



حل مسائل غیرخطی الاستیک در محدوده تراکم‌ناپذیری با استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتری

بهروز حسنی^{1*}، سید مهدی توکلی²، مهدی اردیانی³

- 1- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
 - 2- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
 - 3- دانش آموخته کارشناسی ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
- * مشهد، صندوق پستی 9177948974، b_hassani@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 18 دی 1393
پذیرش: 08 اسفند 1393
ارائه در سایت: 09 اردیبهشت 1394
کلید واژگان:
تحلیل ایزوژئومتری
تابع پایه نرین
مضامین هایپرالاستیسیته در محدوده تراکم
ناپذیری
الگوریتم عددی نیوتن - رافسون

چکیده

در این تحقیق به فرمول‌بندی و حل مسائل الاستیک غیر خطی تقریباً تراکم‌ناپذیر، که به مسائل هایپرالاستیسیته نزدیک به تراکم‌ناپذیری نیز معروفند، با روش تحلیل ایزوژئومتری پرداخته شده است. بدین منظور پس از تعریف اجمالی این دسته از مسائل هایپرالاستیسیته با در نظر گرفتن روابط حاکم بر مسأله که دارای ماهیت غیرخطی است، به خطی‌سازی معادلات برای استفاده از الگوریتم عددی حل بر مبنای تکرار نیوتن - رافسون پرداخته می‌شود. سپس معادلات تعادل در حالت گسسته نوشته شده و ماتریس ضرایب در رهیافت روش ایزوژئومتری استخراج می‌شود. در ادامه با بهره‌گیری از مفاهیم عنوان شده، الگوریتمی برای مسائل غیرخطی الاستیک در محدوده تراکم‌ناپذیری پیشنهاد شده است. با توجه به تغییرشکل‌های بزرگ در مسائل غیرخطی الاستیک، در بکارگیری روش اجزای محدود، علاوه بر وابستگی جواب مسأله به اندازه شبکه المان‌ها که باعث ایجاد دستگاه معادلات با حجم محاسباتی بالا می‌شود، در برخی از مسائل مش بندی مجدد نیز اجتناب‌ناپذیر است. در روش ایزوژئومتری با توجه به استفاده از توابع پایه اسپیلاین که قابلیت انعطاف‌پذیری بالایی در ایجاد هندسه مدل دارد، نیاز به فرایند تولید مش مجدد تا حد زیادی رفع می‌شود. نتایج این تحقیق نشان‌دهنده مزیت روش ایزوژئومتری نسبت به اجزای محدود به دلیل ایجاد دستگاه معادلات کوچکتر و کاهش حجم محاسبات می‌باشد.

Solution of nonlinear nearly incompressible hyperelastic problems by isogeometric analysis method

Behrooz Hassani^{1*}, Seyed Mehdi Tavakkoli², Mehdi Ardiani²

- 1- Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University, Mashhad, Iran.
 - 2- Department of Civil Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
- * P.O.B. 9177948974, Mashhad, Iran, b_hassani@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 08 January 2015
Accepted 27 February 2015
Available Online 29 April 2015

Keywords:
Isogeometric Analysis
NURBS
Nearly Incompressible Hyperelasticity
Newton-Raphson

ABSTRACT

This article is devoted to the derivation of formulation and isogeometric solution of nonlinear nearly incompressible elastic problems, known as nearly incompressible hyperelasticity. After problem definition, the governing equations are linearized for employing the Newton-Raphson iteration method. Then, the problem is discretized by using concepts of isogeometric analysis method and its solution algorithm is devised. To demonstrate the performance of the proposed approach, the obtained results are compared with the finite elements solutions. Due to large deformations in this kind of problems, the finite element method requires a relatively large number of elements, as well as the need for remeshing in some problems, that result in a large system of equations with a high computational cost. In the isogeometric analysis method, B-Spline and NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) basis functions provide a good flexibility in modeling of geometry without any need for further remeshing. The examples studied in this article indicate that by using the isogeometric approach good quality results are obtained with a smaller system of equations and less computational cost. Also, influence of different volumetric functions for the nearly incompressible materials is investigated.

1- مقدمه

مضامین در ناحیه الاستیک، رابطه خطی تنش- کرنش نیازمند بازنگری است. در مسائل هایپرالاستیسیته¹ مقادیر تنش بر اساس تابع انرژی کرنشی ذخیره

در بسیاری از مسائل مهندسی در نظر گرفتن تغییرشکل‌های غیرخطی و بزرگ در محدوده رفتار الاستیک مواد برای طراحی ایمن، بهینه و استفاده حداکثری از قابلیت مضامین، حائز اهمیت است. با توجه به رفتار غیرخطی این

1- Hyperelasticity

Please cite this article using:

B. Hassani, S. M. Tavakkoli, M. Ardiani, Solution of nonlinear nearly incompressible hyperelastic problems by isogeometric analysis method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 6, pp. 240-248, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

B. Hassani, S. M. Tavakkoli, M. Ardiani, Solution of nonlinear nearly incompressible hyperelastic problems by isogeometric analysis method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 6, pp. 240-248, 2015 (In Persian)

وابستگی به گرادیان تغییرات ذره و تانسورهای گرین-کوشی⁸، تابع انرژی کرنشی ذخیره شده بر واحد حجم، نسبت به نقاط آغازین و پایانی توسط روابط (1) و (2) قابل تعریف است [17,15,14].

$$\psi(C(X), X) = \int_{t_0}^t S(C(X), X) : \dot{C} dt \quad (1)$$

$$S(C(X), X) = 2 \frac{\partial \psi(C(X), X)}{\partial C} = \frac{\partial \psi(C(X), X)}{\partial E} \quad (2)$$

رابطه بین تنش و کرنش در معادله (2) غیرخطی است. با خطی‌سازی رابطه عنوان شده، ماتریس مرتبه چهار الاستیسیته در دستگاه لاگرانژی و اویلری⁹ به صورت روابط (3) و (4) حاصل می‌شود [17].

$$DS[u] = \tilde{C} : DE[u] = \sum_{i,j=1}^3 \tilde{C}_{ij} DE[u]_{ij} \quad (3)$$

$$\tilde{C} = \frac{\partial S}{\partial E} = 2 \frac{\partial S}{\partial C} = \frac{4 \partial^2 \psi}{\partial C \partial C} \quad (4)$$

با در نظر گرفتن مصالح ایزوتروپیک¹⁰ با رفتار مادی همسانگرد¹¹ رابطه بین تابع انرژی کرنشی و تانسورهای گرین-کوشی مستقل از جهت بردار مواد و وابسته به نامتغیرهای¹² آن می‌باشد. با بازنویسی رابطه (2) تانسورهای تنش ثانویه پیولا-کیرشف و کوشی برای مصالح ایزوتروپیک طبق روابط (5) و (6) حاصل خواهد شد [17].

$$S = 2 \frac{\partial \psi}{\partial C} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_c} \frac{\partial I_c}{\partial C} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial II_c} \frac{\partial II_c}{\partial C} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial III_c} \frac{\partial III_c}{\partial C} = 2\psi_I I + 4\psi_{II} C + 2J^2 \psi_{III} C^{-1} \quad (5)$$

$$\sigma = J^{-1} F S F^T = 2J^{-1} \psi_I b + 4J^{-1} \psi_{II} b^2 + 2J \psi_{III} I \quad (6)$$

با توجه به روابط (7-10) برای مواد در محدوده تراکم‌ناپذیری تابع انرژی کرنشی ذخیره شده به دو مؤلفه اعوجاجی و انرژی کرنشی حجمی¹³ و تانسور الاستیسیته لاگرانژی و اویلری در این وضعیت به سه مؤلفه اعوجاجی، فشردگی و حجمی قابل تجزیه است [17].

$$\Psi(C) = \hat{\Psi}(C) + U(J) \quad (7)$$

$$S = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial C} = 2 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial C} + 2 \frac{dU}{dJ} \frac{dJ}{dC} = 2 \frac{\partial \hat{\Psi}(C)}{\partial C} + p J C^{-1} \quad (8)$$

$$\tilde{C} = \hat{\tilde{C}} + \tilde{C}_p + \tilde{C}_k \quad (9)$$

$$\hat{\tilde{C}} = 2 \frac{\partial S'}{\partial C} = 4 \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial C \partial C}, \quad \tilde{C}_p = 2p \frac{\partial (J C^{-1})}{\partial C} \quad (10)$$

$$\tilde{C}_k = 2J C^{-1} \otimes \frac{\partial p}{\partial C} = J^2 \frac{d^2 U}{dJ^2} C^{-1} \otimes C^{-1}$$

2-2- استخراج و خطی‌سازی معادلات تعادل

معادله کار مجازی¹⁴ بر مبنای سرعت مجازی¹⁵ برای مسائل غیرخطی هندسی و مواد با توجه به تابع انرژی کرنشی مورد استفاده، شرایط بارگذاری

شده¹ تعریف می‌شود. با توجه به ماهیت غیرخطی رابطه حاکم بر مسأله، نیازمند خطی‌سازی روابط برای استفاده از الگوریتم‌های حل عددی مانند نیوتن-رافسون است. اولین بار حل مسائل غیرخطی الاستیک توسط ترنر و همکارانش [1] با استفاده از روش اجزای محدود انجام شد.

از جمله تحقیقات اولیه در این زمینه می‌توان به حل مسأله کمانش توسط کاپور [2]، کالاجر [3,4] و هولاند [5] بر پایه روش اجزای محدود اشاره کرد. فرایند اعمال تدریجی بار در چندین مرحله توسط ترنر و همکاران [1] و ارگریس [6,7] مطرح و در ادامه تحقیقات، استفاده از روش حل بر مبنای تکرار نیوتن-رافسون توسط اُدن [8]، مالت و مارکل [9] پیشنهاد گردید. اُدن [10]، هایسر و همکاران [11] و زینکوویچ [12] روش نیوتن-رافسون را بهبود بخشیده و بریبا و کانر [13] مفهوم اعمال تدریجی بار و ایجاد همگرایی در هر مرحله افزایش بار را معرفی نمودند. برای آشنایی با مفاهیم بنیادی مسائل غیرخطی مصالح و هندسی مراجع [14-18] پیشنهاد می‌شوند.

با توجه به پیشرفت‌های قابل ملاحظه در فناوری طراحی به کمک کامپیوتر² می‌توان هندسه‌های پیچیده را با استفاده از توابع پایه ب-اسپلاین³ و یا انواع ارتقاء یافته آن نظیر نربز و ت-اسپلاین⁴ مدل‌سازی کرد [19,20]. استفاده از این توابع پایه در مدل‌سازی هندسه و تقریب تابع مجهول مسائل مهندسی نخستین بار توسط هیوز و همکارانش با نام روش تحلیلی ایزوژئومتری⁵ پیشنهاد گردید [21]. برای آشنایی بیشتر با مفاهیم بنیادی روش تحلیلی ایزوژئومتری مراجع [22-24] پیشنهاد می‌شوند. به دلیل استفاده از توابع پایه نربز در روش ایزوژئومتری با قابلیت انعطاف پذیری زیاد در تولید هندسه‌های پیچیده، فرایند تولید مش مجدد در مسائل غیرخطی الاستیک تا حد زیادی رفع و بنابراین سرعت حل نسبت به روش اجزای محدود افزایش خواهد یافت. نخستین بار توجه به مفهوم ایزوژئومتری در تغییرشکل‌های بزرگ توسط هیوز و همکاران [25] مطرح شد. از دیگر مقالات در زمینه استفاده از روش ایزوژئومتری در مسائل غیرخطی الاستیک در محدوده تراکم‌ناپذیری انتشار یافته، مراجع [26,27] می‌باشد.

در بخش دوم این تحقیق به مرور خلاصه‌ای از فرمول‌بندی مصالح هایپرالاستیسیته در محدوده تراکم‌ناپذیری پرداخته شده و ضمن بیان معادله تعادل حاکم بر مسأله، خطی‌سازی آن برای استفاده از روش حل بر مبنای تکرار نیوتن-رافسون انجام گرفته است. در بخش سوم ضمن اشاره به مفهوم روش ایزوژئومتری، توابع مجهول و هندسه در مسائل هایپرالاستیسیته خطی‌سازی شده توسط توابع پایه و متغیرهای کنترلی⁶ گسسته‌سازی⁷ می‌شوند. در انتهای این بخش الگوریتمی برای مسائل غیرخطی الاستیک بر پایه روش تحلیلی ایزوژئومتری پیشنهاد شده است. بخش چهارم به نتایج حل و مقایسه آن با روش اجزای محدود اختصاص یافته است. در ادامه نتیجه تحقیق و مقایسه انجام شده گزارش می‌شود.

2- استخراج روابط و معادلات حاکم بر مسأله تعریفی

2-1- مصالح هایپرالاستیسیته در محدوده تراکم‌ناپذیری

در مسائل هایپرالاستیسیته با توجه به استقلال کار انجام شده از مسیر ذره و

8- Green-Cauchy Tensor
9- Lagrangian & Eulerian Elasticity Tensor
10- Isotropic Material
11- Constitutive Behavior
12- Invariants
13- Volumetric Strain Energy
14- Virtual Work
15- Virtual Velocity

1- Stored Strain Energy Function
2- Computer Aided Design (CAD)
3- B-Spline
4- T-Spline
5- Isogeometric Analysis
6- Control Variable
7- Discretization

3- تحلیل ایزوژئومتری در مسائل هایپرالاستیسیته در محدوده تراکم‌ناپذیری

اساس روش تحلیل ایزوژئومتری [21] برگرفته از پیشرفت‌های صنعت طراحی به کمک کامپیوتر در صنعت مدل‌سازی هندسی² است. مدل‌سازی منحنی، سطوح و احجام در این شاخه به وسیله توابع پایه ب-اسپلاین و انواع ارتقا یافته آن نظیر نرَبز و ت-اسپلاین انجام می‌شود. در این روش از نقاط کنترلی³ شامل مؤلفه‌های علاوه بر مؤلفه‌های تعریف هندسه با شرط اقناع معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله استفاده می‌شود و با گسسته‌سازی محیط پیوسته به وسیله این نقاط تعریفی و استفاده آنها در تقریب تابع مجهول جواب مسئله به جای استفاده از المان در روش اجزای محدود، شبکه در روش تفاضل محدود⁴ یا مجموعه‌ای از نقاط در روش‌های بدون مش⁵ باعث ایجاد رویه‌ای از جواب خواهد شد. نتایج بسیار خوبی توسط هیوز و گروه تحقیقاتی آن در مکانیک محاسباتی با بهره‌گیری از این روش موجود است [21، 28-31]. همچنین توانایی این ایده در معادلات دیفرانسیل معمولی⁶ به وسیله حسنی و همکاران مورد بررسی قرار گرفته [32، 33] است. حجم نرَبز با استفاده از توابع پارامتریک به صورت روابط (18) و (19) مانند شکل 2، قابل تعریف است.

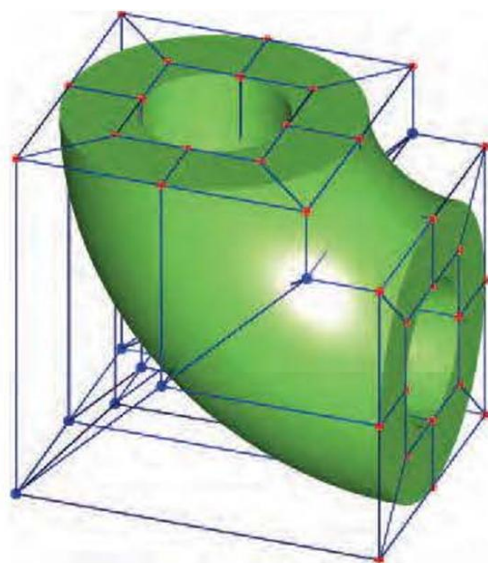
$$V(\xi, \eta, \varsigma) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} R_{ijk}(\xi, \eta, \varsigma) P_{ijk} \quad (18)$$

$$R_{ijk}(\xi, \eta, \varsigma) = \frac{N_{i,p_1}(\xi) N_{j,p_2}(\eta) N_{k,p_3}(\varsigma) \omega_{i,j,k}}{\sum_{\substack{e=0 \\ f=0 \\ g=0}}^{n_1} N_{e,p_1}(\xi) N_{f,p_2}(\eta) N_{g,p_3}(\varsigma) \omega_{e,f,g}} \quad (19)$$

i امین تابع ب-اسپلاین از درجه p با بردار گرهی $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m_1}\}^T$ در راستای ξ توسط رابطه بازگشتی⁷ (20) تعریف می‌شود.

$$N_{i,0}(r) = \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \xi_{i+1} \leq \xi < \xi_i \end{cases} \quad (20)$$

$$N_{i,p} = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$



شکل 2 ترسیم حجم با استفاده از توابع پایه و نقاط کنترلی [24]

و شرایط مرزی با توجه به شکل 1، توسط رابطه (11) قابل تعریف است. [17]

$$\delta W(\phi, \delta v) = \delta W_{\text{int}}(\phi, \delta v) - \delta W_{\text{ext}}(\phi, \delta v) = \int_V \sigma : \delta d \, dv - \int_V f \cdot \delta v \, dv - \int_{\partial V} t \cdot \delta v \, da = 0 \quad (11)$$

با توجه به حصول یک رابطه غیرخطی، با بهره‌گیری از الگوریتم عددی نیوتن-رافسون نیاز به خطی‌سازی هر یک از مؤلفه‌های کار داخلی و خارجی معادله طبق روابط (12-16) است. البته باید توجه داشت که حاصل خطی‌سازی کار خارجی برای نیروی کالبدی¹ وزن مورد استفاده در این تحقیق صفر بوده و به بررسی نیروی سطحی فشار نرمال $t = pn$ پرداخته شده است. [17]

$$\delta W(\phi_k, \delta v) + D\delta W(\phi_k, \delta v)[u] = [\delta W_{\text{int}}(\phi_k, \delta v) - \delta W_{\text{ext}}(\phi_k, \delta v)] + [D\delta W_{\text{int}}(\phi_k, \delta v)[u] - D\delta W_{\text{ext}}(\phi_k, \delta v)[u]] = 0 \quad (12)$$

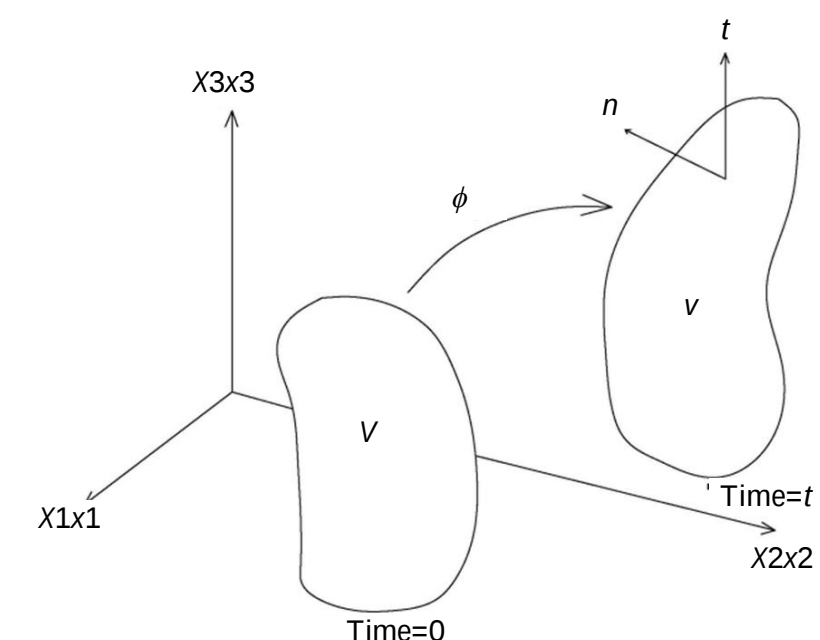
$$D\delta W_{\text{int}}(\phi, \delta v)[u] = \int_V \delta d : (\hat{c} + \bar{c}_p) : \varepsilon \, dv + \int_V \sigma : [(\nabla u)^T (\nabla \delta v)] \, dv + \bar{k} v (\bar{\text{div}} \delta v) (\bar{\text{div}} u) \quad (13)$$

$$\bar{k} = J \frac{d^2 U}{dJ^2} = J \frac{dp}{dJ} \quad (14)$$

$$D\delta W_{\text{ext}}^p(\phi, \delta v)[u] = \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \times \delta v \right) + \left(\frac{\partial \delta v}{\partial \eta} \times u \right) \right] d\xi d\eta - \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \times \delta v \right) + \left(\frac{\partial \delta v}{\partial \xi} \times u \right) \right] d\xi d\eta \quad (15)$$

$$n = \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{\partial x}{\partial \eta}}{\left\| \frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{\partial x}{\partial \eta} \right\|} \quad (16)$$

$$da = \left\| \frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{\partial x}{\partial \eta} \right\| d\xi d\eta \quad (17)$$



شکل 1 اصل کار مجازی [17]

مؤلفه اول معادله بیانگر کار نیروهای خارجی⁵ $F(x)$ و داخلی⁶ $T(x)$ و مؤلفه مؤلفه دوم بیانگر شیب منحنی⁷ $K(x)$ نیرو-جابجائی است. در فضای گسسته گسسته این معادله را با توجه به متغیرهای کنترلی و روابط فوق بازنویسی کرده و از الگوریتم حل بر مبنای تکرار نیوتن-رافسون استفاده می‌شود. با نوشتن معادله کار مجازی بر مبنای سرعت مجازی برای هر المان گره‌ای ایزوژئومتری⁸ شامل متغیرهای کنترلی موثر a و در نظر گرفتن تمامی المان‌های گره‌ای شامل این متغیر کنترلی، به تعمیم آن به کل فضای مسأله طبق رابطه (24-26) پرداخته می‌شود؛ با توجه به این مطلب که معادله حاصل برای هر سرعت مجازی متغیرهای کنترلی برقرار است:

$$\delta W(\phi, \delta v) = \sum_{a=1}^N \delta W(\phi, R_a \delta v_a) = \sum_{a=1}^N \sum_{e=1}^N \delta v_a \cdot \int_{V^{(e)}} \sigma \nabla R_a dv - \sum_{a=1}^N \sum_{e=1}^N \delta v_a \cdot \left(\int_{V^{(e)}} R_a f dv + \int_{\partial V^{(e)}} R_a t da \right) = 0 \quad (24)$$

$$R_a = T_a - F_a = 0 \quad (25)$$

$$D\delta W^{(e)}(\phi, R_a \delta v_a) [R_b u_b] = D(\delta v_a \cdot (T_a^{(e)} - F_a^{(e)})) [R_b u_b] = \delta v_a \cdot (D \cdot (T_a^{(e)} - F_a^{(e)})) [R_b u_b] = \delta v_a \cdot K_{ab}^{(e)} u_b \quad (26)$$

ماتریس ضرایب K_{ab}^e رابطه بین تغییرات نیرو در متغیر کنترلی a را نسبت به تغییر مکان در متغیر کنترلی b بیان کرده و با جایگذاری روابط (21) و (22) در معادلات بیان شده در قسمت خطی‌سازی، ماتریس ضرایب به مؤلفه‌های کار داخلی شامل ساختار رفتاری⁸ $K_{c,ab}^e$ ، تنش ابتدایی⁹ $K_{\sigma,ab}^e$ ، مؤلفه حجمی $K_{v,ab}^e$ و یک مؤلفه ناشی از کار خارجی با نام مؤلفه نیروهای خارجی ماتریس ضرایب¹⁰ $K_{p,ab}^e$ بر مبنای روابط (27-31) قابل تجزیه است.

$$K_{ab}^{(e)} = K_{c,ab}^{(e)} + K_{\sigma,ab}^{(e)} + K_{k,ab}^{(e)} - K_{p,ab}^{(e)} \quad (27)$$

$$[K_{c,ab}^{(e)}]_{ij} = \int_{V^{(e)}} \sum_{k,l=1}^3 \frac{\partial R_a}{\partial x_k} \tilde{c}_{ijkl} \frac{\partial R_b}{\partial x_l} dv; i, j = 1, 2, 3 \quad (28)$$

$$[K_{\sigma,ab}^{(e)}]_{ij} = \int_{V^{(e)}} \sum_{k,l=1}^3 \frac{\partial R_a}{\partial x_k} \sigma_{kl} \frac{\partial R_b}{\partial x_l} \delta_{ij} dv; i, j = 1, 2, 3 \quad (29)$$

$$[K_{p,ab}^{(e)}]_{ij} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \left[k_{p,ab}^{(e)} \right]_k; i, j = 1, 2, 3$$

$$k_{p,ab} = \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial x}{\partial \xi} \left(\frac{\partial R_a}{\partial \eta} R_b - \frac{\partial R_b}{\partial \eta} R_a \right) da + \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial x}{\partial \eta} \left(\frac{\partial R_a}{\partial \xi} R_b - \frac{\partial R_b}{\partial \xi} R_a \right) da \quad (30)$$

با تعریف بردار گرهی $\varsigma = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ توابع ب-اسپیلین مرتبه دوم توسط رابطه (20) در شکل 3، ترسیم می‌شود.

بردارهای گرهی $\eta = \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{m_2}\}$ و $\varsigma = \{\varsigma_0, \varsigma_1, \dots, \varsigma_{m_3}\}$ راستاهای ς, η از درجه p_2, p_3 نیز مشابه رابطه فوق تعریف می‌شوند. بردار گرهی در یک راستا با تعداد تکرار $p+1$ گره ابتدا و انتها را بردار گرهی باز یا نامتناوب¹ نامیده که تعداد نقاط گره‌ای آن $m = n + p + 1$ می‌باشد. همچنین فاصله (ξ_i, ξ_{i+1}) با تعداد $p+1$ تابع پایه‌ای غیرصفر از $N_{i-p,p}(\xi) \dots N_{i,p}(\xi)$ را بازه گره‌ای² نامیده می‌شود [19, 20, 34].

در روش ایزوژئومتری هندسه مدل توسط توابع پایه و نقاط کنترلی تولید و با گسسته‌سازی فضای مسأله، این توابع پایه برای تقریب فضای جواب با نام توابع شکل³ مشابه توابع درون یاب⁴ در روش اجزای محدود مورد استفاده قرار می‌گیرد. ایجاد رویه جواب در این روش با افزودن یک مؤلفه به نقاط کنترلی علاوه بر مؤلفه‌های تعریف هندسه حاصل خواهد شد. بنابراین با توجه به تعریف هندسه مسأله در فضای 2 یا 3 بعدی، جواب مسأله در یک فضا بالاتر حاصل می‌شود. در گسسته‌سازی فضای مسأله هاپیرالاستیسیته در محدوده تراکم‌ناپذیری با استفاده از توابع پایه نریز و متغیرهای کنترلی از روابط (21) و (22) استفاده می‌شود.

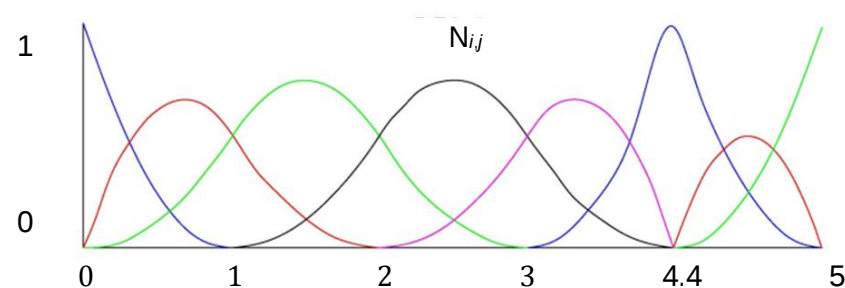
$$\begin{aligned} X &= \sum_{a=1}^n R_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) X_{pa} \\ v &= \sum_{a=1}^n R_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) v_{pa} \\ u &= \sum_{a=1}^n R_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) u_{pa} \\ F &= \sum_{a=1}^n x_{pa} \otimes \nabla_0 R_a \\ C &= \sum_{a,b} (x_{pa} \cdot x_{pb}) \nabla_0 R_a \otimes \nabla_0 R_b \end{aligned} \quad (21)$$

$$d = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n (v_{pa} \otimes \nabla R_a + \nabla R_a \otimes v_{pa}) \quad (22)$$

با توجه به تعریف R به وسیله بردارهای گره‌ای در فضای پارامتریک، محاسبه $\nabla_0 R$ با انتقال از فضای فیزیکی به فضای پارامتریک توسط رابطه (23) امکان‌پذیر است.

$$\nabla_0 R = \frac{\partial R}{\partial X} = \frac{\partial R}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial R}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{\partial R}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial X} \quad (23)$$

از خطی‌سازی رابطه کار مجازی $\{dW(\phi, dv)[u] + DdW(\phi, dv)[u] = 0\}$



شکل 3 ترسیم توابع ب-اسپیلین [24]

5- External Force
6- Internal Force
7- Tangent Stiffness Matrix
8- Constitutive Component
9- Initial Stress Component
10- External Force Component

1- Open Knot Vector (Non periodic Knot Vector)
2- Knot Span
3- Shape Function
4- Interpolation Function

تراکم‌ناپذیری پیشنهاد می‌شود.

1. وارد نمودن مشخصات هندسه (بردارهای گره‌ای، نقاط کنترلی و وزن توابع پایه)، تعریف مقایر مواد ایزوتروپیک در محدوده تراکم‌ناپذیری و مقادیر تحلیل.

2. ایجاد حلقه بر روی سری افزایشی بار:

1-2. محاسبه مقدار افزایش بار در هر مرحله ΔF_i

2-2. محاسبه مقدار بار در مرحله $\Delta F_i = F_i + \Delta F_i$

3-2. محاسبه مقدار باقی‌مانده‌های نقاط کنترلی $R_i = R_i - \Delta F_i$

4-2. ایجاد حلقه همگرایی برای حصول $\|R_i\| / \|F_i\| < \varepsilon$

1-4-2. محاسبه مقدار K_i

2-4-2. حل معادله $K_i u_i = F_i$

3-4-2. محاسبه مختصات جدید نقاط کنترلی $x_{pi} = x_{pi} + u_i$

4-4-2. محاسبه نیروهای داخلی T_i

5-4-2. محاسبه باقی‌مانده‌های وزنی $R_i = T_i - F_i$

5-2. پایان حلقه همگرایی

3. پایان حلقه سری افزایشی بار.

4- ارائه مثال‌ها

در این بخش ابتدا نتایج روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک در مسائل هایپرلاستیسیته در محدوده تراکم‌ناپذیری با یکدیگر مقایسه و در انتها با ارائه یک مثال به بررسی تاثیر انواع توابع انرژی کرنشی حجمی در همگرایی جواب پرداخته شده است. لازم به ذکر است که در این تحقیق از مصالح نئو-هوکین در محدوده تراکم‌ناپذیری با تابع انرژی کرنشی رابطه (38) استفاده شده است.

$$\Psi(C) = \hat{\Psi}(C) + U(J) = \frac{\mu}{2}(\hat{I}_C - 3) + U(J) \quad (38)$$

4-1- مدل سازی تیر طره⁵ تحت اثر بارگذاری در انتها

مدل تحلیلی ارائه شده در این مسأله، یک مستطیل با طول 15 و عرض 2 می‌باشد. شرایط هندسی، بارگذاری و تکیه‌گاهی در شکل 4، نشان داده شده است. بارگذاری در 100 مرحله با مقدار همگرایی⁶ $\varepsilon = 1 \times 10^{-8}$ به صورت سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. در روش اجزای محدود، از 3000 المان چهار گره‌ای مستطیلی⁷ شامل 3171 گره و برای انتگرال‌گیری در هر المان از 4 نقطه گوسی استفاده شده است که دستگاه معادله ایجاد برای حل، ماتریس مربعی با 6342 درایه در هر راستا است. در روش ایزوژئومتریک از توابع پایه ب-اسپیلاین درجه 2 برای تقریب هندسه و تابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$\xi = \{0, 0, 0, 0.1, 0.017, 0.034, \dots, 0.969, 0.986, 1, 1, 1\}; m_\xi = 64$$

$$\eta = \{0, 0, 0, 0.14, 0.28, 0.42, 0.56, 0.7, 0.84, 1, 1, 1\}; m_\eta = 12$$

همچنین برای انتگرال‌گیری در هر المان گره‌ای از 9 نقطه گوسی استفاده شده است. با استفاده از رابطه $m = n + P + 1$ تعداد نقاط کنترلی در هر راستا $P_\xi = 61$; $P_\eta = 9$, $P_{\text{total}} = 549$ می‌باشد که دستگاه معادله ایجاد برای حل، ماتریس مربعی با 1098 درایه در هر راستا است.

توزیع مختصات نقاط کنترلی در شکل 4-ب با گام 0/25 به صورت

$$K_{(k,ab)}^{(e)} = \bar{k} v^{(e)} \bar{\nabla} R_a \otimes \bar{\nabla} R_b, \quad \bar{\nabla} R_i = \frac{1}{v^{(e)}} \int_{v^{(e)}} \nabla R_i dv \quad (31)$$

با مرتب‌سازی معادلات حاصله دستگاه معادله، رابطه (32) برای حل بر مبنای روش نیوتن-رافسون حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} K(x_k)u = -R(x_k) \\ x_{k+1} = x_k + u \end{cases} \quad (32)$$

در مسائل غیرخطی اگرچه وارد نمودن تمام بار خارجی در یک مرحله به صورت تئوری امکان‌پذیر است، اما در عمل بار خارجی F به صورت یک سری افزایشی¹ در چند مرحله طبق رابطه (33) بر جسم وارد می‌شود.

$$F = \sum_{a=1}^l \Delta F_i \quad (33)$$

در روش ایزوژئومتریک هندسه و حل مسأله در فضای فیزیکی $\{x, y, z\}$ توسط متغیرهای کنترلی و توابع پایه تعریف می‌شود. این توابع پایه توسط بردارهای گره‌ای در فضای پارامتریک $\{\xi, \eta, \zeta\}$ قابل محاسبه بوده و با توجه به روش انتگرال‌گیری گوس² نیازمند انتقال از فضای پارامتریک به فضای الگو³ $\{r, s, t\}$ می‌باشد. بنابراین انتگرال‌گیری در فضای فیزیکی با دو انتقال از فضای الگو به فضای پارامتریک و سپس به فضای فیزیکی همراه خواهد بود. برای نگاشت‌های ذکر شده ماتریس‌های ژاکوبی⁴ به صورت روابط (34) و (35) و (36) و (37) تعریف می‌شوند.

$$dx dy dz = \det J_1 d\xi d\eta d\zeta = \det J_1 \det J_2 dr ds dt \quad (34)$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}[(\xi_{i+1} - \xi_i)r + (\xi_{i+1} + \xi_i)] \\ \eta &= \frac{1}{2}[(\eta_{i+1} - \eta_i)s + (\eta_{i+1} + \eta_i)] \\ \zeta &= \frac{1}{2}[(\zeta_{i+1} - \zeta_i)t + (\zeta_{i+1} + \zeta_i)] \end{aligned} \quad (36)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} & \frac{\partial \zeta}{\partial r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} & \frac{\partial \zeta}{\partial s} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\xi_{i+1} - \xi_i) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\eta_{i+1} - \eta_i) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\zeta_{i+1} - \zeta_i) \end{bmatrix} \quad (37)$$

بطور خلاصه گام‌های زیر برای حل مسأله هایپرلاستیسیته در محدوده

- 1- Series of Increments
- 2- Gauss Quadrature
- 3- Parent Space
- 4- Jacobian Matrix

5- Cantilever Beam
6- Tolerance
7- 4-Noded Bilinear Quadrilateral

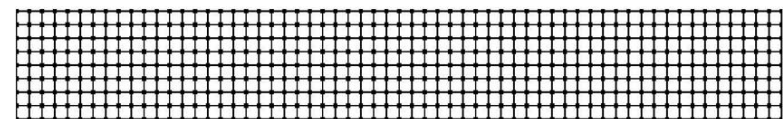
$P_\xi = \{0, 0.25, 0.5, \dots, 15\}$, $P_\eta = \{0, 0.25, 0.5, \dots, 2\}$ می‌باشد.

مقادیر خواص مکانیکی مواد و تابع انرژی کرنشی تعریفی به قرار
 $\rho=0$; $\mu=100$; $\kappa=100$; $U(J)=0.5\kappa(J-1)^2$ است.

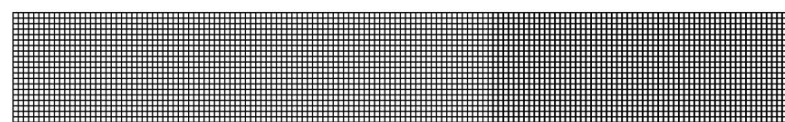
نتایج تغییرات حجم مدل تعریفی در جدول 1، و نتایج تحلیلی آن در شکل 5، قابل مشاهده می‌باشد.



(الف)



(ب)

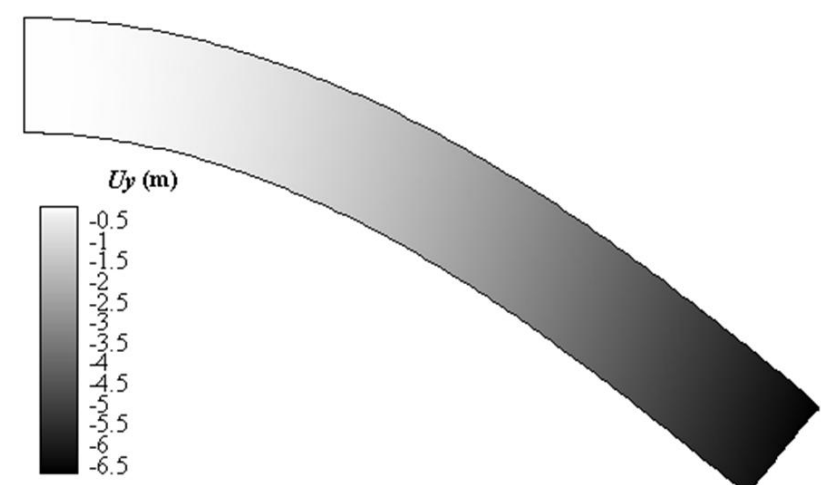


(ج)

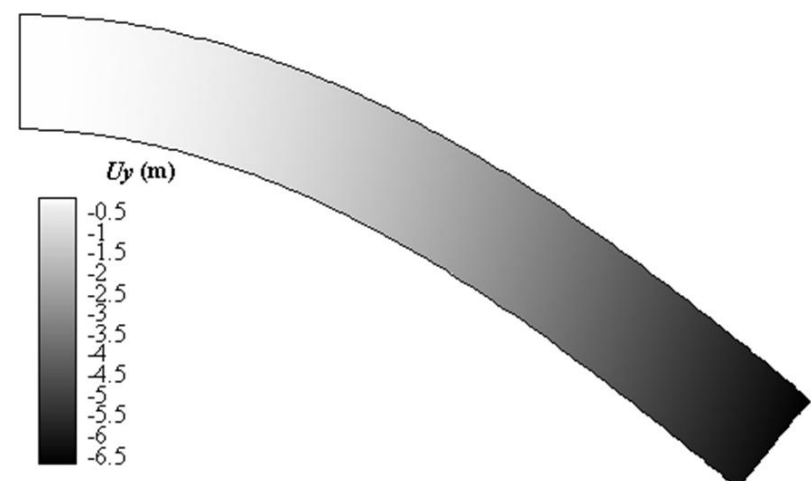
شکل 4 (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب) شبکه کنترلی¹ در روش ایزوژئومتریک (ج) مش بندی اولیه در روش اجزای محدود

جدول 1 تغییرات حجم آغازین و پایانی در روش اجزای محدود و ایزوژئومتریک

روش تحلیل	حجم آغازین	حجم پایانی
روش اجزای محدود	30/000000	30/007561
روش ایزوژئومتریک	29/996998	30/001080

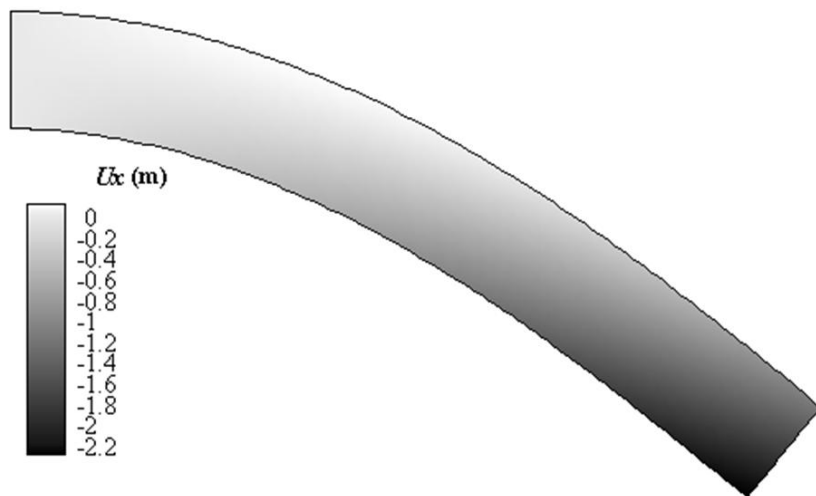


(الف)

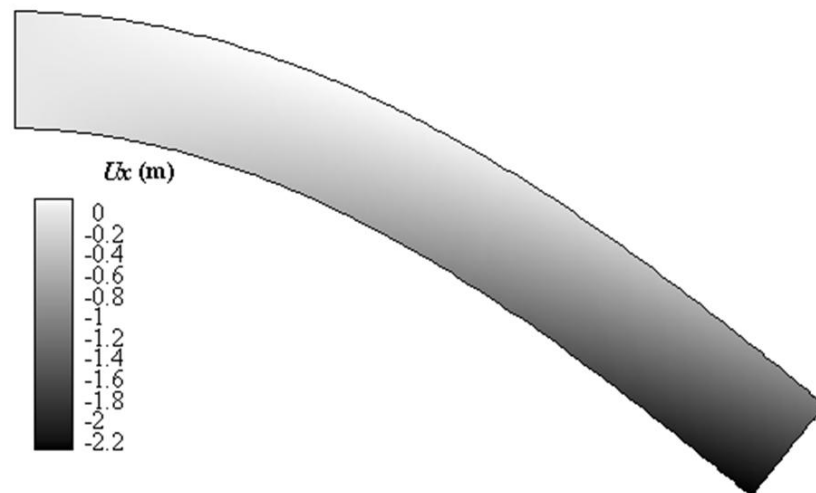


(ب)

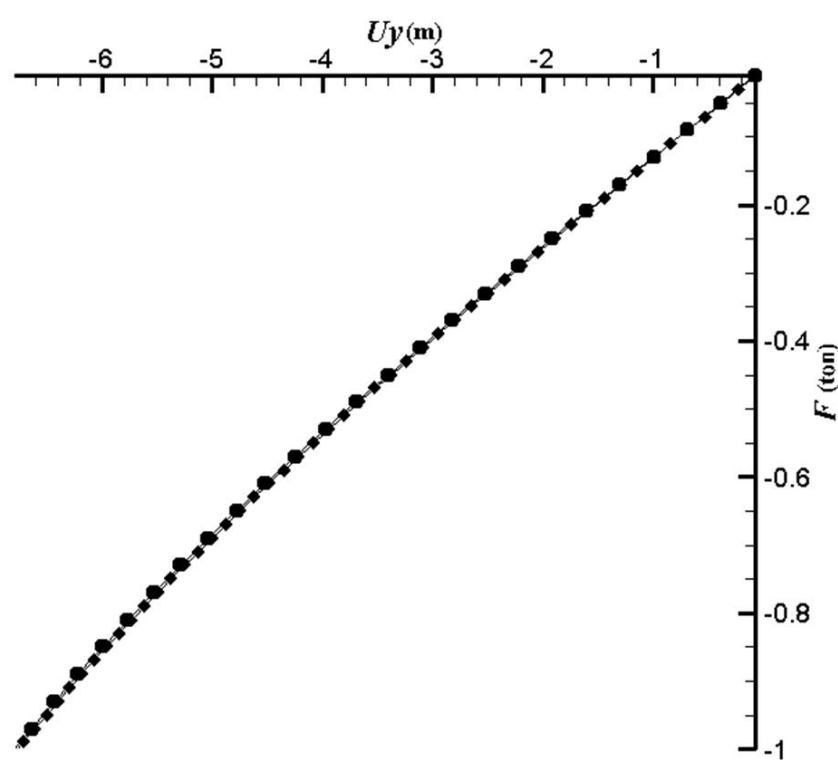
1- Control Net



(ج)



(د)



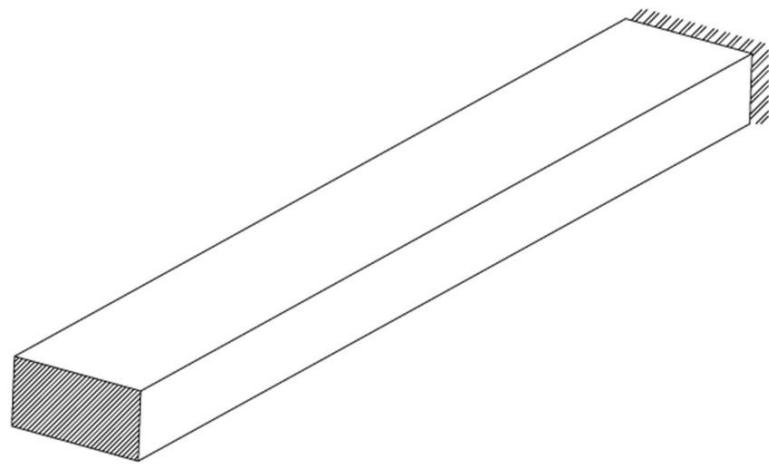
(ه)

شکل 5 (الف) تراز جابجایی در راستای Y در روش ایزوژئومتریک (ب) تراز جابجایی در راستای Y در روش اجزای محدود (ج) تراز جابجایی در راستای X در روش ایزوژئومتریک (د) تراز جابجایی در راستای X در روش اجزای محدود (ه) نمودار بار-جابجایی در نقطه اعمال بار (نقاط دایره روش اجزای محدود و نقاط مستطیلی روش ایزوژئومتریک)

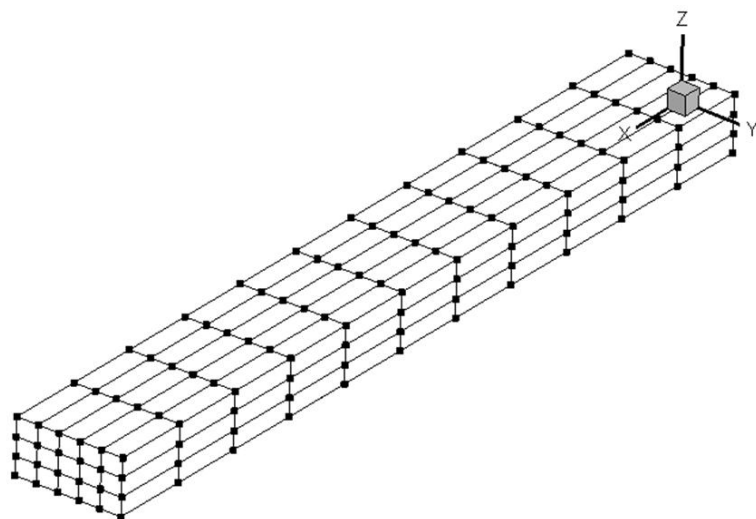
مقدار اختلاف جابجایی در نقطه اعمال بار ناشی از بار نهایی از رابطه
 $\Delta_{IGA} - \Delta_{FEA} = (-6.79528) - (-6.76176) = -0.03352$ بدست می‌آید.

4-2- مدل سازی تیر دوسر گیردار تحت اثر نیروی کالبدی وزن

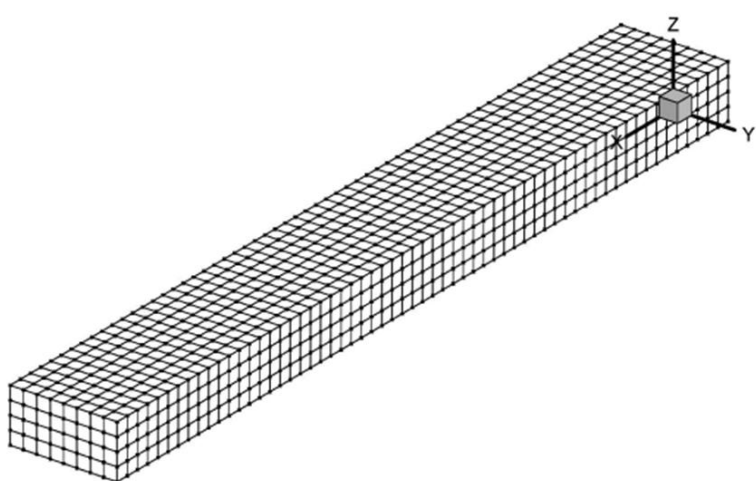
مدل تحلیلی ارائه شده در این مسأله، یک مکعب با طول 15 عرض 2 و ارتفاع واحد می‌باشد. شرایط هندسی، بارگذاری و تکیه‌گاهی در شکل 6، نشان داده



(الف)



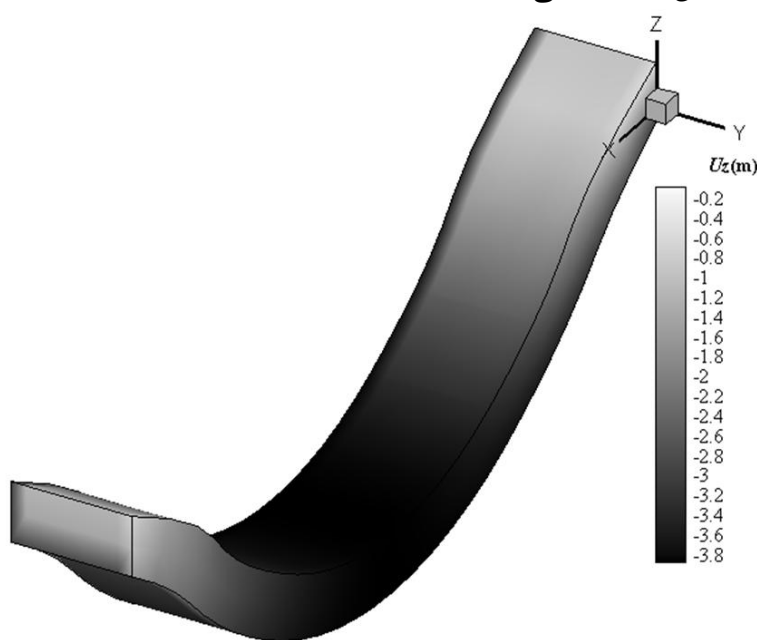
(ب)



(ج)

شکل 6 (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب) شبکه کنترلی در روش ایزوژئومتری (ج) مش بندی اولیه در روش اجزای محدود

نتایج تغییرات حجم مدل تعریفی در جدول 4 و نتایج تحلیلی آن در شکل 8 قابل مشاهده می‌باشد.



(الف)

شده است. بارگذاری در 100 مرحله با مقدار همگرایی $\varepsilon = 1 \times 10^{-10}$ به صورت سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. در روش اجزای محدود، از 1920 المان هشت گره‌ای شش وجهی¹ شامل 2745 گره و برای انتگرال‌گیری در هر المان از 8 نقطه گوسی استفاده شده است که دستگاه معادله ایجاد جهت حل، ماتریس مربعی با 8235 درایه در هر راستا است. در روش ایزوژئومتری از توابع پایه ب-اسپلاین درجه 2 برای تقریب هندسه و تابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\xi = \{0, 0, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 1, 1\}$$

$$\eta = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$$

$$\zeta = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$$

همچنین برای انتگرال‌گیری در هر المان گره‌ای از 64 نقطه گوسی استفاده شده است. با استفاده از رابطه $m = n + P + 1$ تعداد نقاط کنترلی در هر راستا چنین است.

$$P_{\xi} = 12 ; P_{\eta} = 6 ; P_{\zeta} = 4 ; P_{\text{total}} = 288$$

که دستگاه معادله ایجاد جهت حل، ماتریس مربعی با 864 درایه در هر راستا می‌باشد. توزیع مختصات نقاط کنترلی در شکل 6-ب به صورت زیر می‌باشد.

$$P_{\xi} = \{0, 1.36, 2.72, 4.08, \dots, 15\}$$

$$P_{\eta} = \{0, 0.4, 0.8, \dots, 2\}$$

$$P_{\zeta} = \{0, 0.33, 0.66, 1\}$$

مقادیر خواص مکانیکی مواد و تابع انرژی کرنشی تعریفی به قرار زیر است.

$$\rho = 0.05 ; \mu = 100 ; \kappa = 100$$

$$U(J) = 0.5\kappa(J-1)^2$$

نتایج تغییرات حجم مدل تعریفی در جدول 2، و نتایج تحلیلی آن در شکل 7، قابل مشاهده است.

با توجه به انطباق بسیار نزدیک نتایج ارائه شده در این قسمت، استفاده از روش ایزوژئومتری علاوه بر آنکه فرایند تولید مش مجدد را تا حد زیادی کاهش می‌دهد، باعث ایجاد دستگاه معادلاتی با حجم محاسباتی کوچکتر می‌شود.

3-4- مدل‌سازی تیر طره تحت اثر بارگذاری در انتها با توابع انرژی کرنشی حجمی مختلف برای بررسی همگرایی جواب

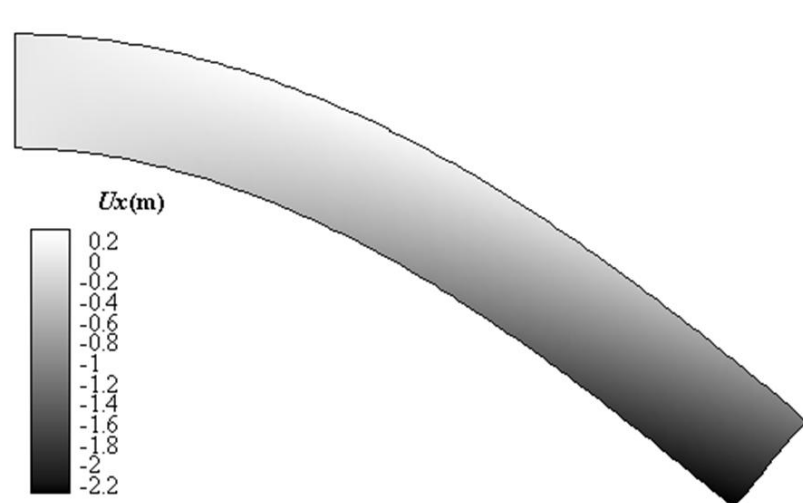
در این مسأله به بررسی مثال 1-4 تحت اثر توابع انرژی کرنشی حجمی ارائه شده در جدول 3 پرداخته شد است.

جدول 2 تغییرات حجم آغازین و پایانی در روش اجزای محدود و ایزوژئومتری

روش تحلیل	حجم آغازین	حجم پایانی
روش اجزای محدود	30/00000	33/47838
روش ایزوژئومتری	30/00000	33/40664

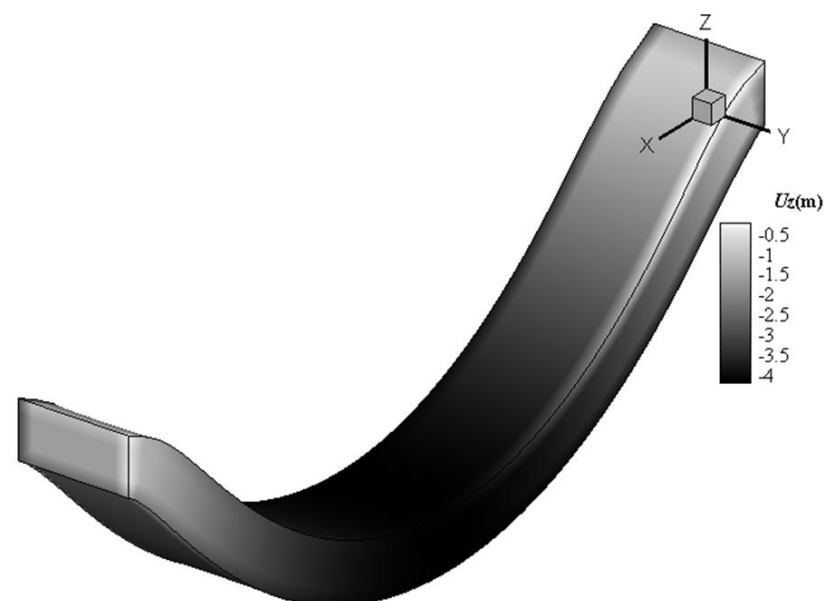
جدول 3 توابع انرژی کرنشی حجمی

شماره مدل	تابع انرژی کرنشی حجمی
1	$U(J) = 0.5\kappa(J-1)^2$
2	$U(J) = 0.5\kappa(\ln J)^2$



(د)

شکل 8 الف) تراز جابجایی در راستای Y در روش ایزوژئومتری - مدل 1 ب) تراز جابجایی در راستای Y در روش ایزوژئومتری - مدل 2 ج) تراز جابجایی در راستای X در روش ایزوژئومتری - مدل 1 د) تراز جابجایی در راستای X در روش ایزوژئومتری - مدل 2



(ب)

شکل 7 الف) تراز جابجایی در راستای Z در روش ایزوژئومتری ب) تراز جابجایی در راستای Z در روش اجزای محدود

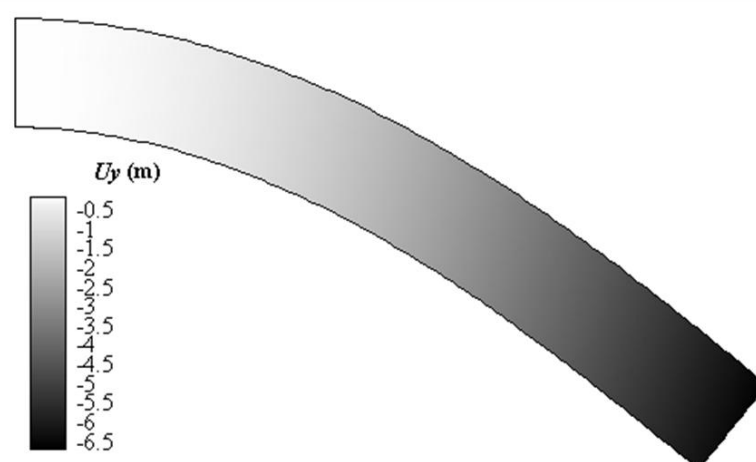
با توجه به نتایج ارائه شده استفاده از تابع‌های انرژی کرنشی نام برده تاثیر چندانی بر نتایج تحلیل مسأله ندارد.

5- نتیجه‌گیری

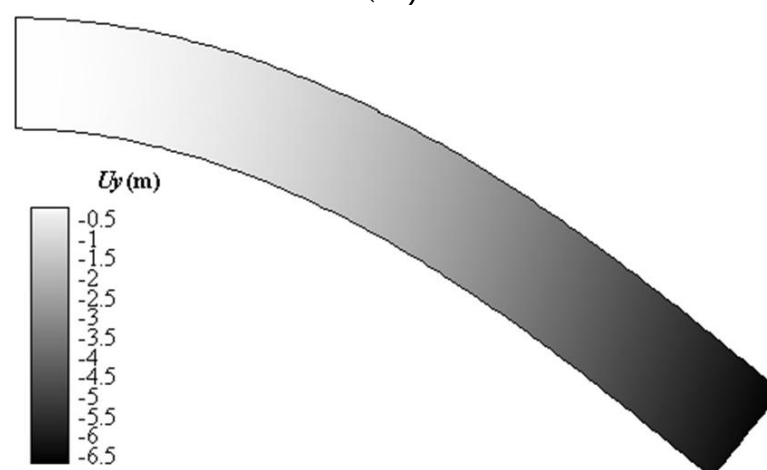
در این تحقیق به فرمول‌بندی و حل مسائل غیرخطی الاستیک در محدوده تراکم‌ناپذیری که به مسائل هایپرالاستیسیته نزدیک به تراکم‌ناپذیری نیز معروفند، با استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتری و مقایسه نتایج حاصل با روش اجزای محدود پرداخته شده است. با توجه به تغییرشکل‌های بزرگ در مسائل غیرخطی الاستیک، بکارگیری روش اجزای محدود علاوه بر وابستگی جواب مسأله به اندازه مش که باعث ایجاد دستگاه معادلات با حجم محاسباتی بالا می‌شود، در برخی از مسائل مش بندی مجدد اجتناب‌ناپذیر است. در روش ایزوژئومتری با توجه به استفاده از توابع پایه اسپیلاین که قابلیت انعطاف‌پذیری بالایی در ایجاد هندسه مدل دارد، نیاز به فرایند تولید مش مجدد تا حد زیادی رفع می‌شود. با استفاده از این روش ضمن ایجاد دستگاه معادلات کوچکتر و کاهش حجم محاسبات دقت یکسان در جواب‌ها نشان داده شده است. همچنین استفاده از توابع انرژی کرنشی حجمی مدل 1 و مدل 2 تاثیر چندانی بر نتایج نشان نمی‌دهد.

6- فهرست علائم

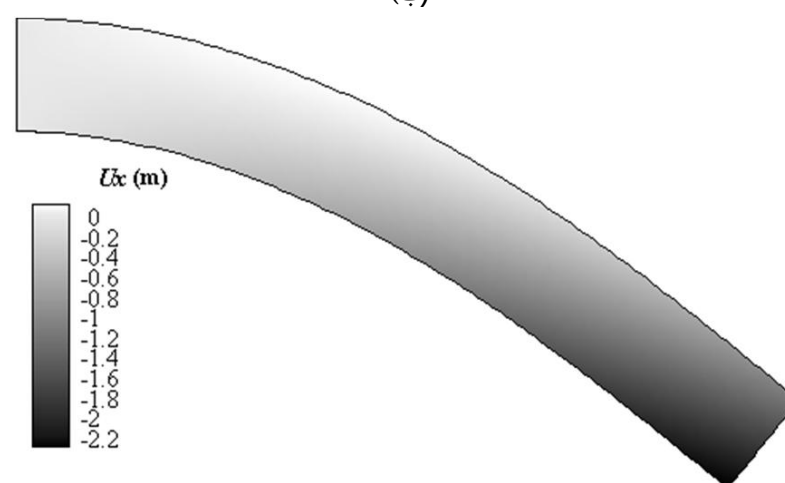
$\tilde{C}$	تانسور الاستیسیته مادی یا لاگرانژی
b	تانسور تغییر شکل گرین - کوشی چپ
C	تانسور تغییر شکل گرین - کوشی راست
d	نرخ تغییرات
E	تانسور کرنش گرین
F	بردار نیروهای خارجی
F	تانسور گرادیان تغییر شکل
J	ماتریس ژاکوبین
J	نسبت تغییرات حجم
K	ماتریس ضرایب
$N_{i,p}$	تابع پایه ب - اسپیلاین
p	مؤلفه فشار هیدرواستاتیکی
P_{ijk}	مؤلفه نقاط کنترلی



(الف)



(ب)



(ج)

- [12] O.C. Zinckiewicz, *The Finite Element in Engeneering Science*, Mc Graw-Hill, London, 1971.
- [13] C. Brebbia, J. Connor, Geometrically non-linear finite element analysis, *Proc, ASCE, J. Eng, Mech, Dir, Proc*, pp. 6516, 1969.
- [14] M.A. Crisfield, *Nonlinear finite element analysis of solids and structures, vol I & vol II*, John Wiley & Sons, 1991.
- [15] T.Belytschko, W.K.Liu, B.Moran, *Nonlinera Finite Element for Countinua and Structures*, John Wiley & Sons, 2000.
- [16] O.C. Zinkiewicz, R.L. Taylor, *the finite element method, vol II*, 5nd edition, McGraw Hill, 2000.
- [17] J.Bonet, R.D.Wood, *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, 2nd edition*, Cambridge University Press, 2008.
- [18] P. Wriggers, *Nonlinear finite element methods*, springer, 2008.
- [19] L. Piegel, Tiller Wayne, *The Nurbs Book, 2nd edition*, Springer, 1996.
- [20] D.F. Rogers, *An Introduction to NURBS with Historical Perspective*, Morgan Kaufmann Publishers, 2001.
- [21] T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: Cad, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 194 (39–41), pp. 4135–4195, 2005.
- [22] P.M. Penter, *Splines and Variational methods*, John Wiley & Sons, 1989.
- [23] K. Hölling, *finite element methods with B-Splines*, siam, Society for industrial and applied mathematics Philadelphia, 2003.
- [24] J.A.Cottrell, T.J.R.Hughes, Y.Bazilves, *Isogeometric Analysis: toward integration of CAD and FEA*, John Wiley & Sons, 2009.
- [25] T. Elguedj, Y. Bazilevs, V.M. Calo, T.J.R. Hughes, B and F projection methods for nearly incompressibl linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrag*, 197, pp. 2732-2762, 2008.
- [26] R.L Taylor, Isogeometric analysis of nearly incompressible solids, *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 87, pp. 273-288, 2011.
- [27] K.M.Mathisen, K.M .Okstad, T .Kvamsdal and S.B .Raknes, Isogeometric Analysis of Finite Deformation Nearly Incompressible Solids, *Journal of Structural Mechanics*, 44, pp. 260-278, 2011.
- [28] Y. Bazilevs, L. Beirao Da Veiga, J. Cottrell, T.J.R. Hughes, G. Sangalli, Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes, *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* 16, pp. 1031–1090, 2006.
- [29] Y. Bazilevs, V. Calo, J. Cottrell, T. Hughes, A. Reali, G. Scovazzi, Variationalmultiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 197 (1–4), pp. 173–201, 2007.
- [30] Y. Bazilevs, V.M. Calo, Y. Zhang, T.J.R. Hughes, Isogeometric fluid structure interaction analysis with applications to arterial blood flow, *Comput. Mech.* 38 (4), pp. 310–322, 2006.
- [31] J.A. Cottrell, A. Reali, Y. Bazilevs, T.J.R. Hughes, Isogeometric analysis of structural vibrations, *Comput Meth. Appl. Mech. Engrg.* 195 (41–43), pp. 5257–5296, 2006.
- [32] B. Hassani, N. Z. Moghadam, Development of a new numerical method for solution of ordinary differential equations by using spine basis functions, Technical Report No. 1015, *Shahrood University of Technology*, Iran, 2009, (In Persian).
- [33] B. Hassani, N.Z. Moghaddam, S.M. Tavakkoli, Isogeometric solution of Laplace equation, *Asian journal of Civil Engineering*, 10 (5), pp. 579-592, 2009.
- [34] K.-U. Bletzinger, S. Kimmich, E. Ramm, Efficient modeling in shape optimal design, *Comput. Syst. Engrg.* 2 (5–6), pp. 483–495, 1991.

R	بردار باقیمانده نیروها در نقاط کنترلی
$R_{i,p}$	تابع پایه نربز
S	تانسور تنش ثانویه پیولا - کیرشهف
T	بردار نیروهای داخلی در نقاط کنترلی
علامه یونانی	
ζ	بردار گره‌ای در راستای ζ
η	بردار گره‌ای در راستای η
ξ	بردار گره‌ای در راستای ξ
ψ	تابع انرژی کرنشی ذخیره شده
σ	تانسور تنش کوشی
ρ	چگالی
μ	ضریب لامه
κ	مدول بالک

7- مراجع

- [1] M.J. Tuner, E.H. Drill, H.C. Martin & R.J. Melosh, Large deflection of structures subject to heating and external load, *J. Aero Sci.*, 27, pp. 97-106, 1960.
- [2] W.W. Kapur, B.J. Hartz, Stability of plates using the finite element method, *Proc, ASCE, J. Engag.*, 92, EM2, pp. 177-195, 1966.
- [3] R.J. Gallagher, J. Padlog, Discrete element approach to strucural stability, *Am. Inst. Aero. & Astro. J.*, 1(6), pp. 1437-1439.
- [4] R.J. Gallagher, R.A. Gellatly, J. Padlog, R.H. Mallet, A discrete element procedure for thin shell instability analysis, *Am. Inst. Aero. & Astro. J.*, 5(1), pp. 138-145, 1967.
- [5] I. Holand, T. Moan, *The finite element in plate buckling, Finite Element Meth. in Stress Analysis*, ed. I. Holand et al., Tapir, 1969.
- [6] J.H. Argyris, Recent *Advance in Matrix Method of Structure Analysis*, Pergamon Press, 1964.
- [7] J.H. Argyris, Countinua and discountinua, Proc, conf, *Matrix Methods in Struct, mech, Air Force Inst, of Tech, Wright Patterson Air Force Base, Ohio*, Octobr 1965.
- [8] J.T. Oden, Numerical Formulation of non-linear elasticity problems, *Proc, ASCE, J. Struct, Dir*, 93, ST3 pp. 5290, 1967.
- [9] R.H. Mallet, P.V. Marcal, finite element analysis of non-linear structures, *Proc, ASCE, J. of Struct, Dir*, 94, ST9, pp. 2081-2105, 1968.
- [10] J.T. Oden, *Finite element application in non-linear structural analysis*, Proc, Conf, on Finite elemnt Meth, Vanderbilt University Tennessee, November 1969.
- [11] W.E. Haisler, J.E. Stricklin, F.J. Stebbins, Development and evaluation of solution procedures for geometrically non-linear structural analysis by the discrete stiffnes method, AIAA/ASME, 12th structure, *Structural Dynamics & Materials Conf*, Anaheim, californa, April 1971.