



مطالعه تحلیلی فرآیند الکتروگرمایی آند در یک رانشگر پلاسمایی مغناطیسی

مهدی آهانگر^{1*}، اکرم صدیق²

1- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

2- کارشناس ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر طوسی، تهران

*تهران، صندوق پستی 19839-4716، m_ahangar@sbu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 15 آبان 1395

پذیرش: 19 دی 1395

ارائه در سایت: 10 بهمن 1395

کلید واژگان:

جریان پلازما

غلاف آند

شار حرارتی

پارامتر هال

میدان مغناطیسی

چکیده

در این پژوهش، مشخصه‌های الکتروگرمایی آند به صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای این منظور دو زیرناحیه جریان پلاسمای شبه‌خنثی و غیرخنثی در نزدیکی دیواره الکتروود در نظر گرفته شده‌اند. برای ناحیه غیرخنثی یک رابطه بین افت ولتاژ و چگالی جریان با استفاده از معادلات بقای جرم و مومنتوم الکترون ارائه شده است. همچنین، برای تعیین افت ولتاژ و چگالی جریان در زیرناحیه جریان شبه‌خنثی، روابطی مبتنی بر معادله میدان مغناطیسی القایی و قانون اهم استخراج شده است. الگوریتم حل پیشنهادی مبتنی بر ارضای شرط پیوستگی جریان است که با استفاده از روش سعی و خطا همگرا می‌گردد. به منظور اعتبارسنجی الگوریتم تحلیلی توسعه داده شده، رانشگر پلاسمایی مغناطیسی دانشگاه پرینستون با جریان تخلیه الکتریکی 8 کیلوآمپر و دبی‌های جرمی ورودی 4 و 24 گرم بر ثانیه مطالعه شده است. نتایج تحلیلی به دست آمده نشان می‌دهد که تحت دبی‌های جرمی ورودی 4 و 24 گرم بر ثانیه به ترتیب، مقادیر شار حرارتی در بازه 480 تا 1350 و 400 تا 1490 وات بر سانتی‌متر مربع، چگالی جریان الکتریکی در بازه 24 تا 90 و 33 تا 140 آمپر بر سانتی‌متر مربع و افت ولتاژ در بازه 5.8 تا 11 و 4.9 تا 6 ولت تغییر می‌کنند. الگوریتم تحلیلی، شار حرارتی، چگالی جریان الکتریکی و افت ولتاژ در امتداد لبه آند را مشابه داده‌های تجربی پیش‌بینی کرده است. مشاهده شده که چگالی جریان و شار حرارتی در نزدیکی وسط لبه آند، جایی که افت ولتاژ آند کمینه شده، بیش‌ترین مقدار خود را اختیار کرده است. با استفاده از قانون دوم ترمودینامیک نشان داده شد که تابع چگالی احتمال سرعت موثر دارای توزیع گاوسی است. بنابراین، تحت این شرایط انتروپی بیشینه شده و در نتیجه نمودارهای چگالی جریان و شار حرارتی قله‌ای شکل شده‌اند.

Analytical Investigation of Anode Electrothermal Process in a MPD Thruster

Mahdy Ahangar^{1*}, Akram Sedigh²

1- Department of Aerospace Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

2- Faculty of Aerospace Engineering, University of K.N.Toosi, Tehran, Iran

*P.O.B. 19839-4716, Tehran, Iran, m_ahangar@sbu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 05 November 2016

Accepted 08 January 2017

Available Online 29 January 2017

Keywords:

Plasma Flow

Anode Sheath

Heat Flux

Hall Parameter

Magnetic Field

ABSTRACT

In this research, the electrothermal characteristics of anode have been analytically investigated by considering two subzones including the quasi-neutral and non-neutral plasma flow near the anode surface. A correlation between current density and anode fall voltage has been derived by using the continuity and momentum equations for electron in the non-neutral plasma subzone. Also, two relations have been deduced from the magnetic field induction equation and Ohm's law to determine the current densities and voltage drops in the quasi-neutral plasma subzone. The suggested solution algorithm has been based on the satisfaction of current continuity condition to be converged by a trial and error method. The Princeton benchmark thruster has been investigated for the discharge current of 8 kA with mass flow rates of 4 and 24 gr/s to evaluate the developed algorithm. The obtained analytical results show that under operating conditions with mass flow rates of 4 and 24 g/s, the heat flux values are respectively in the range of 480 to 1350 and 400 to 1490 W/cm², the current densities vary from 24 to 90 and from 33 to 140 A/cm², and also the anode falls change from 5.8 to 11 and 4.9 to 6 V. The analytical algorithm has predicted the heat fluxes, current densities, and anode falls along the anode face in good agreement with measurements. It has been seen that the heat flux and current density around the anode mid-lip, where the anode fall has its minimum value, have been maximized. By using the second thermodynamic law, it has been shown that the probability density function of effective velocity has a Gaussian distribution. Therefore, under this circumstance, entropy has been maximized, and consequently the heat flux and current density profiles have been taken the summit form.

1- مقدمه

پلاسمایی^۱ به دلیل قابلیت تولید سرعت گازه‌های خروجی بالاتر، برای کاربردهای فضایی همچون مانورهای مداری و ماموریت‌های بین سیاره‌ای

در میان انواع سامانه‌های پیش‌رانش الکتریکی، رانشگرهای مغناطیسی

¹ MagnetoPlasmaDynamic Thrusters

Please cite this article using:

M. Ahangar, A. Sedigh, Analytical Investigation of Anode Electrothermal Process in a MPD Thruster, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 77-84, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مغناطیسی که در آن میدان مغناطیسی کاملاً محیطی⁷ است به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Omega_e = \frac{|B|}{en_e\eta} = \frac{|B_\theta|}{en_e\eta} = -\frac{B_\theta}{en_e\eta} \quad (1)$$

که B_θ میدان مغناطیسی محیطی، e بار الکتریکی الکترون، n_e چگالی تعداد ذرات الکترون و η مقاومت الکتریکی پلاسما می‌باشد. با توجه به این که ماده الکتروند آند دارای خاصیت رسانایی الکتریکی زیادی است، می‌توان از میدان الکتریکی در امتداد سطح آند صرف نظر کرد. لذا با چشم‌پوشی از سهم گرادیان فشار الکترون، قانون اهم در امتداد دیواره آند به صورت زیر ساده می‌گردد [2]،

$$j_z \approx -\frac{B_\theta}{en_e\eta} j_r = \Omega_e j_r \quad (2)$$

که j_z چگالی جریان الکتریکی محوری و j_r چگالی جریان الکتریکی شعاعی می‌باشد. نتایج تجربی گالیمور [3] و نتایج عددی آهنگر و همکاران [4] نشان می‌دهند که مقدار پارامتر هال در مجاورت الکتروند آند از مرتبه یک می‌باشد. لذا مقدار جریان محوری حاصل از اثر هال قابل توجه است. از اندرکنش جریان الکتریکی محوری j_z با میدان مغناطیسی محیطی درون سو B_θ ، مولفه‌ای از نیروی لورنتز در خلاف جهت شعاعی (به سمت الکتروند کاند) به وجود می‌آید که جریان پلاسما را از نزدیکی دیواره آند دور می‌کند. این امر باعث کاهش چگالی بار در ناحیه پیرامون آند می‌شود. با توجه به لزوم پیوستگی جریان الکتریکی در سرتاسر رانشگر، در پاسخ به کمبود بارهای حامل جریان در ناحیه غلاف آند، میدان الکتریکی قابل توجهی در این ناحیه به وجود می‌آید تا با شتاب دادن بارهای حامل اثر کاهش چگالی آن‌ها جبران شده و در نهایت مقدار شار ذرات حامل ثابت باقی می‌ماند. این سازوکار موسوم به نظریه کمبود بارهای حامل⁸ می‌باشد. بنابراین بایستی توجه داشت که اگرچه میدان الکتریکی تولید شده باعث حفظ شرط پیوستگی جریان الکتریکی می‌شود، اما افت ولتاژ قابل ملاحظه‌ای را در ناحیه غلاف به دنبال دارد.

در پژوهشی دیگر، صابر [5] شار حرارتی موضعی آند را با استفاده از دو روش مستقیم و غیرمستقیم اندازه‌گیری کرد. در روش مستقیم، با استفاده از ترموکوپل‌های تعبیه شده در ناحیه داخلی دیواره الکتروند، مقادیر شار حرارتی تعیین شد. در روش غیرمستقیم، با به‌کارگیری مجموعه‌ای از سنجه‌های الکتریکی مقادیر ولتاژ، چگالی جریان الکتریکی و دمای الکترون در پلاسمای مجاور سطح آند اندازه‌گیری گردید. با استفاده از داده‌های به دست آمده، شار حرارتی توسط معادله زیر حاصل شد.

$$\dot{q}_a = j_a \left(V_a + \frac{5}{2} \frac{kT_e}{e} + \chi \right) + \dot{q}_c + \dot{q}_r \quad (3)$$

که j_a چگالی جریان موضعی آند، V_a افت آند، kT_e/e انرژی حرارتی ناشی از حرکت تصادفی الکترون‌ها، χ تابع کار، $\dot{q}_c$ شار جابه‌جایی پلاسما و $\dot{q}_r$ شار تشعشعی می‌باشد. نتایج تجربی به دست آمده در پژوهش مذکور نشان می‌دهد که در بازه جریان الکتریکی از 5.5 تا 44 کیلوآمپر با دبی جرمی گاز آرگون از 1 تا 48 گرم بر ثانیه مقدار نسبت توان اتلافی آند به توان ورودی رانشگر از 50% در 200 کیلووات به 10% در 20 مگاوات کاهش می‌یابد. در گستره عملکردی ذکر شده مقدار افت آند حدوداً بین 5 تا 50 ولت متغیر است. صابر نشان داد که زیرناحیه پلاسمای شبه خنثی تقریباً به فاصله 1 سانتی‌متر از سطح آند گسترش می‌یابد و ضخامت این ناحیه از ضخامت غلاف آند بیش‌تر است. بنابراین، سهم افت ولتاژ در زیرناحیه پلاسمای شبه

مناسب می‌باشند. طرحواره این رانشگر در "شکل 1" نشان داده شده است. در این رانشگر، جریان گاز به فضای بین یک الکتروند آند حلقوی و الکتروند کاند استوانه‌ای شکل تزریق می‌گردد. به واسطه اعمال اختلاف ولتاژ توسط یک منبع تغذیه، جریان گاز عبوری در رانشگر یونیزه شده و جریان پلاسمای شبه خنثی¹ (که در آن چگالی تعداد ذرات الکترون و یون با هم برابر می‌باشند) تشکیل می‌گردد. با تخلیه جریان الکتریکی چند هزار آمپری در گاز یونیزه شده یک میدان مغناطیسی محیطی براساس قانون آمپر، القا می‌گردد. نیروی لورنتز حاصل از اندرکنش جریان الکتریکی و میدان مغناطیسی، به گاز یونیزه شده شتاب وارد کرده و باعث تولید نیروی پیشران می‌شود.

یکی از محدودیت‌های رانشگرهای مغناطیسی پلاسمایی وقوع افت ولتاژ در مجاورت الکتروند آند (افت آند²) است که به تبع آن بار حرارتی وارد بر دیواره این الکتروند افزایش می‌یابد و این موضوع سبب خوردگی و کاهش طول عمر آن می‌شود. علاوه بر این، بخشی از توان ایجاد شده توسط منبع تغذیه که باید صرف شتابدهی جریان پلاسما شود، به صورت افت گرمایی تلف می‌شود.

جامع‌ترین مطالعات تجربی در زمینه فرآیند اتلافات حرارتی ناحیه آند توسط محققین دانشگاه پرینستون صورت گرفته است. ابرث [1] توانست با استفاده از سنجه الکتریکی لانگمور³ مقادیر افت آند را در نزدیکی سطوح الکتروند آند اندازه‌گیری نماید. کمیت افت آند توصیف‌کننده اختلاف پتانسیل بین دیواره آند و جریان پلاسما در فاصله 0.1 سانتی‌متری از سطح آند است. ابرث بیان کرد که افت آند در برگرنده سهم اختلاف ولتاژ در هر دو زیرناحیه غلاف آند⁴ و بخشی از جریان اصلی پلاسمای شبه خنثی می‌باشد. غلاف آند، ناحیه‌ای به ضخامت چند میکرومتر در مجاورت دیواره الکتروند است که در آن جریان پلاسمای غیرخنثی⁵ ایجاد می‌شود. در این نوع از جریان پلاسما، الکترون‌ها و یون‌ها با یکدیگر برابر نمی‌باشند. بنابراین با توجه به قانون گاوس الکتریکی، افت ولتاژ قابل توجهی در ناحیه مذکور به وجود می‌آید که با توجه به قانون اهم باعث افزایش تلفات گرمایی از نوع حرارت اهمی در مجاورت این ناحیه می‌شود.

از سوی دیگر در زیرناحیه جریان پلاسمای شبه خنثی، افت ولتاژ به دلیل اثر هال⁶ ایجاد می‌شود. پارامتر هال الکترون در رانشگر پلاسمایی

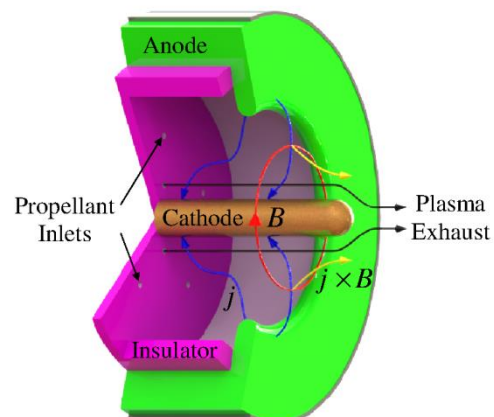


Fig. 1 Schematic of a typical MPD thruster

شکل 1 طرحواره یک رانشگر مغناطیسی پلاسمایی

¹ Quasi-neutral

² Anode fall

³ Langmuir probe

⁴ Anode sheath

⁵ Non-neutral

⁶ Hall effect

⁷ Azimuthal

⁸ Starvation of charge carriers

خنثی قابل توجه بوده و در مقایسه با سهم زیرناحیه غلاف قابل چشم‌پوشی نیست.

گالیمور [3] هم‌چون صابر با استفاده از روش‌های مستقیم و غیرمستقیم مقادیر پارامترهای الکتروگرایی فرآیند آند را برای پیش‌ران‌های آرگون و هلیوم در رژیم‌های عملکردی مختلف اندازه‌گیری کرد. او برای اولین بار مقادیر افت آند را به‌صورت کمی با پارامتر هال الکترون و ضریب هدایت الکتریکی مرتبط ساخت. وابستگی‌های تجربی به‌دست آمده بر مبنای دو احتمال توجیه گردید. نخست، ایجاد افت ولتاژ آند بدلیل وقوع اثر هال است که پیش‌تر بر مبنای نظریه کمبود بارهای حامل الکتریکی در مجاورت آند تبیین گردید. دومین احتمال مبتنی بر سازوکار انتقال غیرعادی¹ ذرات پلاسماست که ناشی از پدیده ریزناپایداری² می‌باشد [6]. در این سازوکار، ریزناپایداری‌های موجود در جریان پلاسمای که از برخورد امواج با ذرات باردار به وجود می‌آیند مانع از عبور الکترون‌های حامل جریان الکتریکی می‌شوند و در نتیجه مقاومت الکتریکی پلاسمای به‌طور غیرعادی افزایش یافته و به تبع آن افت ولتاژ در نزدیکی آند زیاد می‌شود.

سه پژوهش تجربی ذکر شده [5,3,1]، دارای دو یافته مهم مشترک می‌باشند.

الف: نتایج شار حرارتی اندازه‌گیری شده نشان می‌دهد که مقدار بیشینه این کمیت حدوداً در ناحیه میانی لبه آند رخ می‌دهد.

ب: چگالی جریان الکتریکی به صورت معکوس با افت آند تغییر کرده و تقریباً در ناحیه میانی لبه آند جایی که افت آند کمینه می‌گردد، مقدار بیشینه خود را اختیار می‌کند.

تاکنون، پژوهش‌های عددی محدودی در زمینه شبیه‌سازی عملکرد رانشگر دانشگاه پرینستون انجام شده است. کالدو [7] و سنکاران [8] با توسعه کدهای عددی جداگانه‌ای که مبتنی بر حل معادلات هیدرودینامیک مغناطیسی می‌باشند، مشخصه‌های الکتریکی و هیدرودینامیکی جریان پلاسمای در رانشگر دانشگاه پرینستون را شبیه‌سازی کردند. علی‌رغم نتایج عددی مناسب به‌دست آمده برای پارامترهایی نظیر سرعت، دما، میدان مغناطیسی، مشخصه‌های الکتروگرایی ناحیه آند به‌دلیل عدم به‌کارگیری مدل افت آند قابل محاسبه نبودند. اخیراً آهنگر و همکاران [4] با اضافه کردن مدل غلاف آند به یک کد حل گر معادلات هیدرودینامیک مغناطیسی [9] توانستند مشخصه‌های الکترومغناطیسی ناحیه آند را به‌صورت عددی شبیه‌سازی کنند. در این پژوهش برای اولین بار تغییرات چگالی جریان الکتریکی و افت ولتاژ موضعی در امتداد سطوح الکتروود آند با تطابق خوبی در مقایسه با داده‌های تجربی پیش‌بینی شد.

اگرچه پژوهش‌های تجربی و عددی ذکر شده، مشخصه‌های الکتروگرایی آند را به صورت کمی تعیین کرده‌اند، با این وجود ماهیت فیزیکی پدیده آند به‌صورت دقیق شناسایی نشده است. در واقع هنوز سوالات بی‌پاسخی در مورد جزئیات رفتار مشخصه‌های الکتروگرایی آند وجود دارد. به‌طور مثال، دلیل رابطه معکوس بین چگالی جریان الکتریکی و افت ولتاژ چیست؟ چرا شار حرارتی و چگالی جریان در مکانی که افت ولتاژ کمینه می‌شود، بیش‌ترین مقادیر خود را اختیار می‌کند؟ بنابراین، پژوهش حاضر در نظر دارد تا برای اولین بار با ارائه یک روند تحلیلی جزئیات فرآیند ناحیه آند را بررسی نماید. برای این منظور، روابط بین افت ولتاژ و چگالی جریان الکتریکی برای هر یک از زیرناحیه‌های پلاسمای غیرخنثی و شبه‌خنثی استخراج شده و با

به‌کارگیری معادله (3)، شار حرارتی در امتداد لبه آند با تأکید بر ارضای شرط پیوستگی جریان محاسبه خواهد شد. درنهایت، با استفاده از مفهوم انتروپی تفاضلی، دلیل وقوع نقاط کمینه و بیشینه در منحنی‌های مربوط به توزیع پارامترهای مذکور توجیه خواهد شد. بنابراین، هدف اصلی پژوهش حاضر تعیین سه پارامتر کلیدی الکتروگرایی (شار حرارتی، چگالی جریان الکتریکی و افت ولتاژ) موجود در ناحیه مجاور آند می‌باشد.

2- معادلات حاکم

مدل‌سازی فرآیند الکتروگرایی مجاور الکتروود آند نیازمند مجموعه معادلاتی است که بتواند رفتار مشخصه‌های جریان پلاسمای را توصیف نماید. بنابراین طبق نتایج ارائه شده توسط صابر [5] هر دو زیرناحیه غلاف آند و پلاسمای شبه خنثی و اندرکنش آن‌ها باید در نظر گرفته شوند. در ادامه، فرضیات، معادلات حاکم بر هر یک از زیرناحیه مذکور و فرآیند حل آن‌ها ارائه می‌گردد.

2-1- تحلیل زیرناحیه پلاسمای شبه خنثی

طبق مطالعه‌های تجربی در رانشگرهای مغناطیسی پلاسمایی، مقادیر عدد رینولدز مغناطیسی و پارامتر هال در نزدیکی آند به‌ترتیب در محدوده 0.01 تا 0.1 و 1 تا 10 می‌باشند [3]. تحت این شرایط، معادله حالت پایدار میدان مغناطیسی القایی به‌صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\sigma} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \beta (\nabla \times [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]) \approx 0 \quad (4)$$

که $\mathbf{v} = [u, 0, w]$ بردار سرعت، $\mathbf{B} = [0, B_\theta, 0]$ بردار شار مغناطیسی، $\beta = 1/en$ و σ هدایت الکتریکی پلاسمای می‌باشند. در حالت پلاسمای شبه خنثی یک‌بعدی در طول آند، مولفه محیطی معادله (4) به‌صورت زیر ساده می‌گردد:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + 2k\psi \frac{d\psi}{dz} = 0 \quad (5)$$

به‌طوری که $k = \sigma\beta/r_a^2$ و $\psi = r_a B_\theta$ به‌عنوان تابع جریان در نظر گرفته می‌شود. در واقع پارامتر k در طول لبه آند تغییر می‌کند، اما برای دست یافتن به حل تحلیلی می‌توان مقدار آن را ثابت در نظر گرفت [10]. با استفاده از رابطه ماکسول $(\mathbf{j} = \mu_0^{-1}(\nabla \times \mathbf{B}))$ ، بزرگی چگالی جریان به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$J(z) = \left| -\frac{1}{\mu_0 r_a} \frac{d\psi}{dz} \right| \quad (6)$$

با توجه به این که مقدار بیشینه چگالی جریان $(J_{\max})$ در ناحیه میانی لبه آند ($z = 0$) رخ می‌دهد، از معادله (6) خواهیم داشت:

$$\frac{d\psi}{dz}(0) = -\mu_0 r_a J_{\max} \quad (7)$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}(0) = 0 \quad (8)$$

که در آن $J_{\max}$ به‌کارگیری معادله (3) به‌صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$J_{\max} = \frac{\dot{q}(0)}{\Phi_{\min} + \omega + \frac{5}{2} \frac{k_B T}{e}} \quad (9)$$

در این رابطه $\dot{q}(0)$ مقدار شار حرارتی در مکانی است که افت آند کم‌ترین مقدار خود را اختیار می‌کند ($z = 0$). با اعمال شرایط (7) و (8) بر معادله (5) تابع جریان به شکل زیر در می‌آید:

$$\psi = \sqrt{\frac{\mu_0 r_a J_{\max}}{k}} \tanh(z \sqrt{\mu_0 r_a k J_{\max}}) \quad (10)$$

¹ Anomalous transport mechanism

² Micro-instabilities

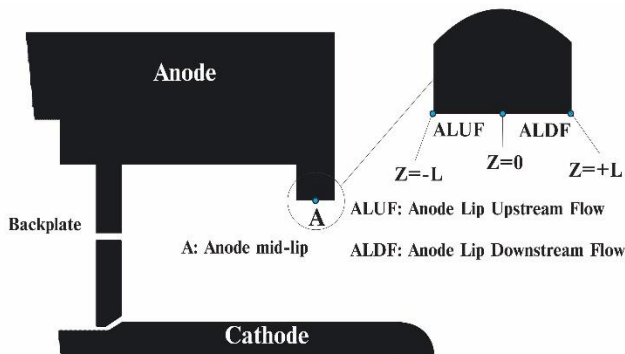


Fig. 2 Schematic of the Understudied Anode (reproduced from Ref. [3])

شکل 2 طرحواره آند تحت مطالعه (بازتولید شده از مرجع [3])

صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\vec{\nabla} \cdot (f\mathbf{v}) = -\frac{e}{m\beta}f \quad (19)$$

معادله فوق در صورتی که $f = 0$ باشد، برقرار است. در این صورت داریم

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial r} \quad (20)$$

با جایگذاری معادله (20) در معادلات (16) و (17) و سپس انتگرال گیری از مجموع دو معادله به دست آمده، معادله زیر حاصل می‌شود

$$\frac{m}{e}(u^2 + w^2) = -\frac{2k_B T}{e} \ln n + 2\phi + \int (wB_\theta dr - uB_\theta dz) - \frac{1}{\beta} \int (wdz + udr) + c \quad (21)$$

که در آن c ثابت معادله انتگرال می‌باشد. با استفاده از قضیه گرین، انتگرال‌های اول و دوم در سمت راست معادله (21) به ترتیب براساس معادلات (4) و (20) حذف می‌شوند. با توجه به تعریف اندازه چگالی جریان در ناحیه غلاف

$$J_{sh} = en\sqrt{u^2 + w^2} \quad (22)$$

معادله (21) به شکل زیر در می‌آید.

$$\frac{J_{sh}^2}{(en)^2} = -\frac{2k_B T}{m} \ln n + \frac{2e}{m} \phi + c \quad (23)$$

ثابت c برحسب این واقعیت که کمینه افت آند ($\Phi_{min} = \phi_{min}$) در جایی که مقدار چگالی جریان الکتریکی بیشینه می‌باشد رخ می‌دهد، قابل محاسبه می‌باشد. در نتیجه، معادله (23) به فرم زیر بازنویسی می‌شود.

$$J_{sh} = en_0 \exp\left(-\frac{e\phi}{k_B T}\right) \times \sqrt{\left(\frac{J_{max}}{en_0}\right)^2 \exp\left(\frac{2e\phi_{min}}{k_B T}\right) + \frac{4e}{m}(\phi - \phi_{min})} \quad (24)$$

معادله (24) توصیف کننده رابطه بین پتانسیل الکتریکی و چگالی جریان الکتریکی در ناحیه غلاف آند است. مقدار پتانسیل الکتریکی در طول لبه آند را می‌توان با به کارگیری معادله پواسون به دست آورد.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{e}{\epsilon_0} n_0 \exp\left(-\frac{e\phi}{k_B T}\right) \quad (25)$$

با استفاده از شرط $\phi = \phi_{min}$ و $\partial\phi/\partial z = 0$ در $z = 0$ و انتگرال گیری از معادله (25) رابطه زیر برای تعیین مقادیر پتانسیل الکتریکی حاصل می‌شود

$$\phi = \phi_{min} + \frac{2k_B T}{e} \ln \left(\cosh \left[\exp\left(-\frac{e\phi_{min}}{2k_B T}\right) \frac{z}{\sqrt{2\lambda_D}} \right] \right) \quad (26)$$

با جایگذاری معادله (10) در معادله (6)، مقدار چگالی جریان از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$J(z) = J_{max} [1 - \tanh^2(z\sqrt{\mu_0 r_a k J_{max}})] \quad (11)$$

به منظور افزایش سازگاری نتایج تحلیلی با داده‌های تجربی، پارامتر k برحسب J_{min} و J_{max} که به ترتیب برابر با مقدار چگالی جریان الکتریکی در پایین دست و بالادست لبه آند ($z = \pm L$) است (شکل 2)، قابل محاسبه می‌باشد. بر این اساس معادله (11) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$J(z) = \frac{J_{max}}{\cosh^2 \left[\frac{z}{L} \tan^{-1} \left(1 - \frac{J_{min}}{J_{max}} \right) \right]} \quad (12)$$

با استفاده از قانون اهم و جایگذاری معادله (6) در آن، شدت میدان الکتریکی به صورت زیر قابل بیان است.

$$E(z) = \left| -\frac{\beta}{\mu_0 r_a^2} \psi \frac{d\psi}{dz} \right| \quad (13)$$

در نهایت، با جایگزینی معادله (10) در معادله (13) و انتگرال گیری از آن، پتانسیل الکتریکی زیرناحیه پلاسمای شبه خنثی (ϕ) به صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$\phi(z) = \frac{\beta \mu_0 L^2 J_{max}^2}{2 \left[\tan^{-1} \left(1 - \frac{J_{min}}{J_{max}} \right) \right]^2} \tanh^2 \left[\left(\frac{z}{L} \right) \tanh^{-1} \left(\sqrt{1 - \frac{J_{min}}{J_{max}}} \right) \right] \quad (14)$$

2-2- تحلیل زیرناحیه غلاف پلاسمای غیرخنثی

در ناحیه غلاف آند، اندازه چگالی تعداد ذرات الکترون بیش تر از چگالی تعداد ذرات یون‌ها می‌باشد. بنابراین، جریان الکتریکی عمدتاً ناشی از شار الکترون‌ها است [1]. علاوه براین، فرض می‌شود که الکترون دارای توزیع ماکسول بوده و می‌توان از رابطه تعادلی بولتزمن برای محاسبه چگالی استفاده کرد [3]:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{e\phi}{k_B T}\right) \quad (15)$$

که n_0 چگالی تعداد ذرات الکترون در لبه غلاف می‌باشد. بنابراین، تحت شرایط ذکر شده، مولفه‌های معادله اندازه حرکت دوبعدی جریان الکترون مغناطیسی شده پایا در زیرناحیه غلاف به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد [11]:

$$mn \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -k_B T \frac{\partial n}{\partial r} + en \frac{\partial \phi}{\partial r} + enwB_\theta - mvnu \quad (16)$$

$$mn \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -k_B T \frac{\partial n}{\partial z} + en \frac{\partial \phi}{\partial z} - enuB_\theta - mvnw \quad (17)$$

در معادلات فوق، دمای الکترون ثابت فرض می‌شود. با مشتق گیری از معادلات (16) و (17) در راستای z و r و سپس کم کردن دو معادله به دست آمده از یکدیگر، معادله زیر حاصل خواهد شد:

$$\frac{m}{e} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] = \left[\frac{\partial(wB_\theta)}{\partial z} + \frac{\partial(UB_\theta)}{\partial r} \right] - \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (18)$$

به طور کلی ضخامت زیرناحیه غلاف در حدود چند ده میکرومتر می‌باشد [3]. بنابراین، این ناحیه به عنوان لایه‌ای بسیار نازک در نظر گرفته می‌شود و می‌توان فرض کرد که $r^{-1} \partial(uB_\theta)/\partial r \approx \partial(uB_\theta)/\partial r$ از این رو، اولین عبارت در سمت راست معادله (18) با توجه به معادله (4) حذف می‌گردد. با تعریف $\vec{\nabla} = [\partial/\partial r, 0, \partial/\partial z]$ و $f = \partial u/\partial z - \partial w/\partial r$ معادله (18) به

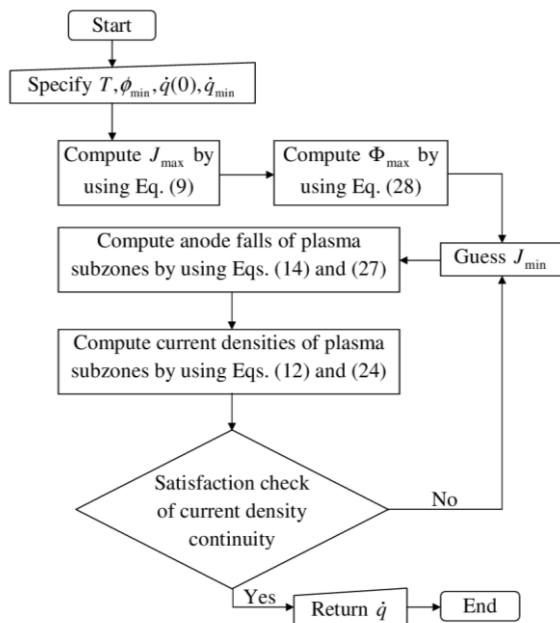


Fig. 3 Schematic flowchart describing the solution algorithm

شکل 3 نمودار روندنمای فرآیند حل

جنس کاتد از تنگستن بوده و دارای طول 10 سانتی متر و قطر 1.8 سانتی متر می باشد. توزیع شار حرارتی در امتداد لبه آند در "شکل 4" و "شکل 5" قابل مشاهده می باشد. در این نمودار، طول لبه آند بر محور افقی نگاشت شده اند. بر این اساس، مکان های 0.008- و 0.008+ متر بر روی نمودار به ترتیب نشان دهنده گوشه بالادستی و پائین دستی لبه آند و نقطه صفر وسط لبه آند می باشند. داده های تجربی توسط مجموعه ای از ترموکوپل های تعبیه شده بر دیواره آند اندازه گیری شده اند. نتایج تحلیلی به دست آمده تطابق خوبی با مقادیر اندازه گیری شده دارند. در جریان تخلیه الکتریکی 8 کیلوآمپر با دبی های جرمی 4 و 24 گرم بر ثانیه، مقادیر بیشینه شار حرارتی در وسط لبه آند به ترتیب در حدود 1350 و 1490 وات بر سانتی مترمربع می باشند. مقادیر مذکور در گوشه بالادست لبه آند به 480 و 400 وات بر سانتی مترمربع و در گوشه پایین دست لبه آند به 640 و 660 وات بر سانتی مترمربع کاهش می یابند. همان طور که ملاحظه می شود اختلاف مقادیر به دست آمده با داده های تجربی در لبه پایین دست آند در مقایسه با لبه بالادست آند کمتر بوده و نتایج تحلیلی کاملاً در محدوده نوار خطای² داده های تجربی قرار گرفته اند. علت اختلاف مشاهده شده در بخش بالادست لبه آند به این دلیل است که مقدار عدد رینولدز مغناطیسی برخلاف فرضیات صورت گرفته در بخش 1-2 اندکی بیش تر از 0.1 (حدود 0.2 تا 0.3) به دست می آید. تحت این شرایط به دلیل در نظر نگرفتن سهم جابه جایی در معادله میدان مغناطیسی، گرادیان خطوط میدان مغناطیسی نسبتاً شدیدتر شده و این به معنای بزرگ تر شدن مقادیر چگالی جریان الکتریکی است. بنابراین، ارضای شرط پیوستگی برای مقادیر بزرگ تر جریان نیازمند برقراری میدان الکتریکی قوی تر در ناحیه غلاف بوده که به تبع آن افت ولتاژ افزایش بیش تری خواهد داشت. در نتیجه مقادیر شار حرارتی در بخشی از بالادست لبه آند بیش تر از مقادیر تجربی پیش بینی شده است. با این وجود، نتایج تحلیلی روند صعودی شار حرارتی در ناحیه مذکور را به خوبی نشان می دهد.

که در آن λ_D طول دبی¹ می باشد و مقدار آن نوعاً از مرتبه 1 میکرومتر است [3]. به منظور افزایش تطابق نتایج تحلیلی با داده های تجربی، مقدار طول دبی برحسب Φ_{max} و Φ_{min} (که به ترتیب میزان افت آند در گوشه پایین دست و بالادست لبه آند $z = \pm L$ می باشد) قابل محاسبه است. بر این اساس معادله (26) به فرم زیر بازنویسی می شود:

$$\phi = \phi_{min} + \frac{2k_B T}{e} \ln \left(\cosh \left[\left(\frac{z}{L} \right) \tanh^{-1} \sqrt{1 - \exp \left(-\frac{e \Delta \phi}{k_B T} \right)} \right] \right) \quad (27)$$

در معادله (27)، $\Delta \phi = \Phi_{max} - \phi_{min} - \phi(\pm L)$ است. با استفاده از معادله (3)، Φ_{max} به فرم زیر محاسبه می شود:

$$\Phi_{max} = \frac{\dot{q}_{min}}{J_{min}} - \left(\omega + \frac{5 k_B T}{2 e} \right) \quad (28)$$

که در آن $\dot{q}_{min}$ شار حرارتی در گوشه پایین دست و بالادست لبه آند می باشد. در نهایت، چگالی جریان الکتریکی در طول لبه آند با جایگذاری معادله (27) در معادله (24) بدست می آید.

3-2- الگوریتم حل

با توجه به مباحث بیان شده در بخش قبلی، فرآیند حل جهت تعیین شار حرارتی آند به صورت ذیل می باشد:

- 1- مقادیر $\dot{q}_{min}$ ، $\dot{q}(0)$ ، Φ_{min} (به عنوان شروط مرزی) و T با استفاده از داده های تجربی تعیین شده و سپس J_{max} توسط معادله (9) محاسبه می شود.
- 2- مقدار J_{min} را حدس زده و سپس Φ_{max} با استفاده از معادله (28) محاسبه می گردد.
- 3- افت های پتانسیل الکتریکی در زیر نواحی پلاسمای شبه خنثی و غلاف آند به ترتیب با استفاده از معادلات (14) و (27) به دست می آیند.
- 4- به منظور ارضای شرط پیوستگی چگالی جریان الکتریکی، توزیع چگالی جریان در ناحیه پلاسمای شبه خنثی که از معادله (12) به دست آمده باید با مقدار آن در زیر ناحیه غلاف که از معادله (24) حاصل شده، برابر باشد.
- 5- در صورت عدم ارضای شرط پیوستگی چگالی جریان الکتریکی تمامی محاسبات از گام دوم به بعد تکرار خواهد شد. شار حرارتی در طول سطح آند با استفاده از معادله (3) محاسبه شده و افت کلی آند و چگالی جریان به ترتیب از گام های سوم و چهارم به دست می آید. روندنمای الگوریتم حل در "شکل 3" قابل مشاهده است.

3- نتایج و بحث

به منظور اعتبارسنجی الگوریتم تحلیلی توسعه داده شده، رانشگر آزمایشگاهی دانشگاه پرینستون با پیشرانه آرگون تحت شرایط کاری $I_{dis}^2 / m = 2.67, 16 \text{ (kA)}^2 \text{s/gr}$ که به ترتیب توسط صابر و گالیمور مورد مطالعه تجربی قرار گرفته، مدل سازی شده است. همان طور که در "شکل 2" ملاحظه می شود، رانشگر دارای محفظه تخلیه الکتریکی استوانه ای شکل از جنس آلومینیوم به طول 5 سانتی متر، قطر داخلی 15 سانتی متر و قطر خارجی 18.8 سانتی متر می باشد. سطح داخلی این محفظه توسط تیوبی از جنس پیرکس با ضخامت 1 سانتی متر پوشیده شده است. همچنین

² Error bar¹ Debye length

در رابطه فوق داریم:

$$U_B = \sqrt{\left(\frac{J_{\max}}{en_{sh}}\right)^2 \exp\left(\frac{2e\phi_{\min}}{k_B T}\right) - \frac{4e}{m} \phi_{\min}} \quad (30)$$

با تعریف سرعت موثر، $U = \sqrt{4e/m \phi + U_B^2}$ و استفاده از سرعت حرارتی الکترون، $U_T = \sqrt{2k_B T/m}$ ، معادله (29) به شکل زیر در می آید.

$$\Delta S'' = \frac{mn_0 U_B^2 (-\int g(U) \ln[g(U)] dU)}{2T (-g(U_B) \ln[g(U_B)])} \quad (31)$$

در رابطه بالا داریم:

$$g(U) = \exp\left(-\frac{U^2}{2U_T^2}\right) \quad (32)$$

که تابع چگالی احتمال بوده و دارای توزیع گاوسی (یا نرمال) است. این امر اثبات شده است که انتگرال موجود در رابطه (31) که در ترمودینامیک آماری موسوم به انتروپی تفاضلی² است زمانی بیشینه می گردد که تابع چگالی احتمال آن دارای توزیع نرمال باشد [12]. بنابراین می توان نتیجه

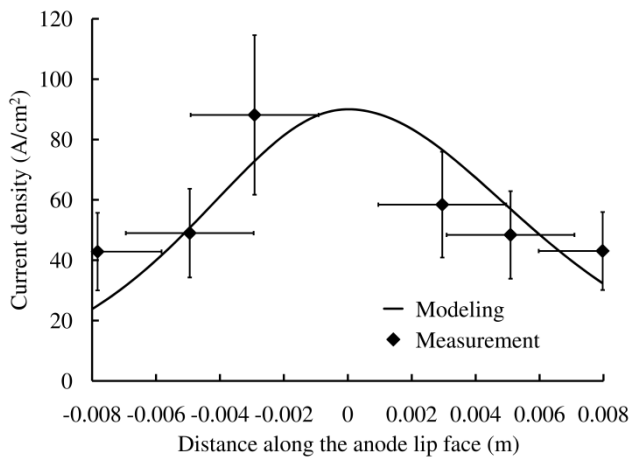


Fig. 6 Comparison of calculated and measured [3] current densities for $I_{dis}^2/\dot{m} = 16 \text{ (kA)}^2\text{s/gr}$

شکل 6 مقایسه چگالی جریان الکتریکی محاسبه شده با داده های تجربی [3] برای $I_{dis}^2/\dot{m} = 16 \text{ (kA)}^2\text{s/gr}$

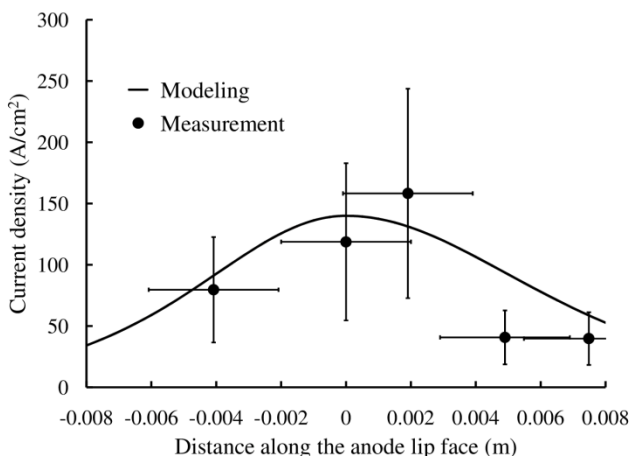


Fig. 7 Comparison of calculated and measured [5] current densities for $I_{dis}^2/\dot{m} = 2.67 \text{ (kA)}^2\text{s/gr}$

شکل 7 مقایسه چگالی جریان الکتریکی محاسبه شده با داده های تجربی [5] برای $I_{dis}^2/\dot{m} = 2.67 \text{ (kA)}^2\text{s/gr}$

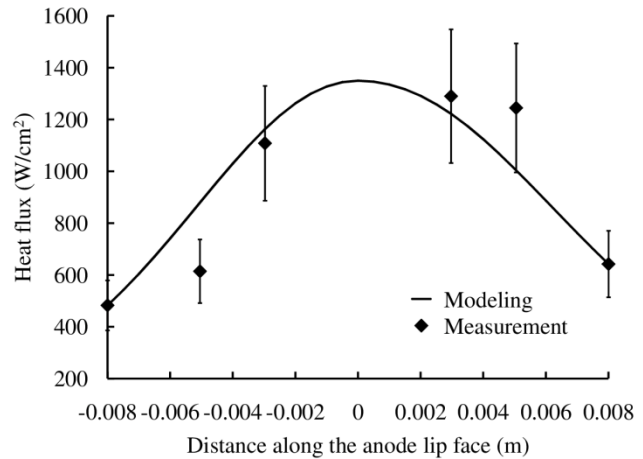


Fig. 4 Comparison of calculated and measured [3] heat fluxes for $I_{dis}^2/\dot{m} = 16 \text{ (kA)}^2\text{s/gr}$

شکل 4 مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با داده های تجربی [3] برای $I_{dis}^2/\dot{m} = 16 \text{ (kA)}^2\text{s/gr}$

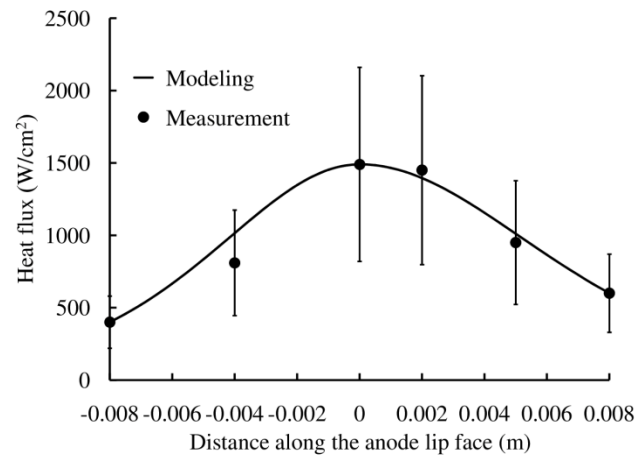


Fig. 5 Comparison of calculated and measured [5] heat fluxes for $I_{dis}^2/\dot{m} = 2.67 \text{ (kA)}^2\text{s/gr}$

شکل 5 مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با داده های تجربی [5] برای $I_{dis}^2/\dot{m} = 2.67 \text{ (kA)}^2\text{s/gr}$

همان طور که مشاهده شد، شار حرارتی در وسط لبه آند جایی که چگالی جریان به دست آمده در "شکل 6" و "شکل 7" بیشینه شده، بیش ترین مقدار خود را اختیار کرده است. چگالی جریان محاسبه شده سازگاری خوبی با مقادیر اندازه گیری شده داشته و در محدوده داده های تجربی قرار دارد. در دی های جرمی 4 و 24 گرم بر ثانیه، چگالی جریان الکتریکی محاسبه شده در گوشه بالادست لبه آند به ترتیب برابر با 24 و 33 آمپر بر سانتی متر مربع می باشد. این مقادیر در وسط لبه آند به 90 و 140 آمپر بر سانتی متر مربع افزایش یافته و سپس در گوشه پایین دست لبه آند به 32 و 53 آمپر بر سانتی متر مربع کاهش می یابند. ملاحظه می شود که نمودار چگالی جریان الکتریکی به صورت قله ای¹ است. برای یافتن دلیل این امر، می توان قانون دوم ترمودینامیک را برای ناحیه غلاف به کار بست. بر این اساس، با استفاده از معادله (24)، نرخ تولید شار انتروپی $(\Delta S'' = \int T^{-1} J d\phi)$ ، به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\Delta S'' = \frac{en_0}{T} \int \exp\left(-\frac{e\phi}{k_B T}\right) \sqrt{\frac{4e}{m} \phi + U_B^2} d\phi \quad (29)$$

² Differential entropy

¹ Peak- shaped

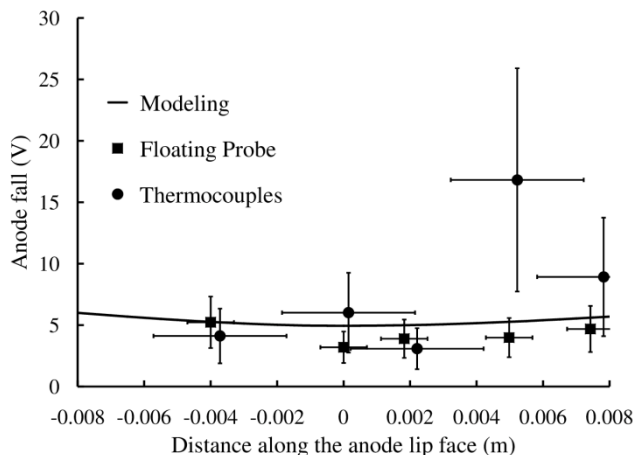


Fig. 9 Comparison of calculated and measured [5] heat fluxes for $I_{dis}^2/m = 2.67 \text{ (kA)}^2\text{s/gr}$

شکل 9 مقایسه افت ولتاژ آند محاسبه شده با داده‌های تجربی [5] برای $I_{dis}^2/m = 2.67 \text{ (kA)}^2\text{s/gr}$

آند با در نظر گرفتن زیر نواحی غیرخنثی و شبه‌خنثی ارائه شد. با به کارگیری مدل ارائه شده، فرآیند الکتروگرایی آند مربوط به رانشگر آزمایشگاهی دانشگاه پرینستون مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. شار حرارتی محاسبه شده تطابق خوبی با داده‌های تجربی نشان داد و در وسط لبه آند جایی که چگالی جریان الکتریکی بیشینه شد، مقدار حداکثر خود را پیدا کرد. اختلاف اندک بین نتایج تحلیلی و تجربی با بررسی فرضیات اعمال شده و مکانیزم‌های تولید افت آند توجیه شدند. هم‌چنین نتایج به‌دست آمده نشان دادند که با افزایش (کاهش) چگالی جریان الکتریکی در امتداد لبه آند، افت ولتاژ کاهش (افزایش) یافت. لذا مقاومت تفاضلی جریان پلازما که به صورت مشتق افت آند به چگالی جریان الکتریکی تعریف می‌شود، منفی است. دلیل این موضوع این است که توزیع ماکسول-بولتزمن الکترون‌ها منجر به توزیع قله‌ای شکل چگالی جریان الکتریکی می‌شود که به تبع آن با ایجاد یک تابع چگالی احتمال گاوسی برای سرعت موثر، تولید آنتروپی بیشینه می‌شود. تحت این شرایط توزیع افت ولتاژ دره‌ای شکل شده و دارای نقطه کمینه می‌گردد. از این‌رو، در نزدیکی وسط لبه آند، شار الکترون موردنیاز عمده‌تاً بدلیل افزایش شار حرارتی تامین می‌گردد. در حالی که در نزدیکی گوشه‌های لبه آند، تامین شار الکترون موردنیاز مبتنی است بر افزایش میدان الکتریکی و شتابدهی الکترون‌ها که در نتیجه افت ولتاژ در این نواحی افزایش می‌یابد.

اگرچه با توسعه مدل تحلیلی ارائه شده، جزئیات فرآیند الکتروگرایی آند به خوبی تجزیه و تحلیل شد اما همان‌طور که پیش‌تر اشاره گردید، اثرات فرآیند یونیزاسیون در مدل بیان شده موضوعی است که می‌تواند در مطالعات آتی مدنظر قرار بگیرد. هم‌چنین با در نظر گرفتن اثرات پدیده گرماییون³ در مدل ارائه شده، می‌توان الگوریتم مذکور را برای مطالعه مشخصه‌های الکتروگرایی الکتروود کاند استفاده کرد.

5- فهرست علائم

B	بردار میدان مغناطیسی (T)
e	بار الکتریکی الکترون ($1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$)
E	بزرگی میدان الکتریکی (Vm^{-1})
J	بردار چگالی جریان الکتریکی (Am^{-2})
L	نیمه طول لبه آند (m)

³ Thermionic effect

گرفت که طبیعت زیرناحیه غلاف به‌گونه‌ای رفتار می‌کند که با قله‌ای شکل شدن چگالی جریان الکتریکی، تابع چگالی احتمال سرعت موثر دارای توزیع گاوسی شده و در نتیجه تولید آنتروپی بیشینه گردد.

در "شکل 8" و "شکل 9" تغییرات افت آند در امتداد لبه آند با مقادیر اندازه‌گیری شده توسط سنجه الکتریکی و ترموکوپل، مقایسه شده است. نتایج تحلیلی به‌دست آمده سازگاری خوبی با نتایج تجربی دارند. مقدار کمینه افت ولتاژ به‌دست آمده به ازای دبی‌های جرمی 4 و 24 گرم بر ثانیه به ترتیب برابر 5.8 و 4.9 ولت می‌باشد. این مقادیر در گوشه بالادست لبه آند به 11 و 6 ولت و در گوشه پایین‌دست لبه آند به 8.2 و 5.7 ولت افزایش می‌یابند. ملاحظه می‌شود که در جریان تخلیه الکتریکی یکسان، در دبی جرمی کمتر، مقادیر تحلیلی افت آند بیش‌تر از مقادیر تجربی آن پیش‌بینی شده‌اند. دلیل اول این موضوع می‌تواند مربوط به مقادیر بزرگ عدد رینولدز مغناطیسی باشد که پیش‌تر بیان گردید. دلیل دوم این است که در دبی جرمی کمتر، مقادیر چگالی تعداد ذرات الکترون در مجاورت آند از شار الکترون تصادفی¹ کوچک‌تر است. از این‌رو، برای بقای شرط پیوستگی جریان الکتریکی، یک میدان الکتریکی در نزدیکی آند به‌وجود می‌آید تا شار الکترون را توسط دو مکانیزم مختلف در سطح مناسبی حفظ کند. در مکانیزم اول، به‌دلیل افزایش میدان الکتریکی در مجاورت سطح آند مقدار حرارت اهمی زیاد شده و در نتیجه نرخ یونیزاسیون بالا رفته و سطح تولید الکترون به حدی می‌رسد که شار الکترون موردنیاز مجدداً به مقدار مکفی برسد. در مکانیزم دوم، جریان الکتریکی براساس هدایت الکتریکی مبتنی بر پدیده انتقال نفوذ غالب² صورت می‌گیرد. در این مکانیزم با نفوذ الکترون‌ها به ناحیه کم چگالی، کمبود شار الکترون تصادفی مرتفع می‌گردد. با توجه به این که در مدل تحلیلی ارائه شده، فرآیند یونیزاسیون در نظر گرفته نشده است، لذا افزایش در مقدار شار الکترون تنها براساس مکانیزم دوم صورت می‌گیرد. بنابراین، برای ارضای شرط پیوستگی جریان و تامین شار الکترون مورد نیاز، در حل تحلیلی میدان الکتریکی بزرگ‌تری تولید شده و در نتیجه مقدار افت ولتاژ آند در شرایط کم چگالی مقداری بیش‌تر از حالت واقعی پیش‌بینی می‌شود.

4- جمع‌بندی

الگوریتمی تحلیلی برای مطالعه مشخصه‌های جریان پلاسمای مجاور الکتروود

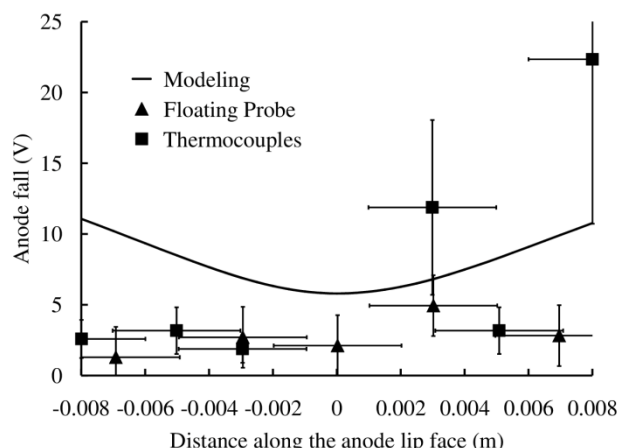


Fig. 8 Comparison of calculated and measured [3] anode falls for $I_{dis}^2/m = 16 \text{ (kA)}^2\text{s/gr}$

شکل 8 مقایسه افت ولتاژ آند محاسبه شده با داده‌های تجربی [3] برای $I_{dis}^2/m = 16 \text{ (kA)}^2\text{s/gr}$

¹ Random electron flux

² Diffusion-dominated-transportphenomenan

θ جهت محیطی

6- مراجع

- [1] R.C. Oberth, *Anode Phenomena in High-Current Discharges*, PhD Thesis, Princeton University, New Jersey, 1970.
- [2] M. Ahangar, *Numerical simulation of fluid flow in magnetoplasma dynamic thruster*, PhD Thesis, Department of Aerospace Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, 2015. (in Persian فارسی)
- [3] A.D. Gallimore, *Anode Power Deposition in Coaxial MPD Thrusters*, PhD Thesis, Princeton University, Princeton, New Jersey, 1992.
- [4] M. Ahangar, R. Ebrahimi, and M. Shams, Numerical Investigation of Plasma Behavior and Anode Sheath in a Magnetoplasma dynamic Thruster, *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 32, No. 2, pp. 420-430, 2016.
- [5] A.J. Saber, *Anode Power in a Quasi-Steady MPD Thruster*, PhD Thesis, Princeton University, New Jersey, 1974.
- [6] Choueiri, Anomalous resistivity and heating in current-driven plasma thrusters, *Physics of Plasmas*, Vol. 6, No. 5, pp. 2290-2306, 1999.
- [7] G. Caldo, E. Y. Choueiri, A. J. Kelly, R. G. Jahn, An MPD Code with Anomalous Transport, *22nd International Electric Propulsion Conference*, Viareggio, Italy, pp. 91-101, 1991.
- [8] K. Sankaran, *Simulation of Plasma Flows in Self-Field Lorentz Force Accelerators*, PhD Thesis, Princeton University, New Jersey, 2005.
- [9] M. Ahangar, R. Ebrahimi, M. Shams, Numerical Simulation of Non-Equilibrium Plasma Flow in a Cylindrical MPD Thruster Using a High-Order Flux-Difference Splitting Method, *Acta Astronautica*, Vol. 103, pp. 129-141, 2014.
- [10] I. Kimura, Current Distribution on the Electrodes of MPD Arcjets, *AIAA Journal*, Vol. 20, No. 7, pp. 889-892, 1982.
- [11] M. Mitchner, C.H. Kruger, *Partially Ionized Gases*, Original Edition, pp. 180-181, New York: Wiley, 1973.
- [12] D. Arovas, *Lecture notes on thermodynamics and statistical mechanics*, Accessed on 14 November 2013; <http://physics.ucsd.edu/students/courses/spring2010/physics210a/lectures.html>.

I_{dis}	جریان تخلیه کل (kA)
k_B	ثابت بولتزمن ($1.381 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$)
$\dot{m}$	نرخ جریان جرمی پیشران (grs^{-1})
m	جرم الکترون ($9.1094 \times 10^{-31} \text{ kg}$)
n	چگالی تعداد ذرات الکترون (m^{-3})
$\dot{q}$	شار حرارتی (wm^{-2})
r_a	شعاع آند (m)
T	دمای الکترون (K)
u	سرعت شعاعی (ms^{-1})
w	سرعت محوری (ms^{-1})
علایم یونانی	
ϵ_0	ثابت گذردهی الکتریکی خلاء ($8.85 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$)
μ_0	نفوذپذیری مغناطیسی خلا ($4\pi \times 10^{-7} \text{ VsA}^{-1}\text{m}^{-1}$)
φ	افت ولتاژ پلاسمای شبه خنثی (V)
ϕ	افت ولتاژ ناحیه غلاف (V)
Φ	افت آند (V)
χ	تابع کار (V)
زیرنویس‌ها	
Sh	غلاف