مجله مهندسی مکانیک مدرس، فوق‌العاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 15، ص‌ص 395-404

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل تنش چندلایه‌های کامپوزیتی متقارن با گشودگی شبه مستطیلی تحت بارگذاری درون صفحه‌ای

محمد جعفری[1*]، بهزاد مشیری اول[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود
* شاهرود، کد پستی 3619995161، m_jafari821@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 04 خرداد 1393
پذیرش: 13 تیر 1393
ارائه در سایت: 06 آبان 1393

کلید واژگان:
نگاشت همنوا
حل تحلیلی
چندلایه‌های کامپوزیتی متقارن
گشودگی شبه مستطیلی

چکیده

در این مقاله بااستفاده از بسط حل تحلیلی لخنیتسکی به مطالعه توزیع تنش اطراف گشودگی شبه‌مستطیلی پرداخته شده است. لخنیتسکی از روش تحلیلی متغیر مختلط برای تحلیل تنش صفحات غیرهمسانگرد حاوی گشودگی‌هایی به شکل دایره و بیضی استفاده کرد. به منظور بسط حل تحلیلی لخنیتسکی برای تحلیل تنش چندلایه‌های متقارن حاوی گشودگی غیردایره‌ای، به‌وسیله نگاشت همنوا، ناحیه خارج گشودگی شبه مستطیلی به محدوده خارج گشودگی دایره‌ای به شعاع واحد تبدیل می‌شود. در این تحقیق سعی می‌شود؛ با بسط روش فوق، تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل نسبت طول به عرض گشودگی، نوع چیدمان لایه‌ها، زاویه چرخش گشودگی، شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی و زاویه اعمال بار مورد مطالعه قرار گیرد. برای بررسی درستی نتایج حل تحلیلی ارائه شده از روش اجزاء محدود استفاده شده است. نتایج حاصل از حل تحلیلی تطابق خوبی با نتایج حل عددی دارد. این نتایج نشان می‌دهد که روش حاضر، روشی دقیق برای محاسبه توزیع تنش در صفحات کامپوزیتی با گشودگی‌های خاص است. باتوجه به نتایج ارائه شده پارامترهای ذکرشده تأثیر بسزایی در توزیع تنش اطراف گشودگی شبه‌مستطیلی دارند. با نرم‌تر شدن گوشه‌های گشودگی و انتخاب زاویه چرخش گشودگی مناسب می‌توان تمرکز تنش را کاهش داد.

Stress analysis of symmetric composite laminates with quasi-rectangular hole subjected to in-plane loading

Mohammad Jafari[1*], Behzad Moshiri Aval[2]

1- Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran.
2- Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran.
* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, m_jafari@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 25 May 2014
Accepted 04 July 2014
Available Online 28 October 2014

Keywords:
Conformal Mapping
Analytical Solution
Symmetric Composite Laminates
Quasi-rectangular Hole

ABSTRACT

In this paper, by expanding the Lekhnitskii's solution the stress distribution around quasi-rectangular hole has been studied. Lekhnitskii used complex variables analytic method for stress analysis of anisotropic plates with circular and elliptical hole. In order to extend the Lekhnitskii's analytical method for stress analysis of perforated symmetric laminates with non-circular holes, by means of conformal mapping, the area external to the hole can be represented by the area outside the unit circle. In this paper an attempt has been made to study the effect of different parameters such as aspect ratio, stacking sequence, rotation angle of hole, bluntness and load angle on stress distribution around quasi-rectangular hole. The finite element method has been used to check the accuracy of analytical results. The analytical results are in good agreement with the numerical results. The results presented herein, indicate that the presented method can be used to accurately determine the stresses and stress concentration in composite plates with special shape cutouts. The results obtained clearly demonstrate the effect of these parameters on maximum stresses in perforated plates subjected to uni-axial tensile load. Appropriate selection of bluntness and rotation angle of hole can decrease stress concentration.

1- مقدمه

صفحات به‌دلیل کاربرد وسیع در صنایع مختلف از اهمیت بسیاری برخوردار هستند. از جمله کاربرد آن‌ها می‌توان انواع مخازن مستطیلی، کوره‌ها، بدنه ماشین‌آلات صنعتی و غیر صنعتی، صنعت ساختمان‌سازی و غیره را نام برد. تنوع کاربرد، بسته به نیاز وجود انواع شیارها و گشودگی‌ها با ابعاد و اشکال مختلف را در صفحات می‌طلبد. از جمله این موارد، می‌توان به گشودگی درها و پنجره‌ها در بدنه هواپیماها و زیردریایی‌ها، محل اتصال فشارسنج‌ها و دماسنج‌ها در بدنه کوره‌ها، محل اتصال دو ورق به همدیگر توسط پیچ‌ها و

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
M. Jafari, B. Moshiri Aval, Stress analysis of symmetric composite laminates with quasi-rectangular hole subjected to in-plane loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 395-404, 2015 (In Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.15.1.8]

پرچ‌ها، وجود سوراخ‌هایی در پره‌های توربین‌ها جهت جریان یافتن سیال خنک کننده در پره‌ها اشاره کرد. استفاده از مواد مرکب در صنایع هوافضا و بسیاری از صنایع دیگر به خاطر نسبت استحکام به وزن و سفتی بالای این‌گونه مواد دارای افزایش چشم‌گیری است. با در نظرگرفتن کاربرد وسیع مواد مرکب و ماهیت پیچیده و متفاوت رفتار آن‌ها نسبت به مواد فلزی مطالعه استحکام شکست آن‌ها لازم به نظر می‌رسد. استحکام شکست بیشتر مواد شدیداً به تمرکز تنش ناشی از وجود گشودگی وابسته است. تجربه نشان داده است که تنش واقعی شکست برای صفحات حاوی گشودگی، اساساً کمتر از استحکام کشش نهایی همان ماده بدون گشودگی است. بنابراین برای طراحی دقیق صفحات حاوی گشودگی دانستن اطلاعات دقیق در مورد تغییر شکل‌ها و توزیع تنش‌ها لازم است. تمرکز تنش اهمیت ویژه‌ای در ارزیابی قابلیت اطمینان سازه‌های مهندسی دارد. دیده شده است که 80 درصد شکست‌های انجام شده در سازه‌های هوایی از محل بست‌ها و اتصالات روی داده است[1].

در مورد تحلیل تنش صفحات دارای گشودگی، تحقیقات بسیار وسیعی از روش‌های مختلف عددی، تجربی و تحلیلی انجام شده است. باتوجه به گستردگی تحقیقات انجام شده در این زمینه، سعی می‌شود تا به مروری بر تحلیل تنش صفحات حاوی گشودگی با استفاده از روش حل تحلیلی بر پایه استفاده از تابع پتانسیل مختلط پرداخته شود. استفاده از روش متغیر مختلط در حل مسائل مقدار مرزی در الاستیسته دوبعدی اولین بار توسط موشخلیشویلی [2] برای مواد الاستیک همسانگرد ارائه شد. کاربردهایی از روش ارائه شده توسط او در مطالعات ساوین[3] برروی صفحات همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی‌های مختلف و تحت کشش دیده می‌شود. همچنین ساوین برای مواد غیرهمسانگرد فقط برای گشودگی بیضی شکل و دایره‌ای مطالعاتی را انجام داد. توسعه کامل روش موشخلیشویلی به مسائل الاستیسیته دوبعدی مواد غیرهمسانگرد توسط اشلبای و همکارانش[4]، اشترو[5] و لخنیتسکی [6] انجام شد. بعدها پژوهشگران متعددی با استفاده از روابط ارائه شده توسط آن‌ها به مطالعه صفحات غیرهمسانگرد حاوی گشودگی پرداختند. چن[7] رفتار صفحه ارتوتروپیک حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی شکل تحت شار حرارتی یکنواخت را مورد مطالعه قرار داد. او با استفاده از روش تابع پتانسیل مختلط توانست تنش محیطی[1] اطراف گشودگی را محاسبه کند. تحلیل تنش صفحات ارتوتروپیک با گشودگی مستطیلی توسط جونگ[8] و نایک و راجیه[9] انجام شد. روابط آن‌ها براساس روش حل ارائه شده توسط لخنیتسکی و فرمول‌بندی اشترو و استفاده از نگاشت همنوا بود. زیمرمن[10] استفاده از تابع نگاشت همنوا، برای نگاشت نقاط گشودگی‌هایی با شکل‌های مختلف به دایره‌ای به شعاع واحد را مورد بررسی قرار داد. هوو[11] میدان تنش در اطراف گشودگی‌های با شکل‌های مختلف در یک صفحه الاستیک غیرهمسانگرد تحت بارگذاری مکانیکی در بی‌نهایت، را مطالعه کرد. هافنباخ و همکارانش [12] با ارائه یک حل تحلیلی، میدان تنش و جابجایی اطراف گشودگی بیضی شکل را در یک صفحه غیرهمسانگرد به‌دست آوردند. آن‌ها نتایج خود را برای زوایای مختلف الیاف و بار ارائه دادند و از نتایج اجزاء محدود و تجربی برای بررسی درستی حل خود استفاده کردند. توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی در یک صفحه غیرهمسانگرد با استفاده از روش پتانسیل مختلط توسط دائوست و هوا[13] ارائه شد. اهمیت کار آن‌ها تابع نگاشتی بود که درنظر گرفتند. تابع نگاشت آنها قادر بود مثلث‌هایی با نسبت قاعده به ارتفاع مختلف را به دایره‌ای به شعاع واحد بنگارد. در تحقیق آن‌ها تأثیر شعاع انحنای گوشه گشودگی نیز مورد مطالعه قرار گرفت. حل آن‌ها برای یک صفحه تک‌لایه با زاویه الیاف صفر درجه بود. جعفری و رضایی‌پژند [14] با تعریف تابع تنشی که معادلات سازگاری را ارضاء می‌کرد؛ حل تحلیلی صفحات غیرهمسانگرد دارای گشودگی‌های مختلف را ارائه کردند. اسمر و جبّور [15] با همین روش، توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مستطیلی را در یک صفحه غیرهمسانگرد و تحت کشش به دست آوردند. آن‌ها تأثیر انحنای گشودگی و زاویه بار را به طور مجزا بر روی تمرکز تنش مورد بررسی قرار دادند. جعفری و رضایی پژند [16] به بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مربعی در صفحات غیرهمسانگرد پرداختند. آن‌ها تأثیر پارامترهای مختلفی از قبیل زاویه بار، زاویه الیاف و زاویه چرخش گشودگی را مورد مطالعه قرار دادند. در مورد تحلیل تنش صفحات چندلایه کامپوزیتی حاوی گشودگی مطالعات زیادی انجام شده است. که بیشتر این تحقیقات برای گشودگی دایره‌ای و بیضی شکل می‌باشد[17-19]. ریبیکی و اشمیزر[20] با استفاده از روش اجزاء محدود، توزیع تنش اطراف گشودگی دایره‌ای را در چندلایه‌ها به دست آوردند. صفحه مورد تحلیل آن‌ها تحت بار تک محوره قرار داشت. آنها از روش تجربی برای تایید روش اجزاء محدود خود استفاده کردند. در مقاله‌ای توسط ولایچامی و همکارانش [21] به طراحی بهین صفحات چندلایه کامپوزیتی حاوی گشودگی بیضی شکل پرداخته شد. متغیرهای طراحی در تحقیق آن‌ها نسبت قطرهای بیضی و زاویه چرخش گشودگی بودند. تابع هدف دسترسی به کمترین تنش ممکن در اطراف گشودگی بود. بونورا و همکارانش [22] با ارائه عبارتی تحلیلی برای تابع تنش ایری توانستند توزیع تنش اطراف گشودگی‌هایی با هندسه ساده نظیر دایره و بیضی شکل را برای چندلایه‌های متقارن به دست آورند. آن‌ها به کمک روش اجزاء محدود دقت حل خود را بررسی کردند. تحلیل صفحات مرکب از لایه‌های نازک از ماده همسانگرد و الاستیک خطی توسط بئوم و ایرما [23] مورد بررسی قرار گرفت و میدان تنش‌ها و گشتاورهای منتجه و جابجایی بااستفاده از روش تابع پتانسیل مختلط به‌دست آمد. هدف اصلی این تحقیق بررسی میدان نوک ترک و میزان رهاسازی انرژی در صفحات چندلایه بود. یوکادگائونکر و رائو [24] با استفاده از روش متغیر مختلط، صفحات چندلایه کامپوزیتی متقارن حاوی گشودگی-هایی با هندسه‌های مختلف را تحلیل کردند. رمئو[25] بااستفاده از روش‌های تحلیلی و تجربی، رفتار پنل‌های چندلایه با گشودگی مستطیلی تحت بارگذاری کشش دومحوره، فشاری و برشی را مورد بررسی قرار داد. در مقاله‌ای توسط رائوو همکارانش [26] توزیع تنش اطراف گشودگی مستطیلی و مربعی در چندلایه‌های متقارن به دست آمد. آن‌ها مطالعات خود را برروی کامپوزیت‌های گرافیت/اپوکسی و شیشه/اپوکسی متمرکز کردند. بارگذاری عمده در این تحقیق بارگذاری دومحوره و برشی بود. شعاع انحنای گوشه گشودگی، زاویه بارگذاری و نوع چیدمان لایه‌ها از مهمترین پارامترهای مورد تحلیل آنها بود. به خاطر تابع نگاشتی که توسط آن‌ها استفاده شد، امکان بررسی شعاع انحنای گوشه گشودگی به صورت تابعی پیوسته بسیار مشکل بود. زیرا آن‌ها با تغییر این پارامتر باید مجدد تابع نگاشت را برای گشودگی جدید محاسبه می‌کردند. آن‌ها در این تحقیق زاویه چرخش گشودگی را بررسی نکردند. در مقاله‌ای توسط هافنباخ و همکارانش [27] با درنظرگرفتن تابع جابجایی برحسب متغیر مختلط و استفاده از نگاشت همنوا مسأله تمرکز تنش صفحات کامپوزیتی محدود حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی شکل مورد

1- hoop stress

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.15.1.8]

مطالعه قرار گرفت. برای بررسی صحت روش حل تحلیلی در این مقاله، از روش تجربی استفاده شد. در مقاله دیگری توسط هافنباخ و همکارانش[28]، بااستفاده از روش تحلیلی برپایه تئوری کلاسیک چندلایه‌ها و استفاده از تابع پتانسیل به شکل متغیر مختلط، میدان تنش و کرنش در اطراف گشودگی برای کامپوزیت‌های تقویت شده تعیین شد. آن‌ها برای نگاشت نقاط روی مرز گشودگی بیضی شکل به دایره‌ای به شعاع واحد از تابع نگاشت همنوا استفاده کردند. همچنین از ترکیب روش حداقل مربعات و روش هم مکانی[1] برای مدل‌سازی مرز خارجی صفحه استفاده کردند. در مورد چندلایه‌های نامتقارن هم تحقیقاتی انجام شده است که بیشتر آن‌ها برای گشودگی‌های دایره‌ای و بیضی شکل می‌باشد [29-31]. یکی از کاربردهای عمده تمرکز تنش در اتصالات صفحات کامپوزیتی می‌باشد. در اتصالات صفحات بوسیله پیچ‌ها و پین‌ها، غالباً از طرف پیچ یا پین نیرویی به مرز گشودگی وارد می‌شود. تحلیل این‌چنین مسائلی هم با استفاده از به کارگیری توابع پتانسیل مختلط در تحقیقات متعددی انجام شده است[32-34]. در مقالات متعددی با دانستن توزیع تنش اطراف گشودگی‌های مختلف سعی در تقویت استحکام ماده در نواحی شامل گشودگی با استفاده از روش‌های مختلف مانند استفاده از حلقه‌ها و یا الیاف تقویتی و یا وصله شده است.

برای طراحی دقیق اتصالات و یا تقویت گشودگی‌ها با روش‌های مختلف و با توجه به پیشرفت سریع تکنولوژی و افزایش استفاده از مواد مرکب نیاز به اطلاعات دقیقی در مورد توزیع تنش اطراف گشودگی است. اگرچه تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده است ولی مطالعه صفحات چندلایه کامپوزیتی حاوی گشودگی‌های مختلف با در نظر گرفتن پارامترهای مهمی از قبیل جنس و نوع چیدمان لایه‌ها، زاویه بار، زاویه چرخش گشودگی، نسبت طول به عرض و شعاع انحنای گوشه گشودگی لازم به نظر می‌رسد. در این مقاله سعی می‌شود؛ تأثیر تمامی این پارامترها برای صفحات چندلایه کامپوزیتی متقارن حاوی گشودگی شبه مستطیلی مورد بررسی قرار گیرد. بررسی زاویه چرخش گشودگی و انحنای گوشه گشودگی و معرفی پارامترهای بهینه در چیدمان‌های مورد بررسی از نقاط قوت این مقاله است. دستیابی به این نتایج بااستفاده از روش تابع پتانسیل مختلط انجام شده است.

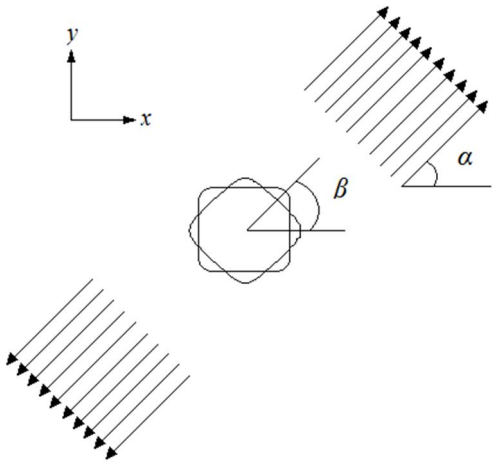
2- تعریف مسأله

صفحه مطالعه شده در این مقاله یک چندلایه کامپوزیتی متقارن است. صفحه دارای گشودگی شبه مستطیلی بوده و ابعاد آن در مقابل اندازه گشودگی چنان است که بتوان صفحه را بی‌نهایت فرض کرد. مطابق شکل 1 صفحه در بی‌نهایت تحت بارگذاری کششی با زاویه (α) نسبت به محور x قرار دارد.

همچنین زاویه چرخش گشودگی که بیانگر نحوه قرارگیری آن نسبت به افق است، با β نمایش داده شده است. صفحه مفروض دارای رفتار الاستیک خطی بوده و با توجه به شرایط مرزی تنها تنش ایجاد شده در مرز گشودگی σ_θ است.

باتوجه به نامحدود بودن صفحه نسبت بزرگترین ضلع گشودگی به ابعاد صفحه در حل عددی کمتر از 0/05 درنظرگرفته می‌شود. فرض می‌شود گشودگی در مرکز صفحه قرار گرفته و گشودگی عاری از هرگونه بار خارجی است. یعنی در مرز گشودگی $\sigma_r=\tau_{r\theta}=0$ است.

صفحه مورد بررسی در این تحقیق از جنس ماده گرافیت/اپوکسی و شیشه/اپوکسی بوده که خواص این مواد در جدول 1 ارائه شده است.



شکل 1 نمایی از هندسه گشودگی و بارگذاری آن

جدول 1 خواص مکانیکی مواد [26]

نوع ماده	E_1(GPa)	E_2(GPa)	G_{12}(GPa)	ν_{12}
گرافیت/اپوکسی	181	10/3	7/17	0/28
شیشه/اپوکسی	47/4	16/2	7	0/26

در این تحقیق از چیدمان‌های مختلف از قبیل $_s$[90 / 0]، $_s$[45- / 45] و $_s$[30- / 0 / 30] برای ایجاد چندلایه‌های متقارن استفاده شده است.

2- 1- تابع نگاشت

همان‌طور که قبلاً بیان شد؛ لخنیتسکی [6] توزیع تنش را برای گشودگی‌های دایره‌ای و بیضی شکل از روش تحلیلی مورد بررسی قرار داد، به منظور بسط روابط ارائه شده توسط لخنیتسکی برای به‌دست آوردن توزیع تنش اطراف گشودگی شبه‌مستطیلی و همچنین برای محاسبه راحت‌تر انتگرال کوشی در هنگام محاسبه تنش، بهتر است مرز گشودگی به دایره‌ای به شعاع واحد تبدیل شود. لذا به وسیله نگاشت همنوا، ناحیه خارج گشودگی شبه مستطیلی در مختصات فیزیکی z، به محدوده خارج گشودگی دایره‌ای به شعاع واحد در صفحه ξ با تابع انتقالی به نام تابع نگاشت قابل تبدیل است. تابع نگاشت مورد استفاده در این تحقیق به صورت رابطه (1) تعریف می‌شود:

$$z=x+sy \qquad (1)$$

با توجه به اینکه معادله سازگاری چندلایه‌های متقارن برحسب تابع تنش (معادله 8)، با روش مشخصه قابل حل است؛ در رابطه (1)، s ریشه‌های معادله مشخصه مربوط به چندلایه‌های متقارن می‌باشد [6].

در معادله فوق x و y به صورت رابطه (2) تعریف می‌شوند:

$$x=\left(\cos\theta+w*\cos(3\theta)\right)$$
$$y=-\left(c*\sin\theta-w*\sin(3\theta)\right) \qquad (2)$$

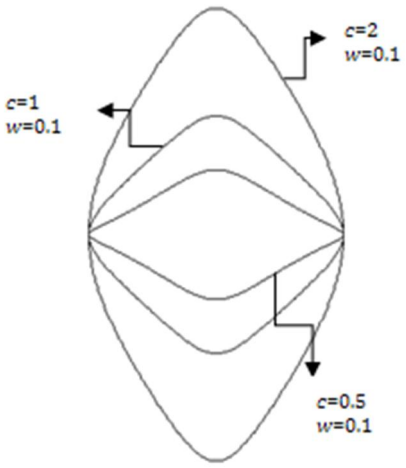
پارامتر w برای تعیین میزان تیزی و یا نرمی گوشه‌های گشودگی تعریف شده است. به عبارت دیگر w نشان دهنده انحنای گوشه گشودگی می‌باشد. شکل‌های 2 و 3 تأثیر پارامترهای w و c را به ترتیب بر روی انحنای گوشه گشودگی و نسبت طول به عرض آن نشان می‌دهند.

انحنا گشودگی (w) یکی از پارامترهای مهم و تأثیرگذار بر توزیع تنش اطراف گشودگی است که در این مقاله تأثیر این پارامتر بررسی می‌شود.

c پارامتری است که تعیین کننده نسبت طول به عرض گشودگی است. برای حالتی که $c=1$ است؛ گشودگی شبه مربعی خواهد بود.

1- collocation method

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.15.1.8]



شکل 2 تأثیر پارامتر c بر هندسه گشودگی



شکل 3 تأثیر پارامتر w بر هندسه گشودگی برای c=1

2-2- حل تحلیلی

حل تحلیلی حاضر برپایه تئوری الاستیسیته مواد غیرهمسانگرد ارائه شده توسط لخنیتسکی [6] استوار می‌باشد. در این تئوری ابتدا تابع تنش به صورت عبارتی تحلیلی برحسب متغیر مختلط نوشته می‌شود. سپس با ارائه معادله سازگاری برحسب تابع تنش و حل آن از روش معادله مشخصه و اعمال شرایط مرزی، می‌توان مولفه‌های تنش را به‌دست آورد. رابطه تنش و کرنش متوسط طبق قانون هوک به صورت رابطه(3) است:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{16}\\ a_{12} & a_{22} & a_{26}\\ a_{16} & a_{26} & a_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (3)$$

که در آن a_{ij} اعضای ماتریس نرمی کاهش یافته چندلایه‌های متقارن می‌باشند؛ رابطه بین ضرایب سفتی مؤثر و اعضای ماتریس سفتی کاهش یافته توسط فیشر [35] به صورت رابطه(4) بیان شد:

$$b_{ij}=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n}\left(Q_{ij}\right)^{(k)}t_k \qquad (4)$$

که در آن h ضخامت کلی چندلایه و t_k ضخامت لایه kام است. رابطه بین اعضای ماتریس نرمی کاهش یافته برحسب ضرایب سفتی موثر b_{ij} به‌صورت رابطه (5) است:

$$a_{11}=\frac{\left(b_{22}b_{66}-b_{26}^2\right)}{B} \qquad a_{12}=\frac{\left(b_{16}b_{26}-b_{12}b_{66}\right)}{B}$$

$$a_{16}=\frac{\left(b_{12}b_{26}-b_{16}b_{22}\right)}{B} \qquad a_{22}=\frac{\left(b_{11}b_{66}-b_{16}^2\right)}{B}$$

$$a_{26}=\frac{\left(b_{12}b_{16}-b_{11}b_{26}\right)}{B} \qquad a_{66}=\frac{\left(b_{11}b_{22}-b_{12}^2\right)}{B}$$

$$B=\left(b_{11}b_{22}b_{66}-b_{11}b_{26}^2+2b_{12}b_{26}b_{16}-b_{66}b_{12}^2-b_{22}b_{16}^2\right) \qquad (5)$$

مولفه‌های تنش برحسب تابع تنش $U(x,y)$ به‌صورت رابطه(6) تعریف می‌شود:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2U}{\partial y^2} \qquad \sigma_y=\frac{\partial^2U}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y} \qquad (6)$$

با توجه به رابطه سازگاری در حالت دوبعدی طبق رابطه(7):

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \qquad (7)$$

و با جایگذاری رابطه (3) و (6) در معادله سازگاری رابطه (8) به دست می‌آید:

$$a_{22}\frac{\partial^4U}{\partial x^4}-2a_{26}\frac{\partial^4U}{\partial x^3\partial y}+\left(2a_{12}+a_{66}\right)\frac{\partial^4U}{\partial x^2\partial y^2}$$
$$-2a_{16}\frac{\partial^4U}{\partial x\partial y^3}+a_{11}\frac{\partial^4U}{\partial y^4}=0 \qquad (8)$$

حل عمومی معادله فوق بستگی به ریشه‌های معادله مشخصه رابطه(9) دارد:

$$a_{11}s^4-2a_{16}s^3+\left(2a_{12}+a_{66}\right)s^2-2a_{26}s+a_{22}=0 \qquad (9)$$

لخنیتسکی[6] نشان داد که ریشه‌های معادله مشخصه فوق دوبه‌دو مزدوج هستند: $s_1=\overline{s_3}$ و $s_2=\overline{s_4}$.

بنابراین حل معادله (8) به صورت رابطه(10) خواهد بود:

$$U(x,y)=F_1(z_1)+F_2(z_2)+\overline{F_1(z_1)}+\overline{F_2(z_2)} \qquad (10)$$

که در آن $z_i=x+s_i\times y \quad (i=1,2)$ است. برای کاهش مرتبه مشتق در تابع تنش ارائه شده، توابع φ_0 و ψ_0 به صورت رابطه(11) تعریف می‌شوند:

$$\frac{dF_1}{dz_1}=\varphi_0(z_1) \qquad \frac{dF_2}{dz_2}=\psi_0(z_2)$$
$$\frac{\overline{dF_1}}{dz_1}=\overline{\varphi_0(z_1)} \qquad \frac{\overline{dF_2}}{dz_2}=\overline{\psi_0(z_2)} \qquad (11)$$

بردار نیرو اعمالی در واحد سطح با استفاده از تئوری الاستیسیته برحسب تنش بصورت رابطه (12) و (13) قابل محاسبه می‌باشد.

$$X_n=\sigma_x\cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,y)$$
$$Y_n=\tau_{xy}\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y) \qquad (12)$$

که در آن:

$$\cos(n,x)=dy\,/\,ds$$
$$\cos(n,y)=-dx\,/\,ds \qquad (13)$$

از طرفی می‌توان این روابط را برحسب تابع تنش به‌صورت رابطه (14) نوشت:

$$X_n=\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$Y_n=-\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\frac{dx}{ds}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \qquad (14)$$

در نتیجه طبق رابطه(15) :

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\int_0^s Y_N\,ds+C_1 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial y}=\int_0^s X_N\,ds+C_2 \qquad (15)$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.15.1.8]

اگر در رابطه (15) تابع U از رابطه (10) جایگذاری شود رابطه (16) را داریم:

$$2\mathrm{Re}[\varphi_0(z_1)+\psi_0(z_2)]=-\int_0^s Y_N ds+C_1=f_1^0$$
$$2\mathrm{Re}[s_1\varphi_0(z_1)+s_2\psi_0(z_2)]=\int_0^s X_N ds+C_1=f_2^0 \qquad (16)$$

به جای z_1 و z_2 در معادلات فوق به ترتیب مقادیر $z_1=x+s_1y$ و $z_2=x+s_2y$ جایگذاری می‌شود. برای محاسبه توابع تنش از رابطه شوارتز استفاده می‌شود(رابطه(17)):

$$F(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma U(\theta)\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma}+i\alpha_0 \qquad (17)$$

در این انتگرال $U(\theta)$ قسمت حقیقی تابع $F(\xi)$ روی دایره‌ای به شعاع واحد (γ) می‌باشد و α_0 یک ثابت حقیقی است. با ضرب هردو طرف معادله (16) در $\frac{1}{2\pi i}\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma}$ و گرفتن انتگرال روی دایره واحد و استفاده از قضیه شوارتز می‌توان رابطه (18) نوشت:

$$s_1\Phi_0(\xi)+s_2\psi_0(\xi)=\frac{1}{4\pi i}\int f_2^0(\theta)\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma}+i\alpha_0$$
$$\Phi_0(\xi)+\psi_0(\xi)=\frac{1}{4\pi i}\int f_1^0(\theta)\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma}+i\alpha_0 \qquad (18)$$

با حل معادلات بالا برحسب φ_0 و ψ_0 توابع تحلیلی (19) حاصل می‌شود:

$$\Phi_0(\xi)=\frac{i}{4\pi(s_1-s_2)}\int(s_2f_1^0-f_2^0)\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma}$$
$$\Psi_0(\xi)=\frac{-i}{4\pi(s_1-s_2)}\int(s_1f_1^0-f_2^0)\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma} \qquad (19)$$

باتوجه به اینکه در مرز گشودگی $\sigma_r=\tau_{r\theta}=0$ است و مطابق با مرجع [3] توابع شرایط مرزی f_1^0 و f_2^0 به‌دست می‌آیند. بعد از محاسبه تابع تنش بر حسب φ_0 و ψ_0 می‌توان مولفه‌های تنش را به صورت رابطه(20) تعیین کرد:

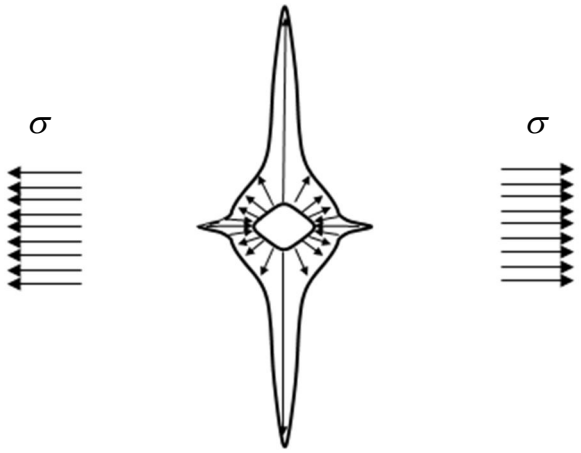
$$\sigma_x=2\mathrm{Re}\left[s_1^2\varphi'(z_1)+s_2^2\psi'(z_2)\right]$$
$$\sigma_y=2\mathrm{Re}\left[\varphi'(z_1)+\psi'(z_2)\right]$$
$$\tau_{xy}=-2\mathrm{Re}\left[s_1\varphi'(z_1)+s_2\psi'(z_2)\right] \qquad (20)$$

توابع تحلیلی $\varphi_0(z_1)$ و $\psi_0(z_2)$ با توجه به شرایط مرزی اطراف گشودگی و شرایط بارگذاری در بی‌نهایت، قابل محاسبه خواهند بود.

3- بررسی صحت جواب‌ها

برای راستی آزمایی نتایج حاصل از حل تحلیلی از روش اجزاء محدود (نرم افزار آباکوس) استفاده شده است. برای این منظور مدلی از مسأله حاوی گشودگی مربعی برای ماده گرافیت/اپوکسی با چیدمان لایه‌ای $[0/90]_s$ تحت بارگذاری کششی در نرم‌افزار آباکوس ایجاد و نتایج حاصل با نتایج بدست آمده از حل تحلیلی ارائه شده در این تحقیق مقایسه شده است.

همان‌طور که در شکل 4 دیده می‌شود زمانی که بارگذاری در جهت افق می‌باشد($\alpha=0$)، بیشترین مقدار تنش در گوشه‌هایی از گشودگی که با جهت بارگذاری زاویه 90 درجه می‌سازند اتفاق می‌افتد. لازم به توضیح است که در این شکل $w=0/1$ و $c=1$ است.



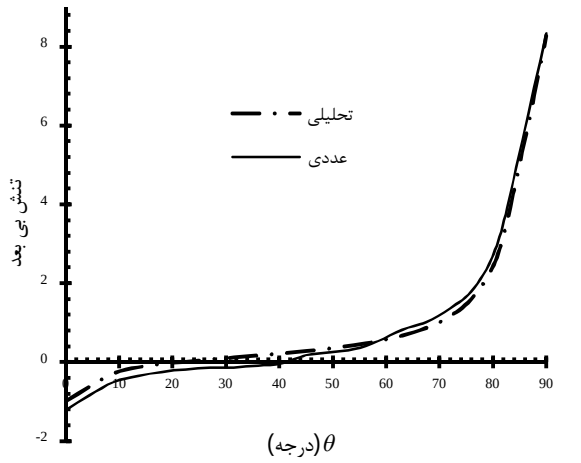
شکل 4 توزیع تنش اطراف گشودگی مربعی تحت بارگذاری تک محوره افقی

نتایج ارائه شده در شکل 5 برای $w=0/1$ و $c=1$ و برای ماده گرافیت/اپوکسی است. مطابق این شکل تطابق خوبی بین حل عددی و حل تحلیلی حاضر دیده می‌شود. منظور از تنش بی‌بعد در این شکل و در دیگر نتایج ارائه شده در این تحقیق، بیشترین تنش محیطی (σ_θ) ایجاد شده در اطراف گشودگی به تنش اعمالی می‌باشد.

در شکل 6 برای چیدمان $[0/90]_s$، تغییرات تنش بی‌بعد برحسب انحناهای مختلف گوشه گشودگی از دو روش اجزای محدود و حل تحلیلی حاضر مورد بررسی قرار گرفته است. زاویه چرخش گشودگی در این حالت 45 درجه می‌باشد. این مقایسه برای ماده کامپوزیتی گرافیت/اپوکسی انجام شده است. نزدیکی نتایج دو روش تاکیدی بر درستی حل تحلیلی حاضر است.

4- نتایج

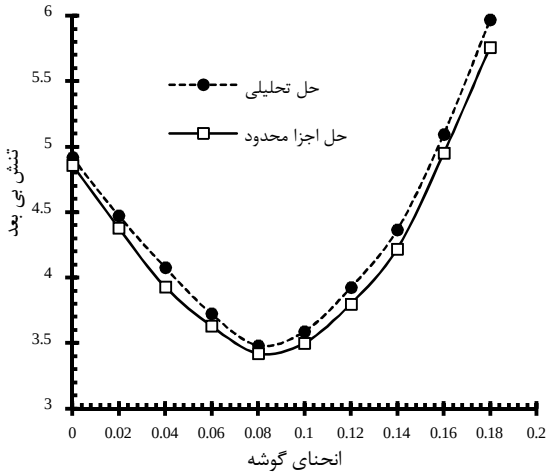
در این مقاله، به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف همچون زاویه بار (α)، زاویه چرخش گشودگی (β)، انحنای گوشه گشودگی (w)، نسبت طول به عرض (c) و همچنین تأثیر نحوه چیدمان لایه‌ها، بر روی توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مستطیلی پرداخته می‌شود. برای این منظور از کامپوزیت‌های گرافیت/اپوکسی و شیشه/اپوکسی که خواص مکانیکی آن‌ها در جدول 1 ارائه شده، استفاده شده است.



شکل 5 مقایسه تنش اطراف گشودگی مربعی از دو روش حل تحلیلی و اجزاء محدود

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]

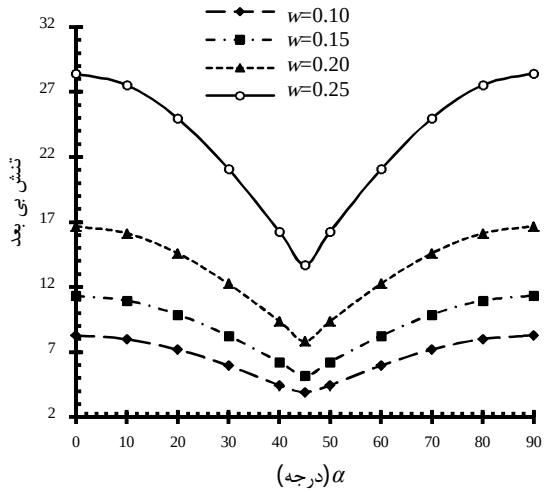
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.15.1.8]



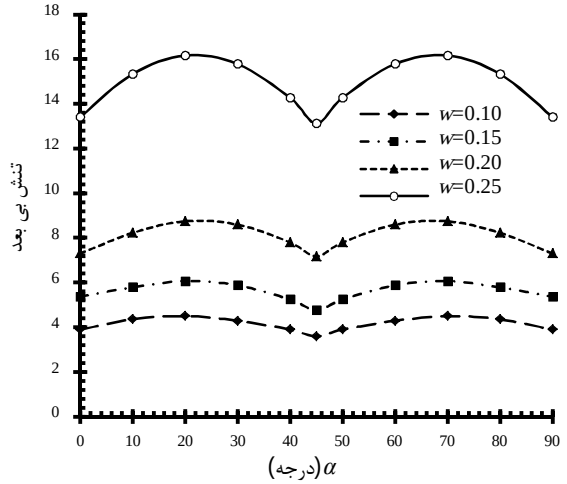
شکل 6 مقایسه تنش بی‌بعد اطراف گشودگی شبه‌مربعی برای ماده گرافیت/اپوکسی $s[90 / 0]$ برحسب w از دو روش حل تحلیلی و اجزاء محدود

4-1- تاثیر انحنای گوشه (w) و کشیدگی (c) گشودگی

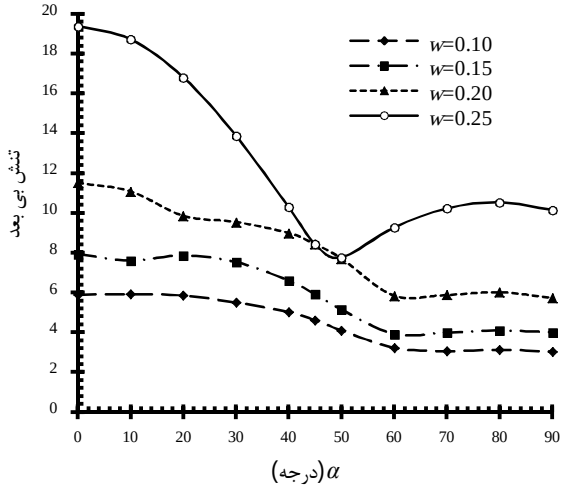
همانطورکه در تابع نگاشت به آن اشاره شد؛ پارامترهای w و c مستقیماً بر هندسه گشودگی تأثیر می‌گذارند به گونه‌ای که با تغییر در مقدار w میزان تیزی و یا نرمی گوشه‌های گشودگی قابل کنترل خواهد بود. همچنین مقدار c نشان‌دهنده نسبت طول به عرض گشودگی است. نتایج ارائه شده در این بخش برای زاویه چرخش گشودگی صفر درجه می‌باشد. همانطور که در شکل‌های 7 تا 9 برای ماده گرافیت/اپوکسی دیده می‌شود؛ تغییر تنش بی‌بعد با زاویه بار، در wهای مختلف به شدت به نحوه چیدمان لایه‌ها وابسته است. مثلاً در مورد چیدمان $s[90 / 0]$، کمترین تنش ممکن در زاویه بار 45 درجه اتفاق می‌افتد. حال آنکه برای چیدمان $s[45- / 45]$، کمترین تنش ممکن در زوایای بار صفر، 45 و 90 درجه رخ می‌دهد. برای چیدمان $s[30- / 0 / 30]$، رفتار کاملاً متفاوت است و با تغییر w مقدار و زاویه باری که کمترین تنش ممکن اتفاق می‌افتد؛ تغییر می‌کند. زاویه باری که تحت آن بیشترین تنش ممکن در wهای مختلف رخ می‌دهد نیز در چیدمان‌های مختلف، متفاوت است. برای چیدمان $s[90 / 0]$، این زاویه در wهای مختلف یکسان است. اگرچه مقدار بیشترین تنش به شدت به w وابسته است. این رفتار برای چیدمان $s[45- / 45]$ نیز دیده می‌شود.



شکل 7 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان $s[90 / 0]$ برحسب زاویه اعمال بار در wهای مختلف



شکل 8 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان $s[45- / 45]$ برحسب زاویه اعمال بار در wهای مختلف

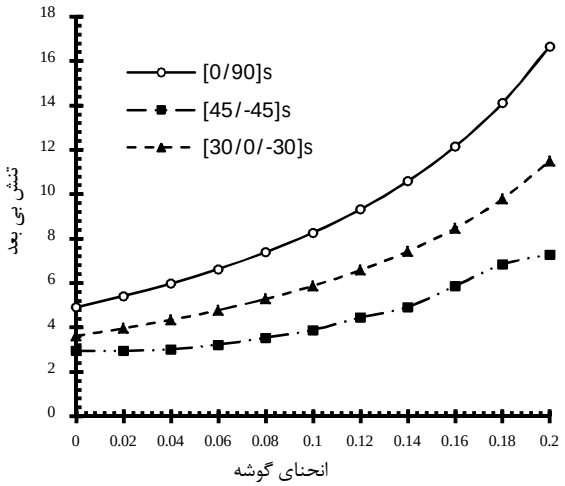


شکل 9 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان $s[30- / 0 / 30]$ برحسب زاویه اعمال بار در wهای مختلف

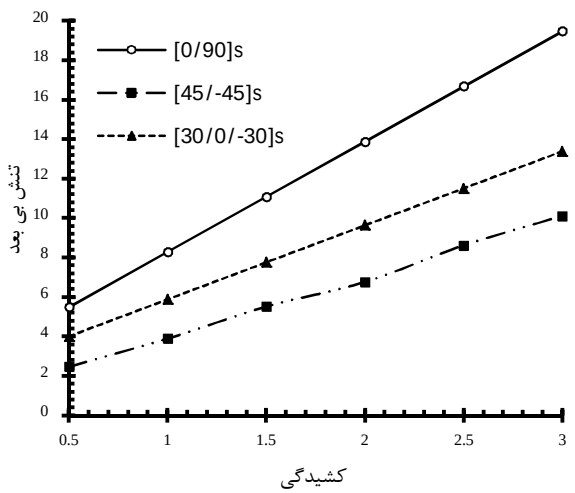
زاویه باری که این تنش تحت آن اتفاق می‌افتد برای چیدمان $s[90 / 0]$، صفر یا 90درجه است و برای چیدمان $s[45- / 45]$، 22/5 یا 67/5 درجه است. برای چیدمان $s[30- / 0 / 30]$، رفتار تغییر تنش بی‌بعد با زاویه بار بسیار با دیگر چیدمان‌ها متفاوت است؛ ولی در این مورد نیز بیشترین تنش ممکن برای wهای مختلف در زاویه صفر درجه رخ می‌دهد.

در شکل‌های 10 و 11 برای چیدمان‌های مختلف، تغییر تنش بی‌بعد برحسب w نشان داده شده است. نتایج ارائه شده در این شکل‌ها برای زوایای بار و چرخش صفر درجه است. شکل 10 تغییرات تنش را برای ماده گرافیت/اپوکسی و شکل 11 این تغییرات را برای ماده شیشه/اپوکسی نشان می‌دهد. همانطورکه انتظار می‌رود با کاهش w و نرم‌تر شدن انحنای گوشه گشودگی مقدار تنش بی‌بعد برای هر دو ماده و برای همه چیدمان‌های لایه‌ای کاهش می‌یابد تا جایی که برای $w=0$ که گشودگی شبه مربعی شکل خود را از دست داده و به دایره تبدیل می‌شود؛ کمترین مقدار تنش بی‌بعد برای تمامی چیدمان‌ها پیش می‌آید. با افزایش مقدار w مقدار تنش بی‌بعد با شیب ملایمی افزایش می‌یابد.

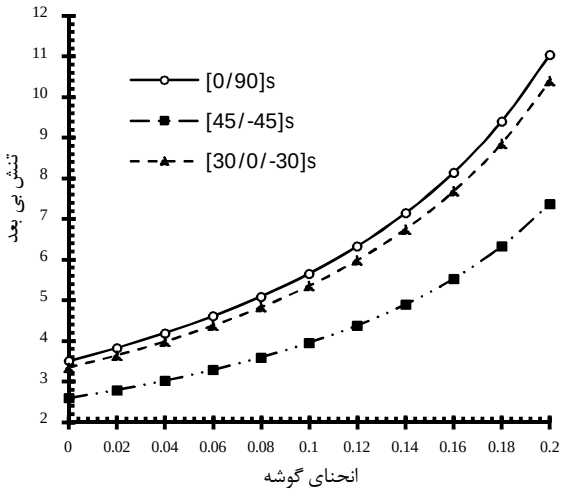
[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.15.1.8]



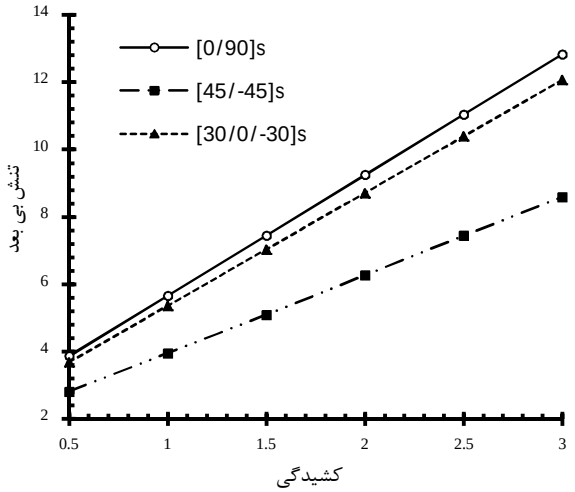
شکل 10 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد بر حسب w برای سه چیدمان گرافیت/ اپوکسی برای $c=1$



شکل 12 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد بر حسب c برای سه چیدمان ماده گرافیت/ اپوکسی برای $w=0/1$



شکل 11 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد بر حسب w برای سه چیدمان شیشه/ اپوکسی برای $c=1$



شکل 13 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد بر حسب c برای سه چیدمان ماده شیشه/ اپوکسی برای $w=0/1$

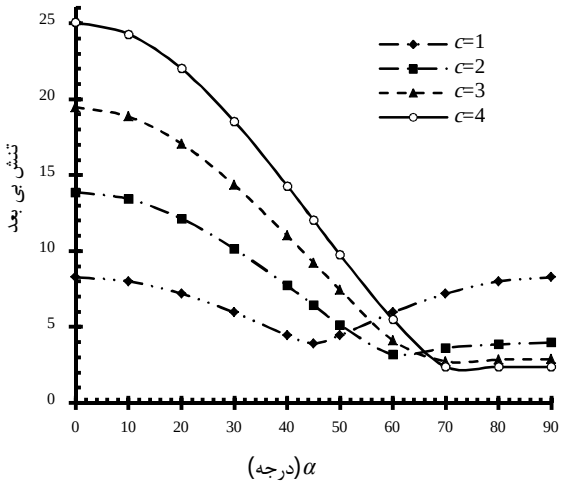
همین بررسی را می‌توان برای تغییرات c نیز مورد مطالعه قرار داد. مطابق شکل‌های 12 و 13 تغییر مقدار تنش بی‌بعد با تغییرات c رابطه تقریباً خطی داشته و افزایش یا کاهش این پارامتر به‌ترتیب موجب افزایش و یا کاهش تنش بی‌بعد خواهد شد. برای دستیابی به یک نگاشت همنوا مقدار c در تابع نگاشت باید در محدوده خاصی باشد لذا سعی شده است نتایج ارائه شده برای c در این محدوده قرارگیرد. باتوجه به رابطه (2) پارامتر c فقط در جهت y تابع نگاشت اعمال شده است لذا مطابق شکل 2 با افزایش مقدار c شکل گشودگی در جهت y کشیده می‌شود. روند افزایش تنش بی‌بعد با افزایش مقدار c برای وقتی است که زاویه اعمال بار صفر باشد یا به‌عبارت دیگر زاویه بار عمود بر امتداد کشیدگی گشودگی باشد. برای وقتی که بارگذاری در جهت y است (α=90) با افزایش c تنش بی‌بعد کاهش می‌یابد.

مطابق آنچه در شکل‌های 14 تا 16 دیده می‌شود؛ تغییرات تنش بی‌بعد برحسب زاویه بار در c های مختلف و برای w=0/1، رفتار نامنظم‌تری دارد. نتایج این شکل‌ها برای ماده گرافیت/اپوکسی می‌باشد. برای تمامی چیدمان‌ها و در cهای مختلف، در زاویه بار خاصی تنش بی‌بعد کمترین مقدار است. کمترین تنش بی‌بعد برای چیدمان‌های مختلف، با تغییر c، تغییر می‌کند. همان‌طورکه قبلاً نیز اشاره شد؛ کاهش مقدار تنش بی‌بعد با کاهش مقدار c، در چیدمان‌های مختلف، بستگی به زاویه بار هم دارد. در زوایای بار خاصی با کاهش c، مقدار تنش بی‌بعد کاهش می‌یابد و برای بعضی دیگر از زوایای بار مانند زاویه بار 90 درجه، این رفتار کاملاً متفاوت است. تغییرات بیشترین تنش بی‌بعد، رفتار منظم‌تری دارد. برای همه چیدمان‌ها این تنش با کاهش c، کاهش می‌یابد. در مورد چیدمان‌های s[90 / 0] و s[30- / 0 / 30]، بیشترین تنش بی‌بعد برای تمامی cها، در زاویه بار صفر درجه رخ می‌دهد و برای چیدمان s[45- / 45] برای cهای مختلف، در زاویه بار $22/5^{\circ}$ اتفاق می‌افتد.

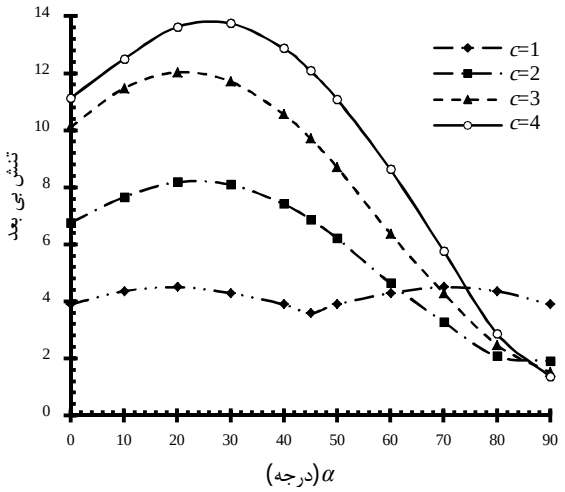
4-2- تأثیر زاویه چرخش گشودگی (β)

در این قسمت سعی می‌شود برای زاویه بار صفر درجه و w و c مشخصی به بررسی تأثیر زاویه چرخش گشودگی پرداخته شود. شکل‌های 17 و 18 به‌ترتیب برای کامپوزیت‌های گرافیت/اپوکسی و شیشه/اپوکسی، تغییرات تنش بی‌بعد برحسب زاویه چرخش گشودگی برای w=0/1 و c=1 را نشان می‌دهد. باتوجه به نتایج حاصل از این شکل‌ها به‌وضوح دیده می‌شود که برای گرافیت/اپوکسی در زاویه چرخش 45 درجه مقدار تنش بی‌بعد برای

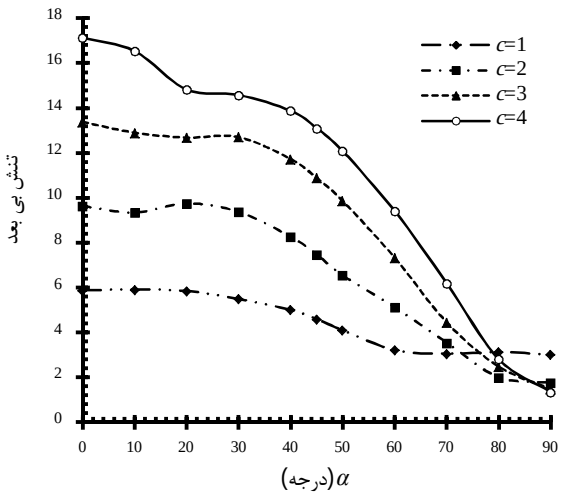
[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.15.1.8]



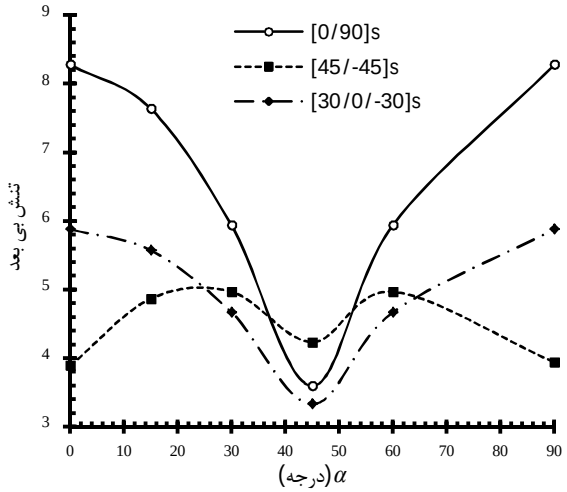
شکل 14 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان s[90 / 0] برحسب زاویه اعمال بار در cهای مختلف



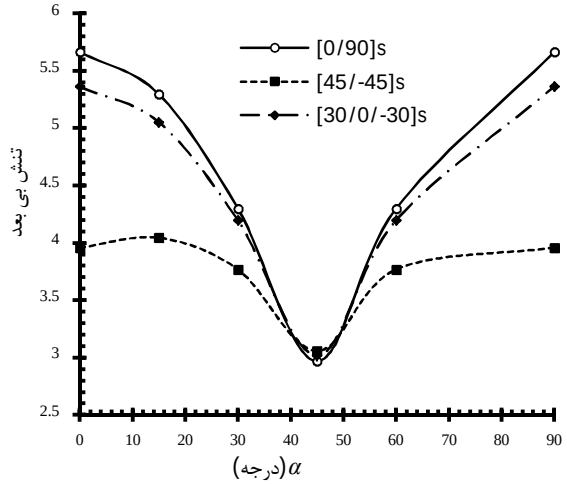
شکل 15 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان s[45- / 45] برحسب زاویه اعمال بار در cهای مختلف



شکل 16 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان s[30- / 0 / 30] برحسب زاویه اعمال بار در cهای مختلف



شکل 17 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد بر حسب چرخش گشودگی برای سه چیدمان ماده گرافیت/اپوکسی برای $c=1$ و $w=0/1$



شکل 18 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد بر حسب چرخش گشودگی برای سه چیدمان ماده شیشه/اپوکسی برای $c=1$ و $w=0/1$

چیدمان‌های s[90 / 0] **و** s[30- / 0 / 30]، کمترین مقدار ممکن است. زاویه چرخش مربوط به کمترین تنش بی‌بعد برای چیدمان s[45- / 45]، صفر یا 90 درجه است. در مورد شیشه/اپوکسی مطابق شکل 18 برای هرسه چیدمان، زاویه چرخشی که تحت آن کمترین تنش بی‌بعد حاصل می‌شود؛ 45 درجه است.

4-3- تأثیر زاویه چرخش گشودگی (β) و زاویه بار (α)

باتوجه به نتایج حاصل از بخش قبل، زاویه چرخش گشودگی یکی از پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش اطراف گشودگی می‌باشد. لذا در این قسمت سعی می‌شود تا به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف مانند زاویه بار و w درکنار زاویه چرخش گشودگی پرداخته شود. در شکل‌های 19 تا 21 به بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برحسب زاویه بار در زوایای چرخش مختلف پرداخته شده است. مقایسه منحنی‌های مختلف برای چیدمان‌های مورد بحث در هریک از شکل‌های مذکور گویای تأثیر به سزای این پارامتر بر مقدار تنش بی‌بعد است. از این شکل‌ها به وضوح نتیجه گرفته می‌شود که برای تمامی چیدمان‌ها، مقدار و موقعیت تنش بی‌بعد بیشینه با تغییر زاویه چرخش، تغییر

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.15.1.8]

می‌کند. برای مثال با توجه به شکل 19، برای چیدمان لایه‌ایی $_s$[90 / 0]، مقدار کمترین تنش بی‌بعد مربوط به زاویه چرخش 45 درجه 3/59 بوده که در زاویه بار صفر درجه اتفاق می‌افتد حال آنکه برای زاویه چرخش 60 درجه این مقدار 3/21 است که در زاویه بار 60 درجه رخ می‌دهد.

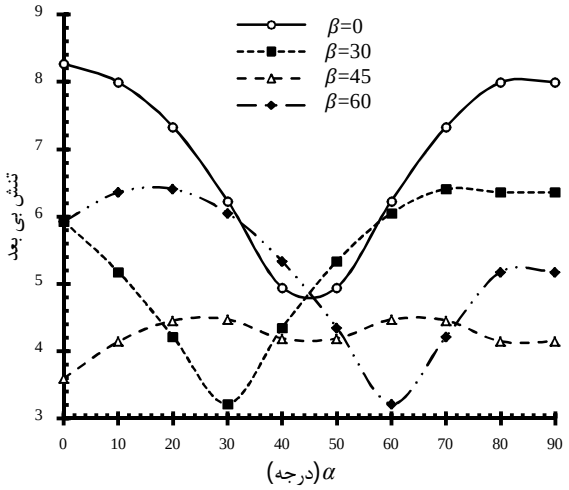
برای دیگر چیدمان‌ها نیز با توجه به شکل‌های 20 و 21 این رفتار دیده می‌شود. نتایجی که در این قسمت آورده شده است مربوط به ماده گرافیت/اپوکسی است.

در بیشتر مسائل طراحی، طراح به‌دنبال کمترین تنش ممکن ایجاد شده در سازه در اثر بارهای اعمالی است. همانطورکه در شکل‌های 19 تا 21 دیده می‌شود؛ برای یک زاویه چرخش خاص، مقدار تنش بی‌بعد در زوایای بار مشخصی کمترین مقدار را دارد. این مقدار تنش بی‌بعد، تنش بی‌بعد مطلوب و یا به‌اختصار تنش مطلوب نام‌گذاری می‌شود. در مسائل طراحی هدف نزدیک شدن به شرایط مربوط به تنش مطلوب است. بنابراین در ادامه سعی می‌شود تغییرات تنش مطلوب برحسب wهای مختلف مورد بررسی قرار گیرد. شکل 22 تغییرات تنش مطلوب را برای هر سه نوع چیدمان مختلف گرافیت/اپوکسی بر حسب تغییرات w نشان می‌دهد. همان‌طورکه در این شکل مشخص است، بر خلاف نتایج حاصل از شکل‌های 10 و 11، حالت بهینه پارامتر انحنای گوشه گشودگی درw=0 اتفاق نمی‌افتد بلکه برای چیدمان‌های $_s$[90 / 0] و $_s$[45- / 45] در w=0/08 و برای چیدمان لایه‌ای $_s$[30- / 0 / 30] در w=0/04 رخ می‌دهد. زوایای بار و چرخش متناظر با این حالت بهینه برای هر سه نوع چیدمان در جدول 2 آورده شده است. لازم به توضیح است که این نتایج برای حالت c=1 است.

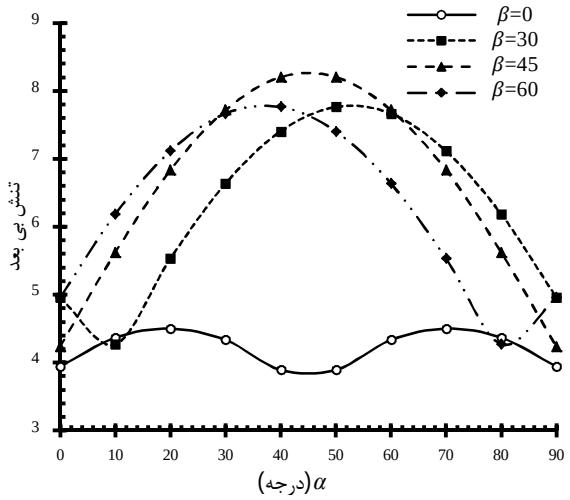
مقدار تنش مطلوب برای گشودگی دایره‌ای (w=0) و سه چیدمان $_s$[90 / 0] و $_s$[45- / 45] و $_s$[30- / 0 / 30] به‌ترتیب برابر 3/96 و 4/23 و 2/86 می‌باشد. با مقایسه این مقادیر با مقادیر موجود در جدول 2 به‌وضوح دیده می‌شود که گشودگی دایره‌ای بهترین شکل گشودگی نیست.

5- نتیجه‌گیری

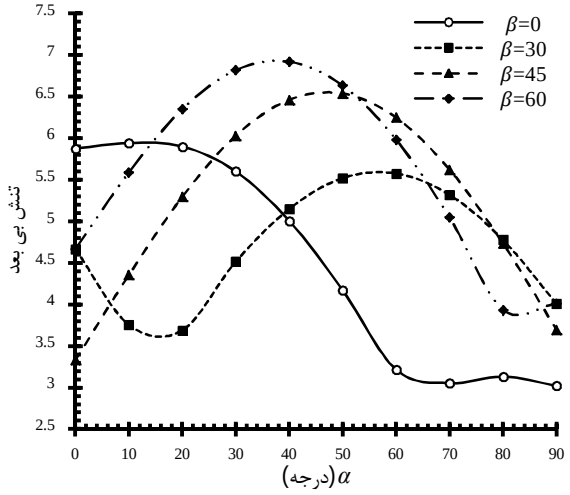
در این مقاله باتوسعه روش حل لخنیتسکی، از روش تحلیلی متغیر مختلط توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی در چندلایه های متقارن تحت کشش، مورد بررسی قرار گرفت. مقایسه نتایج حاصل از حل تحلیلی با نتایج



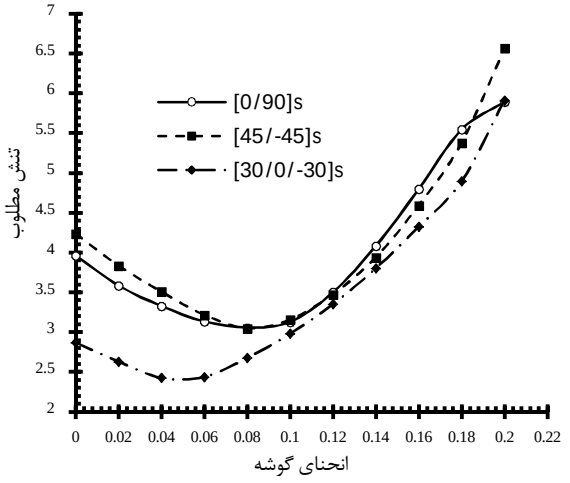
شکل 19 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان $_s$[90 / 0] برحسب زاویه اعمال بار در زوایای چرخش مختلف



شکل 20 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان لایه‌ای $_s$[45- / 45] برحسب زاویه اعمال بار در زوایای چرخش مختلف



شکل 21 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان لایه‌ای $_s$[30- / 0 / 30] برحسب زاویه اعمال بار در زوایای چرخش مختلف



شکل 22 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد بر حسب انحنای گوشه گشودگی برای سه چیدمان گرافیت/اپوکسی برای c=1

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.15.1.8]

جدول 2 مقادیر بهینه پارامترهای مورد بررسی برای چیدمان‌های مختلف ماده گرافیت/اپوکسی

چیدمان لایه‌ای	زاویه بار (درجه)	زاویه چرخش گشودگی (درجه)	انحنای گوشه (w)	تنش مطلوب
$[0 / 90]_s$	60	60	0/08	3/05
$[45 / -45]_s$	70	80	0/08	3/04
$[30 / 0 / -30]_s$	80	80	0/04	2/42

بدست‌آمده از روش‌های عددی نشان‌دهنده صحت و دقت روش حل تحلیلی حاضر است. در این مطالعه به‌خوبی نشان داده شد که پارامترهای متعددی ازقبیل زاویه چرخش گشودگی، شعاع انحنای گوشه گشودگی، چیدمان لایه‌ها، زاویه بار و نسبت طول به عرض گشودگی بر توزیع تنش اطراف گشودگی تأثیرگذار هستند. به‌منظور دسترسی به طرحی اقتصادی و ایمن، بررسی دقیق این پارامترها و انتخاب مقادیر بهینه آن‌ها لازم است. بدین منظور تأثیر هر پارامتر برای چیدمانهای مختلف مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که با انتخاب پارامترهای بهینه برای صفحه گرافیت/اپوکسی حاوی گشودگی شبه مربعی و چیدمان‌های $[90 / 0]_s$ و $[45 / -45]_s$ و $[30 / 0 / -30]_s$ مقدار تنش بی‌بعد نسبت به گشودگی دایره‌ای به‌ترتیب تا 23، 28 و 15/4 درصد کاهش می‌یابد. از دیگر نتایج مهم در این تحقیق این است که: نرم‌تر شدن گوشه‌های گشودگی تنها راه کاهش تنش بی‌بعد نیست بلکه انتخاب زاویه چرخش گشودگی مناسب هم در این کاهش تنش، مؤثر است. بررسی تأثیر زاویه چرخش گشودگی، انحنای گوشه گشودگی و مطالعه تأثیر متقابل تمامی پارامترهای تأثیرگذار به‌منظور دستیابی به نتایج بهینه از جنبه‌های نوآوری این مقاله محسوب می‌شود.

6- مراجع

[1] C. Y. Gao, J. Z. Xiao, , Y. L. Ke, FE analysis of stress concentrations in composite plates with multiple holes for zigzag multi-fastened joints, *Materials Science Forum,* Vol. 770, pp.17-20, 2014.

[2] N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity,* Second edition, Netherlands, Noordhooff, 1962.

[3] G. N. Savin, *Stress Concentration Around Holes,* New York: Pergamon Press, 1961.

[4] J. D. Eshelby, W. T. Read, W. Shockley, Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory, *Acta Metallurgica,* Vol. 1, No. 3, pp. 251–259, 1953.

[5] A. N Stroh, Dislocations and cracks in anisotropic elasticity. *Philosophical Magazine,* Vol. 3, No. 30, pp. 625–646, 1958.

[6] S. G. Lekhnitskii, *Anisotropic Plates,* Second edition, New York: Gordon and Breach Science, 1968.

[7] W. T. Chen, Plane thermal stress at an insulated hole under uniform heat flow in an orthotropic medium, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 34, No. 1, pp. 133-136, 1967.

[8] T. D. Jong, Stresses around rectangular holes in orthotropic plates, *Journal of Composite Materials,* Vol. 15, No. 3, pp. 311-328, 1981.

[9] K. Rajaiah, N. K. Naik, Optimum quasi-rectangular holes in infinite orthotropic plates under in-plane loadings, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 50, No. 4a, pp. 891-892, 1983.

[10] R. W. Zimmerman, Compressibility of two-dimensional cavities of various shapes, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 53, No. 3, pp. 500-504, 1986.

[11] C. Hwu, Anisotropic plates with various openings under uniform loading or pure bending, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 57, No. 3, pp. 700-706, 1990.

[12] W. Hufenbach, M. Schaffer, A. S. Herrmann., Calculation of the stress and displacement field of anisotropic plates with elliptical hole, *Ingenieur Arch,* Vol. 60, pp.507–517, 1990.

[13] J. Daoust, S. V. Hoa, An analytical solution for anisotropic plates containing triangular holes, *Composite Structures,* Vol. 19, No. 2, pp. 107–130, 1991.

[14] J. Rezaeepazhand, M. Jafari, Stress analysis of perforated composite plates, *Composite Structures,* Vol. 71, No. 4, pp. 463-468, 2005.

[15] G. H. Asmar, T.G. Jabbour, Stress analysis of anisotropic plates containing rectangular holes, *International journal of mechanics and solids,* Vol. 2, No. 1, pp. 59-84, 2007.

[16] J. Rezaeepazhand, M. Jafari, Stress analysis of composite plates with quasi-square cut out subjected to uniaxial tension, *Journal of Reinforced plastics and composites,* Vol. 29, No. 13, pp. 2015-2026, 2010.

[17] J. M. Whitney, R. J. Nuismer, Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations, *Journal of Composite Materials,* Vol. 8, No. 3, pp. 253-265, 1974.

[18] S.P. Garbo, J.M. Ogonowski, Strength predictions of composite laminates with unloaded fastener holes, *AIAA Journal,* Vol. 18, No. 5, pp. 585-589, 1980.

[19] F. Chang, R. A. Scott, G. S. Springer, Failure of composite laminates containing pin loaded holes- method of solution, *Journal of Composite Materials,* Vol. 18,No. 3, pp. 255-278, 1984.

[20] E. F. Rybicki, D. Schmueser, Effect of stacking sequence and lay-up angle on free edge stresses around a hole in a laminated plate under tension, *Journal of Composite Materials,* Vol. 12, No. 3, pp.300-313, 1978.

[21] S. Vellaichamy, B. G. Prakash, S. Brun, Optimum design of cutouts in laminated composite structures, *Computers and Structures,* Vol. 31, No. 3, pp. 241-246, 1990.

[22] N. Bonora, M. Costanzi, M. Marchetti, On closed form solution for the elastic stress field around holes in orthotropic composite plates under in-plane stress conditions, *Composite Structures,* Vol. 25, pp. 139-156, 1993.

[23] H. G. Beom, Y. Y. Earmme, Complex variable method for problems of a laminate composed of multiple isotropic layers, *International Journal of Fracture,* Vol. 92, No. 4, pp. 305–324, 1998.

[24] V. G. Ukadgaonker, D. K. N. Rao, A general solution for stresses around holes in symmetric laminates under inplane loading, *Composite Structures,* Vol. 49, No. 3, pp. 339–354, 2000.

[25] G. Romeo, Analytical behavior of laminates with rectangular opening under biaxial tension, compression and shear loads, *Journal of Composite Materials,* Vol. 35, No. 8, pp. 639–64, 2001.

[26] D. K. N. Rao, M. R. Babu, K.R. N. Reddy, D. Sunil, Stress around square and rectangular cutouts in symmetric laminates, *Composite Structures,* Vol. 92, No. 12, pp. 2845-2859, 2010.

[27] W. Hufenbach, B. Grüber, R. Gottwald, M. Lepper, B. Zhou, Analytical and experimental analysis of stress concentration in notched multilayered composite with finite outer boundaries, *Mechanics of Composite Materials,* Vol. 46, No. 5, pp. 531-538, 2010.

[28] W. Hufenbach, B. Grüber, R. Gottwald, M. Lepper, B. Zhou, An analytical method for the determination of stress and strain concentrations in textile-reinforced GF/PP composites with elliptical cutout and a finite outer boundary and its numerical verification, *Archive of Applied Mechanics,* Vol. 83, No. 1, pp. 125–135, 2013.

[29] W. Becker, Complex method for the elliptical hole in an unsymmetric laminate, *Archive of Applied Mechanics,* Vol. 63, No. 3, pp. 159-169, 1993.

[30] V. G. Ukadgaonker, D. K. N. Rao, A general solution for stress resultants and moments around holes in unsymmetric laminates, *Composite Structures,* Vol. 49, No. 1, pp. 27-39, 2000.

[31] P. Chen, Z. Shen, Stress resultants and moments around holes in unsymmetrical composite laminates subjected to remote uniform loading, *Mechanics Research Communications,* Vol. 30, No. 1, pp. 79–86, 2003.

[32] H. K. Rangavittal, A. C. B. Naidu, B Dattagurub, T. S. Ramamurthy, Analytical solutions for load transfer through smooth elastic pin in an infinite orthotropic plate, *Composite Structures,* Vol. 30, No. 3, pp. 329-339, 1995.

[33] E. Madenci, L. Ileri, Analysis of pin-loaded holes in composite laminates under combined bearing- bypass and shear, *International Journal of Solids Structures,* Vol. 32, No. 14, pp. 2053-2062, 1995.

[34] B. Okutan, Behavior of Pin-loaded Laminated Composites, *Experimental Mechanics,* Vol. 46, No. 5, pp. 589–600, 2006.

[35] L. Fischer, How to predict structural behavior of RP laminates, *Modern Plastics,* Vol.37, No. 6, pp.122-209, 1960.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.15.1.8]