



ارائه روابط تجربی برای تعیین تعداد اضلاع پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی

احسان سوختانلو¹، علیرضا تیمورتاش^{2*}، محمدرضا مه‌پیکر²

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
 2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
 *مشهد، صندوق پستی 91775-1111، teymourtash@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
 دریافت: 08 آبان 1396
 پذیرش: 20 آذر 1396
 ارائه در سایت: 15 دی 1396
 کلید واژگان:
 پرش هیدرولیکی چندضلعی
 طراحی آزمایشات به روش تاگوچی
 روش حداقل مربعات

چکیده

به طور معمول از برخورد جت مایع عمودی به یک صفحه‌ای صاف افقی، پرش هیدرولیکی دایروی تشکیل می‌شود. با این وجود، در شرایط خاصی که متأثر از عواملی مانند لزجت سیال، دبی حجمی، قطر جت و ارتفاع سیال در پایین دست پرش می‌باشد، تغییر جریان از حالت فوق بحرانی به زیر بحرانی از ظاهر دایروی خود خارج شده و به صورت چندضلعی نمایان می‌گردد. با وجود گذشت نزدیک به دو دهه از مشاهده پدیده پرش هیدرولیکی چندضلعی، تاکنون رابطه‌ی تجربی برای تخمین تعداد اضلاع پرش‌های هیدرولیکی چند ضلعی برحسب پارامترهای مختلف ارائه نگردیده است. اندازه و تعداد اضلاع پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی به عوامل مختلفی مانند دبی حجمی سیال، قطر جت، ارتفاع سیال در پایین دست پرش و خواص فیزیکی سیال و به عبارتی به اعداد بدون بعد رینولدز، وبر و باند بستگی دارند. از این رو در این پژوهش با استفاده از روش طراحی آزمایشات به کمک تحلیل تاگوچی به بررسی آزمایشگاهی اثرات دبی حجمی سیال، قطر جت و ارتفاع مانع در پایین دست پرش بر تعداد اضلاع پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی پرداخته شده و دو رابطه‌ی خطی و غیرخطی برای تخمین تعداد اضلاع پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی برحسب پارامترهای مذکور ارائه می‌گردد.

Proposal of Experimental Relations for Determining the Number of Sides of Polygonal Hydraulic Jumps

Ehsan Soukhtanlou, Ali Reza Teymourtash*, Mohammad Reza Mahpeykar

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
 *P.O.B 91775-1111, Mashhad, Iran, teymourtash@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
 Received 30 October 2017
 Accepted 11 December 2017
 Available Online 05 January 2018

Keywords:

Polygonal hydraulic jump
 Design of Experiments by Taguchi method
 least square method

ABSTRACT

The circular hydraulic jump usually forms when a liquid jet impinges on a horizontal flat plate. However, under certain conditions of fluid viscosity, volume flow rate and obstacle height downstream of the jump, the flow changes from super-critical to sub-critical and hydraulic jump changes shape from circular to polygonal. Despite the phenomenon of the hydraulic polygon jump has observed about two decades, the experimental relationship has not been presented to estimate the number of sides of hydraulic polygon jumps. The size and number of sides of a polygonal hydraulic jump depend on various factors such as fluid volume flow rate, jet diameter, fluid height downstream of the jump, and fluid physical properties; in other words, they depend on the dimensionless numbers of Reynolds, Weber, and Bond. Hence, in this study Taguchi analysis, as a Design of Experiment method, was used to investigate the effect of volume flow rate, jet diameter and obstacle height downstream of the jump on the number of the sides of a polygon hydraulic jump and Linear and nonlinear relationships was proposed for estimating the number of the sides of a polygonal hydraulic jump in terms of the above mentioned parameters.

1- مقدمه

کاربردهای صنعتی مانند خنک‌کاری قطعات و نیز تولید شیشه، پاشش سوخت و تمیز نمودن سطوح و غیره مورد استفاده قرار گیرد [1,2]. اگر مقادیر پارامترهای لزجت سیال، ارتفاع مانع در پایین دست پرش و دبی حجمی به درستی انتخاب شوند، پرش هیدرولیکی از حالت دایروی خود خارج شده و نوع دیگری از پرش‌های هیدرولیکی به نام پرش هیدرولیکی چندضلعی اتفاق می‌افتد. با وجودی که پیشینه تحقیق درباره پرش هیدرولیکی دایروی به یک قرن قبل بازمی‌گردد، ولی پرش هیدرولیکی چندضلعی پدیده‌ای نوظهور بوده و قدمت چند ساله دارد. الگارد و همکارانش [3] برای اولین بار به منظور پایدار کردن بیشتر پرش‌های هیدرولیکی دایروی

زمانی که جت مایع به صورت عمودی به صفحه‌ای تخت و افقی برخورد می‌کند، آنچه انتظار می‌رود حرکت شعاعی و متقارن لایه نازکی از سیال بر روی سطح و متعاقباً مشاهده پرش هیدرولیکی دایروی می‌باشد. در پدیده پرش هیدرولیکی، عمق سیال به طور ناگهانی افزایش یافته و سرعت سیال به شدت کاهش می‌یابد. برخورد جت سیال به صفحه و حرکت شعاعی لایه نازکی از سیال بر روی صفحه، به سبب ایجاد ناحیه‌ای با ضخامت کم و سرعت بالا، روشی رایج برای ایجاد منطقه‌ای با نرخ انتقال حرارت مناسب بین صفحه و سیال می‌باشد. این ویژگی‌ها باعث شده است که این پدیده در

Please cite this article using:

E. Soukhtanlou, A. R. Teymourtash, M. R. Mahpeykar, Proposal of Experimental Relations for Determining the Number of Sides of Polygonal Hydraulic Jumps, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 01, pp. 207-216, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

تشکیل و پایداری پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی، همواره مورد توجه محققان بوده است. با این وجود، تاکنون رابطه تجربی برای پیش‌بینی تعداد اضلاع پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی منتشر نگردیده است. بنابراین در پژوهش حاضر و در ادامه تحقیقات قبلی نویسنده [12,13]، مجدداً به مطالعه آزمایشگاهی اثر پارامترهای مختلف قطر جت، دبی حجمی سیال و ارتفاع مانع در پایین‌دست پرش بر تعداد اضلاع پرش‌های چندضلعی پرداخته شده و با به‌کارگیری روش تحلیل تاگوچی و حداقل مربعات، دو رابطه خطی و غیرخطی برای تخمین تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی ارائه می‌شود.

2- معرفی دستگاه آزمایش

از آنجا که پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی به عوامل مؤثر در آن بسیار حساس می‌باشد، در نتیجه برای دستیابی به نتایج صحیح آزمایشگاهی، می‌بایست دستگاهی با دقت بالا طراحی و ساخته شود. دستگاه مورد استفاده در تحقیق حاضر در آزمایشگاه سیالات دانشگاه فردوسی مشهد ساخته شده و موجود می‌باشد. در "شکل 1" شماتیکی از دستگاه مورد استفاده نشان داده شده است. این دستگاه شامل قسمت‌های مختلفی مانند پمپ سانتریفیوژ، مکانیزم اندازه‌گیری دبی حجمی سیال، مخزن ذخیره‌سازی سیال با ظرفیت 12 لیتر، مخزن جمع‌آوری سیال پس از برخورد به صفحه هدف، مکانیزم تعیین ارتفاع سیال در پایین‌دست پرش با دقت 0.01 میلی‌متر، صفحه هدف از جنس شیشه با قطر 45 سانتی‌متر، مکانیزم تراز نمودن صفحه هدف، دامپنج جیوه‌ای، نازل‌های شیشه‌ای با قطرهای مختلف می‌باشد. با توجه به نتایج تحقیق‌های گذشته و همچنین بررسی پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی در این پژوهش که با سیالی به لزجت بالاتر از آب امکان‌پذیر می‌باشد، در آزمایش‌های این پروژه از اتیلن گلیکول به‌عنوان سیال عامل استفاده می‌شود. سیال اتیلن گلیکول مورد استفاده دارای لزجت سینماتیکی $\nu = 0.12 \text{ St}$ ، چگالی $\rho = 1.1 \text{ gr/cm}^3$ و کشش سطحی $\sigma = 47.5 \text{ dyn/cm}$ می‌باشد.

- (1) Vertical Leveling Mechanism for Target Plate (2) Obstacle (3) Glass Nozzle (4) Height Measurement Mechanism (5) Nozzle Adjustment Mechanism (6) Tank (7) Chronometer (8) Reservoir (9) Drain Valve (10) Centrifugal Pump

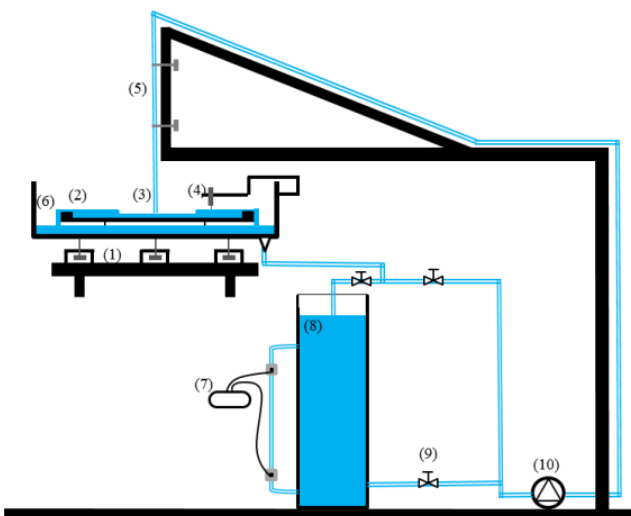


Fig. 1 The schematic diagram of the apparatus for the creation of circular hydraulic jump

شکل 1 نمای شماتیک دستگاه ایجاد پرش هیدرولیکی چندضلعی

از سیال اتیلن گلیکول به‌جای آب استفاده کرده و به‌طور اتفاقی مشاهده نمودند که در شرایط خاصی، شکل دایروی پرش از بین رفته و پرش چندضلعی تشکیل می‌شود. آنان همچنین در تحقیق دیگری نشان دادند که تعداد اضلاع پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی به پارامترهای ارتفاع سیال در پایین‌دست پرش، دبی حجمی جریان و ارتفاع نازل تا صفحه هدف بستگی دارد [4].

بوش و همکارانش [5] با استفاده از سیالاتی با لزجت بالاتر (در حدود 30 سانتی استوک) مانند محلول آب - گلیسرول توانستند پرش‌های غیر دایروی با شکل‌های شبدر و پروانه نیز ایجاد کنند. آزمایش‌های آنان نشان داد که تعداد اضلاع پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی به قطر نازل، ارتفاع سیال در پایین‌دست پرش، دبی حجمی جریان، لزجت سینماتیکی و کشش سطحی سیال بستگی دارد.

در سایر و همکاران [6] توانستند با قرار دادن موانعی استوانه‌ای شکل بسیار کوچک در بستر جریان سیال، پرش‌های هیدرولیکی دایروی را به پرش‌های چندضلعی تبدیل نمایند. آنان با تغییر دبی حجمی سیال، ارتفاع، قطر و فاصله بین موانع استوانه‌ای، اشکال مختلفی از پرش‌های هیدرولیکی را ایجاد نموده و در نهایت با توجه به نتایج آزمایشگاهی، برای این الگوی جریان مدلی نیز ارائه دادند.

کاسیموف [7] نشان داد که اگر کشش سطحی بیشتر از یک مقدار مشخص (بحرانی) باشد، پرش هیدرولیکی دایروی پایدار نبوده و به پرش غیردایروی تبدیل می‌شود. مقدار کشش سطحی بحرانی به مقادیر لزجت و دبی حجمی سیال بستگی داشته و با افزایش لزجت، مقدار آن کاهش می‌یابد. از این‌رو در سیالاتی با لزجت‌های بالاتر مانند اتیلن گلیکول می‌توانیم پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی را مشاهده کنیم.

با وجودی که تاکنون مدل‌ها و روابط زیادی برای توصیف پرش هیدرولیکی دایروی ارائه شده است [8-10]، ولی هنوز پدیده پرش هیدرولیکی چندضلعی ناشناخته بوده و تاکنون مدل کامل و دقیقی برای معرفی این نوع پدیده گزارش نشده است. مارتنز، واتانابه و بوهر [11] به مدل‌سازی پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی پرداختند. آنان تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی را برحسب پارامترهای دبی حجمی و ارتفاع پایین‌دست پرش ارائه دادند. با وجودی که مدل ارائه شده توسط آنان نمی‌توانست تعداد اضلاع پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی را به‌درستی پیش‌بینی نماید، اما از آن جهت که برای اولین بار مدلی در این زمینه ارائه گردید، کاری ارزشمند محسوب می‌شود.

مخلصی و تیمورتاش [12] به مطالعه آزمایشگاهی پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی پرداخته و تأثیر پارامترهای دبی حجمی سیال، ارتفاع سیال در پایین‌دست پرش و قطر جت را بر روی این پرش‌ها مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها همچنین شرایطی که در آن پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی تشکیل می‌شوند را برحسب اعداد بدون بعد رینولدز و وبر ارائه داده و نواحی ماندگاری پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی را معرفی نمودند.

تیمورتاش و مخلصی [13] در پژوهش خود نوع دیگری از پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی را که ساختاری چرخشی - موجی دارند را برای اولین بار معرفی نمودند. آنان نشان دادند که تحت شرایط خاصی از اعداد بدون بعد رینولدز و وبر پرش هیدرولیکی چندضلعی شروع به چرخش کرده و پرش هیدرولیکی چندضلعی چرخان تشکیل می‌شود.

مروری بر تحقیقات گذشته نشان می‌دهد که بررسی عوامل مختلف بر

$$\frac{R_j H_\infty^2 g a^2}{q^2} + \frac{a^2}{2\pi^2 R_j H_\infty} = 0.01676 \left[\left(\frac{R_j}{a} \right)^3 \text{Re}^{-1} + 0.1826 \right]^{-1} \quad R_j \geq r_0 \quad (2)$$

R_j شعاع پرش هیدرولیکی دایروی (cm)، H_∞ عمق سیال در پایین دست پرش (cm)، g شتاب جاذبه زمین (cm/s²)، Q دبی حجمی سیال (ml/s) و a شعاع جت سیال (cm) می‌باشد. همچنین r_0 مقدار شعاعی است که ارتفاع لایه مرزی به سطح آزاد جریان می‌رسد. معادلات واتسون برای هنگامی که شعاع پرش هیدرولیکی کمتر و یا بیشتر از مقدار r_0 باشد ارائه شده است. مقدار پارامتر r_0 را می‌توان توسط رابطه زیر به دست آورد:

$$r_0 = 0.3155 a \text{Re}^{1/3} \quad (3)$$

واتسون برای ارائه تئوری خود، فرضیاتی را در نظر گرفته بود که مهمترین آن نادیده گرفتن کشش سطحی سیال می‌باشد. بوش و آریستوف [15] با اضافه کردن عبارتی اصلاحی که در برگیرنده اثرات کشش سطحی (عدد بدون بعد باند) می‌باشد، مدل مذکور را اصلاح نمودند. معادلات ارائه شده آنان به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{R_j H_\infty^2 g a^2}{q^2} \left(1 + \frac{2}{\text{Bo}} \right) + \frac{a^2}{2\pi^2 R_j H_\infty} = 0.10132 - 0.1297 \left(\frac{R_j}{a} \right)^{3/2} \text{Re}^{-1/2} \quad R_j < r_0 \quad (4)$$

$$\frac{R_j H_\infty^2 g a^2}{q^2} \left(1 + \frac{2}{\text{Bo}} \right) + \frac{a^2}{2\pi^2 R_j H_\infty} = 0.01676 \left[\left(\frac{R_j}{a} \right)^3 \text{Re}^{-1} + 0.1826 \right]^{-1} \quad R_j \geq r_0 \quad (5)$$

در روابط (4) و (5) پارامتر Bo، عدد باند می‌باشد که شامل تأثیرات کشش سطحی بوده و عبارت است از:

$$\text{Bo} = \frac{\rho g R_j \Delta H}{\sigma} \quad (6)$$

معادلات اصلاح شده توسط بوش و آریستوف نسبت به تئوری واتسون دارای دقت بهتری به‌ویژه در مقادیر کوچک شعاع پرش هیدرولیکی می‌باشند. از این رو برای سنجش درستی نتایج ارائه شده در این تحقیق، آزمایش‌هایی برای تعیین شعاع پرش هیدرولیکی دایروی در شرایط مختلف انجام شده و با نتایج تئوری اصلاح شده واتسون مقایسه گردیده است. در "شکل 3" نتایج حاصل از آزمایش‌ها انجام گرفته با نتایج به دست آمده از تئوری اصلاح شده واتسون مقایسه شده است. نتایج نمایش داده شده برای چندین قطر نازل و همچنین دبی‌های حجمی مختلف به دست آمده‌اند. از آنجا که مقدار شعاع پرش هیدرولیکی در معادلات واتسون به سادگی قابل استخراج نیست، نتیجه با توجه به مقالات مراجع [15] و [16] از الگوی به کار برده شده در این مقالات، برای استفاده از نتایج روابط واتسون استفاده شده است. در این روش محور افقی شامل سمت چپ معادله اصلاح شده واتسون و محور عمودی شامل ترم سمت راست آن می‌باشد. نمودار "شکل 3" نشان می‌دهد که نتایج تجربی به دست آمده در این تحقیق، با نتایج تئوری اصلاح شده واتسون تطابق خوبی دارد. با توجه به نتایج حاصله و با مقایسه آن‌ها با نتایج تئوری اصلاح شده واتسون، حدود 3 درصد اختلاف در نتایج مشاهده شده است.

اندازه و تعداد اضلاع پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی به مقادیر پارامترهای دبی حجمی سیال، قطر جت، ارتفاع سیال در پایین دست پرش و لزجت سیال بستگی دارند. "شکل 4" نمونه‌ای از یک پرش 10 ضلعی را نشان می‌دهد. نتایج برای قطر جت $d=10$ mm و ارتفاع مانع در پایین دست پرش

برای انتقال سیال اتیلن گلیکول از مخزن به نازل از یک پمپ سانتریفیوژ 0.35 کیلوواتی با تعداد پره زیاد (64 پره) استفاده شده است. پمپ مورد استفاده قادر به انتقال مناسب سیال اتیلن گلیکول بوده و جریانی پیوسته با کمترین نوسان ممکن را ایجاد می‌کند.

برای بررسی اثرات قطر جت در نتایج اندازه‌گیری، از لوله‌های شیشه‌ای با قطرهای 1 cm و $d=0.7$ و طول 90 سانتی‌متر به‌عنوان نازل مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای بررسی اثرات ارتفاع مانع در پایین دست پرش از موانع دایروی پلاستیکی با ضخامت‌های 0.18، 0.23، 0.27 و 0.32 cm استفاده می‌شود. فاصله لبه داخلی موانع پلاستیکی در پایین دست پرش تا محل برخورد جت سیال، 17.5 سانتی‌متر می‌باشد. مقدار قطر جت سیال علاوه بر میزان قطر نازل به ارتفاع نازل تا صفحه هدف و همچنین مقدار دبی حجمی سیال نیز بستگی دارد. با توجه به این‌که در تمامی آزمایش‌ها فاصله نازل تا صفحه هدف، 1 سانتی‌متر می‌باشد، از این رو در این تحقیق، قطر جت سیال تقریباً معادل قطر نازل در نظر گرفته می‌شود.

دستگاه مورد استفاده قادر است دبی حجمی را با دقت 0.01 میلی‌لیتر بر ثانیه، دمای سیال را با دقت 1 درجه سانتی‌گراد و ارتفاع سیال در پایین دست پرش را با دقت 0.01 میلی‌متر اندازه‌گیری نماید. در "شکل 2"، یک تصویر واقعی از دستگاه مذکور نشان داده شده است.

3- ارائه و تحلیل نتایج

به‌منظور صحت‌سنجی نتایج تحقیق، به مقایسه آزمایشات مربوط به پرش هیدرولیکی دایروی توسط دستگاه موجود با تئوری معروف واتسون می‌پردازیم. در سال 1964 واتسون تئوری مهم و ارزشمند خود را برای معرفی پرش‌های هیدرولیکی دایروی ارائه نمود [14]:

$$\frac{R_j H_\infty^2 g a^2}{q^2} + \frac{a^2}{2\pi^2 R_j H_\infty} = 0.10132 - 0.1297 \left(\frac{R_j}{a} \right)^{3/2} \text{Re}^{-1/2} \quad R_j < r_0 \quad (1)$$



Fig. 2 The apparatus of the hydraulic jump in used for this work

شکل 2 تصویر دستگاه آزمایشی ایجاد پرش هیدرولیکی مورد استفاده

ماندگاری دبی سیال را افزایش/کاهش دهیم، تعداد اضلاع پرش تغییر کرده و پرش چندضلعی به پرشی با تعداد اضلاع بیشتر/کمتر تغییر وضعیت می‌دهد. همچنین نتایج نمودار "شکل 5" نشان می‌دهد که افزایش ارتفاع مانع در پایین دست پرش به علت به وجود آمدن نیروی مقاوم بزرگتری در برابر ایجاد پرش، باعث کاهش تعداد اضلاع پرش چندضلعی و نیز کاهش وسعت ناحیه ماندگاری شده است. از آنجا که رفتار پرش هیدرولیکی چندضلعی در هنگام افزایش و یا کاهش دبی حجمی متفاوت است، در نتیجه بایستی برای حالت افزایش و نیز کاهش دبی حجمی دو رابطه‌ی جداگانه ارائه نمود. تحقیقات انجام گرفته ([13] و [15]) نشان می‌دهد که سه پارامتر بدون بعد رینولدز، وبر و باند در وسعت ناحیه ماندگاری تأثیرگذار می‌باشند که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$Re = \frac{q}{a\theta} \quad We = \frac{\rho q^2}{\sigma H_\infty^3} \quad Bo = \frac{\rho g R_j \Delta H}{\sigma}$$

در روابط بالا q دبی حجمی، a شعاع جت سیال، θ لزجت سینماتیکی سیال، ρ چگالی سیال، σ کشش سطحی، H_∞ ارتفاع سیال در پایین دست پرش، R_j شعاع پرش و ΔH اختلاف ارتفاع قبل و بعد از پرش می‌باشد. عدد رینولدز نمایانگر تأثیرات دبی حجمی، لزجت سیال و قطر جت، عدد وبر نشان دهنده تأثیرات دبی حجمی، ارتفاع سیال در پایین دست پرش و کشش سطحی و عدد باند نمایانگر اثرات کشش سطحی و شتاب جاذبه می‌باشد. از آنجا که در آزمایشات انجام گرفته، شتاب جاذبه ثابت می‌باشد و اثرات کشش سطحی نیز در عدد وبر وجود دارد، در نتیجه تنها دو پارامتر بدون بعد رینولدز و وبر می‌توانند بر تعداد اضلاع پرش چندضلعی تأثیرگذار می‌باشند.

برای مطالعه دقیق‌تر تأثیر عوامل مختلف بر تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی، نیاز به استفاده از روش‌های طراحی آزمایشات می‌باشد. روش‌های طراحی آزمایشات دارای مزایای ویژه‌ای هستند که می‌توان به کاهش تعداد آزمایشات موردنیاز برای تحلیل پدیده و به تبع آن کاهش زمان و هزینه آزمایشات، بالا بردن کیفیت آزمایشات و انجام دقیق‌تر تحلیل‌های آماری، بررسی همزمان متغیرهای ورودی بر پارامترهای خروجی و تعیین فاکتورهایی که بیشترین تأثیر را بر خروجی مسئله می‌گذارند، اشاره نمود.

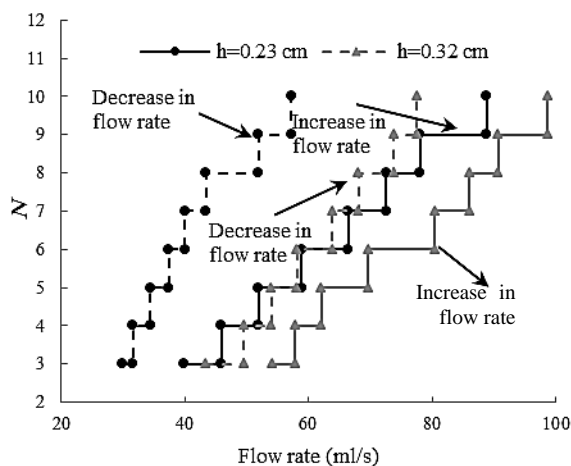


Fig. 5 Effect of increase in flow rate and obstacle height downstream of the jump on the number of sides of polygonal jump and regions of stability display

شکل 5 تأثیر افزایش دبی حجمی و ارتفاع مانع در پایین دست پرش بر روی تعداد اضلاع پرش چندضلعی و نمایش نواحی ماندگاری

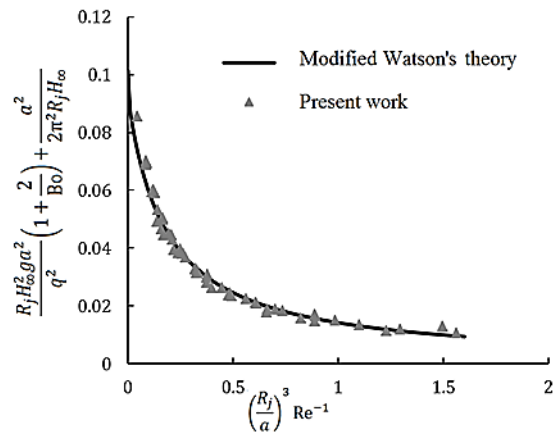


Fig. 3 Comparison of the experimental result of circular hydraulic jump with the modified Watson's theory

شکل 3 مقایسه نتایج آزمایشگاهی پرش هیدرولیکی دایروی با نتایج تئوری اصلاح شده واتسون

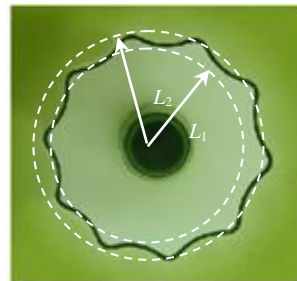


Fig. 4 The formation of a polygon hydraulic jump

شکل 4 تصویر پرش هیدرولیکی 10 ضلعی

شکل 4 و دبی حجمی $q = 56.3$ ml/s ارائه شده است. با تغییر در پارامترهای ذکر شده می‌توان اندازه پرش $(\bar{R}_j = L_1 + L_2/2)$ و نیز تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی را تغییر داد.

در "شکل 5" تأثیر مقدار دبی حجمی سیال و نیز ارتفاع مانع در پایین دست پرش در تعداد اضلاع پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی نشان داده شده است. نتایج برای قطر جت $d = 10$ mm ارائه شده است. نتایج نمودار "شکل 5" نشان می‌دهد که با افزایش تدریجی دبی حجمی، ابتدا اندازه پرش چندضلعی افزایش یافته تا اینکه در دبی مشخصی، تعداد اضلاع پرش افزایش می‌یابد. خطوط افقی نمایانگر افزایش اندازه پرش و خطوط عمودی نشان دهنده افزایش تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی می‌باشد. اگر ابتدا دبی حجمی را به مقدار حداکثر رسانده و سپس شروع به کاهش تدریجی دبی حجمی نماییم، نموداری دیگری حاصل می‌گردد که با نمودار ناشی از افزایش دبی حجمی متفاوت است. مقایسه روند این دو نمودار نشان می‌دهد که در یک دبی حجمی مشخص، هنگامی که در حال کاهش دبی سیال هستیم نسبت به زمانی که دبی سیال را افزایش می‌دهیم، تعداد اضلاع بیشتری را در پرش مشاهده می‌کنیم. به محدوده‌ای از دبی حجمی سیال که در آن با افزایش و یا کاهش دبی سیال، اندازه پرش چندضلعی تا حد مشخصی بزرگ یا کوچک می‌گردد و تغییر در تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی اتفاق نمی‌افتد، ناحیه ماندگاری پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی می‌گویند. به مقداری از دبی سیال که در آن با افزایش/کاهش دبی، اندازه پرش چندضلعی بدون تغییر در تعداد اضلاع آن افزایش/کاهش می‌یابد، حد بالایی/پایین ناحیه ماندگاری گفته می‌شود. چنانچه در حد بالایی/پایین ناحیه

جدول 2 آرایه‌های جدول اورتوگونال در تحلیل تاگوچی در هنگامی که دبی افزایش می‌یابد

Table 2 The arrays of the orthogonal table of Taguchi analysis analysis when flow rate increases

شماره آزمایش	قطر جت (mm)	دبی حجمی (ml/s)	ارتفاع مانع (mm)
1	10	44	1.8
2	10	44	2.3
3	7	44	2.7
4	7	44	3.2
5	10	60	1.8
6	10	60	2.3
7	7	60	2.7
8	7	60	3.2
9	7	80	1.8
10	7	80	2.3
11	10	80	2.7
12	10	80	3.2
13	7	97	1.8
14	7	97	2.3
15	10	97	2.7
16	10	97	3.2

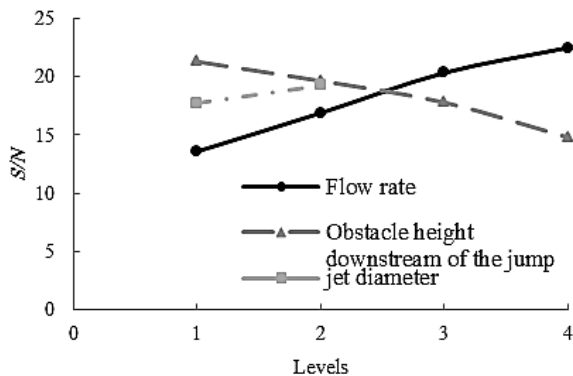


Fig. 6 The S/N ratio for different parameters on polygon hydraulic increases jump when flow rate

شکل 6 مقادیر نسبت سیگنال به نویز فاکتورها و سطوح مختلف بر تعداد اضلاع پرش چندضلعی برای هنگامی که دبی سیال افزایش می‌یابد

جت، دبی حجمی سیال و ارتفاع مانع در پایین دست پرش به صورت زیر ارائه نمود:

$$X = 10.04 + 0.16q - 4h - 0.25d \quad (7)$$

X تعداد اضلاع پرش چندضلعی می‌باشد که دارای مقداری غیرصحیح است. با توجه به این که تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی، عددی صحیح می‌باشد، برای نمایش آن در معادلات به دست آمده، از نماد براکت استفاده می‌کنیم. بر این اساس تعداد اضلاع پرش چندضلعی به بزرگترین عدد صحیح قبل از آن گرد می‌گردد. در نتیجه داریم:

$$N = [X] \quad (1-7)$$

N تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی می‌باشد که عددی صحیح است. رابطه (7) برای مقادیر قطر جت $d = 7 - 10$ mm، دبی حجمی $44 - 97$ ml/s و $q =$ ارتفاع مانع در پایین دست پرش $h = 1.8 - 3.2$ mm به دست آمده است. در جدول 3 نتایج معادله (1-7) برحسب پارامترهای مختلف با نتایج آزمایشگاهی انجام شده در این پژوهش، مقایسه شده است.

خطای تخمین تعداد اضلاع پرش چندضلعی به دست آمده از رابطه (1-7) نسبت به نتایج آزمایشگاهی حدود 6 درصد می‌باشد. خطای بالای برخی از نتایج جدول 3 به علت به کارگیری قسمت صحیح رابطه ارائه شده می‌باشد.

روش‌های طراحی آزمایشات متعددی وجود دارد که در این بین، روش تاگوچی بسیار متداول بوده و دارای کاربردهای فراوانی در علوم مهندسی می‌باشد. در روش تاگوچی از مقدار پارامتر نسبت سیگنال به نویز (S/N) برای به دست آوردن تأثیر پارامترهای مختلف ورودی به منظور بهینه‌سازی یک مشخصه خروجی استفاده می‌گردد. پارامتر "نسبت سیگنال به نویز" نمایانگر حساسیت خروجی مورد بررسی به فاکتورهای مؤثر بر آن می‌باشد. در روش تاگوچی هدف مورد نظر، پیدا نمودن بالاترین نسبت سیگنال به نویز برای هر آزمایش می‌باشد. از این رو هر چه مقدار نسبت سیگنال به نویز برای فاکتور ورودی بیشتر باشد، تأثیر آن فاکتور بر نتایج خروجی نیز بیشتر است.

نتایج تحلیل تاگوچی را می‌توان برای حالت‌هایی که بیشترین و یا کمترین مقدار خروجی و همچنین نزدیک‌ترین مقدار به میانگین مقادیر خروجی را خواستاریم، ارائه نمود. در تحقیق حاضر، تابع خروجی تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی و فاکتورهای مؤثر شامل دبی حجمی، قطر جت و ارتفاع مانع در پایین دست پرش می‌باشند. همچنین در تحقیق حاضر برای استفاده از تحلیل تاگوچی از نرم‌افزار رایج مینی تب استفاده می‌شود.

برای فاکتورهای مؤثر بر پدیده پرش هیدرولیکی چندضلعی می‌توان طراحی آزمایشات مختلفی با تعداد سطوح متفاوت انتخاب نمود. با توجه به میزان مقادیر فاکتورهای ورودی از آزمایش‌های ابتدایی انجام گرفته و نیز تجهیزات موجود (مانند اندازه قطر نازل‌های شیشه‌ای و ضخامت ورقه‌های پلاستیکی)، برای دبی حجمی سیال، ارتفاع مانع در پایین دست پرش و قطر جت به ترتیب 4، 4 و 2 سطح در نظر گرفته می‌شود. بر این اساس آزمایش‌ها بر طبق جدول 1 طراحی می‌گردد.

روش تاگوچی با توجه به تعداد فاکتورهای ورودی مسئله و سطوح در نظر گرفته شده برای هر فاکتور، 16 آزمایش را برای رسیدن به جواب‌های صحیح پیشنهاد می‌دهد. در جدول 2 آرایه‌های جدول اورتوگونال تحلیل تاگوچی نمایش داده شده است.

تأثیر پارامترهای قطر جت، دبی حجمی سیال و ارتفاع مانع در پایین دست پرش بر تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی هنگامی که دبی حجمی سیال در حال افزایش است، در "شکل 6" نمایش داده شده است.

نتایج مقادیر نسبت سیگنال به نویز برای فاکتورهای مختلف نشان می‌دهد که افزایش دبی حجمی، کاهش قطر جت سیال و نیز کاهش ارتفاع مانع در پایین دست پرش باعث افزایش تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی می‌شود. با توجه به دامنه انتخابی برای فاکتورهای ورودی، دبی حجمی سیال، ارتفاع مانع در پایین دست پرش و قطر سیال به ترتیب بیشترین تأثیر را بر روی تعداد اضلاع پرش چندضلعی دارند.

همچنین با استفاده از نتایج تحلیل تاگوچی می‌توان رابطه‌ای خطی برای تخمین تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی برحسب سه پارامتر قطر

جدول 1 سطوح در نظر گرفته شده برای تحلیل تاگوچی (هنگامی که دبی افزایش می‌یابد)

فاکتور	نماد	سطح 1	سطح 2	سطح 3	سطح 4
دبی حجمی (ml/s)	q	44	60	80	97
ارتفاع مانع در پایین دست (mm)	h	1.8	2.3	2.7	3.2
قطر جت (mm)	d	10	7	---	---

به طریق مشابه می توان برای هنگامی که دبی حجمی سیال در حال کاهش می باشد نیز رابطه ای برای تخمین تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی ارائه نمود. با توجه به مقادیر قطر جت $d = 7 - 10 \text{ mm}$ دبی حجمی $q = 35-70$ و ارتفاع مانع در پایین دست پرش $h = 1.8-3.2 \text{ mm}$ رابطه زیر به دست می آید:

$$X = 8.66 + 0.23 q - 3.6 h - 0.37 d \quad (8)$$

$$N=[X] \quad (1-8)$$

در جدول 5 نتایج معادله ارائه شده برحسب پارامترهای مختلف با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است. نتایج آزمایش های انجام گرفته نشان می دهد که متوسط خطای تخمین تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی ناشی از رابطه (1-8)، در حدود 7 درصد می باشد.

در این قسمت به ارائه رابطه تجربی برای تخمین تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی با استفاده از روش حداقل مربعات می پردازیم. بدین منظور می توان رابطه غیرخطی بین پارامترهای مختلف دبی حجمی، قطر جت و ارتفاع مانع در پایین دست پرش به صورت زیر پیشنهاد داد:

$$X = a q^b d^c h^e \quad (9)$$

X تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی، q دبی حجمی سیال (ml/s)، d قطر جت سیال (mm)، h ارتفاع مانع در پایین دست پرش (mm) و a ، b ، c و e ضرایب ثابت می باشد که بایستی تعیین شوند. بدین منظور برای خطی کردن ضرایب مورد نظر در رابطه پیشنهادی داریم:

$$\ln X = \ln a + \ln q^b + \ln d^c + \ln h^e \quad (10)$$

$$\ln X = \ln a + \ln q^b + \ln d^c + \ln h^e \quad (11)$$

$$\ln X = \ln a + b \ln q + c \ln d + e \ln h \quad (12)$$

و با در نظر گرفتن تغییر متغیرهای زیر:

$$\ln a = A, \ln X = \bar{X}, \ln q = \bar{q}, \ln d = \bar{d} \text{ و } \ln h = \bar{h}$$

داریم:

$$\bar{X} = A + b\bar{q} + c\bar{d} + e\bar{h} \quad (13)$$

بعد از جایگذاری نتایج کسب شده از آزمایش ها، برای حالت های مختلف دبی حجمی، قطر جت و ارتفاع مانع در پایین دست پرش و برای هنگامی که دبی حجمی رو به افزایش است رابطه پیشنهادی زیر به دست می آید:

$$X = 0.69 q^{1.23} d^{-0.87} h^{-0.89} \quad (14)$$

$$N=[X] \quad (1-14)$$

در نتیجه با استفاده از رابطه (1-14) و دانستن مقدار آزمایشگاهی پارامترهای مختلف دبی حجمی، قطر جت و ارتفاع مانع در پایین دست پرش، می توان تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی را تعیین نمود. معادله (14) نشان می دهد که تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی نسبت مستقیم به پارامتر دبی حجمی و نسبت معکوس به قطر جت و ارتفاع مانع در پایین دست پرش دارد.

جدول 5 مقایسه نتایج تعداد اضلاع پرش چندضلعی از رابطه (1-8) با نتایج آزمایشگاهی برای زمانی که دبی سیال کاهش می یابد

Table 5 Comparison of the values of number of polygon hydraulic jump by equation (1-8) with the experimental results when flow rate decreases

خطا (%)	$N_{eq}=[X]$	X_{eq}	N_{exp}	$h(\text{mm})$	$d(\text{mm})$	$q(\text{ml/s})$
16.7	5	5.84	6	2.3	7	35
0	3	3.3	3	2.7	10	35
10	9	9.94	10	1.8	7	45
25	3	3.8	4	3.2	10	45
0	11	11.13	11	1.8	7	55
0	7	7.2	7	3.2	10	55
0	12	12.45	12	2.7	7	70
14.3	12	12.8	14	2.3	10	70

جدول 3 مقایسه نتایج تعداد اضلاع پرش چندضلعی از رابطه (7-1) با نتایج آزمایشگاهی، هنگامیکه دبی سیال افزایش می یابد

Table 3 Comparison of the values of number of polygon hydraulic jump by equation (7-1) with the experimental results when flow rate increases

خطا (%)	$N_{eq}=[X]$	X_{eq}	N_{exp}	$h(\text{mm})$	$d(\text{mm})$	$q(\text{ml/s})$
0	8	8.2	8	1.8	7	44
25	3	3.85	4	2.7	10	44
11.1	8	8.8	9	2.3	7	60
0	6	6.44	6	3.2	10	60
9.1	10	10.4	11	2.3	7	80
0	13	13.3	13	1.8	10	80
0	14	14.04	14	2.3	7	97
0	11	11.2	11	3.2	10	97

از آن جا که رفتار پرش هیدرولیکی هنگامی که دبی سیال در حال افزایش است نسبت به زمانی که دبی حجمی در حال کاهش می باشد متفاوت است (شکل 5)، بایستی تحلیل تاگوچی را برای هنگامی که دبی حجمی از مقدار حداکثر خود کاهش می یابد نیز ارائه نمود. با توجه به آزمایشات اولیه سطوح آزمایشات براساس جدول 4 انتخاب می شود.

با استفاده از طراحی آزمایشات به کمک تحلیل تاگوچی 16 آزمایش انجام شده و نتایج در "شکل 7" نمایش داده شده است. با توجه به نتایج به دست آمده با افزایش دبی حجمی، کاهش ارتفاع مانع در پایین دست پرش و نیز کاهش قطر جت تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی کاهش می یابد. همچنین با توجه به دامنه فاکتورهای انتخابی دبی حجمی سیال بیشترین و قطر جت کمترین تأثیر را بر روی تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی دارد. مقایسه نمودارهای "شکل 6 و 7" نشان می دهد که تأثیر پارامترهای انتخابی بر تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی در هنگامی که دبی سیال افزایش می یابد، اندکی بیشتر از زمانی است که دبی حجمی کاهش می یابد.

جدول 4 سطوح در نظر گرفته شده برای تحلیل تاگوچی برای هنگامی که دبی سیال کاهش می یابد

Table 4 The selected effective parameters and their levels in Taguchi analysis results when flow rate increases

فاکتور	نماد	سطح 1	سطح 2	سطح 3	سطح 4
دبی حجمی (ml/s)	q	35	45	55	70
ارتفاع مانع در پایین دست (mm)	h	1.8	2.3	2.7	3.2
قطر جت (mm)	d	7	10	---	---

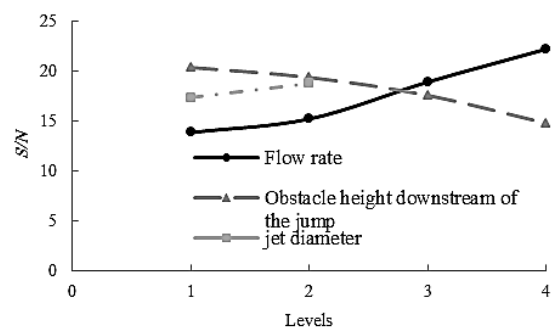


Fig. 7 The S/N ratio for different parameters on polygon hydraulic jump when flow rate decreases

شکل 7 مقادیر نسبت سیگنال به نویز فاکتورها و سطوح مختلف بر تعداد اضلاع پرش چندضلعی برای هنگامی که دبی سیال کاهش می یابد

چندضلعی پرداخته و با استفاده از روش‌های تحلیل تاگوچی و حداکثر مربعات دو رابطه خطی و غیرخطی برای تخمین تعداد اضلاع پرش چندضلعی در دامنه مشخصی از پارامترهای تاثیرگذار اشاره شده، ارائه شده است. نتایج آزمایش‌های انجام شده با استفاده از روش طراحی آزمایشات به کمک تاگوچی برای فاکتورهای مختلف ورودی نشان می‌دهد که افزایش دبی حجمی و کاهش قطر جت سیال و ارتفاع مانع در پایین‌دست پرش باعث افزایش تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی می‌شود. با توجه به دامنه انتخابی برای فاکتورهای ورودی، دبی حجمی سیال، ارتفاع مانع در پایین-دست پرش و قطر سیال به ترتیب بیشترین تأثیر را بر روی تعداد اضلاع پرش چندضلعی دارند. مقایسه نتایج روابط خطی و غیرخطی ارائه شده برای تخمین تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی برحسب پارامترهای قطر جت، دبی حجمی سیال، ارتفاع مانع در پایین‌دست با نتایج آزمایشات انجام گرفته در این تحقیق و نیز نتایج دیگران نشان می‌دهد که روابط به‌دست‌آمده دارای دقت قابل قبول می‌باشند.

5- فهرست علائم

a	شعاع نازل (cm)
B_0	عدد باند
d	قطر جت (cm)
g	شتاب گرانش (cm/s^2)
h	ارتفاع مانع در پایین‌دست پرش (cm)
H_∞	ارتفاع سیال در پایین‌دست پرش (cm)
ΔH	اختلاف ارتفاع قبل و بعد از پرش (cm)
N	تعداد اضلاع پرش چندضلعی برحسب عدد صحیح
q	دبی حجمی (ml/s)
Re	عدد رینولدز جت
\bar{R}_r	اندازه پرش هیدرولیکی (cm)
r_0	شعاع رسیدن لایه مرزی به سطح آزاد (cm)
We	عدد وبر
X	تعداد اضلاع پرش چندضلعی برحسب عدد غیر صحیح

علائم یونانی

ν	ویسکوزیته سیال (St)
π	عدد پی
ρ	چگالی سیال (gr/cm^3)
σ	کشش سطحی سیال (dyn/cm)

زیرنویس‌ها

eq	نتایج حاصل از معادله
exp	نتایج به دست آمده از آزمایش

6- مراجع

- [1] R. S. Bunker, Gas turbine heat transfer: Ten remaining hot gas path challenges, *Journal of Turbomachinery*, Vol. 129, No. 2, pp. 193-201, 2007.
- [2] H. W. Glover, T. Brass, R. K. Bhagat, J. F. Davidson, L. Pratt, D. I. Wilson, Clinging of complex soil layers on vertical walls by fixed and moving impinging liquid jets, *Journal of Food Engineering*, Vol. 178, No. 1, pp. 95-109, 2016.
- [3] C. Ellegard, A. E. Hansen, A. Haaning, T. Bohr, Experimental results on flow separation and transition in the circular hydraulic jump, *Physica Scripta*, Vol. 67, No. 8, pp. 105-110, 1996.
- [4] C. Ellegard, A. E. Hansen, A. Haaning, K. Hansen, A. Marcussen, T. Bohr, J. L. Hansen, S. Watanabe, Creating corners in kitchen sinks, *Nature*, Vol. 392, No. 6678, pp. 767-768, 1998.
- [5] J. Bush, J. Aristoff, A. E. Hosoi, An experimental investigation of the stability

همچنین دبی حجمی سیال بیشترین تأثیر را بر تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی دارد. در جدول 6 نتایج معادله ارائه شده برحسب پارامترهای مختلف با نتایج آزمایشگاهی انجام گرفته مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که متوسط خطای تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی ناشی از رابطه (1-14)، در حدود 7 درصد می‌باشد.

با استفاده از روش حداقل مربعات و انجام آزمایشات مناسب می‌توان رابطه‌ای برای تخمین تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی چندضلعی زمانی که دبی حجمی سیال در حال کاهش می‌باشد نیز ارائه نمود:

$$X = 0.075 q^{-0.021} d^{-1.08} h^{-0.18} \quad (15)$$

$$N=[X] \quad (1-15)$$

رابطه (15) برای مقادیر قطر جت $d=7-10$ mm دبی حجمی ml/s $q=35-70$ و ارتفاع مانع در پایین‌دست پرش $h=1.8-3.2$ mm معتبر می‌باشد. براساس آزمایش‌های انجام گرفته در این تحقیق، متوسط خطای رابطه (1-15) نسبت به نتایج عملی در حدود 5 درصد می‌باشد.

در جدول 7 نتایج حاصل از روابط به‌دست آمده در این تحقیق، با نتایج مرجع [13] مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که نتایج روابط خطی و غیرخطی (1-7) و (1-14) به ترتیب حدود 5 و 7 درصد اختلاف با نتایج آزمایشات مرجع [13] دارند. این اختلاف بین نتایج را می‌توان ناشی از عواملی مختلفی مانند شرایط محیطی (مانند درجه حرارت) متفاوت، استفاده از تجهیزات با شرایط مختلف (مانند صفحات هدف مختلف) و نیز خطاهای اپراتور دانست.

4- نتیجه گیری

در این پژوهش به مطالعه آزمایشگاهی اثر پارامترهای دبی حجمی سیال، قطر جت و ارتفاع سیال در پایین‌دست پرش بر تعداد اضلاع پرش هیدرولیکی

جدول 6 مقایسه نتایج معادله (1-14) با نتایج آزمایشگاهی برای زمانی که دبی سیال کاهش می‌یابد

Table 6 Comparison of the experimental result with equation (1-14) when flow rate decreases

خطا (%)	$N_{eq}=[X]$	X_{eq}	N_{exp}	$h(\text{mm})$	$d(\text{mm})$	$q(\text{ml/s})$
0	8	8.1	8	1.8	7	35
0	3	3.5	3	2.3	10	35
11.1	8	8.8	9	2.3	7	45
16.7	5	5.9	6	2.7	10	45
0	11	11.3	11	2.3	7	55
16.7	10	10.96	12	1.8	10	55
7.1	15	15.2	14	2.3	7	70
11.1	8	8.78	9	3.2	10	70

جدول 7 مقایسه نتایج معادلات (1-7) و (1-14) با نتایج آزمایشگاهی مرجع [13]

برای زمانیکه دبی سیال افزایش می‌یابد

Table 7 Comparison of the results of equations (7-1) and (14-1) with reference [13] when flow rate increases

نتایج معادله (14-1)	نتایج معادله (7-1)	نتایج مرجع [13]	h (mm)	d (mm)	q (ml/s)
5	6	6	2.2	10	48.8
7	8	8	2.2	10	62.9
9	11	10	2.2	10	78.3
4	3	4	3.0	10	51.7
6	6	6	3.0	10	69.8
8	9	9	3.0	10	89.9
5	4	5	3.2	10	63.6
7	7	7	3.2	10	79.2
8	9	9	3.2	10	95.2

- Physical Review E*, Vol. 85, No.1, pp. 0363161-14, 2012.
- [12] M. Mokhlesi, A. R. Teymouratsh, Experimental Investigation of the effect of flow rate, depth of downwar and jet diameter of polygonal Hydraulic Jumps, *Journal of Mechanich Engineering*, Vol. 62, No. 2, pp. 69-89, 2013. (In Persian فارسی)
- [13] A. R. Teymouratsh, M. Mokhlesi, Experimental investigation of stationary and rotational structures in Non-circular hydraulic jumps, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 762, No.1, pp. 344-360, 2015.
- [14] E. J. Watson, The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane, *Journal of Fluid Mechanic*, Vol. 20, No.1, pp. 481-499, 1964.
- [15] J. W. M. Bush, J. M. Aristoff, The influence of surface tension on the circular hydraulic jump, *Journal of Fluid Mechanic*, Vol. 489, No. 1, pp. 229-238, 2003.
- [16] M. Passandideh-Fard, A. R. Teymouratsh, M. Khavari, Numerical study of cylinder hydraulic jump using volume-of-fluid method, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 133, No. 1, pp. 566-570, 2011.
- of the circular hydraulic jump, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 558, No.1, pp. 33-52, 2005.
- [6] E. Dressaire, L. Courbin, J. Crest, H. A. Stone, Thin-Film fluid flows over microdecorated surface: Observation of polygonal hydraulic jumps, *Physical Review Letters*, Vol. 102, No.1, pp. 1945031-4, 2009.
- [7] A. R. Kasimov, A stationary circular hydraulic jump, the limits of its existence and its gasdynamic analogue, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 601, No.1, pp. 189-198, 2008.
- [8] H. Zobeyer, N. Rajaratnam, D. Z. Zhu, Radial jet and hydraulic jump in a circular basin, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 140, No. 1, pp. 128-133, 2014.
- [9] Y. Brechet, Z. N'eda, On the circular hydraulic jump, *American Journal of Apahysics*, Vol. 67, No. 8, pp. 723-731, 1999.
- [10] E. A. Eyo, E. E. Joshua, P. J. Udoh, Two dimensional laminar flow of a liquid with circular hydraulic jump, *Modern Applied Science*, Vol. 5, No. 3, pp. 56-68, 2011.
- [11] E. A. Martens, S. J. Watanabe, T. Bohr, Model for polygon hydraulic jump,