



تحلیل پایداری و دوشاخگی سیستم تیر-جرم-فنر-دمپر تحت رزونانس‌های اصلی و داخلی یک به سه

مرتضی همایون صادقی^{1*}، سعید لطفان²

1- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

2- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

* morteza@tabrizu.ac.ir; 5166614766 صندوق پستی

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 24 آذر 1395

پذیرش: 03 بهمن 1395

ارائه در سایت: 19 بهمن 1395

کلید واژگان:

سیستم تیر-جرم-فنر-دمپر

تعاملات مودال غیرخطی

رزونانس داخلی

پایداری

در این مقاله تعاملات مودال غیرخطی و پایداری تیر ریلی حامل سیستم جرم-فنر-دمپر بررسی شده است. بدین منظور معادلات ارتعاشی بی‌بعد حاکم بر سیستم بر اساس روش مقیاس‌های چندگانه مورد تحلیل قرار گرفته است. با در نظر گرفتن میرایی ویسکوالاستیک کلونین-وویت در تیر، شکل موده‌های مختلط و فرکانس تشدید غیرخطی وابسته به زمان استخراج شده است. به کارگیری روش مقیاس‌های چندگانه به شکل مرسوم باعث تناقض فیزیکی در پاسخ زمانی ارتعاشات آزاد جرم متمرکز می‌شود که لازم است برطرف گردد. پس از تحلیل ارتعاشات آزاد، پاسخ اجباری سیستم تحت تحریک هارمونیک در حوالی فرکانس طبیعی اول و وقوع رزونانس داخلی یک به سه تحلیل شده است. پارامترهای سیستم یک درجه آزادی به صورتی در نظر گرفته شده که تعامل مودال از طریق مکانیزم رزونانس داخلی اتفاق افتد. در این شرایط پاسخ فرکانسی سیستم و پایداری آن مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده است که ناپایداری متناظر با پرش و دوشاخگی هاپف در دامنه ارتعاشی رخ می‌دهد. نمودارهای پاسخ زمانی، فاز و پوانکاره نشان می‌دهد که رفتار ارتعاشی متناوب، شبه‌متناوب و آشوبناک در سیستم اتفاق می‌افتد. به منظور تصدیق نتایج مقاله حاضر، فرکانس‌های طبیعی سیستم با نتایج موجود در پژوهش‌های پیشین مقایسه شده است؛ علاوه بر این مقایسه، پاسخ فرکانسی بر اساس انتگرال‌گیری عددی اعتبار نتایج مقاله حاضر را نشان می‌دهد.

Stability and bifurcation analysis of a beam-mass-spring-damper system under primary and one-to-three internal resonances

Morteza Homayoun Sadeghi*, Saeed Lotfan

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

* P.O.B. 5166614766, Tabriz, Iran, morteza@tabrizu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 14 December 2016
Accepted 22 January 2017
Available Online 07 February 2017

Keywords:
Beam-mass-spring-damper system
Nonlinear modal interactions
Internal resonance
Stability

ABSTRACT

In this paper nonlinear modal interactions and stability of a Rayleigh beam carrying a mass-spring-damper system are investigated. For this purpose, the dimensionless equations governing the vibration of the system are analyzed based on multiple scales method. By considering viscoelastic Kelvin-Voigt damping in the beam, complex mode shapes and time-dependent resonance frequencies are extracted. Using the traditional form of the multiple scales method results in physical contradiction in the time response of the concentrated mass, which should be resolved. After free vibration analysis, the forced response of the system under harmonic force with frequency close to the first natural frequency and occurrence of one-to-three internal resonance is studied. The parameters of the one degree of freedom system are considered in a way that the modal interaction occurs via internal resonance mechanism. In this condition, frequency response of the system and its stability are investigated and it is shown that the instability associated with the jump and Hopf bifurcation occurs in the vibration amplitude. Plots of the time response, phase and Poincare show that periodic, quasi-periodic and chaotic vibration may take place in the system. In order to verify the present paper's results, the natural frequencies of the system are compared to those of the previous studies; in addition to this comparison, the frequency response based on numerical integration validates the results of the present paper.

1- مقدمه

این نوع عضو در زمینه‌های مهندسی و راحتی تحلیل معادلات حاکم بر آن، بسیاری از سیستم‌های مکانیکی رفتار دینامیکی مشابه تیر دارند و بررسی رفتار ارتعاشی آن می‌تواند به روشن ساختن رفتار دینامیکی رده گسترده‌تری از سیستم‌های مکانیکی کمک کند. همچنین، کابل‌هایی که کاربرد بسیار وسیعی در انتقال قدرت و سیگنال، تعلیق پل‌ها، برج‌ها و ساختمان‌ها، مهار در مهندسی دریا و فضا، و ... دارد، به علت داشتن سطح مقطع ثابت و نسبت

ارتعاشات در بسیاری از سازه‌ها و ماشین‌آلات رخ می‌دهد و می‌تواند عملکرد سیستم را به شکل نامطلوب تحت تأثیر قرار دهد؛ بنابراین برای جلوگیری از ارتعاشات ناخواسته و پدیده تشدید، مطالعه رفتار سیستم‌های دینامیکی مقید و غیرمقید از اهمیت بالایی برخوردار است. در این میان رفتار ارتعاشی تیرها بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرد، به این دلیل که علاوه بر کاربردهای وسیع

Please cite this article using:

M. Homayoun Sadeghi, S. Lotfan, Stability and bifurcation analysis of a beam-mass-spring-damper system under primary and one-to-three internal resonances, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 166-176, 2015 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

طول به قطر نسبتاً زیاد می‌تواند به صورت تیر مدل‌سازی گردد [1]. از طرفی متناسب با کاربرد، بسیاری از اجزای ماشین‌آلات و دستگاه‌های مهندسی می‌تواند شامل اجزای گوناگون همچون جرم متمرکز، فنر، دمپر، اتصالات داخلی، تکیه‌گاه غیرایده‌آل و جاذب ارتعاشی نیز باشد. برای مثال قرارگیری یک موتور به واسطه فنربندی بر روی پایه را می‌توان به صورت سیستم جرم-فنر-دمپر-تیر در نظر گرفت [2]. همچنین کابل‌های تحت کشش حامل میراگرهای جرمی تنظیم شده را نیز می‌توان به صورت سیستم جرم-فنر-دمپر-تیر مدل‌سازی کرد [3]. بیشتر این مدل‌سازی‌های ریاضی و به عبارتی استفاده از زبان ریاضی برای بیان رفتار سیستم واقعی در طبیعت، برای فهم بهتر رفتار و ویژگی‌های سیستم انجام می‌پذیرد [4].

ارتعاشات سیستم تیر حامل جرم-فنر-دمپر بر اساس مدل‌های خطی به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است. پژوهش‌های پیشین نشان می‌دهد که ارتعاشات آزاد [5] و اجباری [7,6] این سیستم براساس مدل‌های اولیه برنولی [8]، تیموشنکو [9,10] و ردی-بیکفورد [11] مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین بسیاری از این مدل‌ها شامل تیر یکنواخت و غیریکنواخت [12]، یا یک دهانه و چند دهانه [13,14] می‌باشد. در تمامی این مطالعات روش‌هایی مانند ضرایب لاگرانژ و گالرکین [15]، ریتز و ریلی اشمیت [16]، دانکرلی و ساوول [17]، ماتریس انتقال متمرکز و پیوسته [18,19]، تابع گرین [20] و روش همگذاری عددی [21] استفاده شده است. سیر تحول تمامی این مطالعات نشان می‌دهد که رفتار ارتعاش خطی سیستم کوپل دینامیکی تیر و جرم به صورت کامل مورد بررسی قرار گرفته است. در تمامی این مطالعات، جرم متمرکز به‌صورت معلق [8] و غیرمعلق [22] در نظر گرفته شده است. سیستم جرم-فنر-دمپر معلق کاربردی مانند جاذب ارتعاشی دارد در حالی که سیستم جرم-فنر-دمپر غیرمعلق دارای کاربردی مانند تکیه‌گاه میانی کشسان می‌باشد.

از طرفی اگر سیستم تیر-جرم-فنر-دمپر دارای دامنه نوسانات محدودی باشد و به عبارتی تغییرات نیروی محوری تیر در نظر گرفته شود، لازم است تا سیستم به صورت غیرخطی مدل‌سازی گردد. البته بر اساس مدل‌سازی خطی حتی در شرایطی که دامنه نوسانات محدود و کوچک باشد، می‌توان پاسخ دینامیکی قابل قبولی در بسیاری از شرایط استخراج نمود. با این حال در سیستم‌های مکانیکی که ذات خطی هم دارند، با غیرخطی در نظر گرفتن مدل می‌توان پدیده‌های فیزیکی جالبی را مشاهده نمود که در مدل‌های خطی از فیزیک مسئله حذف می‌شود. یکی از مهمترین پدیده‌ها که می‌تواند پاسخ و رفتار پایداری سیستم را تحت تأثیر قرار دهد تعاملات مودال می‌باشد. در حضور تعاملات مودال، پاسخ ماندگار یک سیستم که به صورت میرا نیز مدل شده است می‌تواند شامل مود تحریک شده و دامنه بسیار بزرگ از موده‌های دیگر باشد. در حالی که در عدم حضور این پدیده، پاسخ ماندگار تنها شامل مود تحریک شده است. به عبارتی تعاملات مودال سبب تبادل انرژی در بین مودها به خصوص از موده‌های پایین به موده‌های بالا می‌شود. بنابراین با استفاده از مدل غیرخطی علاوه بر دستیابی به دقت بیشتر در پاسخ، می‌توان پدیده‌های فیزیکی ناشی از تعاملات مودال همچون تقابل انرژی سیستم اصلی و زیرسیستم، رزونانس‌های داخلی، رزونانس‌های ترکیبی و تبادل انرژی بین موده‌های ارتعاشی را مورد بررسی قرار داد.

در مورد سیستم تیر-جرم-فنر-دمپر غیرخطی مطالعات اندکی انجام شده است. دوول [23] به بررسی ارتعاشات عرضی تیر خطی حامل سیستم جرم-فنر غیرمعلق غیرخطی پرداخته است. وی معادلات حاکم بر سیستم را با استفاده از روش انرژی و معادلات لاگرانژ استخراج نمود و برای تحلیل آن‌ها از

روش ضرایب لاگرانژ استفاده کرد. پاکدمیری و نایفه [24] مطالعه دوول [23] را در حضور نیروی کشش، میرایی و نیروی خارجی بررسی کردند. آن‌ها معادلات حاکم را بر اساس روش اغتشاشات و با دو رویکرد مورد تحلیل قرار دادند و رفتار سیستم را تحت رزونانس اصلی بررسی کردند. در رویکرد اول روش مقیاس‌های چندگانه به صورت مستقیم بر معادلات اعمال شده است، در حالی که در رویکرد دوم با فرض موده‌های ارتعاشی تقریبی این روش بر معادلات دیفرانسیل معمولی اعمال می‌شود. آن‌ها نشان دادند که نتایج رویکرد دوم با خطای زیادی همراه است. آزکایا و همکاران [25] همین مسئله را برای تیر با شرایط مرزی متنوع مورد بررسی قرار دادند با این تفاوت که از فنر غیرخطی متصل به جرم متمرکز صرف نظر نمودند. آن‌ها نیز از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده کردند. غایش و همکاران [26] روش مقیاس‌های چندگانه را برای بررسی ارتعاشات تیر دارای اتصالات داخلی دلخواه مانند جرم متمرکز و فنر خطی تعمیم دادند و پاسخ فرکانسی را در مود اول بررسی کردند. آن‌ها در مطالعه دیگری [27] اثر دما را بر رفتار دینامیک غیرخطی سیستم بررسی نمودند. افتخاری و همکاران [28] ارتعاشات غیرخطی تیر کامپوزیتی یک سرگیردار حامل سیستم جرم-فنر در انتها، تحت تحریک پایه را مورد تحلیل قرار دادند. آن‌ها معادلات حاکم را بر اساس اصل همپلتون استخراج کردند و رفتار سیستم را تحت رزونانس داخلی مطالعه نمودند و نشان دادند که پارامترهای زیرسیستم می‌تواند باعث پدیده اشباع در ارتعاش عرضی سیستم اصلی شود. بری و همکاران [29] نیز ارتعاشات غیرخطی تیر حامل چندین سیستم جرم-فنر-دمپر غیرمعلق را بررسی کردند. آن‌ها از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده کردند و اثر سیستم‌های یک درجه آزادی و نیروی محوری را بر رفتار دینامیکی سیستم بررسی نمودند. ونگ و لیانگ [30] کاربرد جرم متمرکز به عنوان جاذب ارتعاشی بر روی تیر در شرایط ارتعاش غیرخطی و وقوع رزونانس داخلی را بررسی کردند. آن‌ها رفتار غیرخطی سیستم را با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه مورد تحلیل قرار دادند و تلاش کردند که اثر جاذب ارتعاشی بهینه گردد. در سال‌های اخیر ابراهیمی و اسماعیل‌زاده خادم [31] ارتعاشات تیر خطی دو سرگیردار متصل به سیستم جرم-فنر-دمپر غیرخطی را تحت تحریک هارمونیک بررسی کردند. لازم به ذکر است که در هیچ یک از مطالعات انجام شده تا به امروز ارتعاشات تیر غیرخطی حامل سیستم جرم-فنر-دمپر معلق مورد تحلیل قرار نگرفته است. بر همین اساس در این مطالعه رفتار غیرخطی سیستم تیر-جرم-فنر-دمپر مورد بررسی قرار گرفته و تعاملات مودال بر اساس مدل غیرخطی تحت رزونانس‌های اصلی و داخلی بررسی شده است. بدین منظور در بخش 2 معادلات ارتعاش عرضی حاکم بر تیر و جرم متمرکز بر اساس مدل ریلی با فرض جابجایی بزرگ تیر به‌صورت بی‌بعد بیان شده است. در این معادلات اتلاف انرژی در تیر بر اساس مدل ویسکوالاستیک کلوین-وویت در نظر گرفته شده است. در بخش 3 رفتار ارتعاشات آزاد سیستم با به‌کارگیری ترکیبی از روش مقیاس‌های چندگانه، سری‌های توانی و مفهوم تابع گرین مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش 4 ارتعاشات اجباری سیستم دارای تعاملات مودال غیرخطی از طریق مکانیزم رزونانس داخلی یک به سه تحت نیروی هارمونیک در حوالی فرکانس طبیعی اول مورد تحلیل قرار گرفته است. این تعامل غیرخطی ناشی از پارامترهای سیستم یک درجه آزادی است که باعث وقوع ناپایداری در دامنه ارتعاشی ماندگار می‌گردد. در نهایت در بخش 5 با ارائه مثال‌های عددی متعدد، پاسخ ارتعاشی سیستم مورد بررسی قرار گرفته است.

$$\mu = \frac{\eta A}{EI} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (9)$$

$$\gamma_d = \frac{c_d L^2}{EI} \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^2}} \quad (10)$$

$$k = \frac{k_d L^3}{EI} \quad (11)$$

$$m = \frac{m_d}{\rho A L} \quad (12)$$

حال می‌توان با به‌کارگیری روابط (3) تا (12)، معادلات (1) و (2) را به شکل جامع و بدون بعد زیر بیان کرد:

$$u_{,\tau\tau} - \zeta_1 u_{,ss\tau} + u_{,ssss} + \gamma u_{,ssss\tau} - \zeta_2 u_{,ss} - 1.5v_1^{-1} u_{,ss}^2 - \mu(2u_{,s} u_{,s\tau} + u_{,s}^2 u_{,ss\tau}) = [\gamma_d(\dot{v} - u_{,\tau}^*) + k(v - u^*)]\delta(s - s^*) + f(s, \tau) \quad (13)$$

$$m\ddot{v} + \gamma_d(\dot{v} - u_{,\tau}^*) + k(v - u^*) = 0 \quad (14)$$

در معادلات (3) تا (14)، u ، s ، τ ، ζ_1 ، ζ_2 ، γ ، μ ، η ، k ، m و f به‌ترتیب پارامترهای بدون بعد حرکت عرضی تیر، مختصه افقی، زمان، اینرسی دورانی، نیروی محوری، میرایی خطی تیر، میرایی غیرخطی تیر، میرایی دمپر، سفتی فنر، جرم متمرکز و نیروی خارجی می‌باشد. بر این اساس فرکانس طبیعی بی بعد سیستم جرم-فنر-دمپر به صورت $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ تعریف می‌شود. همچنین شرایط مرزی معادله (13) را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$u(s, \tau)|_{s=0 \& 1} = 0 \quad (15)$$

$$[u_{,ss}(s, \tau) + \gamma u_{,ss\tau}(s, \tau)]|_{s=0 \& 1} = 0 \quad (16)$$

در ادامه برای تحلیل مسئله، ارتعاشات آزاد و اجباری سیستم به تفکیک مورد بررسی قرار می‌گیرد.

3- تحلیل ارتعاشات آزاد

با توجه به این‌که یکی از اهداف اصلی این پژوهش بررسی تقابل مودال غیرخطی بین تیر و سیستم جرم-فنر-دمپر است، بنابراین می‌توان دامنه ارتعاشات را محدود و نه لزوماً بزرگ در نظر گرفت به طوری که بتوان از روش اغتشاشات استفاده کرد. بر این اساس با توجه به حضور میرایی در مدل، از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده می‌شود [32,26]. مطابق این روش تغییر متغیرهای $u = \sqrt{\varepsilon} u$ ، $v = \sqrt{\varepsilon} v$ و $\eta = \sqrt{\varepsilon} \eta$ در معادلات (13) تا (16) اعمال شده و پاسخ معادلات بدست آمده به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$u(s, \tau; \varepsilon) = u_0(s, T_0, T_1) + \varepsilon u_1(s, T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (17)$$

$$v(\tau; \varepsilon) = v_0(T_0, T_1) + \varepsilon v_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (18)$$

در این روابط $T_0 = \tau$ مقیاس زمانی سریع و $T_1 = \varepsilon \tau$ مقیاس زمانی آهسته می‌باشد، همچنین پارامتر اغتشاشات به‌صورت $0 < \varepsilon \ll 1$ است. با در نظر گرفتن $D_n = d/dT_n$ ، معادلات و شرایط مرزی مرتبه ε^0 به‌صورت زیر قابل استخراج است:

$$D_0^2 u_0 - \zeta_1 D_0^2 u_{0,ss} + u_{0,ssss} - \zeta_2 u_{0,ss} = [\gamma_d D_0(v_0 - u_0^*) + k(v_0 - u_0^*)]\delta(s - s^*) \quad (19)$$

$$m D_0^2 v_0 + \gamma_d D_0(v_0 - u_0^*) + k(v_0 - u_0^*) = 0 \quad (20)$$

2- معادلات ارتعاش عرضی

سیستم کوپل دینامیکی متشکل از تیر ریلی با تکیه‌گاه ساده در دو انتها حامل سیستم یک درجه آزادی جرم-فنر-دمپر مطابق شکل 1 به عنوان سیستم خطی در نظر گرفته شده است. تیر دارای طول L ، سطح مقطع A ، ممان اینرسی سطح I ، چگالی جرمی ρ ، مدول یانگ E و حرکت عرضی $w(x, t)$ می‌باشد. جرم m_d به وسیله فنر k_d و دمپر ویسکوز c_d در محل x^* به تیر متصل و دارای حرکت $v(t)$ می‌باشد. همچنین سیستم تحت نیروی هارمونیک یکنواخت F در طول تیر است.

به‌منظور بررسی تعاملات مودال غیرخطی در سیستم فوق، لازم است تا تغییرات نیروی محوری در تیر که ناشی از حرکت عرضی تیر می‌باشد، در نظر گرفته شود. بنابراین با در نظر گرفتن کرنش لاگرانژ در تیر، معادلات حاکم بر حرکت تیر و جرم را می‌توان به‌صورت زیر نوشت (استخراج در پیوست):

$$\rho A w_{,tt} - \rho I w_{,xxtt} + E I w_{,xxxx} + \eta I w_{,xxxxt} - (N_0 + 1.5 E A w_{,x}^2) w_{,xx} - \eta A (2 w_{,x} w_{,xt} w_{,xx} + w_{,x}^2 w_{,xxt}) = [c_d(\dot{v} - w_{,t}^*) + k_d(v - w^*)]\delta(x - x^*) + F(x, t) \quad (1)$$

$$m_d \ddot{v} + c_d(\dot{v} - w_{,t}^*) + k_d(v - w^*) = 0 \quad (2)$$

لازم به ذکر است که در استخراج روابط فوق، اتلاف انرژی در تیر توسط مدل ویسکوالاستیک کلون-وویت با ضریب η لحاظ شده است. همچنین δ و N_0 به‌ترتیب نشان‌دهنده تابع دلتای دیراک و نیروی محوری اولیه در تیر بوده و $w^* = w(x^*, t)$ می‌باشد. به‌منظور عمومیت بخشیدن به معادلات و تحلیل آن، پارامترهای بی‌بعد زیر معرفی می‌شود:

$$u = \frac{w}{L} \quad (3)$$

$$s = \frac{x}{L} \quad (4)$$

$$\tau = t \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \quad (5)$$

$$\zeta_1 = \frac{I}{A L^2} \quad (6)$$

$$\zeta_2 = \frac{N_0 L^2}{EI} \quad (7)$$

$$\gamma = \frac{\eta}{EI^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (8)$$

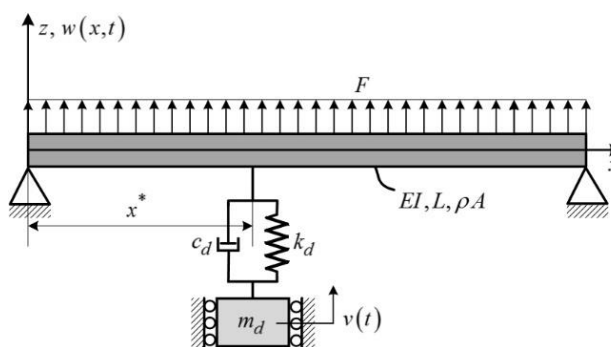


Fig. 1 Simply supported beam carrying a mass-spring-damper system
شکل 1 تیر دو سر ساده حامل سیستم جرم-فنر-دمپر

$$U_n'(s^{*+}) = U_n'(s^{*-}) \quad (37)$$

$$U_n''(s^{*+}) = U_n''(s^{*-}) \quad (38)$$

$$U_n'''(s^{*+}) - U_n'''(s^{*-}) = J_n(s^*) \quad (39)$$

حال می‌توان با استفاده از بسط سری توانی، پاسخ رابطه (29) را به صورت زیر نوشت [32]:

$$U_n(s) = \begin{cases} \sum_{m=0}^M c_{l_m} s^m & s \leq s^* \\ \sum_{m=0}^M c_{r_m} s^m & s \geq s^* \end{cases} \quad (40)$$

که در آن ضرایب ثابت مجهول هستند. با جای گذاری پاسخ (40) در رابطه (29)، ضرایب توان‌های m پارامتر s برابر صفر در نظر گرفته می‌شود و مطابق آن دستگاه معادلات جبری $2M - 6$ معادله‌ای با $2M + 2$ مجهول به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} P_m(c_{l_0}, c_{l_1}, c_{l_2}, \dots, c_{l_M}) = 0, & m = 0, 1, 2, \dots, M - 4 \\ Q_m(c_{r_0}, c_{r_1}, c_{r_2}, \dots, c_{r_M}) = 0, & m = 0, 1, 2, \dots, M - 4 \end{cases} \quad (41)$$

همان‌طور که از دستگاه معادلات فوق مشخص است هشت مجهول اضافی وجود دارد که می‌بایست به گونه‌ای تعیین شوند که اولاً جواب‌های مستقل خطی به دست آیند و ثانیاً جواب‌های به دست آمده در معادله صدق کرده و شرایط (34) تا (39) را ارضا کنند.

از حل دستگاه معادلات جبری اخیر می‌توان کلیه ضرایب مجهول به ازای $m \geq 4$ را بر حسب ضرایب مجهول $0 \leq m \leq 3$ به دست آورد و پاسخ (40) را به شکل زیر نوشت:

$$U_n(s) = \begin{cases} \sum_{m=0}^3 c_{l_m} \bar{U}_m(s) & s \leq s^* \\ \sum_{m=0}^3 c_{r_m} \bar{U}_m(s) & s \geq s^* \end{cases} \quad (42)$$

که در آن $\bar{U}_m$ جواب‌های مستقل خطی معادله می‌باشد. با اعمال شرایط (34) تا (39) در رابطه فوق، مسئله مقدار ویژه به صورت زیر قابل بیان است:

$$[\Delta]_{8 \times 8} [C]_{8 \times 1} = \{0\}_{8 \times 1} \quad (43)$$

با حل مسئله فوق فرکانس‌های طبیعی و توابع شکل مود قابل استخراج است. لازم به ذکر است که در تحلیل ارائه شده برای میرایی تیر تغییر متغیر $\eta = \sqrt{\varepsilon} \hat{\eta}$ استفاده شده است. مطابق روش مقیاس‌های چندگانه، استفاده از این تغییر متغیر باعث می‌شود که معادلات مرتبه ε^0 دارای ضریب میرایی تیر نباشد. بنابراین اثر این پارامتر بر فرکانس طبیعی و تابع شکل مود قابل بررسی نیست و با تحلیل معادلات مرتبه ε^1 ، اثر این میرایی در پاسخ زمانی و فرکانس تشدید غیرخطی ظاهر می‌گردد. مشابه این روند می‌توان از تغییر متغیر به صورت $c_d = \sqrt{\varepsilon} \hat{c}_d$ نیز استفاده کرد. با به کارگیری این تغییر متغیر رابطه (30) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$B_n(T_1) = \frac{r_n^2}{r_n^2 - 1} A_n(T_1) U_n(s^*) \quad (44)$$

با استفاده از این دو تغییر متغیر معادلات مرتبه ε^0 فاقد جمله میرایی خواهد

$$u_0(s, \tau)|_{s=0 \& 1} = 0 \quad (21)$$

$$u_{0,ss}(s, \tau)|_{s=0 \& 1} = 0 \quad (22)$$

همچنین معادلات و شرایط مرزی مرتبه ε^1 به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 - \zeta_1 D_0^2 u_{1,ss} + u_{1,ssss} - \zeta_2 u_{1,ss} &= -2D_0 D_1 u_0 \\ &+ 2v_1 D_0 D_1 u_{0,ss} - \hat{\gamma} D_0 u_{0,ssss} + 1.5 v_1^{-1} u_{0,s}^2 u_{0,ss} \\ &+ [\gamma_d D_0 (v_1 - u_1^*) + k(v_1 - u_1^*)] \delta(s - s^*) \\ &+ [\gamma_d D_1 (v_0 - u_0^*)] \delta(s - s^*) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} m D_0^2 v_1 + \gamma_d D_0 (v_1 - u_1^*) + k(v_1 - u_1^*) \\ = -2m D_0 D_1 v_0 - \gamma_d D_1 (v_0 - u_0^*) \end{aligned} \quad (24)$$

$$u_1(s, \tau)|_{s=0 \& 1} = 0 \quad (25)$$

$$u_{1,ss}(s, \tau)|_{s=0 \& 1} = -\hat{\gamma} D_0 u_{0,ss}(s, \tau)|_{s=0 \& 1} \quad (26)$$

3-1- تحلیل معادلات مرتبه ε^0

پاسخ معادلات (19) و (20) به صورت روابط زیر در نظر گرفته می‌شود [27]:

$$u_0(s, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(T_1) e^{i\omega_n T_0} U_n(s) + cc] \quad (27)$$

$$v_0(T_0, T_1) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n(T_1) e^{i\omega_n T_0} + cc] \quad (28)$$

با توجه به حضور ضریب میرایی دمپر در معادلات مرتبه ε^0 ، در روابط فوق U_n تابع شکل مود مختلط، ω_n فرکانس طبیعی مختلط، A_n بخشی از دامنه ارتعاشی تیر و B_n بخشی از دامنه ارتعاشی جرم متمرکز در مود ارتعاشی n ام می‌باشد. همچنین cc نشان دهنده جملات مزدوج مختلط است. با جای گذاری روابط (27) و (28) در معادلات (19) و (20)، معادله مقدار ویژه و رابطه دامنه ارتعاشی به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} U_n^{(4)}(s) + (\zeta_1 \omega_n^2 - \zeta_2) U_n''(s) - \omega_n^2 U_n(s) \\ = J_n(s^*) \delta(s - s^*) \end{aligned} \quad (29)$$

$$B_n(T_1) = \frac{r_n^2 + 2i\zeta r_n}{r_n^2 - 1 + 2i\zeta r_n} A_n(T_1) U_n(s^*) \quad (30)$$

در روابط فوق داریم:

$$J_n(s^*) = \frac{k + i\gamma_d \omega_n}{r_n^2 - 1 + 2i\zeta r_n} U_n(s^*) \quad (31)$$

$$r_n = \frac{\omega_0}{\omega_n} \quad (32)$$

$$\zeta = \frac{\gamma_d}{2m\omega_0} \quad (33)$$

در روابط فوق J_n تابع پرش، r_n نسبت فرکانسی و ζ نسبت میرایی است. برای حل مسئله مقدار ویژه مطابق رابطه (29) می‌توان با به کارگیری مفهوم تابع گرین، توابع شکل مود و فرکانس‌های طبیعی سیستم را استخراج نمود. بر این اساس شرایط مرزی و شرایط تابع گرین به ترتیب به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U_n(s)|_{s=0 \& 1} = 0 \quad (34)$$

$$U_n''(s)|_{s=0 \& 1} = 0 \quad (35)$$

$$U_n(s^{*+}) = U_n(s^{*-}) \quad (36)$$

با به کارگیری روابط (51) و (52)، فرکانس تشدید غیرخطی که تابع زمان نیز می‌باشد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\omega_n^{nl} = \omega_n - \varepsilon \alpha_{1i} - \frac{\varepsilon \alpha_{2i} e^{-2(\alpha_{1r} + \bar{\omega}_{ni})T_1}}{4a_n^{-2}(0) + \frac{\alpha_{2r}}{(\alpha_{1r} + \bar{\omega}_{ni})} (1 - e^{-2(\alpha_{1r} + \bar{\omega}_{ni})T_1})} \quad (53)$$

در این بخش با تحلیل ارتعاشات آزاد فرکانس‌های طبیعی، توابع شکل مود و فرکانس‌های تشدید غیرخطی استخراج گردید. به منظور بررسی تعاملات مودال غیرخطی لازم است تا ارتعاشات اجباری سیستم در حضور حداقل دو مود ارتعاشی مورد بررسی قرار گیرد. این مسئله در بخش بعد تحلیل می‌شود.

4- تحلیل ارتعاشات اجباری

با در نظر گرفتن نیروی خارجی در رابطه (13) به صورت $f = \varepsilon f_0 \sin \Omega \tau$ دارای فرکانس تحریک در حوالی فرکانس مود اول ارتعاشی و لحاظ کردن تعاملات مودال غیرخطی از طریق مکانیزم رزونانس داخلی 1 به 3 بین موده‌های اول و دوم، داریم:

$$\Omega = \omega_{1r} + \varepsilon \sigma_0 \quad (54)$$

$$\omega_{2r} = 3\omega_{1r} + \varepsilon \sigma_1 \quad (55)$$

که در آن پارامتر تنظیم‌کننده می‌باشد. با جای‌گذاری روابط (27) و (28) در روابط (23) و (24) در حضور نیروی خارجی و با استفاده از روابط فوق، معادلات مرتبه ε^1 به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$D_0^2 u_1 - \zeta_1 D_0^2 u_{1,ss} + u_{1,ssss} - \zeta_2 u_{1,ss} - [\gamma_d D_0 (v_1 - u_1^*) + k(v_1 - u_1^*)] \delta(s - s^*) = S_1^3(s, T_0, T_1) e^{i\omega_{1r} T_0} + S_2^4(s, T_0, T_1) e^{i\omega_{2r} T_0} + NST + cc \quad (56)$$

$$m D_0^2 v_1 + \gamma_d D_0 (v_1 - u_1^*) + k(v_1 - u_1^*) = S_1^5(T_0, T_1) e^{i\omega_{1r} T_0} + S_2^6(T_0, T_1) e^{i\omega_{2r} T_0} + cc \quad (57)$$

با استفاده از شرایط حل‌پذیری و رابطه (30)، معادلات حاکم بر دامنه ارتعاشی تیر در مود اول و دوم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\langle S_1^3, U_1(s) \rangle + \langle S_1^5, U_1(s) \rangle = \dot{A}_1(T_1) + \alpha_3 A_1(T_1) + \alpha_4 A_1^2(T_1) \bar{A}_1(T_1) e^{-2\omega_{1i} T_0} + \alpha_5 \bar{A}_1^2(T_1) A_2(T_1) e^{-(\omega_{1i} + \omega_{2i} - i\varepsilon \sigma_1) T_0} + \alpha_6 A_1(T_1) |A_2(T_1)|^2 e^{-2\omega_{2i} T_0} + \alpha_7 e^{(\omega_{1i} + i\varepsilon \sigma_0) T_0} = 0 \quad (58)$$

$$\langle S_2^4, U_2(s) \rangle + \langle S_2^6, U_2(s) \rangle = \dot{A}_2(T_1) + \alpha_8 A_2(T_1) + \alpha_9 A_2^2(T_1) \bar{A}_2(T_1) e^{-2\omega_{2i} T_0} + \alpha_{10} A_1^3(T_1) e^{-(3\omega_{1i} - \omega_{2i} + i\varepsilon \sigma_1) T_0} + \alpha_{11} A_2(T_1) |A_1(T_1)|^2 e^{-2\omega_{1i} T_0} = 0 \quad (59)$$

به منظور استخراج معادلات خودگردان و جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی معادلات فوق، پاسخ زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$A_n(T_1) = \frac{1}{2} [p_n(T_1) + i q_n(T_1)] e^{(i\nu_n + \bar{\omega}_{ni})T_1}, \quad n = 1, 2 \quad (60)$$

که در آن

$$\nu_1 = \sigma_0 \quad (61)$$

$$\nu_2 = 3\sigma_0 - \sigma_1 \quad (62)$$

با به کارگیری پاسخ به شکل (60) و استفاده از تغییر متغیرهای فوق، معادلات

بود و لذا فرکانس طبیعی و تابع شکل مود مقادیر حقیقی خواهد داشت. بر این اساس با توجه به روابط (27)، (28) و (44)، نسبت دامنه ارتعاشی جرم متمرکز و نقطه‌ای از تیر یک مقدار حقیقی خواهد بود. این درحالی است که حضور دمپر وجود اختلاف فاز بین این دو دامنه را ضروری می‌سازد. به عبارتی نسبت دو دامنه مذکور باید یک مقدار مختلط باشد و لذا رابطه (44) از لحاظ فیزیکی صحیح نمی‌باشد. با توجه به توضیحات ارائه شده در تحلیل حاضر عبارت $c_d = \sqrt{\varepsilon} \hat{c}_d$ استفاده نشده است.

3-2- تحلیل معادلات مرتبه ε^1

با در نظر گرفتن فرکانس طبیعی سیستم به صورت $\omega_n = \omega_{nr} + i\omega_{ni}$ روابط (27) و (28) در روابط (23) و (24) جای‌گذاری شده و معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$D_0^2 u_1 - \zeta_1 D_0^2 u_{1,ss} + u_{1,ssss} - \zeta_2 u_{1,ss} - [\gamma_d D_0 (v_1 - u_1^*) + k(v_1 - u_1^*)] \delta(s - s^*) = S_1^1(s, T_0, T_1) e^{i\omega_{nr} T_0} + NST + cc \quad (45)$$

$$m D_0^2 v_1 + \gamma_d D_0 (v_1 - u_1^*) + k(v_1 - u_1^*) = S_1^2(T_0, T_1) e^{i\omega_{nr} T_0} + cc \quad (46)$$

در روابط فوق S_n^k توابع تکین و NST جملات غیرتکین می‌باشد. لازم به ذکر است که در روش مقیاس‌های چندگانه، توابع تکین از لحاظ زمانی تنها تابع T_1 هستند. در صورتی که در تحلیل حاضر عبارات $e^{-\omega_{ni} T_0}$ و $e^{-3\omega_{ni} T_0}$ نیز در جملات تکین وجود دارند که ناشی از مختلط بودن فرکانس‌های طبیعی است. با استفاده از تعامد دو تابع دلخواه f_1 و f_2 به صورت رابطه (47)، به کارگیری شرایط حل‌پذیری و استفاده از رابطه (30)، معادله حاکم بر دامنه ارتعاشی تیر به صورت رابطه (48) استخراج می‌شود.

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{s_1}^{s_2} f_1(s) \bar{f}_2(s) ds \quad (47)$$

$$\langle S_n^1, U_n(s) \rangle + \langle S_n^2, U_n(s) \rangle = \dot{A}_n(T_1) + \alpha_1 A_n(T_1) + \alpha_2 A_n^2(T_1) \bar{A}_n(T_1) e^{-2\omega_{ni} T_0} \quad (48)$$

در روابط فوق ضرایب مختلط ثابت به صورت $\alpha_m = \alpha_{mr} + i\alpha_{mi}$ هستند که تابع پارامترها و شکل موده‌های سیستم می‌باشند. همچنین ... نشان‌دهنده مزدوج مختلط پارامتر مربوط است. به منظور استخراج معادلات خودگردان و جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی معادله (48)، پاسخ قطبی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$A_n(T_1) = \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{(i\beta_n(T_1) + \bar{\omega}_{ni})T_1} \quad (49)$$

که در آن $\omega_{ni} = \varepsilon \bar{\omega}_{ni}$ بوده و علت حضور آن در پاسخ فرضی برطرف نمودن مشکل ناشی از عدم به کارگیری $c_d = \sqrt{\varepsilon} \hat{c}_d$ می‌باشد. همچنین β_n و α_n ترتیب دامنه و فاز ارتعاشی است. با استفاده از پاسخ فوق، معادله (48) به شکل دستگاه معادلات زیر قابل بیان است:

$$\dot{a}_n + (\alpha_{1r} + \bar{\omega}_{ni}) a_n + \frac{1}{4} \alpha_{2r} a_n^3 = 0 \quad (50)$$

$$\dot{\beta}_n + \alpha_{1i} + \frac{1}{4} \alpha_{2i} a_n^2 = 0 \quad (51)$$

با استفاده از تغییر متغیر $\bar{a}_n = a_n^{-2}$ ، پاسخ دقیق معادله (50) به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$a_n^2(T_1) = \frac{e^{-2(\alpha_{1r} + \bar{\omega}_{ni})T_1}}{a_n^{-2}(0) + \frac{\alpha_{2r}}{4(\alpha_{1r} + \bar{\omega}_{ni})} (1 - e^{-2(\alpha_{1r} + \bar{\omega}_{ni})T_1})} \quad (52)$$

مرتبه اول خودگردان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \ddot{p}_m + h_m(p_1, p_2, q_1, q_2) = 0, & m = 1, 2 \\ \dot{q}_m + h_{m+1}(p_1, p_2, q_1, q_2) = 0, & m = 1, 2 \end{cases} \quad (63)$$

در معادلات فوق h توابع غیرخطی از p, q و پارامترهای سیستم می‌باشد. با انتگرال‌گیری عددی از معادلات فوق، پاسخ زمانی سیستم قابل استخراج است.

4-1 پاسخ پایا و پایداری آن

با در نظر گرفتن $\chi = \{p_1, p_2, q_1, q_2\}^T$ معادلات (63) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{\chi} = H(\chi, \sigma_0) \quad (64)$$

بر این اساس، نقاط تعادل معادلات (63) برابر با بردار $\chi_0(\sigma_0)$ خواهد بود به طوری که:

$$H(\chi_0(\sigma_0), \sigma_0) = \{0\} \quad (65)$$

پایداری این نقاط بر اساس مقادیر ویژه ماتریس $\partial H / \partial \chi(\chi_0)$ قابل بررسی می‌باشد. برای پاسخ پایای پایدار لازم است که تمامی مقادیر ویژه این ماتریس بخش حقیقی منفی داشته باشد.

در حالت کلی، پایداری پاسخ پایا تابعی پیوسته از پارامترهای سیستم است و با تغییر پارامترها ممکن است ناپایداری رخ دهد. برای سیستم‌های میرا تنها دو مکانیزم برای ناپایدار شدن پاسخ پایدار وجود دارد [33]. در حالت اول یک مقدار ویژه حقیقی با گذر از مبدأ مختصات، از سمت چپ محور موهومی به سمت راست محور منتقل می‌شود. مقادیر متناظر با شروع این ناپایداری در روی پاسخ فرکانسی متناظر با پدیده "پرش" است. این ناپایداری با عنوان "تحول نوع اول" شناخته می‌شود.

در حالت دوم یک جفت مقدار ویژه مختلط از سمت چپ محور موهومی به سمت راست محور منتقل می‌شود. این ناپایداری که با عنوان "تحول نوع دوم" شناخته می‌شود با دوشاخگی هاپف متناظر است. بر اساس تئوری دوشاخگی هاپف در این ناپایداری سیستم ارتعاش با چرخه حدی را تجربه می‌کند [34].

5- بحث و نتایج عددی

با تحلیل ارائه شده در بخش‌های قبلی، در ادامه به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری سیستم تیر-جرم-فنر-دمپر بر اساس نتایج عددی پرداخته شده است. در تمام محاسبات تعداد جملات روش سری توانی برابر با 50 در نظر گرفته شده است.

5-1 فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی

در این بخش تأثیر پارامترهای اساسی بر فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی مورد بررسی قرار گرفته است؛ به این منظور ابتدا صحنه‌سنجی تحلیل حاضر با مقایسه فرکانس‌های طبیعی سیستم با مقادیر ارائه شده در پژوهش‌های مشابه پیشین انجام شده است. در جدول 1 مقادیر چهار فرکانس طبیعی اول سیستم نامیرا در مقایسه با مقادیر گزارش شده در پژوهش [35] آورده شده است. همچنین در جدول 2 مقادیر چهار فرکانس طبیعی اول سیستم در حضور میرایی دمپر در مقایسه با مقادیر گزارش شده در پژوهش [3] آورده شده است. بر اساس این جداول تطابق بسیار خوبی با نتایج پژوهش‌های پیشین مشاهده می‌شود.

جدول 1 فرکانس‌های طبیعی نامیرای سیستم در مقایسه با نتایج پژوهش پیشین

بازای $\zeta_2 = 0$ و $\zeta_1 = 0.00001$, $\gamma_d = 0$, $s^* = 0.5$

Table 1 Undamped natural frequencies of the system in comparison with results of the previous study for $s^* = 0.5$, $\gamma_d = 0$, $\zeta_1 = 0.00001$, and $\zeta_2 = 0$

خطای نسبی %	فرکانس طبیعی نامیرا مرجع [35]	پژوهش حاضر	مود	پارامترهای سیستم
0.0004	0.98964	0.989644	1	$k = 1$
0.0000	9.97140	9.971398	2	$m = 1$
0.0001	39.4784	39.47842	3	$(\omega_0 = 1)$
0.0212	88.8377	88.81885	4	
0.0001	3.81075	3.810747	1	$k = 100$
0.0002	18.0365	18.03653	2	$m = 2$
0.0001	39.4784	39.47843	3	$(\omega_0 = 7.071)$
0.0425	89.9747	90.0129	4	

جدول 2 فرکانس‌های طبیعی میرای سیستم در مقایسه با نتایج پژوهش پیشین بازای

$\zeta_2 = 1$ و $\zeta_1 = 0.00001$, $m = 0.025$, $\gamma_d = 0.011074$, $s^* = 0.9$

Table 2 Damped natural frequencies of the system in comparison with results of the previous study for $s^* = 0.9$, $\gamma_d = 0.011074$, $m = 0.025$, $\zeta_1 = 0.00001$ and $\zeta_2 = 1$

خطای نسبی %	فرکانس طبیعی میرا مرجع [3]	پژوهش حاضر	مود	سفتی فنر k
0.0571	3.1478+0.2212i	3.1472+0.2229i	1	0.24911
0.0048	10.360+0.00128i	10.3595+0.00128i	2	
0.0188	39.977+0.00387i	39.9695+0.00387i	3	
0.0446	89.327+0.00727i	89.2872+0.00726i	4	
0.0070	10.040+0.09293i	10.0393+0.09284i	1	2.70773
0.0066	10.725+0.12868i	10.7243+0.12875i	2	
0.0190	40.000+0.00440i	39.9924+0.00439i	3	
0.0443	89.345+0.00745i	89.3054+0.00744i	4	

با توجه به این که تابع شکل مود ارتعاشی اول سیستم متناظر با درجه آزادی سیستم جرم-فنر-دمپر است، بنابراین این شکل مود به عنوان مود ارتعاشی تیر در نظر گرفته نمی‌شود. بر این اساس تأثیر فرکانس طبیعی سیستم جرم-فنر-دمپر واقع در محل $s^* = 0.4$ بر مودهای ارتعاشی اول و دوم تیر $(\sin(\pi s)$ و $\sin(2\pi s)$) با رسم بخش حقیقی توابع دوم و سوم در شکل 2 بررسی شده است. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که با افزایش ω_0 رفتار محل اتصال سیستم جرم-فنر-دمپر به تیر شبیه به گره می‌گردد.

تأثیر سفتی فنر و جرم متمرکز بر فرکانس‌های تشدید غیرخطی اول و دوم به صورت تابعی از زمان در شکل‌های 3 و 4 نشان داده شده است. بر این اساس مشاهده می‌شود که با افزایش سفتی فنر و کاهش مقدار جرم متمرکز، مقادیر این فرکانس‌ها افزایش می‌یابد. همچنین در حضور میرایی ویسکوالاستیک در تیر، فرکانس‌های تشدید غیرخطی با گذر زمان کاهش می‌یابد و میزان تأثیر پارامترهای سفتی و جرم را نیز تغییر می‌دهد.

5-2 شرایط رزونانس داخلی 1 به 3

در حالت کلی فرکانس‌های طبیعی سیستم تابعی پیوسته از پارامترهای آن می‌باشد و با تغییر این پارامترها، فرکانس‌های طبیعی تغییر می‌کند. در پژوهش‌های پیشین تأثیر سیستم جرم-فنر-دمپر بر سیستم ارتعاشی میزبان به طور کامل بررسی شده و نشان داده شده است که اگر این مجموعه به سیستم اصلی اضافه شود، فرکانس‌های طبیعی بیشتر از فرکانس طبیعی جرم-فنر-دمپر افزایش و فرکانس‌های کمتر کاهش می‌یابد. همچنین فرکانس طبیعی جدیدی بین این دو دسته و در حوالی فرکانس طبیعی سیستم یک درجه آزادی ظاهر می‌شود. به عبارتی افزودن یک سیستم یک درجه آزادی به سیستم اصلی، تعداد فرکانس‌های طبیعی سیستم را از n به $n+1$ افزایش می‌دهد [36].

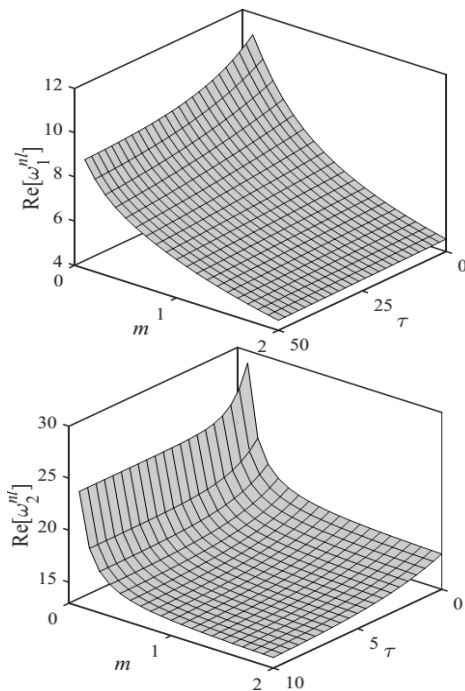


Fig. 4 Real parts of the first and second non-linear resonance frequencies as functions of time and concentrated mass for $s^* = 0.4$, $k = 50$, $\gamma_d = 0$, $\gamma = 0.001$, $a_n(0) = 0.05$, $\zeta_1 = 0.0025$, and $\zeta_2 = 0$

شکل 4 بخش حقیقی فرکانس‌های تشدید غیرخطی اول و دوم به صورت تابعی از زمان و جرم متمرکز برای $s^* = 0.4$, $k = 50$, $\gamma_d = 0$, $\gamma = 0.001$, $a_n(0) = 0.05$, $\zeta_1 = 0.0025$ و $\zeta_2 = 0$

در این بخش شرایط رزونانس داخلی 1 به 3 ناشی از تغییرات فرکانس طبیعی در اثر پارامترهای سیستم یک درجه آزادی مورد بررسی قرار گرفته است. به این منظور الگوهای امکان وقوع رزونانس داخلی بین مدهای اول و دوم سیستم در شکل 5 نشان داده شده است. در این شکل نحوه تغییرات نسبت فرکانس طبیعی دوم به اول برای مقادیر متفاوت جرم متمرکز، سفتی فنر و محل سیستم یک درجه آزادی نشان داده شده است. بر این اساس، شرایطی که در آن این نسبت باعث وقوع رزونانس داخلی می‌گردد بوسیله خط‌چین مشخص شده است. برای مثال مجموعه سیستم‌ها با پارامترهای $\{m = 0.8, k = 94, s^* = 0.4\}$ و $\{m = 0.6, k = 73, s^* = 0.5\}$ باعث ایجاد فرکانس‌های تناسبی شده و رزونانس داخلی را در پی دارد. برای سیستم با پارامترهای متناظر با این خط‌چین‌ها استفاده از تقریب تک مود مطابق رابطه (48) صحیح نمی‌باشد و لازم است از روابط (58) و (59) استفاده شود.

در ادامه به منظور بررسی پایداری پاسخ سیستم، تحت رزونانس داخلی و اصلی مطابق روابط (54) و (55)، مجموعه پارامترهای سیستم به صورت $\{m = 0.8, k = 72, \gamma_d = 0.01, s^* = 0.4, \zeta_1 = 0.0025, \zeta_2 = 0\}$ در نظر گرفته شده است. این سیستم دارای فرکانس‌های طبیعی به صورت $\omega_1 = 5.4775 + 0.0005i$ و $\omega_2 = 16.4702 + 0.0129i$ می‌باشد که بخش حقیقی آن‌ها دارای تناسب 1 به 3 است.

5-3- پاسخ ارتعاشی تحت رزونانس اصلی و داخلی

به منظور بررسی رفتار کوپل دینامیکی تیر و جرم متمرکز در شرایط تحریک فرکانس اول سیستم و وقوع رزونانس داخلی، پاسخ فرکانسی پایا استخراج شده است. در شکل 6 پاسخ فرکانسی سیستم تحت تحریک هارمونیک با

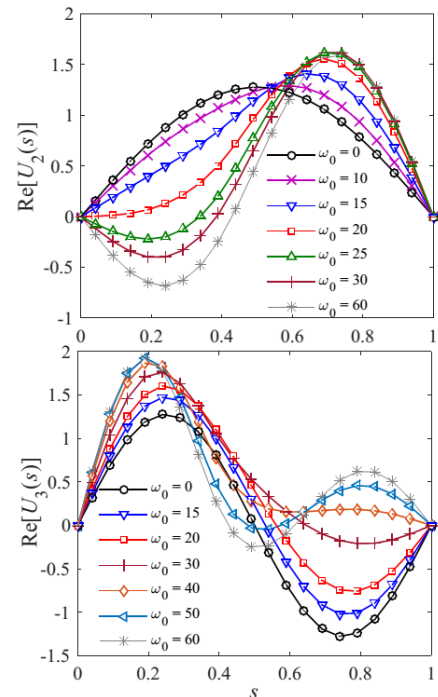


Fig. 2 Real part of the second and third mode shape functions for different values of the natural frequencies of the mass-spring-damper system for $s^* = 0.4$, $\gamma_d = 0.01$, $\zeta_1 = 0.00001$, and $\zeta_2 = 0$

شکل 2 بخش حقیقی توابع مود ارتعاشی دوم و سوم بر حسب مقادیر متفاوت فرکانس طبیعی سیستم جرم-فنر-دمپر برای $s^* = 0.4$, $\gamma_d = 0.01$, $\zeta_1 = 0.00001$ و $\zeta_2 = 0$

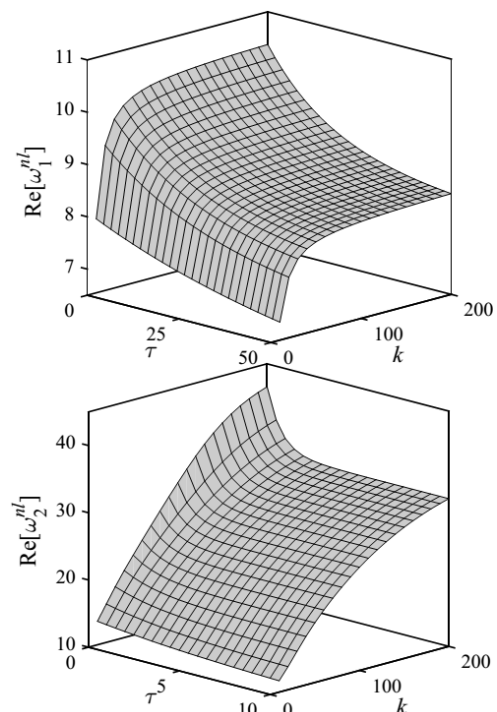


Fig. 3 Real parts of the first and second non-linear resonance frequencies as functions of time and spring constant for $s^* = 0.4$, $m = 0.2$, $\gamma_d = 0$, $\gamma = 0.001$, $a_n(0) = 0.05$, $\zeta_1 = 0.0025$, and $\zeta_2 = 0$

شکل 3 بخش حقیقی فرکانس‌های تشدید غیرخطی اول و دوم به صورت تابعی از زمان و سفتی فنر برای $s^* = 0.4$, $m = 0.2$, $\gamma_d = 0$, $\gamma = 0.001$, $a_n(0) = 0.05$, $\zeta_1 = 0.0025$ و $\zeta_2 = 0$

($\varepsilon\sigma_0 = 2.48$) و بلافاصله مود اول کاهش و مود دوم افزایش می‌یابد؛ به عبارتی در نزدیکی نقطه B تعامل مودال به‌گونه‌ای اتفاق می‌افتد که انرژی از مود اول به مود دوم منتقل می‌شود. با افزایش پارامتر تنظیم به 2.61 تحول نوع دوم در سیستم رخ می‌دهد و پاسخ پایدار، ناپایدار می‌گردد. این ناپایداری ناشی از گذر یک جفت مقدار ویژه مختلط از سمت چپ محور موهومی به سمت راست محور می‌باشد. با کاهش پارامتر تنظیم‌کننده، پاسخ ارتعاشی همچنان ناپایدار است تا این‌که در نقطه C ($\varepsilon\sigma_0 = 1.08$) تحول نوع اول رخ می‌دهد و پاسخ در ناحیه کوچکی تا نقطه D ($\varepsilon\sigma_0 = 1.15$) پایدار است. در این ناحیه دامنه مود اول افزایش و مود دوم کاهش می‌یابد؛ به عبارتی بخشی از انرژی مود اول برگردانده می‌شود. در نقطه D نیز پاسخ با مکانیزم نوع دوم دچار ناپایداری می‌گردد تا این‌که در نقطه E ($\varepsilon\sigma_0 = 2.39$) با همین نوع از تحول، پاسخ پایدار می‌شود. با توجه به مقادیر ویژه نقطه F ($\varepsilon\sigma_0 = 2.07$) نیز مشخص می‌گردد که شروع ناپایداری با کاهش پارامتر تنظیم‌کننده از نوع اول است.

به‌منظور فهم بهتر نقاط تحول شرح داده شده در شکل 6، مقادیر ویژه متناظر با پاسخ ناپایدار در حوالی این نقاط در جدول 3 گزارش شده است. با توجه به این جدول نیز مشاهده می‌شود که در نقاط C و F تحول نوع اول متناظر با پدیده پرش و در نقاط دیگر تحول نوع دوم همراه با دوشاخگی هاپف رخ می‌دهد.

به‌منظور بررسی رفتار ارتعاشی سیستم در شرایط پایدار و ناپایدار، پاسخ زمانی پایا، نمودار فاز و پوانکاره در شکل‌های 7 تا 12 برای مقادیر متفاوت پارامتر تنظیم‌کننده نشان داده شده است. در شکل‌های 7 و 8 دامنه ارتعاشی پایدار بوده و پاسخ زمانی متناوب است؛ به‌گونه‌ای که نمودار پوانکاره یک نقطه را در صفحه فاز نشان می‌دهد. با کاهش پارامتر تنظیم‌کننده و گذر از نقطه E ، دامنه ارتعاشی ناپایدار و دچار چرخه حدی می‌شود. در این شرایط پاسخ ارتعاشی شبه‌متناوب است و مقادیر ویژه متناظر با شرط پایداری دارای بخش حقیقی مثبت نسبتاً کوچک هستند (شکل‌های 9 تا 11). با کاهش بیشتر پارامتر تنظیم‌کننده بخش حقیقی مثبت این مقادیر ویژه افزایش می‌یابد و پاسخ زمانی آشوبناک می‌گردد (شکل 12).

6- نتیجه‌گیری

در این مطالعه ارتعاشات آزاد و اجباری غیرخطی تیر ریلی حامل سیستم جرم-فنر-دمپر تحت رزونانس اصلی و داخلی یک به سه مورد تحلیل قرار گرفته است. مهم‌ترین مشاهدات و نتایج به صورت زیر بیان می‌گردد:

جدول 3 مقادیر ویژه متناظر با پاسخ ناپایدار سیستم ارتعاشی تیر-جرم-فنر-دمپر دارای $\omega_1 = 5.4775 + 0.0005i$ و $\omega_2 = 16.4702 + 0.0129i$ برای $\gamma = 0.001$ ، $f_0 = 300$ و $a_n(0) = 0$

Table 3 Corresponding eigenvalues of the unstable response of the beam-mass-spring-damper system with $\omega_1 = 5.4775 + 0.0005i$ and $\omega_2 = 16.4702 + 0.0129i$ for $\gamma = 0.001$, $a_n(0) = 0$, and $f_0 = 300$

نقطه	مقادیر ویژه				نوع تحول
	اول	دوم	سوم	چهارم	
B	$0.6 - 135.5i$	$0.6 + 135.5i$	$-11.1 - 49.1i$	$-11.1 + 49.1i$	دوم
C	-30.1	17.4	$-4.3 - 63.9i$	$-4.3 + 63.9i$	اول
D	$2.1 + 49.8i$	$2.1 - 49.8i$	$-12.6 - 58.9i$	$-12.6 + 58.9i$	دوم
E	$-10.5 - 136i$	$-10.5 + 136i$	$0.1 - 81.8i$	$0.1 + 81.8i$	دوم
F	33.8	31.9	$-9.6 - 172.5i$	$-9.6 + 172.5i$	اول

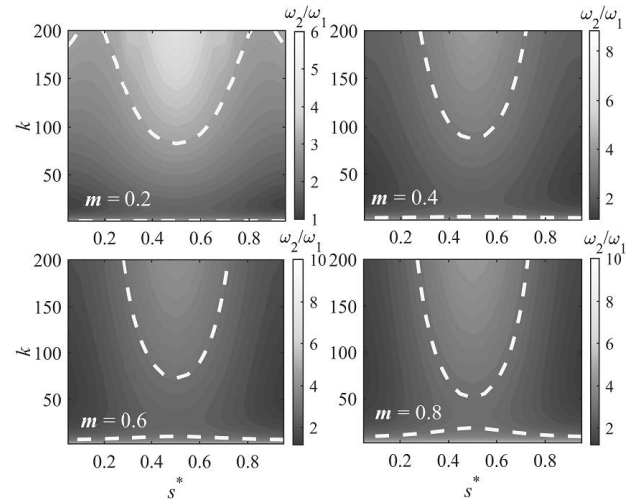


Fig. 5 Ratio of the second natural frequencies to the first ones as function of concentrated mass, spring constant, and one degree of freedom system's position for $\gamma_d = 0$, $\zeta_1 = 0$, and $\zeta_2 = 0$ (Dashed line: The occurrence of 1 to 3 internal resonance)

شکل 5 نسبت فرکانس‌های طبیعی دوم به اول بر حسب جرم متمرکز، سفتی فنر و محل سیستم یک درجه آزادی برای $\gamma_d = 0$ ، $\zeta_1 = 0$ و $\zeta_2 = 0$ (خط‌چین: وقوع رزونانس داخلی 1 به 3)

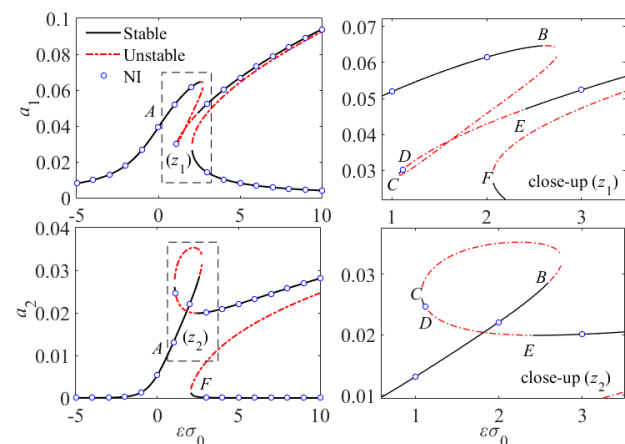


Fig. 6 Frequency response functions of the system with $\omega_1 = 5.4775 + 0.0005i$ and $\omega_2 = 16.4702 + 0.0129i$ for $\gamma = 0.001$, $a_n(0) = 0$, and $f_0 = 300$

شکل 6 توابع پاسخ فرکانسی سیستم دارای $\omega_1 = 5.4775 + 0.0005i$ و $\omega_2 = 16.4702 + 0.0129i$ برای $\gamma = 0.001$ ، $a_n(0) = 0$ و $f_0 = 300$

فرکانس Ω در حوالی فرکانس طبیعی اول نشان داده شده است. در این شکل دامنه ارتعاشی پایای مود اول، a_1 ، و مود دوم، a_2 ، می‌باشد و پاسخ پایدار و ناپایدار به‌ترتیب با خط پر و خط‌چین نمایش داده شده است. همچنین به منظور تصدیق نتایج به‌دست آمده، دامنه ماندگار پاسخ زمانی به‌دست آمده از حل عددی معادلات (63) با استفاده از روش رانگ-کوتا مرتبه چهار نیز استخراج شده و با دایره‌های کوچک در شکل 6 نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که تطابق مناسبی بین نتایج عددی (NI) و روش مقیاس‌های چندگانه وجود دارد.

با توجه به شکل 6، با افزایش مقدار پارامتر تنظیم‌کننده، $\varepsilon\sigma_0$ ، در حوالی ناحیه A دامنه ارتعاشی بویژه در مود اول افزایش می‌یابد. با ادامه این افزایش، در حوالی ناحیه B مود ارتعاشی اول بیشینه محلی خود را تجربه می‌کند

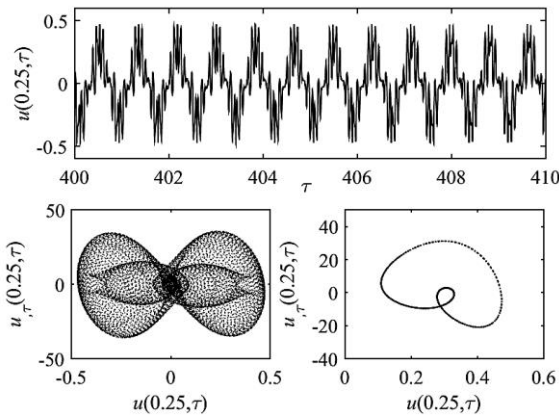


Fig. 10 Quasi-periodic time response of the system with $\omega_1 = 5.4775 + 0.0005i$ and $\omega_2 = 16.4702 + 0.0129i$ for $\gamma = 0.001$, $a_n(0) = 0$, $\varepsilon\sigma_0 = 2.1$, and $f_0 = 300$

شکل 10 پاسخ زمانی شبه متناوب سیستم دارای $\omega_1 = 5.4775 + 0.0005i$ و $\omega_2 = 16.4702 + 0.0129i$ برای $\gamma = 0.001$ ، $a_n(0) = 0$ ، $\varepsilon\sigma_0 = 2.1$ و $f_0 = 300$

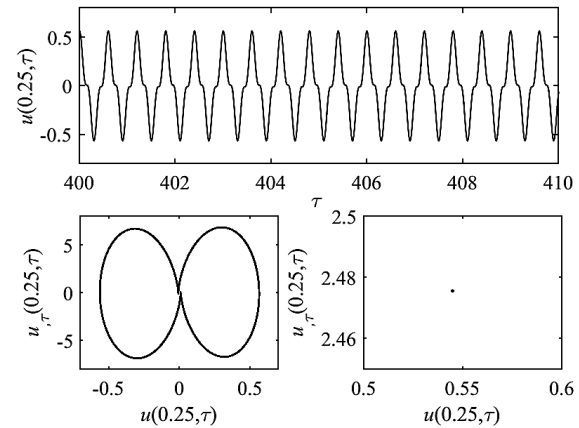


Fig. 7 Periodic time response of the system with $\omega_1 = 5.4775 + 0.0005i$ and $\omega_2 = 16.4702 + 0.0129i$ for $\gamma = 0.001$, $a_n(0) = 0$, $\varepsilon\sigma_0 = 5$, and $f_0 = 300$

شکل 7 پاسخ زمانی متناوب سیستم دارای $\omega_1 = 5.4775 + 0.0005i$ و $\omega_2 = 16.4702 + 0.0129i$ برای $\gamma = 0.001$ ، $a_n(0) = 0$ ، $\varepsilon\sigma_0 = 5$ و $f_0 = 300$

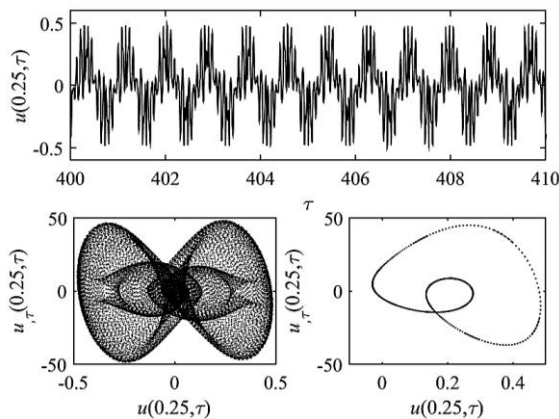


Fig. 11 Quasi-periodic time response of the system with $\omega_1 = 5.4775 + 0.0005i$ and $\omega_2 = 16.4702 + 0.0129i$ for $\gamma = 0.001$, $a_n(0) = 0$, $\varepsilon\sigma_0 = 1.9$, and $f_0 = 300$

شکل 11 پاسخ زمانی شبه متناوب سیستم دارای $\omega_1 = 5.4775 + 0.0005i$ و $\omega_2 = 16.4702 + 0.0129i$ برای $\gamma = 0.001$ ، $a_n(0) = 0$ ، $\varepsilon\sigma_0 = 1.9$ و $f_0 = 300$

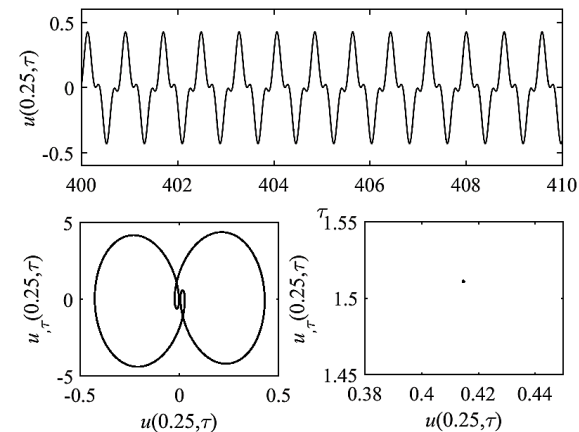


Fig. 8 Periodic time response of the system with $\omega_1 = 5.4775 + 0.0005i$ and $\omega_2 = 16.4702 + 0.0129i$ for $\gamma = 0.001$, $a_n(0) = 0$, $\varepsilon\sigma_0 = 2.5$, and $f_0 = 300$

شکل 8 پاسخ زمانی متناوب سیستم دارای $\omega_1 = 5.4775 + 0.0005i$ و $\omega_2 = 16.4702 + 0.0129i$ برای $\gamma = 0.001$ ، $a_n(0) = 0$ ، $\varepsilon\sigma_0 = 2.5$ و $f_0 = 300$

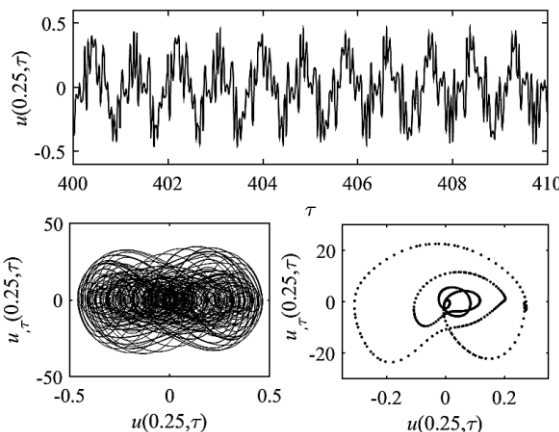


Fig. 12 Chaotic time response of the system with $\omega_1 = 5.4775 + 0.0005i$ and $\omega_2 = 16.4702 + 0.0129i$ for $\gamma = 0.001$, $a_n(0) = 0$, $\varepsilon\sigma_0 = 1.6$, and $f_0 = 300$

شکل 12 پاسخ زمانی آشوبناک سیستم دارای $\omega_1 = 5.4775 + 0.0005i$ و $\omega_2 = 16.4702 + 0.0129i$ برای $\gamma = 0.001$ ، $a_n(0) = 0$ ، $\varepsilon\sigma_0 = 1.6$ و $f_0 = 300$

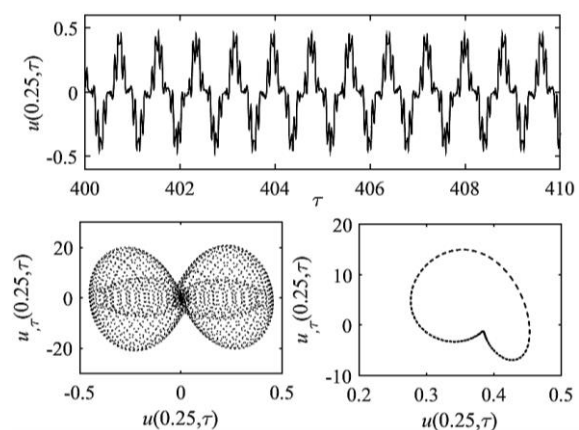


Fig. 9 Quasi-periodic time response of the system with $\omega_1 = 5.4775 + 0.0005i$ and $\omega_2 = 16.4702 + 0.0129i$ for $\gamma = 0.001$, $a_n(0) = 0$, $\varepsilon\sigma_0 = 2.3$, and $f_0 = 300$

شکل 9 پاسخ زمانی شبه متناوب سیستم دارای $\omega_1 = 5.4775 + 0.0005i$ و $\omega_2 = 16.4702 + 0.0129i$ برای $\gamma = 0.001$ ، $a_n(0) = 0$ ، $\varepsilon\sigma_0 = 2.3$ و $f_0 = 300$

- [2] P. Laura, E. Susemihl, J. Pombo, L. Luisoni, R. Gelos, On the dynamic behaviour of structural elements carrying elastically mounted, concentrated masses, *Applied Acoustics*, Vol. 10, No. 2, pp. 121-145, 1977.
- [3] J. Hijmissen, N. Van den Heuvel, W. Van Horssen, On the effect of the bending stiffness on the damping properties of a tensioned cable with an attached tuned-mass-damper, *Engineering Structures*, Vol. 31, No. 5, pp. 1276-1285, 2009.
- [4] M. Homayoun Sadeghi, S. Lotfan, Nonparametric system identification of a cantilever beam model with local nonlinearity in the presence of artificial noise, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 177-186, 2016 (in Persian فارسی)
- [5] J.-S. Wu, D.-W. Chen, Dynamic analysis of a uniform cantilever beam carrying a number of elastically mounted point masses with dampers, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 229, No. 3, pp. 549-578, 2000.
- [6] M. Hamdan, B. Jubran, Free and forced vibrations of a restrained uniform beam carrying an intermediate lumped mass and a rotary inertia, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 150, No. 2, pp. 203-216, 1991.
- [7] D. Bambill, C. Rossit, Forced vibrations of a beam elastically restrained against rotation and carrying a spring-mass system, *Ocean engineering*, Vol. 29, No. 6, pp. 605-626, 2002.
- [8] S. Kukla, B. Posiadala, Free vibrations of beams with elastically mounted masses, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 175, No. 4, pp. 557-564, 1994.
- [9] J.-S. Wu, D.-W. Chen, Free vibration analysis of a Timoshenko beam carrying multiple spring-mass systems by using the numerical assembly technique, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, No. 5, pp. 1039-1058, 2001.
- [10] Y. Yesilce, O. Demirdag, Effect of axial force on free vibration of Timoshenko multi-span beam carrying multiple spring-mass systems, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, No. 6, pp. 995-1003, 2008.
- [11] Y. Yesilce, Effect of axial force on the free vibration of Reddy-Bickford multi-span beam carrying multiple spring-mass systems, *Journal of Vibration and Control*, 2009.
- [12] Z. Zhang, F. Chen, Z. Zhang, H. Hua, Vibration analysis of non-uniform Timoshenko beams coupled with flexible attachments and multiple discontinuities, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 80, pp. 131-143, 2014.
- [13] Y. Yesilce, O. Demirdag, S. Catal, Free vibrations of a multi-span Timoshenko beam carrying multiple spring-mass systems, *Sadhana*, Vol. 33, No. 4, pp. 385-401, 2008.
- [14] H.-Y. Lin, Y.-C. Tsai, Free vibration analysis of a uniform multi-span beam carrying multiple spring-mass systems, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 302, No. 3, pp. 442-456, 2007.
- [15] M. Gürgöze, On the eigenfrequencies of a cantilever beam with attached tip mass and a spring-mass system, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 190, No. 2, pp. 149-162, 1996.
- [16] L. Ercoli, P. Laura, Analytical and experimental investigation on continuous beams carrying elastically mounted masses, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 114, No. 3, pp. 519-533, 1987.
- [17] M. Gürgöze, On the approximate determination of the fundamental frequency of a restrained cantilever beam carrying a tip heavy body, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 105, No. 3, pp. 443-449, 1986.
- [18] J.-S. Wu, C.-T. Chen, A lumped-mass TMM for free vibration analysis of a multi-step Timoshenko beam carrying eccentric lumped masses with rotary inertias, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 301, No. 3-5, pp. 878-897, 2007.
- [19] J.-S. Wu, B.-H. Chang, Free vibration of axial-loaded multi-step Timoshenko beam carrying arbitrary concentrated elements using continuous-mass transfer matrix method, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 38, pp. 20-37, 2013.
- [20] S. Kukla, The Green function method in frequency analysis of a beam with intermediate elastic supports, *Journal of sound and vibration*, Vol. 149, No. 1, pp. 154-159, 1991.
- [21] J.-R. Wang, T.-L. Liu, D.-W. Chen, Free vibration analysis of a Timoshenko beam carrying multiple spring-mass systems with the effects of shear deformation and rotary inertia, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 26, No. 1, pp. 1-14, 2007.

1- افزایش فرکانس طبیعی سیستم یک درجه آزادی سبب می‌شود که شکل موده‌های ارتعاشی تیر در محل اتصال جرم-فنر-دمپر دارای رفتار شبیه به گره شوند.

2- افزایش سفتی و کاهش جرم متمرکز، فرکانس طبیعی سیستم را افزایش می‌دهد. میزان تأثیر این پارامترها بر فرکانس تشدید غیرخطی به صورت تابعی از زمان است.

3- انتخاب پارامترهای نامناسب برای سیستم جرم-فنر-دمپر می‌تواند سبب فرکانس‌های تشدید تناسبی و در نتیجه وقوع تعامل مودال غیرخطی در سیستم شود.

4- تشخیص پارامترهای سیستم جرم-فنر-دمپر که باعث وقوع تعامل مودال غیرخطی می‌گردد نیازمند تحلیل مقادیر فرکانس‌های طبیعی سیستم و استخراج الگوهای لازم است.

5- تعامل مودال غیرخطی ناشی از پارامترهای جرم-فنر-دمپر سبب ناپایداری دامنه ارتعاشی می‌شود. در این شرایط پاسخ زمانی می‌تواند شبه‌متناوب یا آشوبناک باشد.

7- پیوست

در این بخش معادلات حاکم بر ارتعاشات سیستم استخراج شده است. انرژی جنبشی تیر با در نظر گرفتن حرکت عرضی و اینرسی دورانی به صورت زیر قابل بیان است:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A w_{,t}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I w_{,xt}^2 dx \quad (ا)$$

انرژی پتانسیل تیر با در نظر گرفتن میدان تنش و کرنش لاگرانژ به صورت زیر قابل بیان است

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_0^L M w_{,xx} dx + \frac{1}{4} \int_0^L (N_0 + N) w_{,x}^2 dx \quad (ب)$$

که در آن M و N به ترتیب گشتاور خمشی و نیروی محوری ناشی از حرکت تیر می‌باشد. کار نیروی ناشی از سیستم یک درجه‌ی آزادی و نیروی خارجی نیز به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\delta W_{nc} = \int_0^L F^*(t) \delta(x - x^*) \delta w dx + \int_0^L F(x, t) \delta w dx \quad (ت)$$

که در آن

$$F^*(t) = -m_d \ddot{v} = c_d (\dot{v} - w_{,t}^*) + k_d (v - w^*) \quad (ث)$$

با به‌کارگیری اصل همپلتون معادله ارتعاشی زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho A w_{,tt} - \rho I w_{,xtt} + M_{,xx} - (N_0 + N) w_{,xx} - N_{,x} w_{,x} = F^*(t) \delta(x - x^*) + F(x, t) \quad (ج)$$

که در آن گشتاور و نیروی محوری به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M = EI w_{,xx} + \eta I w_{,xxt} \quad (د)$$

$$N = 1.5 E A w_{,x}^2 + \eta A w_{,x} w_{,xt} \quad (ه)$$

8- مراجع

- [1] K. S. Spak, G. S. Agnes, D. J. Inman, Modeling vibration response and damping of cables and cabled structures, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 336, pp. 240-256, 2015.

- [30] Y.-R. Wang, T.-W. Liang, Application of lumped-mass vibration absorber on the vibration reduction of a nonlinear beam-spring-mass system with internal resonances, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 350, pp. 140-170, 2015.
- [31] A. Ebrahimi Mamaghani, S. Esmailzade Khadem, Vibration analysis of a beam under external periodic excitation using a nonlinear energy sink, *Moades Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 186-194, 2016. (in Persian فارسی)
- [32] M. Rezaee, S. Lotfan, Non-linear nonlocal vibration and stability analysis of axially moving nanoscale beams with time-dependent velocity, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 96, pp. 36-46, 2015.
- [33] P. R. Sethna, A. K. Bajaj, Bifurcations in dynamical systems with internal resonance, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 45, No. 4, pp. 895-902, 1978.
- [34] J. E. Marsden, M. McCracken, *The Hopf bifurcation and its applications*, pp. 63-85, New-York: Springer Science & Business Media, 2012.
- [35] R. Rossi, P. Laura, D. Avalos, H. Larrondo, Free vibrations of Timoshenko beams carrying elastically mounted, concentrated masses, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 165, No. 2, pp. 209-223, 1993.
- [36] E. Dowell, On some general properties of combined dynamical systems, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 46, No. 1, pp. 206-209, 1979.
- [22] J. W. Nicholson, L. A. Bergman, Free vibration of combined dynamical systems, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 112, No. 1, pp. 1-13, 1986.
- [23] E. Dowell, Component mode analysis of nonlinear and nonconservative systems, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, No. 1, pp. 172-176, 1980.
- [24] M. Pakdemirli, A. Nayfeh, Nonlinear vibrations of a beam-spring-mass system, *Journal of vibration and Acoustics*, Vol. 116, No. 4, pp. 433-439, 1994.
- [25] E. Özkaya, M. Pakdemirli, H. Öz, Non-linear vibrations of a beam-mass system under different boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 199, No. 4, pp. 679-696, 1997.
- [26] M. H. Ghayesh, S. Kazemirad, M. A. Darabi, A general solution procedure for vibrations of systems with cubic nonlinearities and nonlinear/time-dependent internal boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, No. 22, pp. 5382-5400, 2011.
- [27] M. H. Ghayesh, S. Kazemirad, M. A. Darabi, P. Woo, Thermo-mechanical nonlinear vibration analysis of a spring-mass-beam system, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 82, No. 3, pp. 317-331, 2012.
- [28] M. Eftekhari, S. Ziaei-Rad, M. Mahzoon, Vibration suppression of a symmetrically cantilever composite beam using internal resonance under chordwise base excitation, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 48, pp. 86-100, 2013.
- [29] O. Barry, D. Oguamanam, J. Zu, Nonlinear vibration of an axially loaded beam carrying multiple mass-spring-damper systems, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 77, No. 4, pp. 1597-1608, 2014.