأثیر و برهم‌کنش ترک‌های مجاور، شکست یک ورق با دو ترک راه‌بدر در مجاورت هم، شبیه‌سازی شده و تأثیر فواصل ترک‌ها و اندازه آن‌ها بر ضرایب شدت تنش بررسی می‌شود. همچنین چگونگی رشد ترک‌ها و مسیرهای رشد ترک در حالت‌های مختلف تحت شرایط شکست الاستیک خطی، شبیه‌سازی می‌شود. از روش المان محدود توسعه‌یافته<sup>۱</sup> برای شبیه‌سازی مسأله استفاده شده است. این روش به این دلیل انتخاب شده که توانایی مناسبی در تحلیل مسائل مکانیک شکست خطی و شبیه‌سازی فرآیند رشد ترک، دارد. در این روش، المان‌بندی ثابت بوده و نیاز به فرایند مش‌بندی مجدد جهت شبیه‌سازی رشد ترک وجود ندارد.

پس از انجام تحلیل‌های مختلف، براساس نتایج به‌دست آمده، قوانین جدیدی جهت تعیین هم‌راستایی و ترکیب ترک‌های مجاور هم ارائه می‌شود.

## ۲- بررسی استانداردهای موجود و پژوهش‌های انجام‌شده

با توجه به اهمیت در نظر گرفتن اثرات برهم‌کنش ترک‌های مجاور در طراحی سازه‌ها، استانداردهای مختلف، شرایط مختلفی برای بررسی هم‌راستایی و ترکیب ترک‌های مجاور هم ارائه داده‌اند. همان‌گونه که در قسمت مقدمه یاد

1- Extended Finite Element Method (X-FEM)

جدول ۱ قوانین هم‌راستایی و ترکیب دو ترک مجاور هم در استانداردهای مختلف\*

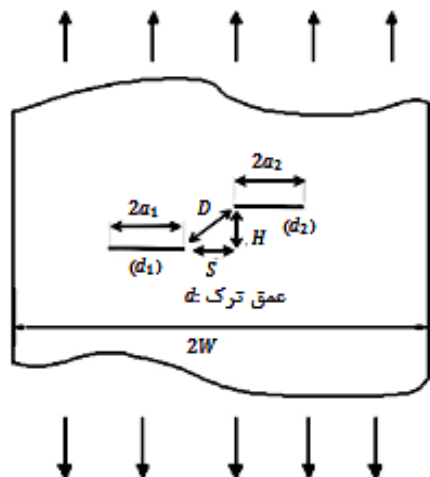
| استاندارد                                                | شرط هم‌راستایی                                                                                                                    | شرط ترکیب                        |
|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| انجمن مهندسان مکانیک آمریکا (ASME)                       | $H \leq 12.5 \text{ mm}$                                                                                                          | $S \leq \max(2a_1, 2a_2)$        |
| انجمن مهندسان مکانیک ژاپن (JSME)                         | رشد: $H \leq 10 \text{ mm if } S \leq 5 \text{ mm}$<br>شکست: $H \leq 2S \text{ if } S > 5 \text{ mm}$<br>$H \leq 12.5 \text{ mm}$ | $S \leq \max(2a_1, 2a_2)$        |
| مؤسسه نفت و پتروشیمی آمریکا (API 579)                    | $S < 0: H \leq (a_1 + a_2)$<br>$S > 0: H \leq (a_1 + a_2) \& S \leq (a_1 + a_2)$                                                  | $S \leq a_1 + a_2$               |
| استاندارد بریتانیا (BS 7910)                             | $D \leq (a_1 + a_2)$                                                                                                              | $S \leq \min(2a_1, 2a_2)$        |
| انجمن مهندسی جوش ژاپن (WES 2805)                         | $H \leq 0.5 \min(2a_1, 2a_2)$                                                                                                     | $S \leq \max(2a_1, 2a_2)$        |
| استاندارد چین (GB/T 19624)                               | $H \leq \min(2a_1, 2a_2)$                                                                                                         | $S \leq \min(2a_1, 2a_2)$        |
| وزارت انرژی بریتانیا (R6)                                | $D \leq (a_1 + a_2)$                                                                                                              | $S \leq \min(2a_1, 2a_2)$        |
| سازمان انرژی اتمی فرانسه (A16)                           | $D \leq (a_1 + a_2)$                                                                                                              | $S \leq \min(2a_1, 2a_2)$        |
| استاندارد آلمان (FKM)                                    | $D \leq (a_1 + a_2)$                                                                                                              | $S \leq \min(2a_1, 2a_2)$        |
| انجمن طراحی و ساخت قطعات نیروگاه‌های اتمی فرانسه (RSE-M) | براساس تداخل مستطیل‌های برهم‌کنش                                                                                                  | براساس تداخل مستطیل‌های برهم‌کنش |
| استاندارد اتحادیه اروپا (FITNET)                         | $H \leq \min(2a_1, 2a_2)$                                                                                                         | $S \leq \min(2a_1, 2a_2)$        |

\*-D فاصله مستقیم دو ترک، H فاصله خارج دوصفحه ترک و S فاصله داخل صفحه دو ترک (مطابق شکل ۲) است.

تجربی نیز موجود است [۱۶]. ورق فوق از جنس فولاد کربنی SM 400A در دمای  $-196^\circ\text{C}$  تست شده تا شرایط شکست الاستیک خطی فراهم شود. تنش تسلیم و استحکام کششی فولاد مزبور برابر  $304$  و  $449$  مگاپاسکال است. چقرمگی شکست ماده مزبور توسط تست نمونه فشرده کششی به‌دست آمده و برابر  $K_{IC} = 28.2 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  است.

در تست‌های تجربی انجام شده، صفحه مورد نظر تحت بار کششی استاتیکی در دو انتهای ورق قرار می‌گیرد. بارگذاری به آرامی افزایش می‌یابد تا شکست ورق رخ دهد. بار شکست قطعه و مسیر رشد ترک در نمونه‌های مختلف ثبت شده است. تست‌های انجام شده بر یازده قطعه انجام شده و نتایج آن‌ها در جدول ۲ ارائه شده است. در این تست‌ها بار شکست قطعه و چگونگی مسیر رشد دو ترک، ثبت گردیده است. در مورد بار شکست قطعات، پراکندگی زیادی وجود دارد، ولی از طریقه مسیر رشد دو ترک و بهم پیوستگی آن‌ها یا عدم پیوستگی آن‌ها در طی بارگذاری استاتیکی، به‌عنوان معیار هم‌راستایی دو ترک، نتیجه‌گیری شده است.

برای تحلیل دقیق‌تر مسأله و بررسی پارامترهای مختلف، تحلیل مکانیک شکست و رشد ترک در مسأله، با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته انجام شده است. این روش به این دلیل انتخاب شده که توانایی مناسبی در تحلیل مسائل مکانیک شکست خطی و شبیه‌سازی فرایند رشد ترک، دارد.



شکل ۲ دو ترک موازی در مجاورت هم و پارامترهای مربوط

هاسگاوا و همکارانش [۱۶، ۱۵] براساس انجام تست‌هایی در حالت شکست الاستیک، تأثیر دو ترک راه‌بدر در نزدیک هم را مورد بررسی قرار داده و قوانینی برای هم‌راستایی این ترک‌ها ارائه داده‌اند. کارپینتری و همکارانش [۱۷] تأثیر دو ترک هم‌صفحه نیمه‌بیضی یکسان در یک ورق تحت کشش را با استفاده از تحلیل عددی بررسی کرده‌اند. ایشان اثر فاصله دو ترک و شکل ترک‌ها بر مقدار ضریب شدت تنش را تعیین کرده‌اند. ژوان و همکارانش [۱۸] تأثیر دو ترک راه‌بدر در مجاورت هم تحت شرایط خزش را مورد بررسی قرار داده و با تحلیل مکانیک شکست، براساس تأثیر دو ترک قوانینی برای هم‌راستایی این ترک‌ها عرضه کرده‌اند.

میزاکی و همکارانش [۱۹] تست‌هایی را بر نمونه‌های ورق نرم با ترک‌های چندگانه راه‌بدر انجام دادند. آن‌ها با شکست قطعات، شکل رشد ترک‌های مجاور و بارهای شکست آن‌ها را مورد بررسی قرار داده و با مقایسه آن‌ها با شرایط برخی استانداردها، قوانین جدیدی برای هم‌راستایی در حالت شکست پلاستیک ارائه داده‌اند. آن‌ها همچنین تست‌های مشابهی را بر لوله‌هایی با دو ترک نزدیک به هم انجام داده و شکست نرم آن‌ها را بررسی کرده و بر اساس نتایج تست، کارایی استانداردهای مختلف را مورد ارزیابی قرار دادند [۲۰]. ساگا و همکارانش [۲۱] با استفاده از روش مکانیک آسیب و بهره‌گیری از المان محدود، تست‌های مرجع ۱۶ را شبیه‌سازی کرده و با نتایج تغییرات بار بر حسب تغییر مکان را با نتایج تست مقایسه کردند. کیم و همکارانش [۲۲] شکست نرم لوله‌های فولادی دارای دو ترک سطحی نزدیک به هم را با استفاده از مدل المان محدود سه‌بعدی تحلیل کردند. از روش مکانیک آسیب برای شبیه‌سازی استفاده شده و بار شکست قطعات تعیین شده و با نتایج تست مقایسه شده است.

کامایا [۲۳] با استفاده از روش المان محدود، شکست نرم لوله‌های دارای ترک‌های سطحی محیطی نزدیک به هم را مورد تحلیل قرار داده و براساس بار حدی تعیین‌شده، قوانین جدیدی برای ترکیب این ترک ارائه کرده است.

### ۳- تحلیل شکست ورق با دو ترک در مجاورت هم

مسأله مورد بررسی یک ورق مستطیل شکل با دو ترک موازی در مجاورت هم تحت کشش است. طول این ورق برابر  $800$  میلی‌متر، عرض ورق برابر  $160$  میلی‌متر و ضخامت  $5/7$  میلی‌متر است. ورق دارای دو ترک راه‌بدر موازی در وسط ورق است (شکل ۳). برای ورق با مشخصات فوق، نتایج تست‌های

$$u^{std} = \sum_{i \in S} N_i(x) u_i \quad (2)$$

که در آن  $S$  مجموعه گره‌های شبکه،  $N_i(x)$  توابع شکل مربوط به گره نام است که داریم  $N_i(x_i) = \delta_{ij}$ ، مختصات گره نام،  $u_i$  مختصات گره‌ای در گره نام است.

در روش المان محدود توسعه یافته، بر حسب نوع ناپیوستگی یک تابع ناپیوسته بر المان مدل می‌شود. از برآیند این میدان ناپیوسته و میدان پیوسته به‌دست آمده از تقریب استاندارد، میدان ناپیوسته موردنظر به‌دست می‌آید. اضافه کردن این تابع ناپیوسته با استفاده از روش تقسیم‌بندی واحد انجام می‌گیرد. عموماً برای توابع شکل در قسمت غنی شده از همان توابع قسمت استاندارد استفاده می‌شود.

$$u(x) = \sum_{i \in S} N_i(x) u_i + \sum_{j \in S^{enr}} N_j(x) \Psi(x) a_j \quad (3)$$

که  $S^{enr}$  مجموعه گره‌های غنی‌شده است.  $\Psi(x)$  توابع غنی‌سازی یا توابع اضافی و  $a_j$  مجهولات اضافی است.

غنی‌سازی در روش المان محدود توسعه یافته به صورت موضعی انجام می‌گیرد. یعنی غنی‌سازی در هر المان به صورت مستقل و تنها با توجه به وضعیت مرز ناپیوستگی درون همان المان انجام می‌شود. برای غنی‌سازی گره‌هایی که ترک تکیه‌گاه آن‌ها را قطع می‌کند و همچنین تکیه‌گاه آن‌ها رئیس ترک را در بر ندارد، از تابع هویساید برای غنی‌سازی تقریب جابه‌جایی استاندارد استفاده می‌شود. برای گره‌هایی که تکیه‌گاه آن‌ها رأس ترک را در بردارد، چنان‌چه رئیس ترک داخل المان قرار گیرد، باید از توابع انشعاب برای غنی‌سازی این گره‌ها استفاده شود تا ناکرانداری کرنش در نزدیک رئیس ترک به خوبی مدل گردد. این توابع، با استفاده از حل‌های تحلیلی برای حالت‌های ترک خاص به‌دست آمده‌اند.

ماده در نظر گرفته شده در تحلیل‌های انجام‌شده، ماده الاستیک خطی است. مسائل به صورت دوبعدی (تنش صفحه‌ای) مدل گردیده‌اند. با توجه به موارد فوق برای مدل‌سازی به روش المان محدود توسعه یافته، میدان جابه‌جایی به صورت رابطه (۴) در نظر گرفته شده است.

$$u(x) = \sum_{i \in I} N_i(x) u_i + \sum_{j \in J} N_j(x) H(x) a_j + \sum_{k \in K_1} N_k(x) \left( \sum_{l=1}^4 F_l^1(x) b_k^{l1} \right) + \sum_{k \in K_2} N_k(x) \left( \sum_{l=1}^4 F_l^2(x) b_k^{l2} \right) \quad (4)$$

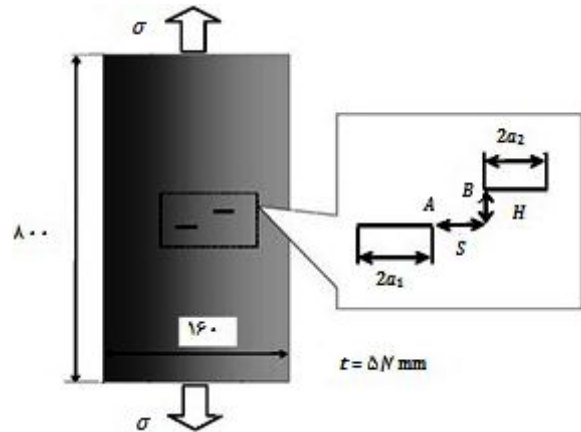
که  $H(x)$  تابع هویساید (تابع غنی‌ساز در گره‌های المان‌های کاملاً برش‌خورده) است. توابع غنی‌ساز گره‌های نزدیک رأس ترک به صورت رابطه (۵) است.

$$\{F_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \end{array} \right\} \quad (5)$$

$a_j$ ،  $b_k^{l1}$ ،  $b_k^{l2}$  درجات آزادی غنی‌شده (به ترتیب در گره‌های المان‌های برش‌خورده و گره‌های المان رأس ترک) است.

براساس آنچه در مورد روش المان محدود توسعه یافته گفته شد، در حل مسائل با این روش، دو گام اساسی در نظر گرفته می‌شود. گام اول: در ابتدا برای شبکه‌بندی، مرز ناپیوستگی از مسئله حذف شده و شبکه‌بندی بدون توجه به ناپیوستگی موجود و تنها براساس هندسه خارجی مسئله صورت می‌گیرد.

گام دوم: پس از تعیین شبکه‌بندی مسئله، مرز ناپیوستگی با شبکه



شکل ۳ مسئله مورد بررسی

جدول ۲ نتایج تست‌های تجربی بر نمونه با دو ترک (اندازه‌ها به میلی‌متر) [۱۶]

| شماره قطعه | طول ترک‌ها | فاصله خارج از صفحه H (mm) | فاصله داخل صفحه S (mm) | بار شکست $P_B$ (kN) | پیوستگی مسیر رشد ترک |
|------------|------------|---------------------------|------------------------|---------------------|----------------------|
| BW-05      |            | ۳۰                        | ۳۰                     | ۱۰۱/۶               | خیر                  |
| BW-01      | $2a_1=20$  | ۲۰                        | ۲۰                     | ۱۳۰/۹               | خیر                  |
| BW-02      | $2a_2=20$  | ۱۵                        | ۱۵                     | ۱۱۲/۵               | بلی                  |
| BW-03      |            | ۱۰                        | ۱۰                     | ۱۰۹/۴               | بلی                  |
| BD-05      |            | ۲۰                        | ۲۰                     | ۱۰۶/۹               | خیر                  |
| BD-04      | $2a_1=20$  | ۱۵                        | ۱۵                     | ۱۵۳                 | خیر                  |
| BD-01      | $2a_2=10$  | ۱۰                        | ۱۰                     | ۱۵۲/۷               | بلی                  |
| BD-02      |            | ۷/۵                       | ۷/۵                    | ۱۳۹/۶               | بلی                  |
| BDS-03     |            | ۱۵                        | ۱۵                     | ۱۶۶/۹               | خیر                  |
| BDS-01     | $2a_1=20$  | ۱۰                        | ۱۰                     | ۲۰۱                 | خیر                  |
| BDS-02     | $2a_2=5$   | ۵                         | ۵                      | ۱۱۶/۳               | بلی                  |

در این روش، المان‌بندی ثابت بوده و نیاز به فرایند مش‌بندی دوباره جهت شبیه‌سازی رشد ترک وجود ندارد.

با توجه به فیزیک مسئله، ترک بحرانی، ترک با طول بزرگ‌تر است و پارامترهای نوک ترک نزدیک به ترک دوم، مورد بررسی قرار می‌گیرد. پارامترهای مؤثر بر شکست، فاصله خارج از صفحه دو ترک ( $H$ )، فاصله داخل صفحه دو ترک ( $S$ )، فاصله دو ترک ( $D$ ) و طول ترک دوم ( $2a_2$ ) به‌عنوان متغیر انتخاب گردیده‌اند و تأثیر آن‌ها بر ضرایب شدت تنش و مسیر رشد ترک در قطعه بررسی می‌شود.

نخست اصول روش المان محدود توسعه یافته و چگونگی شبیه‌سازی رشد ترک بررسی می‌شود و سپس تحلیل‌های انجام شده و نتایج آن‌ها ارائه می‌شود.

#### ۴- اصول روش المان محدود توسعه یافته

در روش المان محدود توسعه یافته، تقریب جابه‌جایی از دو قسمت تشکیل می‌شود: قسمت استاندارد ( $u^{std}$ ) و قسمت غنی شده ( $u^{enr}$ ). بنابراین  $u$  از رابطه (۱) به‌دست خواهد آمد:

$$u = u^{std} + u^{enr} \quad (1)$$

قسمت استاندارد، همان تقریب استفاده شده در روش استاندارد المان محدود است که با رابطه (۲) تعریف می‌شود:

هریک از ماتریس‌های فوق ابتدا باید برای هر المان محاسبه شده و سپس برای کل المان‌ها تجمیع گردد. برای یک المان چهارضلعی درجه یک استاندارد، با توجه به رابطه (۸)، اندازه ماتریس سفتی المان  $8 \times 8$  است. برای المان‌هایی که دارای گره‌های غنی شده می‌باشند، بسته به این‌که تعداد گره‌های غنی شده چه تعداد باشد، اندازه ماتریس سفتی متفاوت است. المانی که چهار گره آن با توابع هویساید غنی شود، اندازه ماتریس سفتی المان  $16 \times 16$  است و المانی که چهار گره آن با توابع هویساید غنی شود، اندازه ماتریس سفتی المان  $40 \times 40$  می‌باشد. این یکی از ویژگی‌های روش المان محدود توسعه یافته است که اندازه ماتریس المان‌ها یکسان نبوده و با توجه به گره‌هایی که غنی می‌شوند، اجزای ماتریس سفتی در طول رشد ترک تغییر می‌کند.

#### ۶- انتگرال‌گیری در المان‌های غنی شده

یکی از مسائل مهم و پیچیده در روش المان محدود توسعه یافته، انتگرال‌گیری در المان‌های غنی شده است. برای انتگرال‌گیری عددی در المان‌های استاندارد، معمولاً از روش انتگرال‌گیری گوسی<sup>۱</sup> استفاده می‌شود. با استفاده از تعداد نقاط گاوس مناسب (نقاط انتگرال‌گیری)، این روش برای توابع چندجمله‌ای دقیق است. در توابع چند جمله‌ای از درجه  $n$  برای این‌که انتگرال‌گیری دقیق باشد، باید تعداد نقاط گاوس بیشتر یا مساوی  $\frac{n+1}{2}$  باشد. در این مسأله با توجه به این‌که توابع شکل المان‌های استاندارد از نوع خطی است، تعداد نقاط گاوس در هر ضلع برابر ۲ در نظر گرفته شده است (۴ نقطه گاوس در هر المان چهارضلعی استاندارد).

از آن‌جا که در روش المان محدود توسعه یافته، ترک کاملاً به طور دلخواه می‌تواند از داخل المان عبور کند، روش استاندارد فوق، برای انتگرال‌گیری میدان‌های ناپیوسته در المان‌های غنی شده مناسب نیست. در المان‌هایی که کاملاً توسط ترک قطع شده و با تابع هویساید غنی شده‌اند، انتگرال‌گیری عددی باید به طرز صحیح، سهم هر طرف ناپیوستگی را در شکل ضعیف معادلات محاسبه نماید. چنان‌چه از روش استاندارد انتگرال‌گیری عددی در المان‌های غنی شده با توابع ناپیوسته هویساید استفاده شود، مودهای منفرد نادرست در سیستم معادلات ظاهر می‌شود. برای انتگرال‌گیری صحیح، باید انتگرال‌گیری در چندضلعی‌های دو سوی ترک به طور جداگانه انجام شود. با توجه به این‌که انتگرال‌گیری در چندضلعی‌ها (بیش از ۴ ضلع) پیچیده بوده و تاکنون فرمول‌بندی واحدی برای آن ارائه نشده، روش مرسوم این است که برای انتگرال‌گیری عددی در این المان‌های غنی شده، المان‌های فوق به زیرمئل‌هایی منطبق بر ترک، تقسیم شده و انتگرال‌گیری بر این زیرمئل‌ها انجام می‌شود. (مطابق شکل ۴).

همچنین در المان‌های رأس ترک (غنی شده با توابع انشعاب)، با توجه به این‌که انتگرال‌گیری عددی از توابع منفرد صورت می‌گیرد، باید تعداد نقاط گاوس به ویژه حول رأس ترک، افزایش یابد. برای این منظور، المان‌های حاوی رأس ترک، حول رأس ترک به زیرمئل‌هایی تقسیم شده و انتگرال‌گیری عددی روی این زیرمئل‌ها انجام می‌شود (مطابق شکل ۴). همچنین با توجه به این‌که برخی از گره‌های المان‌های مجاور رأس ترک نیز با توابع منفرد، غنی‌سازی شده است، به نظر می‌رسد برای انتگرال‌گیری دقیق‌تر در این المان‌ها، نسبت به المان‌های استاندارد، باید تعداد نقاط گاوس افزایش یابد. در این المان‌ها تعداد نقاط گاوس مناسب به‌عنوان یک پارامتر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

انتخاب شده در نظر گرفته می‌شود. سپس در المان‌هایی که توسط مرز ناپیوستگی قطع شده و میدان در آن‌ها ناپیوسته است، با کمک روش تقسیم‌بندی واحد و توسط توابع گفته شده، غنی‌سازی صورت می‌گیرد. به نحوی که تقریب جدید، میدان ناپیوسته هریک از این المان‌ها را به درستی مدل کنند.

بدیهی است که موقعیت گره‌ها نسبت به مرز ناپیوستگی باید در هر مرحله از محاسبات تعیین شود. با استفاده از این اطلاعات می‌توان المان‌هایی که توسط مرز ناپیوستگی قطع می‌شوند را تشخیص داده و غنی‌سازی مورد نظر را انجام داد.

#### ۵- گسسته‌سازی معادلات تعادل

برای یک جسم در حال تعادل استاتیکی، شکل ضعیف معادله تعادل (اصل کار مجازی) به صورت رابطه (۶) نوشته می‌شود:

$$\int_{\Omega} \sigma : \delta \varepsilon d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot \delta \varepsilon d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{t} \cdot \delta \varepsilon d\Gamma \quad (6)$$

$\sigma$  تانسور تنش،  $b$  نیروی جسمی و  $\bar{t}$  و بردار تنش خارجی است. با جای‌گذاری تقریب تغییر مکان در روش اجزاء محدود توسعه یافته در شکل ضعیف معادله تعادل، رابطه (۷) به دست می‌آید:

$$K u^h = f \quad (7)$$

که  $K$  ماتریس سفتی،  $u^h$  بردار درجات آزادی گرهی (شامل درجات آزادی کلاسیک و غنی شده) و  $f$  بردار نیروی خارجی است. برای هر المان ماتریس سفتی و نیرو به صورت روابط (۸ و ۹) است:

$$K_{ij}^e = \begin{bmatrix} K_{ij}^{uu} & K_{ij}^{ua} & K_{ij}^{ub} \\ K_{ij}^{au} & K_{ij}^{aa} & K_{ij}^{ab} \\ K_{ij}^{bu} & K_{ij}^{ba} & K_{ij}^{bb} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$f_i^e = \{f_i^u \ f_i^a \ f_i^{b1} \ f_i^{b2} \ f_i^{b3} \ f_i^{b4}\}^T \quad (9)$$

بردار درجات آزادی گرهی و اجزاء ماتریس سفتی و بردار نیرو به صورت روابط (۱۰-۱۴) است:

$$u^h = \{u \ a \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4\}^T \quad (10)$$

$$K_{ij}^{rs} = \int_{\Omega^e} (B_i^r)^T D B_j^s d\Omega \quad (r, s = u, a, b) \quad (11)$$

$$f_i^u = \int_{\Gamma_t} N_i \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega^e} N_i b d\Omega \quad (12)$$

$$f_i^a = \int_{\Gamma_t} N_i H \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega^e} N_i H b d\Omega \quad (13)$$

$$f_i^{ba} = \int_{\Gamma_t} N_i F_a \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega^e} N_i F_a b d\Omega \quad (14)$$

$u$  درجات آزادی کلاسیک و  $a, b$  درجات آزادی غنی شده است. تانسور ضرایب الاستیک است. اجزای این ماتریس برای حالت تنش صفحه‌ای در مراجع مشخص شده است. ماتریس‌های  $B_i^r$ ,  $r = u, a, b$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$B_i^u = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \end{bmatrix} \quad (15)$$

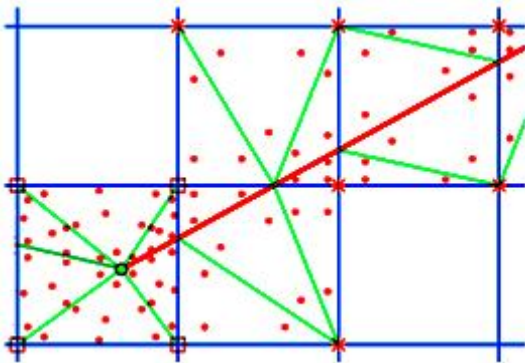
$$B_i^a = \begin{bmatrix} (N_i H)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i H)_{,y} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$B_i^b = [B_i^{b1} \ B_i^{b2} \ B_i^{b3} \ B_i^{b4}] \quad (17)$$

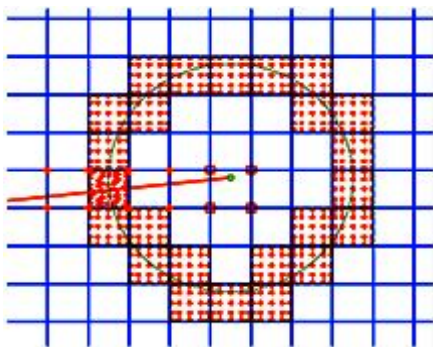
$$B_i^{ba} = \begin{bmatrix} (N_i F_a)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i F_a)_{,y} \\ (N_i F_a)_{,y} & (N_i F_a)_{,x} \end{bmatrix} \quad (18)$$

1- Gaussian quadrature

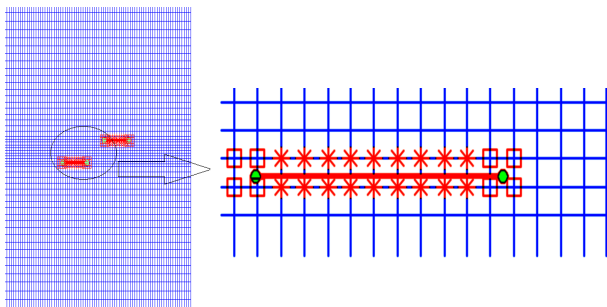




شکل ۴ تقسیم المان‌های غنی شده به زیر بخش‌های مثلثی جهت انتگرال‌گیری عددی



شکل ۵ انتخاب المان‌های اطراف ترک برای محاسبه فرم ناحیه‌ای انتگرال تعاملی



شکل ۶ مش‌بندی مسئله مورد بررسی

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta_c) = \frac{K^{eq}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (23)$$

$$K^{eq} = K_I \cos^3\left(\frac{\theta_c}{2}\right) - K_{II} \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \sin(\theta_c) \quad (24)$$

در هر گام، برای شروع رشد ترک در حالت مود ترکیبی، باید ضریب شدت تنش مؤثر به ضریب شدت تنش بحرانی یا همان چقرگی شکست ماده، رسد؛ بنابراین برای شروع رشد، رابطه (۲۵) باید برقرار باشد.

$$K^{eq} \geq K_{IC} \quad (25)$$

#### ۸- شبیه‌سازی مسئله با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته

برای شبیه‌سازی و تحلیل مسئله شکل ۳ و بررسی پارامترهای مختلف، یک کد کامپیوتری در نرم‌افزار متلب توسعه داده شده است.

مش‌بندی نمونه به صورت منظم انجام شده است و نمونه دارای ۹۴۳۵ المان است. برای بهینه بودن مش، تراکم المان‌ها در نوار میانی ورق و اطراف ترک‌ها بیشتر است (مطابق شکل ۶). برای مش‌بندی مدل‌ها از المان‌های چهارضلعی درجه یک (با توابع شکل لاگرانژی) استفاده شده است.

مزیت بسیار خوب استفاده از روش المان محدود توسعه یافته این است

تعداد نقاط گاوس در زیرمشت‌های المان‌های غنی شده با تابع هویساید سه عدد، تعداد نقاط گاوس در زیرمشت‌های المان‌های غنی شده با توابع انشعاب هفت عدد و تعداد نقاط گاوس در المان‌های مجاور رأس ترک در هر ضلع چهار عدد تعیین شده است.

باید توجه داشت که تقسیم المان‌های غنی شده به زیرمشت‌ها، فقط جهت انتگرال‌گیری عددی انجام می‌شود و هیچ گونه درجه آزادی اضافی به مسئله اضافه نمی‌کند. همچنین مکان گره‌های مسئله و در نتیجه المان‌بندی، در کل طول تحلیل ثابت است.

#### ۷- محاسبه ضرایب شدت تنش و تحلیل رشد ترک

برای محاسبه ضرایب شدت تنش در حالت مود ترکیبی، از روش انتگرال تعاملی<sup>۱</sup> [۲۴] استفاده شده است. در این روش، میدان‌های کمکی به میدان‌های حقیقی تنش، کرنش و جابه‌جایی افزوده می‌شود. در حالت‌هایی که این میدان‌های کمکی به طریق مناسب انتخاب شوند، امکان استخراج ضرایب شدت تنش مود اول و مود دوم به صورت جداگانه فراهم می‌شود. برای کاهش خطا و افزایش دقت در محاسبه انتگرال‌های کانتوری در روش المان محدود توصیه می‌گردد این انتگرال‌ها به صورت ناحیه‌ای معادل<sup>۲</sup> درآمده و محاسبه گردند. انتگرال تعاملی به شکل ناحیه‌ای به صورت رابطه (۱۹) است.

$$I^{(1,2)} = \int_A \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} - W^{(1,2)} \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (19)$$

$q(x)$  یک تابع وزن هموار است که بر یک مسیر دربردارنده رأس ترک مقدار ۱ و بر یک کانتور بیرونی مقدار صفر را می‌گیرد. با استفاده از انتگرال تعاملی، ضرایب شدت تنش مود اول و مود دوم به صورت رابطه (۲۰) محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} K_I^{(1)} = \frac{2}{E} I(1, \text{مود } I) \\ K_{II}^{(1)} = \frac{2}{E} I(1, \text{مود } II) \end{cases} \quad (20)$$

جزئیات این روش در مرجع [۲۵] آمده است. برای انجام محاسبات عددی انتگرال فوق، ناحیه  $A$ ، مجموعه‌ای از المان‌های اطراف رأس ترک در نظر گرفته می‌شود. برای این منظور مرجع [۲۶] پیشنهاد کرده که ابتدا طول مشخصه یک المان رأس ترک (جذر مساحت المان) محاسبه شده و سپس ناحیه  $A$  به صورت المان‌هایی که حداقل یک گره در فاصله‌ای معین از رأس ترک دارند، انتخاب می‌شوند. در انجام محاسبات ما فاصله فوق برابر ۳ برابر طول مشخصه المان در نظر گرفته شده است. (مطابق شکل ۵)

معیار ماکزیمم تنش مماسی به عنوان معیار شروع و رشد ترک در نظر گرفته شده است. در حالت بارگذاری مود ترکیبی، با صرف نظر از ترم‌های غیرمفرد، تنش مماسی در اطراف رأس ترک به صورت رابطه (۲۱) است [۲۵]:

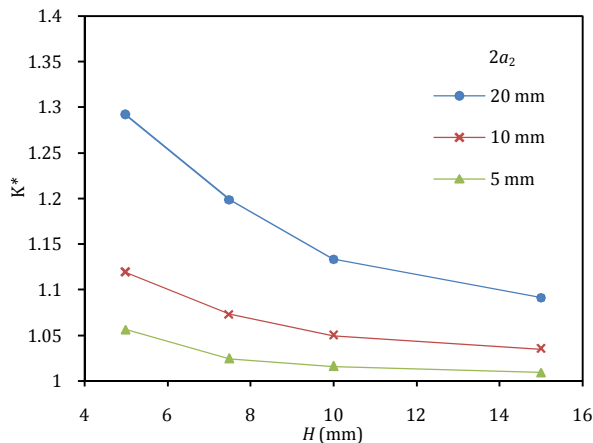
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos^3 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad (21)$$

براساس معیار ماکزیمم تنش مماسی، رشد ترک در راستایی رخ می‌دهد که تنش مماسی، ماکزیمم باشد. با مشتق گرفتن از رابطه (۲۱) و مساوی صفر قرار دادن آن به رابطه (۲۲) برای زاویه رشد ترک در هر گام می‌رسیم:

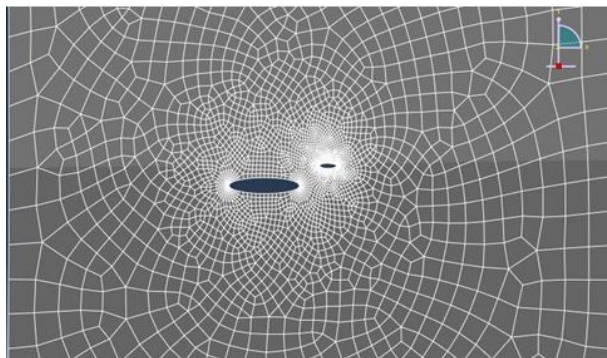
$$\theta_c = 2 \arctan \left[ \frac{-2K_{II}/K_I}{1 + \sqrt{1 + 8(K_{II}/K_I)^2}} \right] \quad (22)$$

همچنین براساس این معیار می‌توان روابط (۲۳ و ۲۴) را بین ضریب شدت تنش مؤثر مود ترکیبی و تنش مماسی در نظر گرفت.

1- Interaction integral method  
2- Equivalent domain form



شکل ۷ ضریب شدت تنش مود اول بدون بعد نقطه A بر حسب فاصله خارج دو صفحه دو ترک برای طول‌های مختلف ترک ثانویه



شکل ۸ نمایی از مدل تغییر شکل یافته المان محدود در نرم‌افزار آباکوس

برای اعتبارسنجی نتایج تحلیل یاد شده، چندین مدل المان محدود در نرم‌افزار آباکوس ایجاد شده است. دقت شود که بر خلاف روش المان محدود توسعه یافته، برای هر حالت باید مدل جداگانه تهیه شده و مش‌بندی شود. نمایی از یکی از مدل‌های تغییر شکل یافته در نرم‌افزار آباکوس در شکل ۸ نشان داده شده است. این مدل دارای ۱۷۶۵۰ المان است که بسیار بیشتر از المان‌های مدل المان محدود توسعه یافته می‌باشد.

برای مدل‌های مختلف نتایج ضریب شدت تنش مود اول بدون بعد ( $K^*$ ) نقطه A با استفاده از نرم‌افزار آباکوس تعیین شده و در شکل ۹ با نتایج مدل المان محدود توسعه یافته مقایسه شده است. دقت در نتایج، اختلاف کمتر از ۲ درصد در تمام حالات را نشان می‌دهد.

برای در نظر گرفتن اثرات طول ترک ثانویه، پارامترهای  $H^*$  و  $S^*$  تعریف شده‌اند و ضرایب شدت تنش برحسب آن‌ها تعیین می‌شود. در شکل‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۲، ضریب شدت تنش بدون بعد نقطه A بر حسب فاصله داخل صفحه بدون بعد ( $S^*$ ) و فاصله خارج صفحه بدون بعد ( $H^*$ ) رسم شده است. در هر یک از این شکل‌ها، طول ترک ثانویه متفاوت است. همان‌طور که از این شکل‌ها مشخص است، شکل کلی منحنی‌ها و مقادیر آن‌ها در سه شکل، تقریباً در یک محدوده قرار دارد و بنابراین پارامترهای بدون بعد تعریف شده، برای توصیف تغییرات ضریب شدت تنش، پارامترهای مناسبی هستند. از این شکل‌ها مشخص است که با کاهش  $H^*$ ، ضریب شدت تنش نقطه A عموماً افزایش پیدا می‌کند. در یک  $H^*$  ثابت با کاهش  $S^*$ ، ابتدا ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد تا به یک مقدار ماکزیمم رسد، پس از آن با کاهش  $S^*$  ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد و زمانی که نوک دو ترک کاملاً در زیر یکدیگر قرار می‌گیرند، ضریب شدت تنش نقطه A به شدت کاهش می‌یابد.

که در تمام شبیه‌سازی‌هایی که انجام می‌شود از مش ثابت استفاده می‌شود. این مسأله به دلیل این‌که تعداد تحلیل‌های انجام شده بسیار زیاد است و به‌خصوص در تحلیل‌های رشد ترک، بسیار مناسب بوده و زمان انجام تحلیل‌ها را بسیار کاهش می‌دهد.

همان‌طور که قبلاً گفته شد، با توجه به فیزیک مسأله، پارامترهای مؤثر بر شکست، فاصله بین دو ترک و طول ترک‌ها است. با توجه به این مسأله، پارامترهای فاصله خارج از صفحه دو ترک ( $H$ )، فاصله داخل صفحه دو ترک ( $S$ )، فاصله دو ترک ( $D$ ) و طول ترک دوم ( $2a_2$ ) به‌عنوان متغیر انتخاب گردیده‌اند و تأثیر آن‌ها بر ضرایب شدت تنش و مسیر رشد ترک در قطعه بررسی می‌شود.

در این مسأله دو دسته شبیه‌سازی انجام می‌شود: در دسته اول نمونه تحت بار ثابت قرار می‌گیرد و به‌ازای پارامترهای مختلف، ضرایب شدت تنش در نمونه استخراج می‌شود. در دسته دوم، نمونه تحت بار جابه جایی کنترل قرار می‌گیرد و به‌ازای پارامترهای مختلف، مسیر رشد دو ترک و به هم‌پیوستگی یا عدم به هم‌پیوستگی آن‌ها بررسی می‌شود.

در این مسأله، طول ترک اول ثابت فرض شده و برابر  $2a_1 = 20 \text{ mm}$  است. طول ترک دوم به‌عنوان متغیر انتخاب شده و برای طول‌های  $5 \text{ mm}$ ،  $10 \text{ mm}$ ،  $20 \text{ mm}$  تحلیل‌ها انجام می‌شود. همچنین مقادیر مختلف خارج صفحه و داخل صفحه دو ترک در هر یک از این حالات تحلیل می‌شود. با توجه به تأثیر متغیرهای فوق و همچنین با توجه به جدول ۱، برای بررسی پارامتری مسأله، پارامترهای بدون بعد زیر تعریف می‌شوند و ضرایب شدت تنش و مسیرهای رشد ترک برای پارامترهای بدون بعد فوق تحلیل می‌شود:

$$H^* = \frac{H}{2a_2}, S^* = \frac{S}{2a_2}, D^* = \frac{D}{a_1 + a_2}$$

در هریک از طول‌های مختلف ترک ثانویه، مسأله نمونه به‌ازای

$$H^* = 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 1$$

$$S^* = 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 1$$

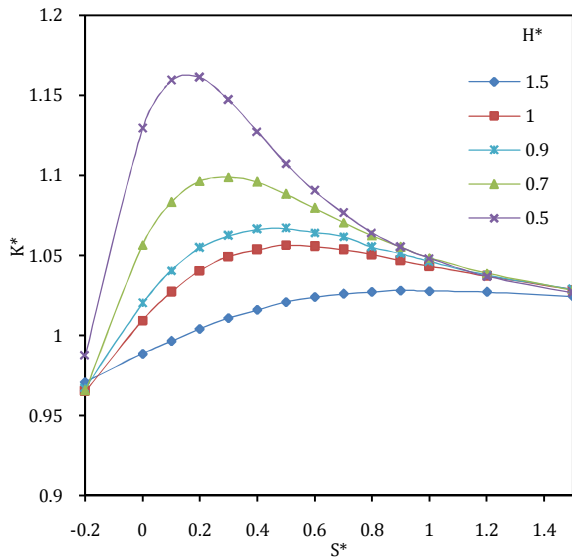
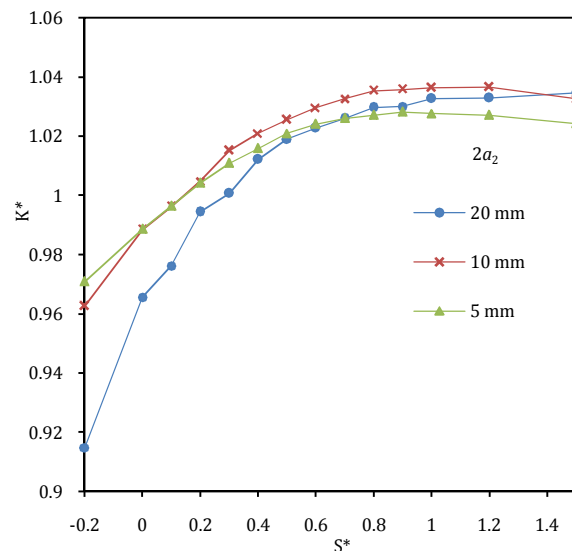
مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

نقطه A به‌عنوان بحرانی‌ترین نوک ترک و نوک ترک B (مطابق شکل ۳) مورد بررسی قرار می‌گیرد. عبارات بدون بعد زیر به‌عنوان نتایج تحلیل دسته اول است:

$$K^* = \frac{K_I}{K_0}$$

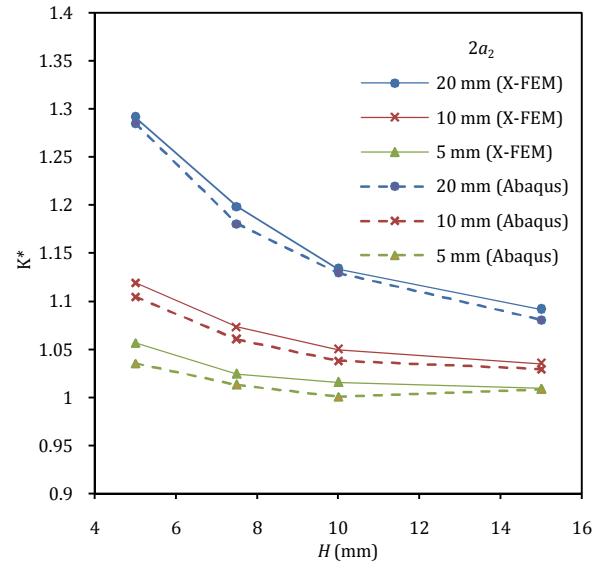
$K_0$  ضریب شدت تنش صفحه فوق با تنها یک ترک و با طول  $2a_1 = 20 \text{ mm}$  است؛ بنابراین پارامتر  $K^*$  میزانی از افزایش ضریب شدت تنش نوک ترک بحرانی در صفحه با دو ترک نسبت به صفحه با تنها یک ترک است و بیان‌گر میزان تأثیر دو ترک است.

در شکل ۷ ضریب شدت تنش مود اول بدون بعد ( $K^*$ ) نقطه A برحسب فاصله خارج دو صفحه دو ترک ( $H$ ) برای طول‌های مختلف ترک ثانویه ( $2a_2$ ) رسم شده است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، هم مقدار ضریب شدت تنش نقطه A بر حسب طول ترک ثانویه متفاوت است و هم میزان افزایش ضریب شدت تنش با کاهش فاصله عمودی در طول ترک‌های ثانویه مختلف، خیلی فرق می‌کند، بطوریکه در طول ترک ثانویه ۲۰ میلی‌متر، با کاهش فاصله عمودی دو ترک از ۱۵ به ۵ میلی‌متر، ضریب شدت تنش نقطه A حدود ۲۰ درصد افزایش می‌یابد، در حالی که با طول ترک ثانویه ۵ میلی‌متر، این افزایش حدود ۵ درصد است؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که شروط هم‌راستایی و ترکیب ترک‌های مجاور هم به طول ترک کوچک‌تر بستگی دارد و استانداردهایی مانند استاندارد انجمن مهندسان مکانیک آمریکا که شرط هم‌راستایی را یک عدد ثابت در نظر می‌گیرند، نمی‌تواند مناسب باشد.

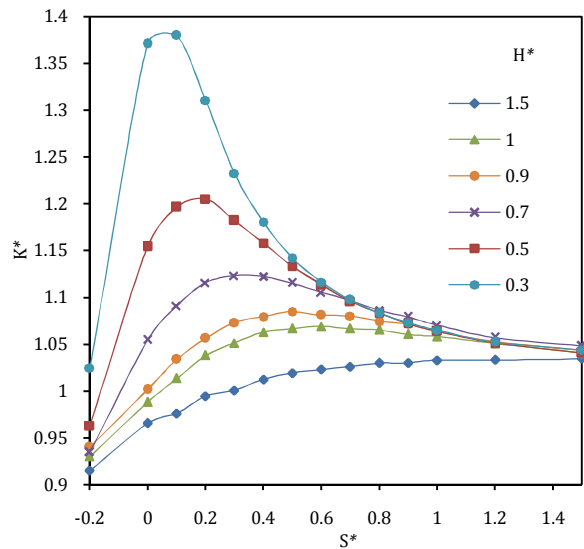
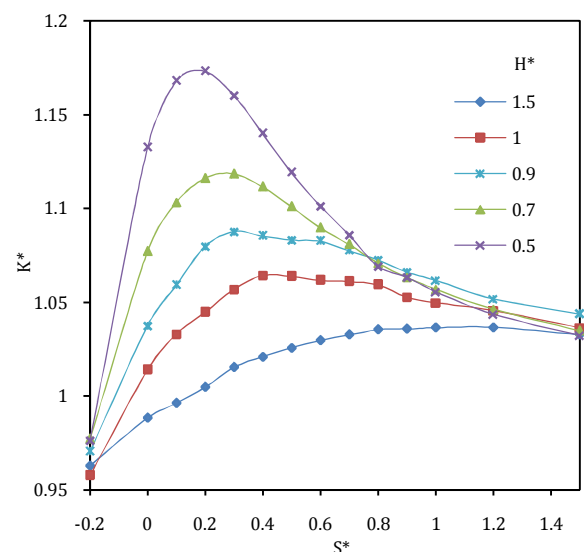

 شکل ۱۲ ضریب شدت تنش مود اول بدون بعد نقطه A ( $2a_2 = 5 \text{ mm}$ )

 شکل ۱۳ مقایسه ضریب شدت تنش مود اول بدون بعد نقطه A برای طول‌های مختلف طول ترک ثانویه در حالت  $H^* = 1/5$ 

نکته مهم دیگر، این است که در  $H^*$  های بزرگ، هرچه فاصله داخل صفحه دو ترک ( $S^*$ ) کاهش یابد، باز هم ضریب شدت تنش از یک حد مشخصی تجاوز نمی‌کند. برای نمونه بر طبق شکل ۱۳، در  $H^* = 1/5$ ، ضریب شدت تنش نسبت به صفحه با یک ترک، حداکثر حدود ۴ درصد افزایش پیدا می‌کند. همچنین طبق شکل ۱۴ در  $H^* = 1/10$  افزایش ضریب شدت تنش نسبت به صفحه با یک ترک، حداکثر حدود ۷ درصد است. بیشینه افزایش ضریب شدت تنش نیز در حالتی رخ می‌دهد که طول دو ترک برابر باشد. طبق شکل ۱۵ در  $H^* = 0.9$ ، حداکثر افزایش ضریب شدت تنش در طول ترک ثانویه  $2a_2 = 20 \text{ mm}$  برابر ۸/۵ درصد و در طول ترک ثانویه  $2a_2 = 10 \text{ mm}$  برابر ۸ درصد و در طول ترک ثانویه  $2a_2 = 5 \text{ mm}$  حدود ۶/۵ درصد است.

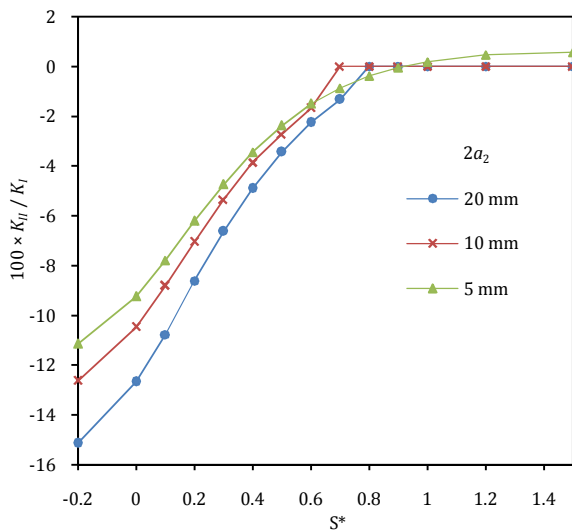
مسئله دیگر در رشد ترک‌ها و به هم پیوستگی آن‌ها این است که هر چه نسبت مود دوم شکست به مود اول بیشتر باشد، زاویه رشد ترک از حالت افقی به سمت ترک دیگر، بیشتر تغییر کرده و امکان به هم پیوستگی دو ترک بیشتر و سریع‌تر اتفاق می‌افتد. با توجه به این که شکست در این مسئله از نوع شکست ترد است و شکست به سرعت در قطعه رخ می‌دهد، زاویه رشد ترک



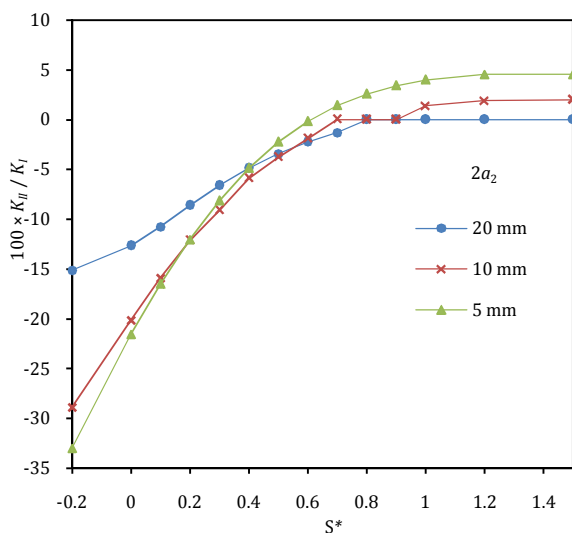
شکل ۹ مقایسه نتایج ضریب شدت تنش مود اول بدون بعد نقطه A برای تحلیل‌های المان محدود توسعه یافته و المان محدود (آباکوس)


 شکل ۱۰ ضریب شدت تنش مود اول بدون بعد نقطه A ( $2a_2 = 20 \text{ mm}$ )

 شکل ۱۱ ضریب شدت تنش مود اول بدون بعد نقطه A ( $2a_2 = 10 \text{ mm}$ )

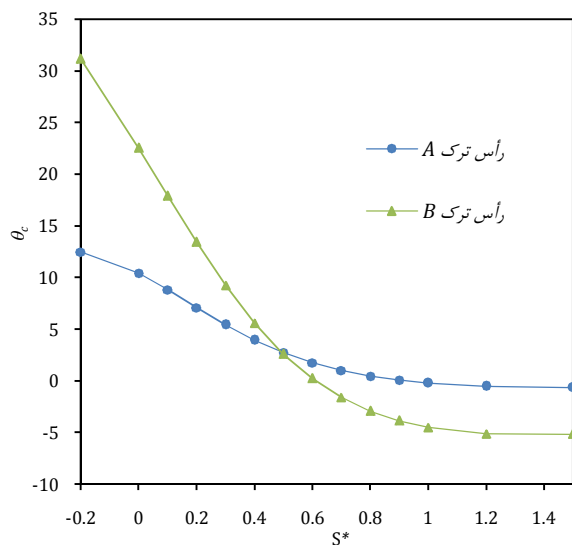




شکل ۱۶ نسبت ضریب شدت تنش مود دوم به مود اول در نوک ترک  $A$  برحسب فاصله داخل صفحه دو ترک ( $H^* = 0.9$ )



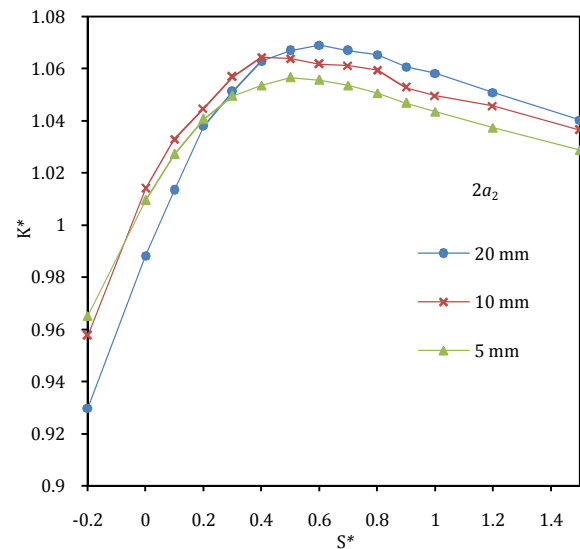
شکل ۱۷ نسبت ضریب شدت تنش مود دوم به مود اول در نوک ترک  $B$  برحسب فاصله داخل صفحه دو ترک ( $H^* = 0.9$ )



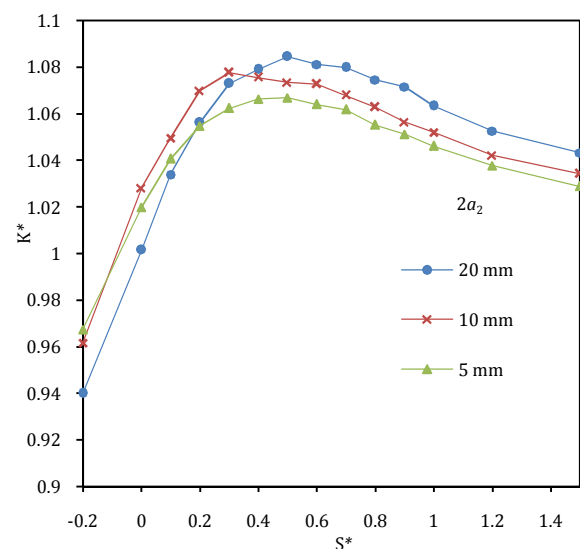
شکل ۱۸ زاویه شروع رشد ترک بر حسب فاصله داخل صفحه دو ترک ( $2a_2 = 5\text{ mm}$   $H^* = 0.9$ )

در ابتدای شکست قطعه از اهمیت خاصی برخوردار است و در به هم پیوستگی ترک‌ها مؤثر است.

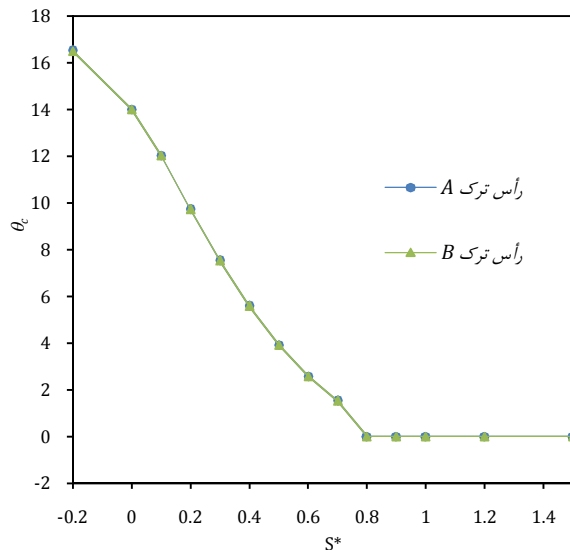
در شکل‌های ۱۶ و ۱۷ نسبت ضریب شدت تنش مود دوم به مود اول برای نوک ترک‌های  $A$  و  $B$  (مطابق شکل ۳) در یک فاصله عمودی مشخص ترک‌ها، استخراج شده است. این نسبت برای طول‌های مختلف ترک ثانویه ترسیم شده است. همان‌طور که در شکل‌ها دیده می‌شود در فاصله‌های بزرگ‌تر افقی دو ترک، نسبت مود دوم به مود اول بسیار کم و در حد صفر است؛ بنابراین شکست دو ترک به صورت مود اول خواهد بود و احتمال به هم پیوستگی آن‌ها بسیار کم است. هرچه فاصله داخل صفحه دو ترک ( $S^*$ ) کاهش می‌یابد، نسبت مود دوم در هر دو نوک ترک افزایش می‌یابد؛ بنابراین احتمال به هم پیوستگی آن‌ها افزایش می‌یابد. از این شکل‌ها مشخص است که برای  $S^* > 0.8$  نسبت مود دوم به مود اول بسیار کم است و می‌توان از آن صرف‌نظر نمود. برای حالتی که طول ترک ثانویه کوچک‌تر از ترک اول باشد، درصد افزایش مود دوم به مود اول، در نوک ترک  $B$  نسبت به نوک ترک  $A$  بیشتر است.



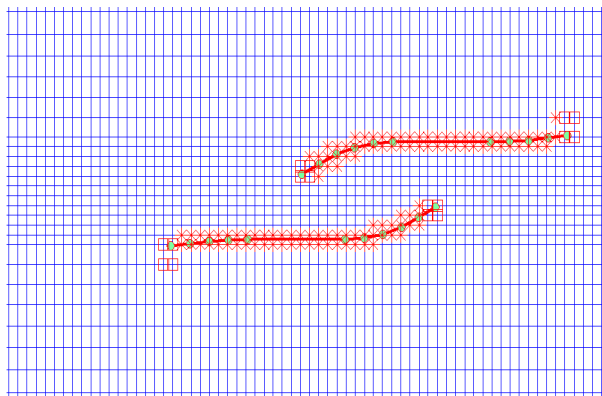
شکل ۱۴ مقایسه ضریب شدت تنش مود اول بدون بعد نقطه  $A$  برای طول‌های مختلف طول ترک ثانویه در حالت  $H^* = 1/0$



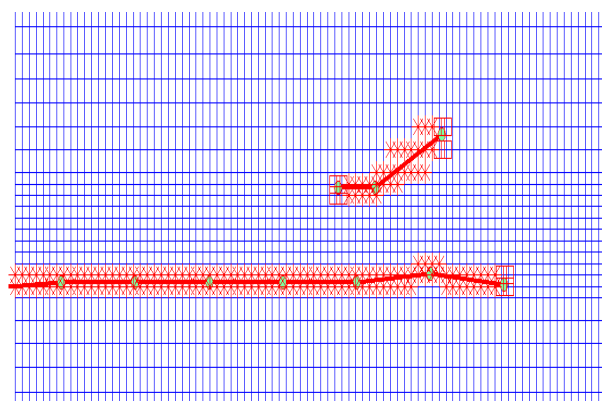
شکل ۱۵ مقایسه ضریب شدت تنش مود اول بدون بعد نقطه  $A$  برای طول‌های مختلف طول ترک ثانویه در حالت  $H^* = 0.9$



شکل ۲۰ زاویه شروع رشد ترک بر حسب فاصله داخل صفحه دو ترک  
( $2a_2 = 20 \text{ mm}$   $H^* = 0.9$ )



شکل ۲۱ نحوه رشد ترک در نمونه  $2a_2 = 20 \text{ mm}$ ,  $S^* = 0.5$ ,  $H^* = 0.9$



شکل ۲۲ نحوه رشد ترک در نمونه  $2a_2 = 5 \text{ mm}$ ,  $S^* = 1/5$ ,  $H^* = 1/5$

با مقایسه نتایج تحلیل‌های رشد ترک با نتایج تست‌های تجربی مراجع ۱۵ و ۱۶ (جدول ۲)، مشاهده می‌شود که در تمام نمونه‌ها به غیر از BDS-02 مسیر رشد ترک‌ها و به هم پیوستگی یا عدم به هم پیوستگی آن‌ها، در تحلیل‌های عددی و تجربی مطابقت دارد که نشان می‌دهد نتایج تحلیل‌ها به واقعیت نزدیک است.

با توجه به این‌که برخی استانداردها از فاصله دو ترک ( $D$ ) به عنوان معیار هم‌راستایی و ترکیب ترک‌ها استفاده کرده‌اند، ضریب شدت تنش بدون بعد برحسب پارامتر بدون بعد  $D^* = \frac{D}{a_1 + a_2}$  در شکل ۲۳ رسم شده است.

زاویه رشد ترک در آغاز شکست، با استفاده از رابطه (۲۲) به دست می‌آید. این زاویه به نسبت مود دوم به مود اول بستگی دارد. در شکل‌های ۱۸ تا ۲۰ زاویه شروع رشد ترک بر حسب فاصله داخل صفحه دو ترک ( $S^*$ ) برای طول‌های مختلف ترک ثانویه و در نوک ترک‌های  $A$  و  $B$  ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در ترک‌های غیرمساوی، زاویه شروع رشد ترک در نوک ترک  $B$  بیشتر است. البته نوک ترک  $A$  بحرانی‌تر است و ابتدا شروع شکست در قطعه از این نقطه، اتفاق می‌افتد.

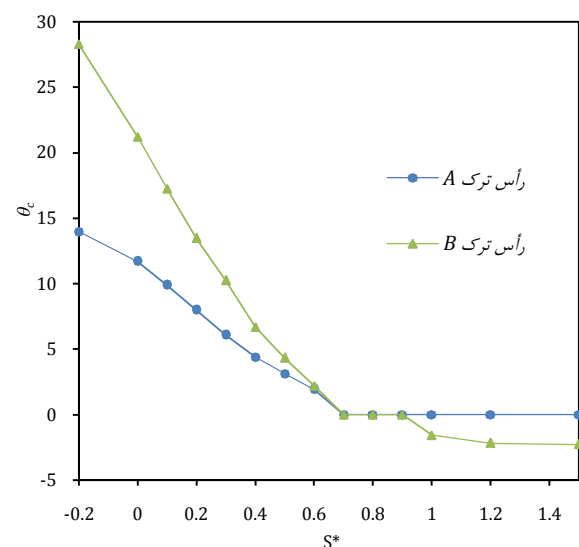
برای بررسی دقیق مسأله، در حالات مختلف نمونه به‌ازای

$$H^* = 1/5, 1/10, 0.9, 0.7, 0.5, 0.3$$

$S^* = 1/5, 1/2, 1/10, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0.0, -0.2$  نمونه تحت بارگذاری جابه‌جایی کنترل قرار می‌گیرد و مسیر رشد ترک در نمونه‌های مختلف با استفاده از شبیه‌سازی المان محدود توسعه یافته و براساس رویه ارائه شده در بخش ۷ تعیین می‌شود. باید در نظر داشت که براساس نتایج تحلیل‌های انجام‌شده، در حالتی که طول ترک‌ها مساوی نباشد، ضریب شدت تنش مؤثر در نوک ترک  $A$  (نوک ترک بزرگ‌تر و نزدیک به ترک دیگر) در تمامی نمونه‌ها بیشتر بوده و آغاز شکست در نمونه‌ها از این نوک ترک شروع می‌شود.

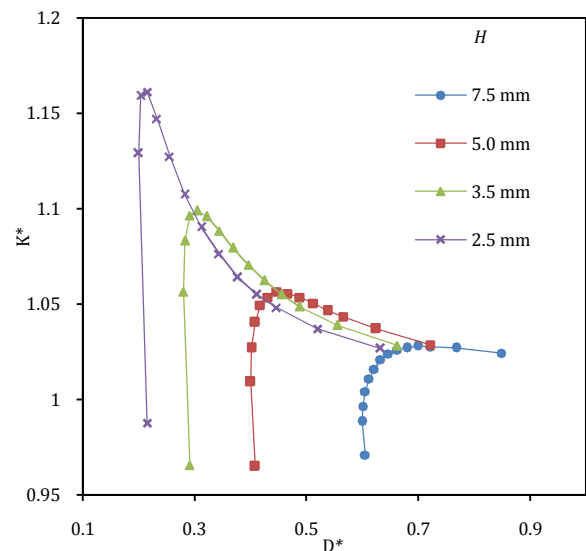
دو نمونه از شبیه‌سازی‌های رشد ترک در شکل‌های ۲۱ و ۲۲ نشان داده شده است. در نمونه اول با مشخصات  $2a_2 = 20 \text{ mm}$ ,  $S^* = 0.5$ ,  $H^* = 0.9$  ( $S = 10H = 18 \text{ mm}$ ) مشاهده می‌شود که دو ترک به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند و به هم می‌پیوندند. در نمونه دیگر با مشخصات  $2a_2 = 5 \text{ mm}$ ,  $S^* = 1/5$ ,  $H^* = 1/5$  ( $S = 7/5H = 7 \text{ mm}$ ) مشاهده می‌شود که با وجود شکست قطعه، دو ترک به یکدیگر متصل نمی‌شوند. به طور کل و بر-اساس شبیه‌سازی‌های انجام شده، می‌توان گفت که در نمونه‌هایی که افزایش ضریب شدت تنش نسبت به صفحه تنها با یک ترک بیشتر از حدود ۷ درصد بوده و درصد ضریب شدت تنش مود دوم نسبت به مود اول در نوک ترک  $A$  بیشتر از یک درصد باشد، ترک‌ها در مسیر رشد به هم می‌پیوندند.

با توجه به شکل‌های ۱۰ تا ۱۲ می‌توان نتیجه گرفت که در طول ترک‌های برابر ( $2a_1 = 2a_2$ ) در کلیه حالاتی که  $1 \leq S^* \leq 1$ ,  $H^* \leq 1$  است، شرایط بهم‌پیوستگی ترک‌ها محقق می‌شود. در حالاتی که  $2a_1 \neq 2a_2$ ، عموماً در حالاتی که  $1 < S^* < 1$ ,  $H^* < 1$  ترک‌ها در مسیر رشد بهم می‌پیوندند.



شکل ۱۹ زاویه شروع رشد ترک بر حسب فاصله داخل صفحه دو ترک  
( $2a_2 = 10 \text{ mm}$   $H^* = 0.9$ )

- [5] WES, *WES 2805: Methods of Assessment for Defects in Fusion welded Joints with Respect to Brittle Fracture and Failure due to Fatigue Crack Growth*, The Japan Welding Engineering Society, 1997.
- [6] CS, *GB/T19624: Safety Assessment for In-Service Pressure Vessels Containing Defects*, Chinese Standards, 2004.
- [7] EUROPEAN FITNESS FOR SERVICE NETWORK, *FITNET Fitness-for-Service (FFS)- Procedure*, Eds. M. Koçak, S. Webster, J.J. Janosch, R.A. Ainsworth, R. Koers, 2008.
- [8] Commissariat a L'Energie Atomique, *A16: Guide for Defect Assessment and Leak Before Break Analysis*, 2002.
- [9] FKM, *Fracture Mechanics Proof of Strength for Engineering Components*, Forschungskuratorium Maschinenbau (FKM), 2004.
- [10] AFCEN, *RSE-M: Inservice Inspection Rules for the Mechanical Components of PWR Nuclear Islands*, French Association for design, construction and in-service inspection rules for nuclear island components, 2005.
- [11] British Energy Generation Ltd., *R6: Assessment of the Integrity of Structures Containing Defects*, 2006.
- [12] BWRVIP-158: *BWR Vessel and Internals Project, Flaw Proximity Rules for Assessment of BWR Internals*, Vol. 1014387, Electric Power Research Institute (EPRI), Palo Alto, CA, pp. 2006.
- [13] S. Konosu, Assessment Procedure for Multiple Cracklike Flaws in Failure Assessment Diagram (FAD), *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 131, No. 4, pp. 041402, 2009.
- [14] S. Konosu, K. Kasahara, Multiple Fatigue Crack Growth Prediction Using Stress Intensity Factor Solutions Modified by Empirical Interaction Factors *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 134, No. 1, pp. 011404, 2012.
- [15] K. Hasegawa, K. Saito, K. Miyazaki, Alignment Rules for Non-Aligned Flaws at LEFM Evaluation Procedures, in *2006 ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference*, Vancouver, BC, Canada, 2006.
- [16] K. Hasegawa, K. Saito, K. Miyazaki, Alignment Rule for Non-Aligned Flaws for Fitness-for-Service Evaluations Based on LEFM, *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 131, No. 4, pp. 041403, 2009.
- [17] A. Carpinteri, R. Brighenti, S. Vantadori, A numerical analysis on the interaction of twin coplanar flaws, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 71, No. 4-6, pp. 485-499, 2004.
- [18] F.-Z. Xuan, J. Si, S.-T. Tu, Rules for the Assessment of Interacting Cracks Under Creep Conditions, *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 132, No. 1, pp. 011405, 2010.
- [19] K. Miyazaki, K. Hasegawa, K. Saito, B. Bezensek, Experimental Study of Ductile Fracture for Non-Aligned Multiple Flaws in a Plate, in *ASME 2009 Pressure Vessels and Piping Conference*, Prague, Czech Republic, 2009, pp. 187-198.
- [20] K. Hasegawa, K. Miyazaki, K. Saito, B. Bezensek, Evaluation of Alignment Rules Using Stainless Steel Pipes With Non-Aligned Flaws, in *ASME 2009 Pressure Vessels and Piping Conference*, Prague, Czech Republic, 2009, pp. 287-298.
- [21] K. Suga, M. Kikuchi, S. Kawasaki, Simulation of Ductile Fracture of Multiple Flaws, *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 134, No. 3, pp. 031205, 2012.
- [22] J.-H. KIM, N.-H. KIM, K. Hasegawa, K. Miyazaki, Ductile fracture simulation of 304 stainless steel pipes with two circumferential surface cracks, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 36, No. 10, pp. 1067-1080, 2013.
- [23] M. Kamaya, A Combination Rule for Circumferential Surface Cracks on Pipe Under Tension Based on Limit Load Analysis, *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 133, No. 2, pp. 021205, 2011.
- [24] J. F. Yau, S. S. Wang, H. T. Corten, A Mixed-Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, No. 2, pp. 335-341, 1980.
- [25] J. Dolbow, N. Moës, T. Belytschko, Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 36, No. 3-4, pp. 235-260, 2000.
- [26] N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko, A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, No. 1, pp. 131-150, 1999.



شکل ۲۲ ضریب شدت تنش مود اول بدون بعد نقطه A برحسب فاصله بدون بعد

براساس استانداردهایی مانند استاندارد بریتانیا (BS 7910) چنانچه  $D^* \leq 1$  باشد، شرط هم‌راستایی دو ترک ارضا می‌شود. با توجه به نتایج به دست آمده، مشاهده می‌گردد که در برخی نمونه‌هایی که  $D^* \leq 1$  است، درصد افزایش ضریب شدت تنش بسیار کمتر از ۶ درصد است و در شبیه‌سازی رشد ترک در این نمونه‌ها نیز دو ترک به هم نمی‌پیوندند؛ بنابراین می‌توان گفت این معیار، محافظه کارانه است.

## ۹- نتیجه گیری

در پژوهش حاضر، ابتدا قوانین هم‌راستایی و ترکیب استانداردهای مختلف برای دو ترک راهبر مجاور هم بررسی گردید. سپس برای بررسی تأثیر و برهم‌کنش ترک‌های مجاور، شکست یک ورق با دو ترک راهبر در مجاورت هم، با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته شبیه‌سازی شده و تأثیر فواصل ترک‌ها و اندازه آن‌ها بر ضرایب شدت تنش بررسی شد. با توجه به نتایج ارائه شده، شرط هم‌راستایی دو ترک در حالت شکست خطی، به صورت  $H < \min(2a_1, 2a_2)$  برای  $2a_1 \neq 2a_2$  و  $H \leq 2a_1 = 2a_2$  پیشنهاد می‌گردد. همچنین شرط ترکیب دو ترک در حالت شکست خطی خطی، به صورت  $S < \min(2a_1, 2a_2)$  برای  $2a_1 \neq 2a_2$  و  $S \leq 2a_1 = 2a_2$  پیشنهاد می‌شود.

## ۱۰- مراجع

- [1] ASME, Boiler and Pressure Vessel Code Section XI, *Rules for Inservice Inspection of Nuclear Power Plant Components*, American Society of Mechanical Engineers, 2010.
- [2] JSME, *Codes for Nuclear Power Generation Facilities: Rules of Fitness for Service for Nuclear Power Plants*, Japan Society of Mechanical Engineers, 2004.
- [3] BS, *BS 7910: Guide to Method for Assessing the Acceptability of Flaws in Metallic Structures*, British Standards Institution, 2005.
- [4] API, *API 579-1/ASME FFS-1: Fitness-for-Service*, American Petroleum Institute, 2007.