



معرفی یک شرط مرزی لغزشی جدید برای جریان گاز تراکم پذیر درون یک میکرو/نانو کانال

مسعود اکبری¹، مجید قاسمی^{2*}

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

* صندوق پستی، 19395-1999، ghasemi@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 27 اسفند 1395

پذیرش: 13 اردیبهشت 1396

ارائه در سایت: 25 خرداد 1396

کلید واژگان:

گاز هیدروژن

معادله ی بولتزمن

تئوری جنبشی گاز

جریان پواری

چکیده

در این مقاله، با استفاده از حل معادله ی بولتزمن در کنار دیواره، یک مدل جدید سرعت لغزشی ارائه شده است. این مدل در ادامه ی تحقیقاتی که در باب تأثیر تراکم پذیری گاز بر جریان درون میکرو/نانو کانال ها انجام شده است، به نحو تحلیلی نشان می دهد که سرعت لغزشی چگونه تابعیتی از تراکم پذیری گاز دارد. این مدل نسبت به مدل شن، حاوی یک ترم اضافی می باشد. وجود این ترم به دلیل حضور گرادیان فاکتور تراکم در جهت جریان، می باشد. برای محاسبه ی این گرادیان، از معادله ی حالت ویرال استفاده می شود. به جهت بررسی صحت و پرفایده بودن این شرط مرزی جدید، جریان پواری گاز هیدروژن در یک کانل در محدوده ی رژیم لغزشی و رژیم گذار مورد بررسی قرار گرفته و مقدار سرعت بی بعد در سه عدد نادسن معکوس محاسبه شده است. علاوه بر این، مقدار دبی بی بعد نیز از عدد نادسن 0.005 تا 5 محاسبه شده است. از نقاط قوت مدل حاضر یکی این است که دبی مینیمم را در نزدیکی عدد نادسن معکوس یک پیش بینی می کند همانطور که حل معادله ی بولتزمن دبی مینیمم را در همین حدود پیش بینی می کند. علاوه بر این، در مقایسه با دیگر مدل های شرط مرزی لغزشی همچون مدل مرتبه ی اول، مدل مرتبه ی دوم و مدل شن، مدل حاضر- در کل محدوده ی عدد نادسن همگرایی بهتری با حل معادله ی بولتزمن دارد که مشخصا به دلیل در نظر گرفتن تأثیرات واقعی بودن گاز می باشد.

Introducing a novel slip boundary condition for the compressible gas flow through a micro/nano channel

Masoud Akbari, Majid Ghasemi*

Department of Mechanical Engineering, Khaje Nasir Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

* P.O.B. 19395-1999 Tehran, Iran, ghasemi@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 17 March 2017

Accepted 03 May 2017

Available Online 15 June 2017

Keywords:

Hydrogen gas

Boltzmann equation

The kinetic theory of gas

Poiseuille flow

ABSTRACT

In this paper, using a solution of the Boltzmann equation along the walls, a new model of slip velocity boundary condition is presented. In the continuation of researches on the effect of gas compressibility on the flow through micro/nano channels, the present slip model shows analytically how the slip velocity boundary condition is affected by compressibility of gas. In comparison with Shen's slip velocity model, this model includes an additional term due to compressibility factor gradient along the flow direction. We used the virial equation of state to calculate the compressibility factor gradient along the flow direction. In order to verify the present slip velocity boundary condition and investigate the advantages of it, Poiseuille flow through a micro/nano channel in the slip regime and transition regime is studied. The non-dimensional velocity in three inverse Knudsen number is calculated. Also, non-dimensional flow rate is calculated from Knudsen number 0.005 until 5. The new model accurately predicts minimum flow rate around $D=1$. In addition, in whole range of Knudsen in comparison with other slip boundary conditions such as first order model, second order model and Shen's model, the present model shows better agreement with that calculated by the linearized Boltzmann equation which is specifically the result of taking the effects of compressibility into account.

1- مقدمه

این کانال به جهت طراحی بهینه ی این وسایل امری حیاتی می باشد. رفتار جریان سیال در ابعاد مایکرو و نانو تفاوت های بسیاری با خصوصیات جریان سیال در ابعاد مایکرو دارد. علاوه بر این، فیزیک جریان در نزدیکی دیواره اهمیت شایانی در تحلیل جریان سیال در این ادوات دارد. در نتیجه، بررسی جریان گاز در میکرو/نانو کانال ها و به طور خاص در نزدیکی

ادوات در ابعاد میکرو و نانو به صورت وسیعی دارای کاربردهای گوناگونی می باشند، از جمله میکرو-پمپ ها، میکرو-نازل ها، میکرو-توربین ها و هارد دیسک ها. در این وسایل کانالی حاوی سیال که دارای ابعاد میکرو/نانو می باشد، جزء قسمت های اساسی بوده و تحلیل درست جریان سیال درون

Please cite this article using:

M. Akbari, M. Ghasemi, Introducing a novel slip boundary condition for the compressible gas flow through a micro/nano channel, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 6, pp. 277-285, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

دیواره‌ها، به یکی از موضوعات مورد توجه بسیاری از تحقیقات تبدیل شده است.

از آنجایی که با عدم تعادل ترمودینامیکی در جریان بر روی دیواره روبرو هستیم، از معادلات ناویر استوکس با شرط عدم لغزش نمی‌توان استفاده کرد و لازم است که از مدل‌سازی جدیدی به جهت بررسی جریان سیال استفاده شود.

برای تحلیل جریان سیال در این موارد دو دسته روش وجود دارد: روشهایی که پیوستگی سیال را پیش فرض گرفته و از معادلات ناویر استوکس به همراه شرط لغزشی استفاده می‌کند و روشهایی که سیال را به صورت مجموعه‌ای از ذرات مجزا در نظر می‌گیرند مانند روش دینامیک مولکولی¹ و شبیه‌سازی مستقیم منت کارل² [1]. روش‌های دسته‌ی اول از نظر هزینه‌های محاسباتی در بسیاری از مسائل عملی جریان سیال در این ابعاد مقرون به صرفه هستند. علاوه بر اینکه، این دسته از روش‌ها ساده‌تر، آشنا و کارآمدتر از جهت روش‌های محاسباتی می‌باشند [2]. به همین دلیل اخیراً تلاش‌های بسیاری به جهت مدل‌سازی شرط مرزی سرعت لغزشی انجام شده است [3].

از زمان ماکسول مدلهای سرعت لغزشی بسیاری ارائه شده است. به‌طور خاص، در دهه‌ی اخیر کارهای زیادی در بررسی و بهبود مدل‌های سرعت لغزشی انجام شده است که از این میان به مواردی اشاره می‌شود. میونگ و همکارانش یک مدل جدید ارائه کردند که تأثیر انحناء سطح را در نظر می‌گرفت [4]. دنگاری و همکارانش معادله‌ی ناویر استوکس را با شرط لغزشی مرتبه دوم حل کرده و نتایج آنرا با حل معادله‌ی بولتزمن مقایسه کردند. آنها نتیجه گرفتند که از معادله‌ی ناویر-استوکس به همراه شرط لغزشی مرتبه‌ی دوم تا عدد نادسن 5 می‌توان استفاده کرد [5]. شن و چن تبیین کردند که معادله‌ی بولتزمن طبیعی مرتبه‌ی اول نسبت به عدد نادسن دارد لذا مدل‌های مرتبه‌ی دوم و مرتبه 1.5 صرفاً بسط‌هایی ریاضی هستند که با طبیعت جریان هماهنگی ندارند و در این راستا مدل جدیدی ارائه کردند که مستخرج از معادله‌ی بولتزمن بود [6]. وو مدل جدیدی که مستخرج از تئوری جنبشی گاز بود، ارائه کرده و با این شرط مرزی جدید معادله روانکاری رینولدز را تصحیح کرد. او مدعی شده است که این معادله برای هوا در هر عدد نادسنی قابل اعمال می‌باشد [7]. ژانگ یک مدل مرتبه دوم تصحیح شده ارائه کرد و مدعی شد که این مدل قابل اعمال به جریان‌های میکرو و نانو می‌باشد [8]. جی بلی با فرض مدل‌سازی ذرات به صورت کروی سخت و با استفاده از شرط مرزی ماکسول برای ذرات برخورد کننده با دیوار، یک شرط لغزشی جدید مستخرج از تئوری جنبشی گاز ارائه کرد [9]. وو مدل لغزشی جدیدی با استفاده از تئوری جنبشی گاز ارائه کرد که تأثیر وجود میعان بر سطح را بر مقدار سرعت لغزشی مدل‌سازی می‌کرد [1]. سالمس تأثیر پتانسیل بین ذرات و نسبت مولی اجزاء در یک جریان مخلوط گاز را بر مقدار سرعت لغزشی مورد بررسی قرار داد [10].

در ادوات در ابعاد میکرو/نانو که حاوی جریان گاز می‌باشد، تراکم‌پذیری سیال در عدد ماخ بزرگتر از 0.3 حائز اهمیت می‌باشد [11]. البته توصیه شده است که در محدوده $Ma > 0.2$ تأثیر تراکم‌پذیری در تحلیل جریان گاز مورد توجه قرار گیرد [12]. به علت اهمیت تأثیر تراکم‌پذیری، در باب تأثیر آن بر جریان گاز در ادوات در ابعاد میکرو/نانو تحقیقات بسیاری صورت گرفته است، با این وجود تأثیر مستقیم تراکم‌پذیری بر مقدار سرعت لغزشی به

صورت تحلیلی مدل‌سازی نشده است. تبیین تحلیلی تأثیر تراکم‌پذیری بر مقدار سرعت لغزشی امکان محاسبه‌ی دقیق‌تر جریان گاز در نزدیک دیواره را فراهم می‌کند. علاوه بر این، مدل‌سازی تحلیلی تأثیر تراکم‌پذیری طبیعت جریان سیال در نزدیکی دیواره را روشن کرده و از این طریق به طراحی بهتر ادوات در ابعاد میکرو/نانو کمک می‌کند.

در این مقاله با حل معادله‌ی بولتزمن در نزدیک دیواره شرط لغزشی جدیدی استخراج می‌شود که تأثیر تراکم پذیر بودن گاز را بر مقدار سرعت لغزشی به صورت تحلیلی تبیین می‌کند. سپس به جهت بررسی صحت و پرفایده بودن این مدل، جریان پوآزی³ گاز هیدروژن در یک کانال در محدوده‌ی 0.005 تا 5 عدد نادسن بررسی شده و نتایج آن با نتایج مدل‌های مرتبه اول، مرتبه دوم، مدل شن و نتایج کار سرسیجنانی مقایسه شده است.

2- استخراج شرط لغزشی جدید

در ابعاد میکرو و نانو رفتار سیال از رفتار سیال در ابعاد ماکرو فاصله می‌گیرد و پدیده‌هایی چون سرعت لغزشی و پرش دمایی دیده می‌شوند. لذا نیاز است که تئوری ارائه شود که این فاصله گرفتن از تعادل را مدل‌سازی کند. به جهت این امر در ناحیه رژیم جریان لغزشی⁴ و رژیم جریان گذار⁵ از معادلات ناویر استوکس با شرط مرزی سرعت لغزشی استفاده می‌شود. اگر سیال نیوتونی باشد، به صورت متداول در نزدیک دیواره از قانون تنش برشی نیوتن استفاده می‌شود. اما شن نشان داد که اعمال این تنش برشی به منزله‌ی از دست دادن قسمتی از فیزیک مسئله‌ی سرعت لغزشی است [6]. لذا مناسب است که برای محاسبه‌ی تنش برشی در نزدیک دیواره که در محاسبه‌ی سرعت لغزشی تأثیرگذار است، از تئوری کامل‌تری استفاده شود. لذا در این تحقیق از تئوری جنبشی گاز و معادله‌ی بولتزمن برای محاسبه‌ی تنش برشی استفاده شده است.

در تئوری جنبشی گاز معادله‌ی حاکمه بر تحولات تابع توزیع سرعت، معادله‌ی بولتزمن می‌باشد. در صورت عدم وجود نیروی خارجی به صورتی است که در رابطه‌ی (1) ارائه شده است [13]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dr}{dt} \nabla_r f + \frac{dv}{dt} \nabla_v f = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\chi) sg(f'f'_2 - ff_2) d\epsilon d\chi d^3c_2 \quad (1)$$

در این انتگرال f' تابع توزیع سرعت بعد از برخورد ذرات با یکدیگر است. در این جا فرض می‌شود که جریان سیال از حالت تعادل زیاد دور نباشد. در نتیجه می‌توان رابطه (2) را نوشت [14]:

$$\begin{aligned} f'_0 f'_2 &\approx f_0 f_2 \\ f'_d f'_2 &\approx f_d f_2 \end{aligned} \quad (2)$$

با فرض ارائه شده در رابطه‌ی (2)، زمانی که سرعت دمایی⁶ از سرعت متوسط جریان به اندازه کافی بزرگتر باشد، سمت راست معادله‌ی بولتزمن با استفاده از تقریب کروک⁷ ساده‌سازی می‌شود [15]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dr}{dt} \nabla_r f + \frac{dv}{dt} \nabla_v f = -\frac{(f - f_d)}{\tau} \quad (3)$$

f تابع توزیع سرعت و f_d تابع توزیع سرعت جابه‌جا شده‌ی ماکسول می‌باشد که مقدار آن از رابطه‌ی (4) پیروی می‌کند:

$$f_d = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \times \exp \left(-\frac{m |c|^2}{2kT} \right) \quad (4)$$

³ poiseuille flow

⁴ Slip flow regime

⁵ Transition flow regime

⁶ Thermal velocity

⁷ Krook

¹ Molecular Dynamic

² Direct Simulation Monte Carlo

رابطه‌ی (8) بیان شد اما ذراتی که با دیواره برخورد می‌کنند به دو دسته تقسیم می‌شوند، دسته‌ای برخورد آیینهای کرده و دسته‌ی دیگر برخورد دیفیوز. لذا مقدار تابع توزیع سرعت بر روی دیواره با رابطه‌ی (11) برابر است [6]:

$$\begin{aligned} f(\vartheta_n > 0)|_{\text{wall}} &= \alpha f_0 + (1 - \alpha)f(\vartheta_n < 0, y = 0) \\ f(\vartheta_n < 0)|_{\text{wall}} &= f(\vartheta_n < 0, y = 0) \end{aligned} \quad (11)$$

که در این رابطه α عبارت از ضریب تطابق^۶ بوده و v_n مولفه‌ی عمود بر جهت دیوار سرعت مطلق ذرات می‌باشد. f_0 تابع توزیع سرعت ماکسول بوده و مقدار آن توسط رابطه‌ی (12) بیان می‌شود:

$$f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^3 \exp \left(-\frac{m |V|^2}{2kT} \right) \quad (12)$$

با توجه به رابطه‌ی (9) مقدار $\tau_{xy, y=\lambda_m}$ از رابطه‌ی (13) محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \tau_{xy, y=\lambda_m} &= - \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(r, v) m (v_y - u_y) (v_x - u_x) d^3v \\ &= n \tau k T \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

با توجه به رابطه‌ی (11) که مقدار تابع توزیع سرعت را در کنار دیواره مشخص می‌کند، مقدار $\tau_{xy, y=0}$ از رابطه‌ی (14) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \tau_{xy, y=0} &= - \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(r, v) m (v_y - u_y) (v_x - u_x) d^3v \\ &= \alpha \left[\left(\frac{kT}{2\pi m} \right)^{\frac{1}{2}} u_{x, y=0} m n + \frac{1}{2} n \tau k T \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

مقدار $\tau_{xx, x}$ طبق تعریف ارائه شده در رابطه‌ی (9)، در رابطه‌ی (15) داده شده است:

$$\tau_{xx, x} = - \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(r, v) m (v_x - u_x)^2 d^3v \quad (15)$$

با استفاده از بسط تیلور مقدار تابع توزیع سرعت در $x + \Delta x$ برابر است با رابطه‌ی (16):

$$f(r, v)_{x+\Delta x} = f(r, v)_x + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \quad (16)$$

در نتیجه مقدار $\tau_{xx, x+\Delta x}$ بنا به تعریف برابر با رابطه‌ی (17) می‌شود:

$$\begin{aligned} \tau_{xx, x+\Delta x} &= - \iiint_{-\infty}^{+\infty} (f(r, v) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x) m (v_x - u_x)^2 d^3v \\ &= - \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(r, v) m (v_x - u_x)^2 d^3v + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx, x} \Delta x) \end{aligned} \quad (17)$$

مقدار $\partial f / \partial x$ با مشتق دیگری از رابطه‌ی (8) برابر خواهد بود با رابطه‌ی (18):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial (f_d)}{\partial x} - \frac{m\tau}{kT} \frac{\partial (f_0)}{\partial x} \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} (\vartheta_x - u_x)^2 \right. \\ &\quad + \frac{\partial u_x}{\partial y} (\vartheta_x - u_x) \times (\vartheta_y - u_y) \\ &\quad + \frac{\partial u_y}{\partial x} (\vartheta_y - u_y) \times (\vartheta_x - u_x) \\ &\quad + \left. \frac{\partial u_y}{\partial y} (\vartheta_y - u_y)^2 \right] + \frac{-m\tau}{kT} f_0 \times \\ &\quad \left[\frac{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} (\vartheta_x - u_x)^2 \right)}{\partial x} \right. \\ &\quad + \left. \frac{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} (\vartheta_x - u_x) \times (\vartheta_y - u_y) \right)}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

c سرعت دمایی بوده که از طریق رابطه‌ی (5) تعریف می‌شود:

$$c_i = \vartheta_i - u_i \quad (5)$$

τ زمان آسودگی^۱ می‌باشد و طبق تئوری جنبشی گاز توسط رابطه‌ی (6) بیان می‌شود:

$$\tau = \lambda \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} \quad (6)$$

در این رابطه λ طول پویس آزاد^۲ می‌باشد.

برای حل این معادله از بسط چایمن-انسکاک^۳ استفاده می‌شود که در این بسط تابع توزیع سرعت به صورت رابطه‌ی (7) تقریب زده می‌شود [16]:

$$f = f_d [1 + \omega_i c_i + \varphi_{ij} c_i c_j + \dots] \quad (7)$$

که ω_i و φ_{ij} ضرایبی هستند تابع زمان و مکان. از آنجا که مسئله‌ی مورد بررسی فاقد گرادیان‌های دما است، تابع توزیع به صورت رابطه (8) بدست می‌آید [17]:

$$\begin{aligned} f &= f_d - n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^3 \exp \left(-\frac{m |V|^2}{2kT} \right) \times \frac{m\tau}{kT} \\ &\quad \times \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} (\vartheta_x - u_x)^2 + \frac{\partial u_x}{\partial y} (\vartheta_x - u_x) \times (\vartheta_y - u_y) \right. \\ &\quad + \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} (\vartheta_y - u_y) \times (\vartheta_x - u_x) + \frac{\partial u_y}{\partial y} (\vartheta_y - u_y)^2 \right] \end{aligned} \quad (8)$$

با توجه به فرضیات، این حل معادله‌ی بولتزمن در نزدیکی دیواره در لایه نادسن^۴ اعتبار دارد. لایه‌ی نادسن منطقه‌ای به صورت موضعی غیرتعادلی در نزدیکی مرز جامد است که حضور مرز جامد بر برخورد ذرات تأثیر گذاشته و رفتار گاز را متفاوت می‌کند [18].

برای استخراج سرعت لغزشی، حجم کنترلی در لایه‌ی نادسن در نظر گرفته می‌شود. تنشهای برشی و نرمال در لایه‌ی نادسن بر سطوح این سطح کنترل با استفاده از حل معادله‌ی بولتزمن محاسبه شده و از طریق در تعادل قرار دادن آنها سرعت لغزشی بدست می‌آید.

با استفاده از تئوری جنبشی گاز، تنش برشی در لایه‌ی نادسن از رابطه‌ی (9) بدست می‌آید [19]:

$$\tau_{ij} = - \left(\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(r, v) c_x c_y d^3c - \delta_{ij} P \right) \quad (9)$$

با این فرض که در لایه‌ی نادسن سرعت یکنواخت است، در حجم کنترل بین تنشها رابطه‌ی (10) برقرار است:

$$\frac{1}{\rho} (\tau_{xx, x+\Delta x} - \tau_{xx, x}) \lambda_m + \tau_{xy, y=\lambda_m} - \tau_{xy, y=0} = 0 \quad (10)$$

به دلیل یکنواخت فرض کردن توزیع سرعت درون لایه‌ی نادسن، اندازه حرکت سرعت متوسط ذرات در رابطه‌ی (10) ظاهر نشد. در این رابطه λ_m طول لایه‌ی نادسن می‌باشد که برابر با طول پویس آزاد موثر^۵ ذرات در جهت عمود بر دیواره است.

حلی که از معادله‌ی بولتزمن در رابطه (8) نشان داده شد در نزدیکی دیواره و در درون دامنه معتبر است اما مقدار تابع توزیع سرعت بر روی خود مرز بایستی مجدداً مدل‌سازی شود. تابع توزیع سرعت بر روی دیواره متأثر از توزیع سرعت دو دسته از ذرات است: ذراتی که از درون دامنه به سمت دیواره حرکت می‌کنند و ذراتی که با دیواره برخورد کرده و به سمت دامنه برمی‌گردند. ذرات دسته اول دارای همان تابع توزیع سرعتی هستند که در

¹ Relaxation time

² Mean free path

³ Chapman-Enskog

⁴ Knudsen layer

⁵ Effective mean free path

⁶ Accommodation coefficient

است. اولاً ضریب ترم حاوی گرادیان فشار در مدل شن را تصحیح کرده و آنرا بر فاکتور تراکم تقسیم کرده است. ثانیاً یک ترم را اضافه کرده که این ترم حاوی گرادیان فاکتور تراکم می‌باشد.

3- حل جریان پوازی با استفاده از شرط لغزشی حاضر

برای جریان دو بعدی پوازی معادله‌ی ناویر استوکس به صورت رابطه‌ی (26) ساده می‌شود:

$$\mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} = \frac{dP}{dx} \quad (26)$$

با شرط لغزشی حاضر و متقارن فرض کردن هر دو دیواره‌ی کانال، مقدار سرعت به صورت تحلیلی با رابطه‌ی (27) برابر است:

$$u_x = -\frac{h^2}{2\mu} \left[\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2} \right] \frac{dP}{dx} + \frac{2-\alpha}{\alpha} \tau \left(\frac{\pi kT}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=\pm \frac{h}{2}} - \frac{\lambda_m}{\alpha mnz} \left(\frac{2\pi m}{kT} \right)^{\frac{1}{2}} \times (1 - \rho RT(B' + 2C'P + \dots)) \frac{dp}{dx} \quad (27)$$

حال اگر با استفاده از رابطه‌ی (27) ترم $(\partial u_x / \partial y)_{y=\pm h/2}$ محاسبه شود، نتیجه برابر است با رابطه‌ی (28):

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=\pm \frac{h}{2}} = -\frac{h}{2\mu} \frac{dP}{dx} \quad (28)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (28) در رابطه‌ی (27) مقدار سرعت برابر است با رابطه‌ی (29):

$$u_x = -\frac{dP}{dx} \left(\frac{h^2}{2\mu} \left[\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2} \right] + \frac{2-\alpha}{\alpha} \tau \left(\frac{\pi kT}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{h}{2\mu} + \frac{\lambda_m}{\alpha mnz} \left(\frac{2\pi m}{kT} \right)^{\frac{1}{2}} \times (1 - \rho RT(B' + 2C'P + \dots)) \right) \quad (29)$$

سرعت بی بعد به صورتی که در رابطه‌ی (30) نشان داده شده است، تعریف می‌شود:

$$\hat{u} = \frac{2u_x}{-\frac{h}{p} \frac{dp}{dx} \sqrt{\frac{2kT}{m}}} \quad (30)$$

در نتیجه توزیع سرعت بی بعد به صورت رابطه‌ی (31) خواهد بود:

$$\hat{u} = \frac{Ph}{\mu} \sqrt{\frac{m}{2kT}} \left[\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2} \right] + \frac{(2-\alpha)\tau P(\pi)^{\frac{1}{2}}}{\alpha 2\mu} + \frac{2(\pi)^{\frac{1}{2}} \lambda_m (1 - \rho RT(B' + 2C'P + \dots))}{\alpha h} \quad (31)$$

دبی بی بعد بر واحد عمق صفحه با رابطه‌ی (32) تعریف می‌شود:

$$\bar{Q} = \frac{\sqrt{2kT} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho u dy}{-h^2 \frac{dp}{dx}} \quad (32)$$

جدول 1 مقایسه‌ی چند سرعت لغزشی با سرعت لغزشی حاضر

Table 1 comparison of several slip models with present slip model

سرعت لغزشی	
مدل مرتبه‌ی اول	$u_{slip} = \frac{2-\alpha}{\alpha} \tau \left(\frac{\pi kT}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\pm \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=\pm \frac{h}{2}}$
مدل شن	$u_{slip} = \frac{2-\alpha}{\alpha} \tau \left(\frac{\pi kT}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\pm \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=\pm \frac{h}{2}} - \frac{\lambda_m}{\alpha mn} \left(\frac{2\pi m}{kT} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial P}{\partial x}$
مدل حاضر	$u_{slip} = \frac{2-\alpha}{\alpha} \tau \left(\frac{\pi kT}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\pm \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=\pm \frac{h}{2}} - \frac{\lambda_m}{\alpha mnz} \left(\frac{2\pi m}{kT} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial P}{\partial x} \times (1 - \rho RT(B' + 2C'P + \dots))$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} (\vartheta_y - u_y) \times (\vartheta_x - u_x) \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} (\vartheta_y - u_y)^2 \right)}{\partial x} \quad (18)$$

با توجه به اینکه در رابطه‌ی (10) مقدار $\tau_{xx} - \tau_{xx+\Delta x}$ مهم است، با صرف نظر از ترم‌های مرتبه‌ی دومی چون $\partial \vartheta_y / \partial x \times \partial u_y / \partial y$ و $\partial \vartheta_x / \partial x \times \partial u_x / \partial y$ با استفاده از رابطه‌ی $P = z\rho RT$ ، مقدار اختلاف این دو تنش نرمال در رابطه‌ی (19) ارائه شده است:

$$\tau_{xx+\Delta x} - \tau_{xx} \approx -\frac{1}{z^2} \left(z \frac{\partial P}{\partial x} - P \frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad (19)$$

z فاکتور تراکم^۱ می‌باشد و مقدار آن از رابطه‌ی حالت ویرال^۲ بدست می‌آید که در رابطه‌ی (20) بیان شده است [20]:

$$z = 1 + B'P + C'P^2 + \dots \quad (20)$$

در این رابطه B' ضریب دوم ویرال و C' ضریب سوم ویرال می‌باشد که فقط تابع دما می‌باشند [20]. معادله‌ی حالت ویرال بیان دیگری نیز دارد که برحسب حجم مولی^۳ بیان می‌شود. این بیان در رابطه‌ی (21) آورده شده است:

$$z = 1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots \quad (21)$$

بین ضرایب این دو بیان، رابطه‌ای وجود دارد که در رابطه‌ی (22) و (23) بیان شده است:

$$B' = \frac{B}{RT} \quad (22)$$

$$C' = \frac{C - B^2}{(RT)^2} \quad (23)$$

با برقراری تعادل بین تنش‌ها، سرعت لغزشی به صورت رابطه‌ی (24) بدست می‌آید:

$$u_{slip} = \frac{2-\alpha}{\alpha} \tau \left(\frac{\pi kT}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\pm \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=\pm \frac{h}{2}} - \frac{\lambda_m}{\alpha} \left(\frac{2\pi m}{kT} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{mn} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{P}{z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad (24)$$

با جایگذاری z از رابطه‌ی (20) سرعت لغزشی به صورت رابطه‌ی (25) بدست می‌آید:

$$u_{slip} = \frac{2-\alpha}{\alpha} \tau \left(\frac{\pi kT}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\pm \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=\pm \frac{h}{2}} - \frac{\lambda_m}{\alpha mnz} \left(\frac{2\pi m}{kT} \right)^{\frac{1}{2}} \times (1 - \rho RT(B' + 2C'P + \dots)) \times \frac{\partial P}{\partial x} \quad (25)$$

مقایسه‌ی مدل حاضر با مدل مرتبه‌ی اول و مدل شن به روشن شدن دست‌آوردهای این تحقیق کمک می‌کند. لذا در جدول 1 این مدل‌ها نشان داده شده‌اند. از مقایسه‌ی مدل حاضر با مدل مرتبه‌ی اول دیده می‌شود که در موقعیتی که گرادیان فشار حضور نداشته باشد، مدل حاضر همان مدل مرتبه‌ی اول ماکسول خواهد بود که خود نشان دهنده‌ی وجه قوت مدل حاضر نسبت به مدل ماکسول می‌باشد که توانسته تأثیر حضور گرادیان فشار را بر مقدار سرعت لغزشی به صورت تحلیلی مدل‌سازی کند. از مقایسه‌ی مدل حاضر با مدل شن دیده می‌شود که در موقعیتی که گرادیان فشار حضور داشته باشد اما سیال غیرقابل تراکم بوده به گونه‌ای که فاکتور تراکم برابر با یک باشد، مدل حاضر همان مدل شن خواهد بود. لذا می‌توان گفت که مدل جدید با در نظر گرفتن تأثیر تراکم‌پذیری دو تصحیح در مدل شن ایجاد کرده

¹ Compressibility factor

² Virial

³ Molar volume

با توجه به روابط (22) و (23) رابطه‌ی (39) به صورت رابطه‌ی (40) و رابطه‌ی (38) به صورت رابطه‌ی (41) خواهد بود:

$$\bar{Q} = \frac{D}{6} + \frac{(2-\alpha)\sqrt{\pi}}{2\alpha} + \frac{\pi}{\alpha z(\sqrt{3D} + \sqrt{\pi})} - \frac{\pi}{\alpha(\sqrt{3D} + \sqrt{\pi})z^2} \left(\frac{B}{RT}p + 2\frac{C-B^2}{(RT)^2}p^2 \right) \quad (40)$$

$$\hat{u} = \frac{D}{z} \left[\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2} \right] + \frac{1}{z} \frac{(2-\alpha)\sqrt{\pi}}{2\alpha} + \frac{\pi}{\alpha(\sqrt{\pi} + \sqrt{3D})} - \frac{\pi}{\alpha(\sqrt{\pi} + \sqrt{3D})z^2} \left(\frac{B}{RT}p + 2\frac{C-B^2}{(RT)^2}p^2 \right) \quad (41)$$

فشار بحرانی گاز هیدروژن برابر با 1.3 مگاپاسکال و دمای بحرانی آن برابر با 33.2 کلین می‌باشد [23].

4-ارایه نتایج و بحث

از ملاک‌های سنجش صحت یک سرعت لغزشی جدید، پیش بینی نقطه‌ی منیمم دبی بی‌بعد در جریان پوازی در نزدیکی عدد نادسن معکوس یک است. لذا دبی بی‌بعد جریان پوازی گاز هیدروژن از عدد نادسن 0.005 تا عدد نادسن 5 محاسبه شده و برای مقایسه‌ی بهتر نتایج مدل حاضر با دیگر نتایج، نمودار دبی بی‌بعد برحسب عدد نادسن معکوس در سه محدوده‌ی متفاوت عدد نادسن به صورت جداگانه رسم شده اند و با مدل مرتبه‌ی اول، مدل مرتبه‌ی دوم، مدل شین [6] و نتایج کار سرسیجنان [24] مقایسه شده اند. در این بررسی، جریان دو بعدی هیدروژن درون کانال در دمای کاهیده‌ی 9°C و فشار کاهیده‌ی 5°C می‌باشد.

در شکل 1 دبی بی‌بعد حاصل از مدل‌های مرتبه‌ی اول، مرتبه‌ی دوم، مدل شین و مدل حاضر، در ناحیه رژیم لغزشی با نتایج حل معادله‌ی بولتزمان مقایسه شده‌اند.

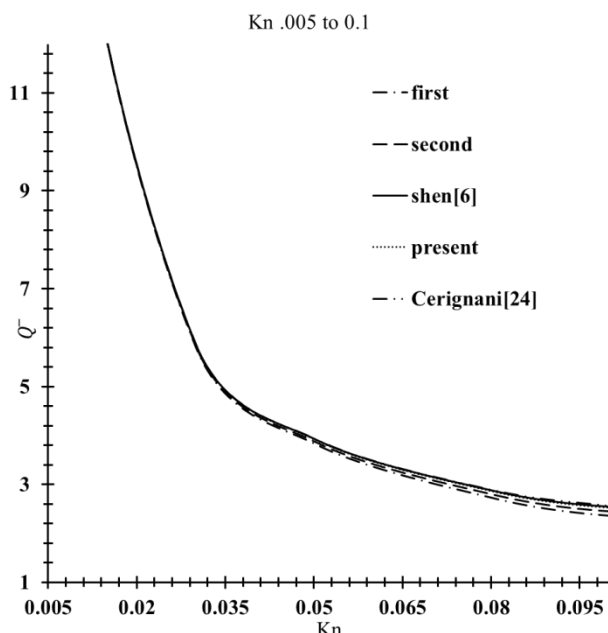


Fig. 1 The chart of non-dimensional flow rate versus Knudsen number for Hydrogen ($0.005 < Kn < 0.1$)

شکل 1 نمودار دبی بی‌بعد بر حسب عدد نادسن برای گاز هیدروژن ($0.005 < Kn < 0.1$)

² Reduced Temperature

³ Reduced pressure

در نتیجه توزیع دبی بی‌بعد به صورت رابطه‌ی (33) خواهد بود:

$$\bar{Q} = \frac{\rho h}{12\mu} \sqrt{2k \frac{T}{m}} + \rho \left(\frac{2-\alpha}{\alpha} \frac{kT\tau\sqrt{\pi}}{2\mu m} \right) + \rho \frac{2\sqrt{\pi}\lambda_m}{\alpha mn h z} (1 - \rho RT(B' + 2C'p + \dots)) \quad (33)$$

در این مقاله به جهت دیده شدن تأثیر طول مشخصه‌ی هندسه‌ی مسئله در مقدار طول لایه‌ی نادسن از قاعده‌ی ماتیسسن¹ استفاده می‌شود، با وجود اینکه استفاده از آن در باب گازها نادر است [3] و هنوز مورد بحث و مجادله می‌باشد [21]. دلیل این کار عبارت است از اینکه اولاً استفاده از آن توسط آقای شن جواب‌های مناسبی داشته است [6] و ثانیاً استفاده از این قاعده نسبت به دیگر روش‌ها که تأثیر طول مشخصه‌ی هندسه‌ی را در نظر می‌گیرند، ساده‌تر و کارآمدتر است [3] و ثالثاً در مسائلی همچون میکرو/نانو کانال‌ها که طول h خیلی از λ بزرگتر نیست، وجود نقصی در استعمال آن اثبات نشده است [21]. لذا در این محاسبات مقدار λ_m طبق رابطه‌ی (34) تصحیح می‌شود [22]:

$$\frac{1}{\lambda_m} = \frac{1}{\lambda_{ydirection}} + \frac{2}{h} \quad (34)$$

محاسبه‌ی دقیق طول پویش آزاد در جهت عمود بر دیواره یعنی محاسبه‌ی $\lambda_{ydirection}$ حل را بسیار پیچیده کرده و افزایش دقت چندانی نیز به همراه نخواهد داشت لذا مقدار آن از روش تقریبی ارائه شده در رابطه‌ی (35) محاسبه می‌شود [6]:

$$\lambda_{ydirection} \cong \bar{\theta}_y \tau \cong \frac{\bar{\theta}}{\sqrt{3}} \tau = \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \quad (35)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (6) و (34) در رابطه‌ی (29) سرعت برابر با رابطه‌ی (36) خواهد بود:

$$u_x = -\frac{dp}{dx} \left(\frac{h^2}{2\mu} \left[1 - \frac{y^2}{h^2} \right] + \frac{2-\alpha}{\alpha} \tau \left(\frac{\pi k T}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{h}{2\mu} + \frac{\pi h \tau}{\alpha m n z \left(\sqrt{3}h + 2\tau \left(\frac{\pi k T}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \right)} (1 - \rho RT(B' + 2C'p)) \right) \quad (36)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (34) در رابطه‌ی (33) دبی بی‌بعد به صورت رابطه‌ی (37) خواهد بود:

$$\bar{Q} = \frac{\sqrt{\pi}}{12Kn} + \frac{(2-\alpha)\sqrt{\pi}}{2\alpha} + \frac{\pi}{\alpha z \left(\sqrt{3} \frac{\sqrt{\pi}}{2Kn} + \sqrt{\pi} \right)} - \frac{\pi \rho RT}{\alpha z \left(\sqrt{3} \frac{\sqrt{\pi}}{2Kn} + \sqrt{\pi} \right)} (B' + 2C'p) \quad (37)$$

و با جایگذاری رابطه‌ی (34) در رابطه‌ی (36) و بی‌بعد کردن سرعت، رابطه‌ی (31) به صورت رابطه‌ی (38) خواهد بود:

$$\hat{u} = \frac{D}{z} \left[\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2} \right] + \frac{1}{z} \frac{(2-\alpha)\sqrt{\pi}}{2\alpha} + \frac{\pi(1 - \rho RT(B' + 2C'p))}{\alpha(\sqrt{\pi} + \sqrt{3D})} \quad (38)$$

در رابطه‌ی (38)، D عدد نادسن معکوس می‌باشد و به صورت $D = \sqrt{\pi}/(2Kn)$ تعریف می‌شود. دبی بی‌بعد نیز برابر با رابطه‌ی (39) خواهد بود:

$$\bar{Q} = \frac{D}{6} + \frac{(2-\alpha)\sqrt{\pi}}{2\alpha} + \frac{\pi}{\alpha z(\sqrt{3D} + \sqrt{\pi})} - \frac{\pi \rho RT}{\alpha z(\sqrt{3D} + \sqrt{\pi})} (B' + 2C'p) \quad (39)$$

1 Matthiessen

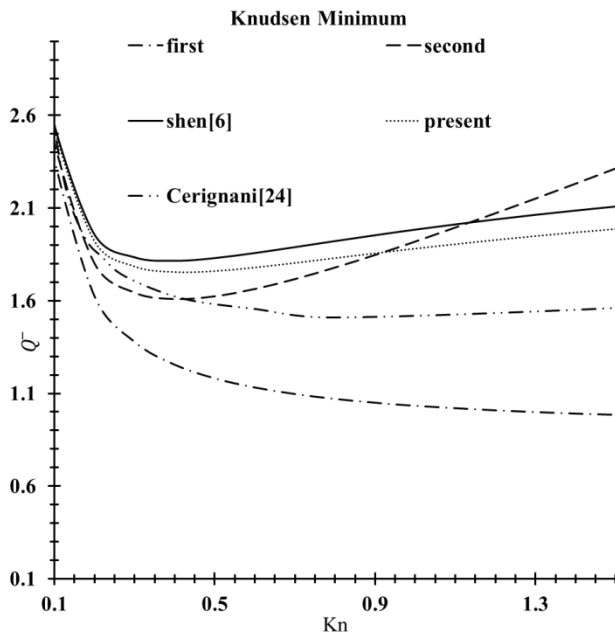


Fig. 3 The chart of non-dimensional flow rate versus Knudsen number for Hydrogen around $D = 1$

شکل 3 نمودار دبی بی بعد بر حسب عدد نادسن برای گاز هیدروژن در نزدیکی $D = 1$

در شکل 4 دبی بی بعد در ناحیهی رژیم گذار نشان داده شده است. مدل مرتبهی اول یک روند نزولی دبی بی بعد را با زیاد شدن عدد نادسن نشان می دهد، بر خلاف حل معادلهی بولتزمان. مدل مرتبهی دوم نیز مقدار دبی بی بعد را بسیار بیش از آنچه هست نشان می دهد. مدل شن گر چه به طور کلی هماهنگ با حل معادلهی بولتزمان بوده و دارای یک شیب صعودی ملایم با زیاد شدن عدد نادسن می باشد، اما مقدار دبی را بیشتر از آنچه هست پیش بینی می کند. اما مدل حاضر علاوه بر اینکه

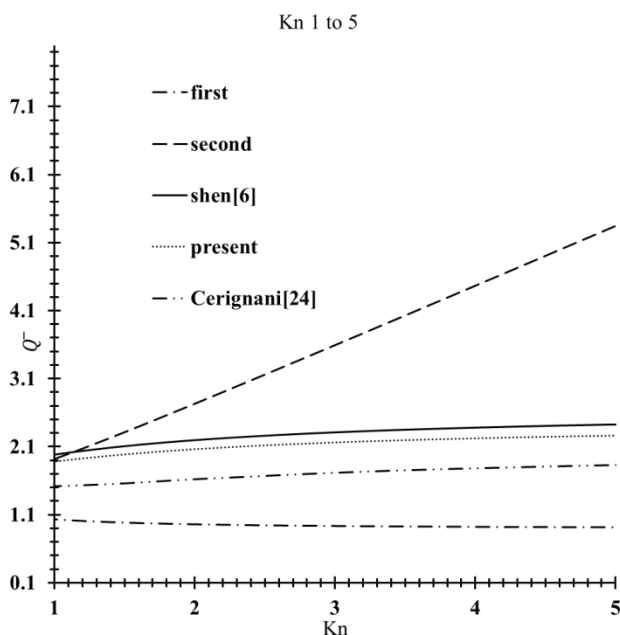


Fig. 4 The chart of non-dimensional flow rate versus Knudsen number for Hydrogen ($1 < Kn < 5$)

شکل 4 نمودار دبی بی بعد بر حسب عدد نادسن برای گاز هیدروژن ($1 < Kn < 5$)

با توجه به شکل 1 مشخص است که نتایج مدل های مختلف در ابتدای این ناحیهی جریان بر هم منطبق می باشند و تفاوت بین آنها در نزدیکی عدد نادسن 0.05 رخ می دهد. در ناحیه رژیم لغزشی در محدودهی $0.05 \leq Kn \leq 0.1$ مدل حاضر نزدیک ترین نتایج را به حل معادلهی بولتزمان دارد.

در شکل 2 دبی بی بعد حاصل از مدل های مرتبهی اول، مرتبهی دوم، مدل شن و مدل حاضر، در ابتدای رژیم گذار¹ با نتایج حل معادلهی بولتزمان مقایسه شده اند.

در این ناحیه از جریان، مدل مرتبهی اول علاوه بر اینکه توانایی پیش بینی نقطهی دبی مینیمم را ندارد، دورترین نتایج را نیز نسبت به نتایج حل معادلهی بولتزمان دارد. نتایج دیگر مدل ها در این ناحیهی جریان، تقریباً همگرایی مناسبی با کار سرسیجنان دارند که حاصل حل معادلهی بولتزمان می باشد. البته مدل حاضر در مجموع در کل این محدوده، نزدیکترین مقادیر را به حل معادلهی بولتزمان دارد.

با توجه به اینکه تفاوت مدل حاضر و مدل شن در اضافه شدن ترم حاوی گرادیان تراکم پذیری می باشد، روشن می شود که عامل بهتر شدن نتایج مدل حاضر نسبت به مدل شن، در نظر گرفتن تأثیر تراکم پذیری گاز می باشد.

در مورد محل دبی بی بعد مینیمم بایستی خاطر نشان کرد که در حل معادلهی بولتزمان در حدود عدد نادسن یک می باشد. برای بررسی بهتر مدل های مختلف از این جهت که کدامیک دبی مینیمم را بهتر پیش بینی می کنند، در شکل 3 نتایج مدل های مختلف در نزدیکی عدد نادسن یک با یکدیگر مقایسه شده اند. شرط لغزشی حاضر نزدیک ترین محل دبی مینیمم را نسبت به نتیجهی حل معادلهی بولتزمان دارد. این پیش بینی بهتر محل دبی مینیمم نسبت به مدل شن، مشخصاً به دلیل تراکم پذیر در نظر گرفتن گاز می باشد چرا که تفاوت عمدهی مدل حاضر با مدل شن، در ترم گرادیان فاکتور تراکم پذیری می باشد.

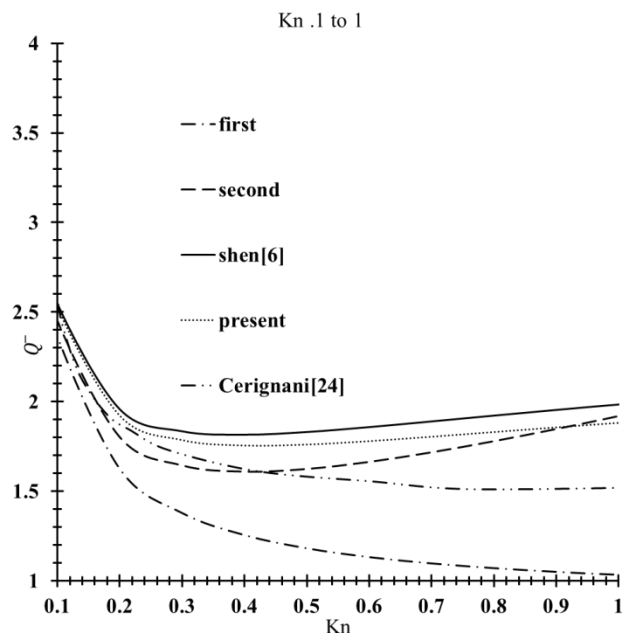


Fig. 2 The chart of non-dimensional flow rate versus Knudsen number for Hydrogen ($0.1 < Kn < 1$)

شکل 2 نمودار دبی بی بعد بر حسب عدد نادسن برای گاز هیدروژن ($0.1 < Kn < 1$)

¹Transition regime

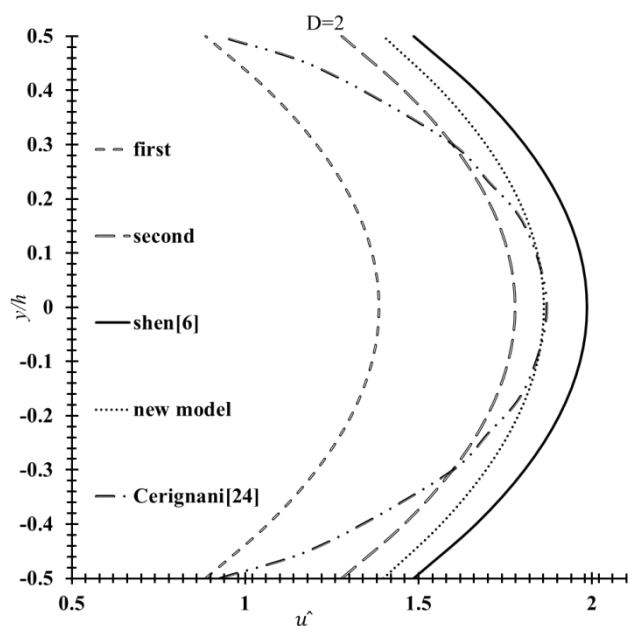


Fig. 6 The chart of non-dimensional velocity versus non-dimensional width for Hydrogen ($D = 2$)

شکل 6 نمودار سرعت بی بعد بر حسب عرض بی بعد برای گاز هیدروژن ($D = 2$)

دبی بی بعد که در شکل 2 نشان داده شد، در عدد نادسن معکوس 2 مقدار دبی بی بعد حاصل از مدل مرتبه دوم تقریباً با نتایج حل معادله بولتزمن برابر است بر خلاف قبل و بعد از آن که نتایج مدل مرتبه دوم از نتایج حل معادله بولتزمن فاصله می گیرند. لذا این نتایج بهتر مدل مرتبه دوم در عدد نادسن معکوس 2 در نزدیکی دیوار دال بر برتری این مدل در ناحیه گذار نیست چرا که نتایج این مدل در ناحیه گذار در قبل و بعد از عدد نادسن معکوس 2 از نتایج حل معادله بولتزمن فاصله می گیرد. در مجموع می توان گفت که در ناحیه رژیوم گذار بهترین مدل، مدل حاضر می باشد.

در شکل 7 سرعت بی بعد در ناحیه رژیوم لغزشی در عدد نادسن معکوس 10 نشان داده شده است. تفاوت اندکی در محاسبه سرعت در میانه کانال وجود دارد در حالی که همگی مدل ها در نزدیکی دیواره پیش بینی تقریباً منطقی بر حل معادله بولتزمن دارند. در این عدد نادسن معکوس مدل شن نسبت به تمامی مدل ها نتایج بهتری در میانه کانال دارد و سرعت ماکزیمم را نزدیکتر به نتایج کار سرسیجانی پیش بینی می کند.

5- نتیجه گیری

در این مقاله، با توجه به اهمیت جریان های تراکم پذیر در ادواتی که در ابعاد میکرو/نانو می باشند، مدل لغزشی جدیدی با استفاده از حل معادله بولتزمن در نزدیک دیواره، بدست آمده است که به صورت تحلیلی تأثیر تراکم پذیر بودن گاز را بر مقدار سرعت لغزشی مدل سازی می کند، به گونه ای که این مدل می تواند مدل مناسبی برای جریان های با عدد ماخ بالای 0.2 باشد. این مدل به دلیل در نظر گرفتن تأثیر تراکم پذیری، نسبت به مدل شن اولاً دارای یک ترم اضافی گرادیان فاکتور تراکم می باشد و ثانیاً ضریب ترم حاوی گرادیان فشار تصحیح شده است. در محاسبه این ترم اضافی، فاکتور تراکم از طریق معادله حالت ویرال محاسبه می شود. سپس برای نشان دادن درستی مدل از یک طرف و تبیین فایده در نظر گرفتن تأثیر تراکم پذیری گاز از طرف دیگر، جریان پوآزی گاز هیدروژن در یک کانال دوبعدی مورد

همانگی لازم با حل معادله بولتزمن را داراست، نزدیکترین مقادیر را نیز به این حل دارد. روشن است که بهتر بودن نتایج مدل جدید نسبت به مدل شن مشخصاً به دلیل تراکم پذیر در نظر گرفتن گاز می باشد.

سرعت بی بعد نیز بر حسب عرض بی بعد در 3 عدد نادسن معکوس متفاوت محاسبه شده و با مدل مرتبه اول و مدل مرتبه دوم و مدل شن [6] و نتایج کار سرسیجانی [24] مقایسه شده است. برای مقایسه بهتر نتایج مدل حاضر با نتایج دیگر مدل ها، سرعت بی بعد در هر عدد نادسن به صورت جداگانه در یک نمودار رسم شده است.

در شکل 5 سرعت بی بعد در ناحیه رژیوم گذار در عدد نادسن معکوس 0.2 نشان داده شده است. در این عدد نادسن معکوس مدل مرتبه دوم بسیار دور از واقع است و مقدار سرعت را بسیار بیش از آنچه هست نشان می دهد. مدل مرتبه اول مقدار سرعت را کمتر از مقدار واقعی پیش بینی می کند. در این میان، مدل شن و مدل حاضر نزدیکترین جواب ها را به حل معادله بولتزمن دارند که البته مدل حاضر سرعت را بهتر پیش بینی می کند، به صورتی که مقدار سرعت لغزشی روی دیواره و مقدار سرعت ماکزیمم در میانه کانال در حل با مدل حاضر از تمامی مدل ها به حل معادله بولتزمن نزدیکتر است که مشخصاً به دلیل در نظر گرفتن تأثیر تراکم پذیری در مدل حاضر می باشد چرا که تنها تفاوتش با مدل شن در همین امر است.

در شکل 6 سرعت بی بعد در ناحیه رژیوم گذار در عدد نادسن معکوس 2 نشان داده شده است. در این عدد نادسن معکوس سرعت لغزشی حاضر نسبت به مدل شن و مدل مرتبه اول نتایج بهتری دارد و به نتایج کار سرسیجانی نزدیکتر است.

اما در مقایسه با مدل مرتبه دوم، در نواحی نزدیک به دیواره مدل مرتبه دوم سرعت را نزدیکتر به حل معادله بولتزمن پیش بینی کرده است و در نواحی میانی کانال مقدار سرعت در حل با مدل حاضر به حل معادله بولتزمن نزدیکتر است. توجه به این نکته مفید است که در نمودار

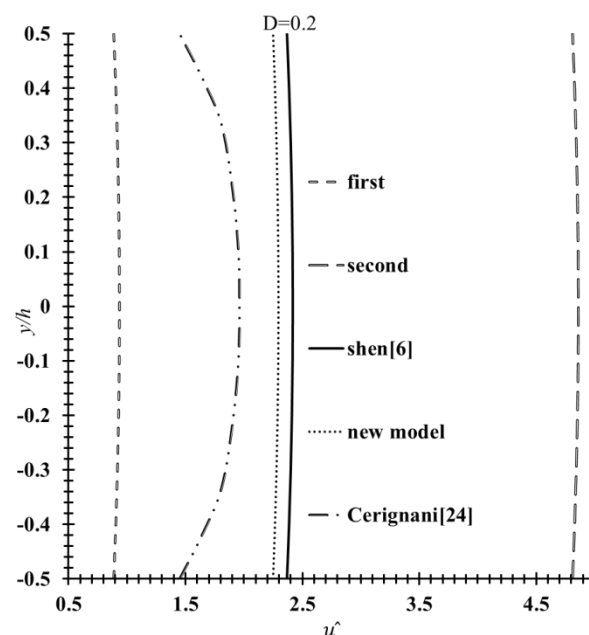


Fig. 5 The chart of non-dimensional velocity versus non-dimensional width for Hydrogen ($D = 0.2$)

شکل 5 نمودار سرعت بی بعد بر حسب عرض بی بعد برای گاز هیدروژن ($D = 0.2$)

$$0.005 \leq Kn \leq 5 \text{ می باشد.}$$

- ارائه مدل لغزشی مناسب برای جریان‌هایی که عدد ماخ بیش از 0.2 دارند در تمام محدوده‌ی عدد نادسن.

6- فهرست علائم

B'	ضریب دوم ویریا ($\text{m}^3\text{mol}^{-1}$)
C'	ضریب سوم ویریا ($\text{m}^6\text{mol}^{-2}$)
c	سرعت دمایی (ms^{-1})
D	عدد نادسن معکوس
f	تابع توزیع سرعت
f'	تابع توزیع سرعت بعد از برخورد
f ₀	تابع توزیع سرعت ماکسول
f _d	تابع توزیع سرعت ماکسول جابه‌جا شده
g	سرعت نسبی ذرات نسبت به هم در هنگام برخورد (ms^{-1})
h	عرض کانال (m)
k	ثابت بولتزمن ($\text{K}^{-1}\text{kgm}^2\text{s}^{-2}$)
Kn	عدد نادسن
m	جرم تک ذره (kg)
n	عدد چگالی (m^{-3})
P	فشار ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$)
$\bar{Q}$	دبی بی‌بعد
R	ثابت ویژه گاز (JkgK^{-1})
$\bar{R}$	ثابت جهانی گازها ($\text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$)
s	فاصله ذرات از مرکز یکدیگر در هنگام برخورد (m)
T	دما (K)
$\hat{u}$	سرعت بی‌بعد
u_x	سرعت در جهت x (ms^{-1})
u_y	سرعت در جهت y (ms^{-1})
ϑ	سرعت مطلق ذره (ms^{-1})
V_m	حجم مولی ($\text{m}^3\text{mol}^{-1}$)
v_n	سرعت مطلق ذرات در جهت عمود بر دیواره (ms^{-1})
V	اندازه سرعت مطلق ذره (ms^{-1})
z	فاکتور تراکم

علائم یونانی

α	ضریب تطابق
λ	طول پویش آزاد (m)
λ_m	طول پویش آزاد موثر (m)
$\lambda_{\text{direction}}$	طول پویش آزاد در جهت عمود بر دیواره (m)
μ	لزجت دینامیکی ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$)
ρ	چگالی (kgm^{-3})
τ	زمان آسودگی (s)
τ_{xx}	تنش نرمال در جهت x ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$)
τ_{xy}	تنش برشی در جهت x ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$)
$\aleph$	زاویه برخورد

زیرنویس‌ها

d	جابه‌جا شده
m	متوسط

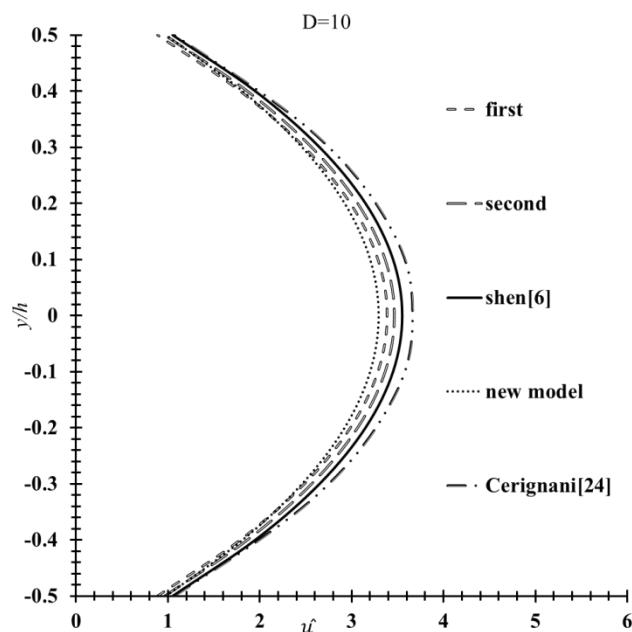


Fig. 7 The chart of non-dimensional velocity versus non-dimensional width for Hydrogen ($D = 10$)

شکل 7 نمودار سرعت بی‌بعد بر حسب عرض بی‌بعد برای گاز هیدروژن ($D = 10$)

بررسی قرار گرفته و سرعت بی‌بعد و دبی بی‌بعد آن محاسبه شده و با نتایج کار سرسیجنانی و نتایج مدل‌های مرتبه‌ی اول، مرتبه‌ی دوم و مدل شن مقایسه شده است.

از یک طرف، نتایج مدل لغزشی حاضر که مستخرج از معادله‌ی بولتزمن می‌باشد، برای جریان پوازی گاز درون کانال همخوانی کاملاً مناسبی با نتایج کار سرسیجنانی در محدوده‌ی 0.005 تا 5 عدد نادسن دارد. از طرف دیگر، مدل لغزشی حاضر توانایی پیش‌بینی دبی بی‌بعد مینیمم در جریان پوازی را دارد و این دو مطلب توجیه‌کننده‌ی صحت این مدل می‌باشد.

در کل محدوده‌ی عدد نادسن سرعت لغزشی حاضر نسبت به مدل شن نتایج بهتری دارد و به نتایج کار سرسیجنانی نزدیکتر است. با توجه به اینکه تفاوت این دو مدل تنها در این است که مدل حاضر تأثیر تراکم‌پذیری را در نظر گرفته است، روشن است که همین امر باعث بهتر شدن جواب‌ها شده است. لذا به خوبی روشن می‌شود که کار این مقاله در این مورد که تأثیر تراکم‌پذیری گاز را در مقدار سرعت لغزشی لحاظ می‌کند، کار درست و با فایده‌ای بوده است.

اهم نتایج این تحقیق عبارتند از:

- استخراج مدل جدیدی برای جریان گازها بر مبنای تئوری جنبشی گازها و هماهنگ با معادله‌ی بولتزمن.
- روشن کردن تحلیلی طبیعت جریان در نزدیکی دیواره به گونه‌ای که مشخص می‌شود که تراکم‌پذیری گاز چه تأثیری بر مقدار سرعت لغزشی دارد.
- نشان دادن صحت مدل حاضر از طریق مقایسه‌ی نتایج آن با نتایج حل معادله‌ی بولتزمن.
- نشان دادن وجه قوت مدل حاضر نسبت به مدل‌های مرتبه‌ی اول و مدل شن از جهت توانایی مدل جدید در مدل‌سازی وجوه بیشتری از طبیعت جریان در نزدیکی دیواره.
- بررسی مدل لغزشی حاضر و مشخص کردن این مطلب که محدوده‌ی کاربرد به صرفه‌ی مدل حاضر، کل ناحیه‌ی

- 264-271, 2015.
- [11] Z. X. Li, D. X. Du, Z. Y. Guo, Characteristics of frictional resistance for gas flow in microtubes, *Proceedings of Symposium on Energy Engineering in the 21st Century*, Defense Technical Information Center, pp 658–664, 2000.
- [12] S. Colin, Rarefaction and compressibility effects on steady and transient gas flows in microchannels, *Microfluid and Nanofluid*, Vol. 1, No. 3, pp. 268–279, 2005.
- [13] G. P. Ghioldi, L. Gibelli, A direct method for the Boltzmann equation based on a pseudo-spectral velocity space discretization, *Journal of Computational Physics*, Vol. 258, pp. 568–584, 2013.
- [14] C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and Its Applications*, First Edition, pp. 161-170, New York: Springer, 1988.
- [15] R. Kamali, A. Kharazmi, M. Akbari, A kinetic theory-based first-order slip boundary condition for gas micro/nano-flows with heat transfer, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 224, No. 11, pp. 2390-2395, 2010.
- [16] B. C. Eu, *Transport Coefficients of Fluids*, First Edition, pp. 18-19, Berlin: Springer Science & Business Media, 2006.
- [17] L. Mieussens, H. Struchtrup, Numerical comparison of Bhatnagar Gross-Krook models with proper Prandtl number, *Physics of Fluids*, Vol. 16, No. 8, pp. 2797-2813, 2004.
- [18] N. Dongari, R. W. Barber, D. R. Emerson, S. K. Stefanov, Y. Zhang, J. M. Reese, The effect of Knudsen layers on rarefied cylindrical Couette gas flows, *Microfluid and Nanofluid*, Vol. 14, No. 1, pp. 31–43, 2013.
- [19] Y. Sone, *Kinetic Theory and Fluid Dynamics*, First Edition, pp. 34-35, New York: Springer Science & Business Media, 2012.
- [20] J. V. Sengers, R. F. Kayser, C. J. Peters, H. J. White, *Equations of State for Fluids and Fluid Mixtures*, pp. 322-323, New York: Elsevier, 2000.
- [21] D. Chen, D. B. Bogy, Comparisons of slip-corrected Reynolds lubrication equations for the air bearing film in the head-disk interface of hard disk drives, *Tribology Letters*, Vol. 37, No. 2, pp. 191-201, 2010.
- [22] J. P. Srivasatava, *Elements of Solid State Physics*, Fourth Edition, pp. 202-203, Delhi, PHI Learning Pvt. Ltd., 2014.
- [23] Y. A. Çengel, M. A. Boles, *Thermodynamics: An Engineering Approach*, Seventh Edition, pp. 909-910, New York: McGraw-Hill, 2008.
- [24] C. Cercignani, A. Daneri, Flow of a rarefied gas between two parallel plates, *Journal of Applied Physics*, Vol. 34, No. 12, 3509, 1963.

عمود

 n

معمولی

 0

بردار مکان (m)

 r بردار سرعت (ms^{-1}) v

7- مراجع

- [1] L. Wu, A slip model for rarefied gas flows above a moving surface with mass transfer, *Journal of Applied Physics*, Vol. 116, No. 5, 054503, 2014.
- [2] I. Zahmatkesh, M. M. Alishahi, H. Emdad, New velocity-slip and temperature-jump boundary conditions for Navier–Stokes computation of gas mixture flows in microgeometries, *Mechanics Research Communications*, Vol. 38, No. 6, pp. 417-424, 2011.
- [3] W. M. Zhang, G. Meng, X. Wei, A review on slip models for gas microflows, *Microfluid Nanofluid*, Vol. 13, No. 6, pp. 845–882, 2012.
- [4] R. S. Myong, J. M. Reese, R. W. Barber, D. R. Emerson, Velocity slip in microscale cylindrical Couette flow: The Langmuir model, *Physics of Fluid*, Vol. 17, No. 8, 087105, 2005.
- [5] N. Dongari, A. Agrawal, Analytical solution of gaseous slip flow in long microchannels, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, No. 17-18, pp. 3411-3421, 2007.
- [6] S. Shen, G. Chen, A kinetic-theory based first order slip boundary condition for gas flow, *Physics of Fluids*, Vol. 19, No. 8, 086101, 2007.
- [7] L. Wu, A slip model for rarefied gas flows at arbitrary Knudsen number, *Applied Physics Letter*, Vol. 93, No. 25, 253103, 2008.
- [8] H. W. Zhang, Z. Q. Zhang, Y. G. Zheng, H. F. Ye, Corrected second order slip boundary condition for fluid flows in nanochannel, *Physical Review E*, Vol. 81, No. 6, 066303, 2010.
- [9] L. Gibelli, Velocity slip coefficients based on the hard-sphere Boltzmann equation, *Physics of Fluid*, Vol. 24, No. 2, 022001, 2012.
- [10] L. Szalmás, Viscous velocity, diffusion and thermal slip coefficients for ternary gas mixtures, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, Vol. 53, pp.