مجله مهندسی مکانیک مدرس، تیر 1394، دوره 15، شماره 4، ص‌ص 81-92

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

کارسختی تک‌کریستال‌های مکعبی با وجوه مرکزپر (FCC) در تئوری پلاستیسیته‌ی کریستالی

علی شفیعی[1]، کورش حسن‌پور[2*]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

2- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان، اصفهان

* اصفهان، صندوق پستی 73744-86746، hasanpour@eng.ui.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 17 مهر 1393
پذیرش: 04 بهمن 1393
ارائه در سایت: 02 اسفند 1393

کلید واژگان:
پلاستیسیته‌ی کریستالی
تک‌کریستال
شبکه‌ی کریستالی FCC
کارسختی

چکیده

کاربرد گسترده فلزات در سازه‌های مهندسی سبب گردیده است که بررسی فرآیندهای شکل‌دهی فلزات همواره در اولویت پژوهش‌های حوزه‌ی مکانیک جامدات قرار داشته باشد. در این میان تئوری‌های فیزیکی به سبب ویژگی‌های منحصر به‌فرد، از اهمیت بالایی برخوردار هستند. تئوری پلاستیسیته‌ی کریستالی از جمله‌ی این تئوری‌ها است. این تئوری با مدل کردن مکانیزم‌های تغییرشکل پلاستیک در ریزساختار مواد کریستالی (مانند فلزات)، تغییرشکل و تحول بافت این مواد را پیش‌بینی می‌کند. ارتباط با ریزساختار ماده سبب می‌گردد که این تئوری توانایی پیش‌بینی رفتار ناهمسانگرد تک‌کریستال‌ها را داشته و از طرفی پیش‌بینی برخی پدیده‌ها در پلی‌کریستال‌ها که خود توده‌ای از تک‌کریستال‌ها هستند، تنها با چنین تئوری‌هایی امکان‌پذیر است. ارائه‌ی یک مدل کارسختی مناسب که رفتار غیرهمسانگرد تک‌کریستال‌ها را پوشش دهد، از اهمیت ویژه‌ای در این تئوری برخوردار است. در پژوهش حاضر ابتدا مبانی تئوری پلاستیسیته‌ی کریستالی بیان گردیده و سپس با معرفی چند مدل کارسختی پرکاربرد و بررسی‌های آزمایشگاهی، مدل کارسختی جدیدی که نسبت به مدل‌های پیشین انطباق بیشتری با نتایج تجربی دارد، ارائه می‌گردد. حوزه‌ی بررسی‌های این پژوهش مختص مواد کریستالی با شبکه‌ی FCC است. هرچند بخشی از مطالب ارائه شده قابل تعمیم به سایر ساختارها نیز هست.

FCC Crystals Work Hardening in Crystal Plasticity Theory

Ali Shafiei, Kurosh Hasanpour*

Department of Mechanical Engineering, Engineering Faculty, University of Isfahan, Isfahan, Iran.
* P.O.B. 86746-73744, Isfahan, Iran, hasanpour@eng.ui.ac.ir

Article Information

Original Research Paper
Received 09 October 2014
Accepted 24 January 2015
Available Online 21 February 2015

Keywords:
Crystal plasticity
Single crystal
FCC structure
Work hardening

Abstract

Increasing usage of metals in engineering structures has made the metal forming process superior in the solid mechanic research. Meanwhile, the physical theories are of considerable significance due to their individual features. The crystal plasticity theory is one of these theories. This theory predicts the texture evolution and deformation of these materials by modeling the plastic deformation mechanisms of crystal material's micro-structure (such as metals). Connecting with micro-structure enables this theory to predict the anisotropy of single crystals, and also the prediction of some phenomena in polycrystals which are aggregates of single crystals, is possible. Presenting a suitable work hardening model which contains the anisotropy behaviors of single-crystals is very important. In this paper, first, the principles of crystal plasticity are explained, then by evaluating several experimental results and the most commonly used work hardening models, a new work hardening model will be presented. This model adapts better with experimental results, compared to the previous models. The scope of this research is specifically for crystal materials with FCC structure, nevertheless, some parts of this research are applicable to the other structures.

1- مقدمه

گسترش تئوری پلاستیسیته‌ی کریستالی و استفاده از آن در پیش‌بینی رفتار تک‌کریستال‌ها (تغییرشکل، آسیب، شکست، خستگی و خزش) به‌طور جدی و فعال، در تحقیقات پیگیری می‌شود [1-5]. این امر به سبب به‌کارگیری تک‌کریستال‌ها در برخی کاربردهای مهندسی به منظور پرهیز از حضور مرزدانه‌ها است. به عنوان نمونه، جهت جلوگیری از خزش در دماهای بالا که علت اصلی آن مرزدانه‌ها است، پره‌های توربین‌های گازی عمدتاً از تک‌کریستال ساخته می‌شوند. دلیل دیگر، توانایی این تئوری در تشخیص میکرومکانیزم‌های مسئول ایجاد پدیده‌های ماکروسکوپیک در تغییرشکل پلاستیک است، که از آن جمله می‌توان به محلی شدن لغزش در تک‌کریستال‌ها و یا دانه‌های یک پلی‌کریستال اشاره نمود. پیش‌بینی چرخش دانه‌های پلی‌کریستال و تحول بافت ماده در یک فرآیند پلاستیک و ناهمسانگردی ایجاد شده به سبب آن، از دیگر دلایل استفاده از این تئوری است.

از طرف دیگر در بررسی تغییرشکل‌های بسیار کوچک در سطح یک پلی‌کریستال، به جهت روبرو بودن با خواص ناهمسانگرد دانه‌ها، از تئوری

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
A. Shafiei, K. Hasanpour, FCC Crystals Work Hardening in Crystal Plasticity Theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 4, pp. 81-92, 2015 (In Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.7.9]

پلاستیسیته‌ی کریستالی بهره برده می‌شود. به عنوان نمونه در استخراج خواص مکانیکی دانه‌های یک پلی‌کریستال از آزمایش‌های فروروی میکرو[1] و فروروی نانو استفاده می‌گردد. در این آزمایش‌ها، میزان فروروی ابزار از مرتبه اندازه‌ی دانه‌های پلی‌کریستال است. سپس با استفاده از پارامترهای مختلف اندازه‌گیری شده، خواص مکانیکی دانه‌ها استخراج می‌گردد. تئوری پلاستیسیته‌ی کریستالی در شبیه‌سازی چنین فرآیندهایی توانمند است [6].

بررسی کارسختی سیستم‌های لغزش در حین تغییرشکل پلاستیک و ارائه‌ی مدلی مناسب برای آن از اهمیت بالایی در تئوری پلاستیسیته‌ی کریستالی برخوردار و از دشوارترین مبحث‌های مربوط به این تئوری است. زیرا فعالیت هر سیستم لغزش بر سختی خود و سیستم‌های دیگر اثرگذار بوده و همچنین فرآیندی غیرهمسانگرد است. مدل‌های کارسختی در تئوری پلاستیسیته‌ی کریستالی به دو دسته فیزیکی و ریاضی تقسیم‌بندی می‌شوند. در مدل‌های فیزیکی، کارسختی بر اساس متغیرهایی از ریزساختار کریستال همچون انرژی نقص چیده شدن کریستال، چگالی نابجایی در سیستم‌های لغزش و... مدل می‌گردد. مدل‌های ارائه شده توسط سیگر [7]، باسینسکی [8] و هیرس [9] از این دست هستند.

اولین مدل ریاضی از کارسختی در سال 1934 توسط تیلور ارائه گردید [10]. او فرض کرد کارسختی سیستم‌های مختلف در حین تغییرشکل پلاستیک یکسان است (مدل کارسختی همسانگرد). کارسختی همسانگرد در پیش‌بینی فراجهش[2] ناتوان بود. این مشکل در مدل غیرهمسانگرد هاونر و شالابی برطرف گردید [11]. در مدل تک متغیره آن‌ها چرخش شبکه‌ی کریستال سبب ایجاد افزایشی شدیدتر در کارسختی پنهان[3] نسبت به خودسخت‌شوندگی[4] می‌شود، از این رو به آن مدل وابسته به چرخش نیز می‌گویند. کارسختی پنهان شدید و بیش از اندازه این مدل سبب شد که پیرس و همکارانش، اصلاحاتی را در آن انجام دهند [12]، هرچند همچنان کارسختی پنهان بیش از مقدار مشاهده شده در آزمایش‌ها بود. در سال 1983 آسارو مدلی مناسب‌تر ارائه نمود که در آن متغیری جهت تنظیم کارسختی پنهان وجود داشت [13]. این مدل به‌طور گسترده مورد توجه پژوهشگران قرار گرفت. در سال 1991 وو و بسنی با بررسی دقیق نتایج آزمایشگاهی پیشنهاد دادند که کارسختی پنهان بسیار کمتر از خودسخت‌شوندگی در نظر گرفته شود [14]. بسنی و وو بر این اساس و همچنین لحاظ کردن برهمکنش‌های مختلف بین سیستم‌های لغزش، مدل کارسختی خود را ارائه نمودند [15]. توانایی این مدل در پیش‌بینی رفتار تک‌کریستال‌ها (و نه پلی‌کریستال‌ها) مورد استقبال محققین قرار گرفت. یکی از پرکاربردترین مدل‌های ارائه شده در پیش‌بینی رفتار پلی‌کریستال‌ها نیز در سال 1992 توسط کالیدیندی و همکارانش ارائه گردید [16].

از جدیدترین مدل‌های ریاضی می‌توان به مدل ارائه شده توسط بویل در سال 2005 اشاره نمود که چندان مورد استقبال قرار نگرفت [17]. در این مدل نیز کارسختی پنهان بیشتر از خودسخت‌شونگی فرض شده است.

از آنجا که مدل بسنی و وو بر اساس فرضیات واقع‌بینانه‌تری ارائه گردیده است، در این پژوهش ابتدا این مدل مورد بررسی قرار گرفته و نتایج آن در شبیه‌سازی فرآیند کشش محوری و همچنین آزمون دوگانه با نتایج آزمایشگاهی مقایسه گردیده تا نقاط ضعف و قوت آن مشخص گردد. در ادامه با توجه به نقاط ضعف مدل بسنی و وو، مدلی مناسب‌تر، که انطباق بیشتری با نتایج آزمایشگاهی دارد، ارائه خواهد شد.

به سبب پیچیدگی رفتار مواد کریستالی در شرایط محیطی مختلف، فرض‌های محدودکننده و ساده شونده‌ای در این پژوهش در نظر گرفته شده است. از این رو تنها فرآیندهای پلاستیک فلزات چکش‌خوار با شبکه‌ی FCC که در دمای محیط و با نرخ ثابت شبه استاتیک رخ می‌دهد، مد نظر خواهد بود. از طرف دیگر با توجه به وجود نتایج آزمایشگاهی از مس خالص، بررسی‌ها و استنتاج‌ها بر روی این فلز انجام خواهد گرفت.

2- سینماتیک و سینتیک پلاستیسیته‌ی کریستالی

محیط کریستالی $\Omega \subset \mathcal{R}^3$ تحت تغییرشکل الاستوپلاستیک φ $(\varphi\colon \Omega \to \mathcal{R}^3)$ با گرادیان تغییرشکل $F = \partial_X \varphi(X)$ در نظر گرفته می‌شود. X مختصات نقاط مادی در هیئت مرجع است. گرادیان تغییرشکل کل (F) را می‌توان به دو بخش الاستیک (F^*) و پلاستیک (F^{p}) تجزیه ضربی نمود [18]. طبق رابطه (1) داریم:

$$F = F^* F^{\mathrm{p}} \tag{1}$$

در رابطه (1)، F^{p} دربرگیرنده لغزش صفحه‌های اتمی در کریستال و F^* اتساع الاستیک و چرخش شبکه را شامل می‌شود. تانسور گرادیان سرعت با استفاده از گرادیان تغییرشکل توسط رابطه (2) تعریف می‌گردد.

$$L = \dot{F} F^{-1} \tag{2}$$

گرادیان سرعت کل (L) را نیز می‌توان به دو بخش الاستیک (L^*) و پلاستیک (L^{p}) تجزیه جمعی کرد. جایگذاری رابطه (1) در رابطه (2) نتیجه می‌دهد:

$$L = \left(\dot{F}^* F^{\mathrm{p}} + F^* \dot{F}^{\mathrm{p}}\right) F^{\mathrm{p}-1} F^{*-1} = \dot{F}^* F^{*-1} + F^* \dot{F}^{\mathrm{p}} F^{\mathrm{p}-1} F^{*-1} \tag{3}$$

$$L^* = \dot{F}^* F^{*-1} \tag{4}$$

$$L^{\mathrm{p}} = F^* \dot{F}^{\mathrm{p}} F^{\mathrm{p}-1} F^{*-1} = F^* L_0^{\mathrm{p}} F^{*-1} \tag{5}$$

زیرنویس "0" در L_0^{p} نشان دهنده بیان گرادیان سرعت در هیئت میانی است. تانسور نرخ اتساع (D) و تانسور چرخش (W) به ترتیب، بخش متقارن و پادمتقارن تانسور L تعریف می‌گردند:

$$\begin{gathered} L = D + W \\ D = \mathrm{sym}(L), W = \mathrm{skw}(L) \end{gathered} \tag{6}$$

تانسورهای D و W را می‌توان به دو بخش الاستیک (D^* و W^*) و پلاستیک (D^{p} و W^{p}) تجزیه جمعی کرد. طبق رابطه (7) داریم:

$$\begin{gathered} D = D^* + D^{\mathrm{p}}, W = W^* + W^{\mathrm{p}} \\ D^* = \mathrm{sym}(L^*), D^{\mathrm{p}} = \mathrm{sym}(L^{\mathrm{p}}) \\ W^* = \mathrm{skw}(L^*), W^{\mathrm{p}} = \mathrm{skw}(L^{\mathrm{p}}) \end{gathered} \tag{7}$$

اگر γ^α میزان لغزش نسبی دو صفحه از سیستم لغزش α که به فاصله واحد از هم واقع شده‌اند باشد، با فرض تک لغزش در سیستم α، رابطه (8)، ارتباط بین γ^α و گرادیان تغییرشکل پلاستیک ناشی از تک لغزش سیستم α $(F^{\mathrm{p}\alpha})$ را بیان می‌کند.

$$F^{\mathrm{p}\alpha} = \mathrm{I} + \gamma^\alpha (s_0^\alpha \otimes m_0^\alpha) \tag{8}$$

در رابطه (8)، I ماتریس واحد، $\otimes$ ضرب دایادیک و دو بردار متعامد s_0^α و m_0^α به ترتیب بردارهای یکه در امتداد جهت لغزش و عمود بر صفحه لغزش سیستم α در هیئت مرجع می‌باشند. از آنجا که ارتباط گرادیان تغییرشکل پلاستیک کل با کرنش برشی (γ^α)، در حالت کلی (لغزش چندگانه) قابل بیان نیست، تانسور گرادیان سرعت پلاستیک، جهت استفاده در روابط متشکله به صورت تابعی از نرخ لغزش $(\dot{\gamma}^\alpha)$ محاسبه می‌گردد. مجدداً با فرض تک لغزش و با استفاده از رابطه (8) می‌توان نوشت:

$$\dot{F}^{\mathrm{p}\alpha} = \dot{\gamma}^\alpha (s_0^\alpha \otimes m_0^\alpha) \tag{9}$$

$$F^{\mathrm{p}\alpha^{-1}} = \mathrm{I} - \gamma^\alpha (s_0^\alpha \otimes m_0^\alpha) \tag{10}$$

آنگاه:

$$L_0^{\mathrm{p}\alpha} = \dot{F}^{\mathrm{p}\alpha} F^{\mathrm{p}\alpha^{-1}} = \dot{\gamma}^\alpha (s_0^\alpha \otimes m_0^\alpha) \tag{11}$$

1- Microindentation
2- Overshooting
3- Latent hardening
4- Self hardening

حال با استفاده از رابطه (11)، گرادیان سرعت کل در لغزش چندگانه قابل محاسبه است [13]:

$$L_0^{\mathrm{p}} = \dot{F}^{\mathrm{p}} F^{\mathrm{p}-1} = \sum_{\alpha}^{N} L_0^{\mathrm{p}\alpha} = \sum_{\alpha}^{N} \dot{\gamma}^{\alpha} S_0^{\alpha}$$
$$S_0^{\alpha} = s_0^{\alpha} \otimes m_0^{\alpha} \qquad (12)$$

در رابطه (12)، N تعداد سیستم‌های لغزش و S_0^α تانسور اشمید سیستم α در هیئت مرجع است. چرخش صلب شبکه‌ی کریستال سبب چرخش سیستم‌های لغزش می‌شود که باید در روابط لحاظ گردد. بردار جهت لغزش را می‌توان توسط F^* از هیئت مرجع (s_0^α) به هیئت جاری (s^α) منتقل نمود:

$$s^{\alpha} = F^{*} s_0^{\alpha} \qquad (13)$$

برای حفظ تعامد m^α بر صفحه لغزش، رابطه (14) ارائه گردیده است [13].

$$m^{\alpha} = m_0^{\alpha} F^{*-1} \qquad (14)$$

با استفاده از روابط (5)، (12)، (13) و (14) نتیجه می‌شود:

$$L^{\mathrm{p}} = \sum_{\alpha}^{N} \dot{\gamma}^{\alpha} S^{\alpha} \qquad (15)$$

در رابطه (15)، S^α تانسور اشمید در هیئت جاری است. با استفاده از روابط (7) و (15) تانسورهای نرخ اتساع پلاستیک و چرخش پلاستیک در هیئت جاری به دست می‌آید:

$$D^{\mathrm{p}} = \sum_{\alpha}^{N} \dot{\gamma}^{\alpha} P^{\alpha} \qquad (16)$$

$$W^{\mathrm{p}} = \sum_{\alpha}^{N} \dot{\gamma}^{\alpha} Q^{\alpha} \qquad (17)$$

$$P^{\alpha} = \mathrm{sym}(S^{\alpha}),\ Q^{\alpha} = \mathrm{skw}(S^{\alpha}) \qquad (18)$$

تانسورهای P^α و Q^α به ترتیب بخش متقارن و پادمتقارن تانسور اشمید (S^α) هستند.

هیل و رایس معادله ساختاری الاستیک یک تک‌کریستال در کرنش‌های بزرگ را به فرم رابطه (19) ارائه نمودند [19].

$$\overset{\circ}{\sigma}{}^{*} + \sigma(I:D^{*}) = \ell : D^{*} \qquad (19)$$

در رابطه (19) ℓ تانسور مرتبه چهارم مدول الاستیسیته و $\overset{\circ}{\sigma}{}^{*}$ نرخ یائومن تنش کوشی نسبت به دستگاه متصل به شبکه‌ی کریستال است.

$$\overset{\circ}{\sigma}{}^{*} = \dot{\sigma} - W^{*}\sigma + \sigma W^{*} \qquad (20)$$

با توجه به اینکه ساختار شبکه‌ی کریستال در حین تغییرشکل پلاستیک حفظ می‌شود، فرض بر این است که رابطه (20) در یک فرآیند الاستوپلاستیک همچنان برقرار باشد و از آنجا که تنش کوشی در دستگاه متصل به ماده بیان می‌گردد، لازم است ارتباط بین نرخ یائومن تنش کوشی نسبت به دستگاه‌های متصل به شبکه ($\overset{\circ}{\sigma}{}^{*}$) و متصل به ماده ($\overset{\circ}{\sigma}$) مشخص گردد. رابطه (21) این ارتباط را بیان می‌کند.

$$\overset{\circ}{\sigma}{}^{*} = \overset{\circ}{\sigma} + W^{\mathrm{p}}\sigma - \sigma W^{\mathrm{p}} \qquad (21)$$

با تعریف $J=\det(F)$ تنش اشمید در سیستم لغزش α از رابطه (22) قابل محاسبه است.

$$\tau^{\alpha} = J\sigma : S^{\alpha} \qquad (22)$$

2-1- نمایش چرخش شبکه کریستال

برای نمایش چرخش شبکه کریستال و جهات بارگذاری در فضای سه‌بعدی از طرح استریوگرافیک استفاده می‌گردد. به سبب تشابه رفتار تک‌کریستال‌ها در بارگذاری محوری در ناحیه‌های 24 گانه طرح استریوگرافیک، غالباً بررسی‌ها در ناحیه‌ای با رئوس [011]، [$11\bar{1}$] و [001] و یا [110]، [111] و [100] به عنوان مثلث استاندارد انجام می‌شود [20].

2-2- قانون جریان

آسارو و نیدلمن جهت برطرف نمودن غیریکتا بودن پاسخ مدل مستقل نرخی در لغزش‌های چندگانه، مدل وابسته نرخی (ویسکوپلاستیک) به شکل قانون توانی (رابطه (23)) را پیشنهاد نمودند [21]. در این مدل هیچ سطح تسلیمی وجود نداشته و ضابطه بارگذاری-باربرداری نیز تعریف نمی‌گردد، بلکه لغزش در هر تنش غیر صفری رخ خواهد داد، هرچند نرخ لغزش در تنش‌های پایین بسیار ناچیز است. از مزایای این مدل به غیر از یکتا بودن پاسخ در لغزش‌های چندگانه، می‌توان به حذف فرآیند تکرار برای تعیین سیستم‌های لغزش فعال و همچنین پایداری رفتار ماده اشاره کرد.

$$\dot{\gamma}^{\alpha} = \dot{\gamma}_0 \left|\frac{\tau^{\alpha}}{\tau_{\mathrm{cr}}^{\alpha}}\right|^{n} \mathrm{sign}(\tau^{\alpha}) \qquad (23)$$

ثابت‌های $\dot{\gamma}_0$ و n به ترتیب نرخ لغزش مرجع و پارامتر حساسیت نرخ هستند. اگر n به بی‌نهایت میل کند، مدل مستقل نرخی خواهد شد.

2-3- مدل‌های کارسختی

تنش جریان ($\tau_{\mathrm{cr}}^\alpha$) در هر سیستم لغزش با ادامه تغییرشکل پلاستیک به سبب کارسختی افزایش می‌یابد. با فعالیت بیش از یک سیستم لغزش، کارسختی در هر سیستم، تابعی از لغزش در تمام سیستم‌های فعال خواهد بود. رابطه (24) فرم کلی پذیرفته شده برای کارسختی تک‌کریستال‌ها را نشان می‌دهد [22].

$$\dot{\tau}_{\mathrm{cr}}^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N} h^{\alpha\beta} |\dot{\gamma}^{\beta}| \qquad (24)$$

ماتریس $h^{\alpha\beta}$ مدول (نرخ) کارسختی و خود تابعی از تغییرشکل پلاستیک است. مدول کارسختی تأثیر فعالیت سیستم β بر کارسختی سیستم α را بیان می‌کند. درایه‌های قطری ($\alpha = \beta$)، مربوط به خودسخت‌شوندگی و درایه‌های غیر قطری ($\alpha \neq \beta$)، مربوط به کارسختی پنهان هستند. مدول کارسختی عموماً به فرم رابطه (25) در نظر گرفته می‌شود.

$$h^{\alpha\beta} = q^{\alpha\beta} h^{\beta} \qquad \text{(بدون جمع‌بندی روی } \alpha \text{ و } \beta\text{)} \qquad (25)$$

در رابطه (25)، h^β نرخ کارسختی تک‌لغزش و تنها تابع لغزش در سیستم β و ماتریس $q^{\alpha\beta}$ ماتریس کارسختی پنهان است. عموماً مدل‌های کارسختی مختلف بر مبنای رابطه (24) ارائه می‌گردند و تفاوت آن‌ها تنها در تعریف مدول کارسختی است.

2-4- مدل کارسختی بسنی و وو

بسنی و وو مدل سه ناحیه‌ای خود را بر اساس فرضیات حاصل از بررسی نتایج آزمایشگاهی تک‌کریستال مس در مرجع [14]، ارائه نمودند [15]. در این مدل، مدول کارسختی بدین صورت تعریف می‌گردد:

$$h^{\alpha} = F^{\alpha}(\bar{\gamma}^{\alpha}) G^{\alpha}(\{\bar{\gamma}^{\beta}; \beta = 1, \dots, N; \beta \neq \alpha\}) \qquad (26)$$

$$F^{\alpha} = (h_0 - h_{\mathrm{s}}) \mathrm{sech}^2\left(\frac{h_0 - h_{\mathrm{s}}}{\tau_{\mathrm{I}} - \tau_0} \bar{\gamma}^{\alpha}\right) + h_{\mathrm{s}} \qquad (27)$$

$$G^{\alpha} = 1 + \sum_{\beta=1\neq\alpha}^{N} f^{\alpha\beta} \tanh\left(\frac{\bar{\gamma}^{\beta}}{\gamma_{\mathrm{g}}}\right) \qquad (28)$$

$$h^{\alpha\beta} = q h^{\beta}\ \ \alpha \neq \beta,\ (q \ll 1) \qquad (29)$$

در تابع F، پارامترهای h_{s} و τ_{I} به ترتیب شیب ناحیه خطی لغزش‌آسان و استحکام برشی در آغاز لغزش‌آسان و $\bar{\gamma}^\alpha$ کرنش برشی انباشته روی سیستم α است. γ_{g} در تابع G مقدار موثر لغزش در سیستم β جهت اعمال اثر بر سیستم α و $f^{\alpha\beta}$ ماتریس برهم‌کنش است که درایه‌های آن وابسته به وضعیت (نوع برخوردگاه) سیستم‌های α و β نسبت به یکدیگر است. ماتریس $f^{\alpha\beta}$ برای مواد FCC که دوازده سیستم لغزش با پنج نوع برهم‌کنش مجزا را

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.7.9]

شامل می‌شوند، بدون برخوردگاه[1](*N*)، برخوردگاه هیرس[2](*H*)، برخوردگاه هم‌صفحه[3](*C*)، برخوردگاه گلایسیل[4](G) و برخوردگاه سسیل[5](S)، در رابطه (30) تعریف گردیده است. سیستم‌های مختلف این شبکه در جدول 1 معرفی گردیده است.

$$[f^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & C & C & S & G & H & N & G & G & H & S & G \\ C & 0 & C & G & N & G & G & S & H & S & H & G \\ C & C & 0 & H & G & S & G & H & S & G & G & N \\ S & G & H & 0 & C & C & G & N & G & G & S & H \\ G & N & G & C & 0 & C & S & G & H & G & H & S \\ H & G & S & C & C & 0 & H & G & S & N & G & G \\ N & G & G & G & S & H & 0 & C & C & H & G & S \\ G & S & H & N & G & G & C & 0 & C & S & G & H \\ G & H & S & G & H & S & C & C & 0 & G & N & G \\ H & S & G & G & G & N & H & S & G & 0 & C & C \\ S & H & G & S & H & G & G & G & N & C & 0 & C \\ G & G & N & H & S & G & S & H & G & C & C & 0 \end{bmatrix} \qquad (30)$$

در این مدل میزان کارسختی پنهان بسیار کمتر از خودسخت‌شوندگی و قابل چشم‌پوشی در نظر گرفته شده است (رابطه (29)). بنابراین در شبیه‌سازی آزمایش تک‌لغزش، سیستم‌های ثانویه خیلی زود فعال شده و گذار از ناحیه اول به ناحیه دوم (نقطه C تا D در شکل 1) در داخل مثلث استاندارد پیش‌بینی می‌شود. در آغاز ناحیه دوم (نقطه D)، فعالیت سیستم‌های ثانویه بسیار کم بوده و در نتیجه مسیر چرخش شبکه مانند تک‌لغزش پیش‌بینی می‌گردد. اعمال ناهمسانگردی ناشی از تفاوت برهمکنش سیستم‌های لغزش مختلف توسط ماتریس برهم‌کنش $f^{\alpha\beta}$ از ویژگی‌های اصلی این مدل است. در این مدل هرچند تدبیری برای پوشش ناحیه سوم اندیشیده نشده ولی این ناحیه در نمودار تنش-کرنش ماکروسکوپیک قابل مشاهده است.

3- بررسی کارسختی در نتایج آزمایشگاهی

جکسون و باسینسکی آزمایش‌های جامعی روی تک کریستال مس خالص جهت تعیین ناهمسانگردی کارسختی پنهان به روش آزمون دوگانه انجام دادند [23]. آن‌ها اثر فعالیت سیستم $b_{\bar{2}}$ بر کارسختی سیستم‌های دیگر را از این روش بررسی نمودند. در این آزمایش‌ها، تنش تسلیم ابتدایی از روش مرسوم برونیابی برگشتی[6] (برگشت به کرنش صفر) به‌دست آمده است. بر این اساس مطابق شکل 2 تنش تسلیم، عرض از مبدأ ناحیه‌ی خطی لغزش‌آسان تعریف می‌گردد. نمودارهای تنش-کرنش میکروسکوپیک مربوط به نمونه‌های G_1 و G_4 از مرجع [23] به ترتیب در شکل 3 و شکل 4 آورده شده است. در شکل 5 نسبت کارسختی پنهان (*LHR*) به‌دست آمده از آزمایش‌های جکسون و باسینسکی بر حسب تنش جریان در انتهای آزمون اولیه ترسیم گردیده است.

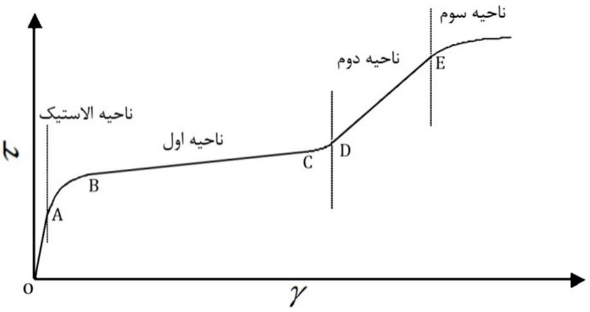
فرانسیوسی، برویلر و زاوی آزمایش‌هایی مشابه و با دقتی بیشتر روی مس خالص انجام دادند [24]. نتایج حاصل از آزمایش‌های آن‌ها در کرنش‌های کوچک، ناهمسانگردی شدیدی را در کارسختی ابتدای تغییرشکل نشان می‌داد. نسبت کارسختی پنهان به‌دست آمده از آزمایش‌های فرانسیوسی و همکارانش در شکل 6 بر حسب مقدار لغزش در سیستم اولیه، ترسیم گردیده است. آن‌ها نیز در تعیین تنش تسلیم ابتدایی از روش برونیابی برگشتی استفاده می‌کردند.

بسنی و وو با پیشنهاد معیاری دیگر برای تشخیص نقطه تسلیم ابتدایی در آزمون ثانویه، تفسیری جدید از نتایج آزمون‌های دوگانه ارائه نمودند [14]. آن‌ها با اشاره به وقوع پدیده گذار از ناحیه اول به ناحیه دوم در داخل مثلث استاندارد (گذار زودهنگام)، کارسختی پنهان را کمتر از خودسخت‌شوندگی فرض کرده ($q<1 \Rightarrow LHR<1$) و مشاهده شدت بیشتر کارسختی در سیستم ثانویه نسبت به سیستم اولیه در آزمون دوگانه را ناشی از خطای روش برونیابی برگشتی در اندازه‌گیری تنش تسلیم ابتدایی دانستند. آن‌ها بیان داشتند که روش برونیابی برگشتی سبب نادیده گرفته شدن کارسختی شدید ابتدایی شده و مقدار تقریبی تنش اشباع ناحیه کارسخت شدید ابتدایی را به‌عنوان تنش تسلیم ابتدایی معرفی می‌کند. بسنی و وو و چندین آزمون دوگانه با دقت بالا روی مس خالص انجام دادند و نشان دادند که تنش در نقطه انحراف از ناحیه الاستیک در آزمون ثانویه کمتر از تنش جریان انتهای آزمون اولیه است.

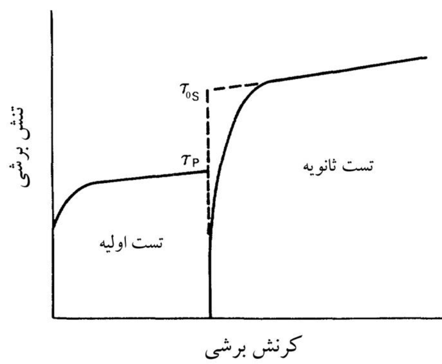
با فرض کمتر بودن کارسختی پنهان نسبت به خودسخت‌شوندگی و همچنین در نظر گرفتن کارسختی شدید ابتدایی، راه برای تفسیر هم‌زمان پدیده‌های گذار زودهنگام و فراجهش در آزمایش تک‌لغزش هموار گشت.

جدول 1 سیستم‌های لغزش شبکه‌ی FCC

شماره	برچسب	صفحه	جهت
1	b_2		$[\bar{1}0\bar{1}]$
2	b_1	$(\bar{1}\bar{1}1)$	$[011]$
3	b_3		$[1\bar{1}0]$
4	d_3		$[\bar{1}\bar{1}0]$
5	d_1	$(1\bar{1}1)$	$[011]$
6	d_2		$[10\bar{1}]$
7	c_2		$[\bar{1}0\bar{1}]$
8	c_3	$(\bar{1}11)$	$[110]$
9	c_1		$[0\bar{1}1]$
10	a_2		$[10\bar{1}]$
11	a_1	(111)	$[0\bar{1}1]$
12	a_3		$[\bar{1}10]$



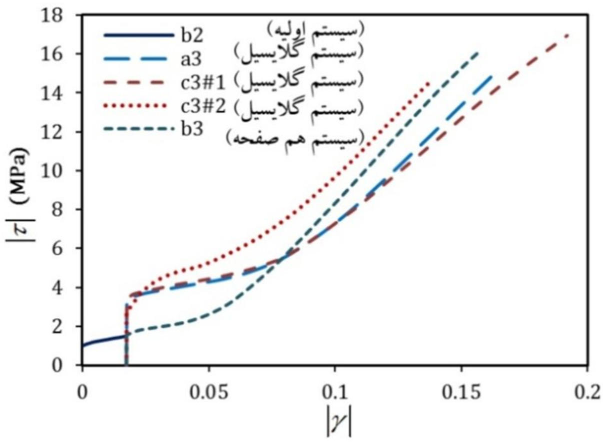
شکل 1 حالت کلی نمودار تنش-کرنش میکروسکوپیک در مناسب‌ترین سیستم لغزش شبکه‌ی FCC در آزمایش تک‌لغزش



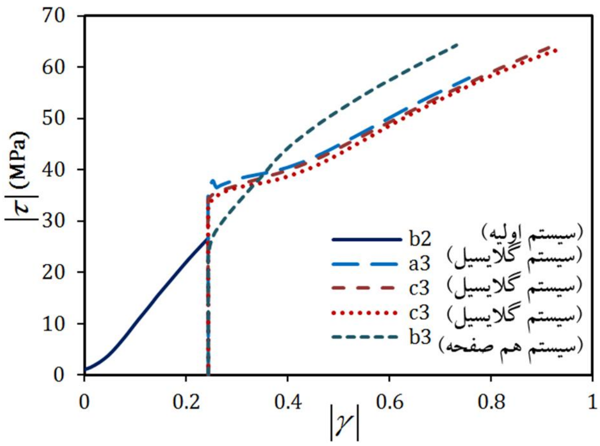
شکل 2 روش برونیابی برگشتی در تعیین تنش تسلیم نمونه ثانویه (τ_{0_S}) در آزمون دوگانه

1- No junction
2- Hirth junction
3- Coplanar junction
4- Glissile junction
5- Sessile junction
6- Backward extrapolation

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.7.9]



شکل 3 نمودارهای تنش-کرنش میکروسکوپیک حاصل از آزمون دوگانه نمونه G_1 [23]



شکل 4 نمودارهای تنش-کرنش میکروسکوپیک حاصل از آزمون دوگانه نمونه G_4 [23]

کوچک‌تر بودن کارسختی پنهان سبب فعالیت زودهنگام سیستم‌های ثانویه شده ولی از آنجا که فعالیت سیستم اولیه باعث ایجاد افزایشی شدید در نرخ خودسخت‌شوندگی سیستم‌های ثانویه گردیده است، میزان لغزش در سیستم‌های ثانویه بسیار کمتر از سیستم اولیه خواهد بود. فعالیت کم سیستم‌های ثانویه علت وقوع پدیده فراجهش است. آن‌ها نتایج بررسی‌های خود را در عبارات زیر خلاصه نمودند[14]:

$$h^{21}(\gamma^1,0) < h^{11}(\gamma^1,0) \quad (31)$$

$$h^{11}(\gamma^1,0) < h^{11}(\gamma^1,\gamma^2) \quad (32)$$

$$h^{11}(\gamma^1,\gamma^2) \ll h^{22}(\gamma^1,\gamma^2),\ \text{اگر}\ \gamma^2 \ll \gamma^1 \quad (33)$$

4- پیاده‌سازی عددی

جهت بررسی مدل‌های کارسختی، لازم است که پاسخ آن‌ها در شبیه‌سازی فرآیندهای پلاستیک با نتایج تجربی مقایسه گردد. از آنجا که حل تحلیلی برای معادلات ارائه شده وجود ندارد، از روش‌های عددی بهره برده می‌شود. در این پژوهش با معرفی معادلات ساختاری حاکم بر تک‌کریستال‌ها توسط زیر برنامه تعریف رفتار ماده توسط کاربر[1]، به نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس، حل عددی توسط این نرم‌افزار صورت می‌گیرد. روش و روند حل مطابق مرجع [25] انتخاب گردیده است.

ابتدا با فرض وجود رابطه خطی میان نموهای تنش، کرنش و متغیرهای حالت (مانند استحکام برشی سیستم‌های لغزش)، معادلات نموی خطی حل شده و سپس معادلات نموی غیرخطی توسط روش نیوتن رافسون با حدس اولیه به‌دست آمده از روش خطی حل می‌گردد. در این بخش برای جلوگیری از پیچیده شدن روابط، از فرم اندیسی استفاده می‌گردد.

4-1- حل خطی

نمو کرنش در سیستم α و رابطه میان‌یابی خطی برای تعیین آن، در بازه زمانی Δt مطابق روابط (34) و (35) تعریف می‌گردند.

$$\Delta\gamma^{\alpha} = \gamma^{\alpha}_{t+\Delta t} - \gamma^{\alpha}_{\Delta t} \quad (34)$$

$$\Delta\gamma^{\alpha} = \{(1-\theta)\dot{\gamma}^{\alpha}_{t} + \theta\dot{\gamma}^{\alpha}_{t+\Delta t}\}\Delta t \quad (35)$$

در روابط (34) و (35)، زیرنویس‌ها نشان‌دهنده‌ی زمان و پارامتر $0 \le \theta \le 1$ است. به ازای $\theta = 0$ روش صریح اویلر را خواهیم داشت. انتخاب مقدار $0/5 \le \theta \le 1$ در مرجع [25] توصیه شده است. مطابق رابطه (23) نرخ لغزش سیستم α ($\dot{\gamma}^{\alpha}$) تنها تابع تنش برشی و استحکام برشی در سیستم α است، بنابراین با استفاده از بسط تیلور می‌توان نوشت:

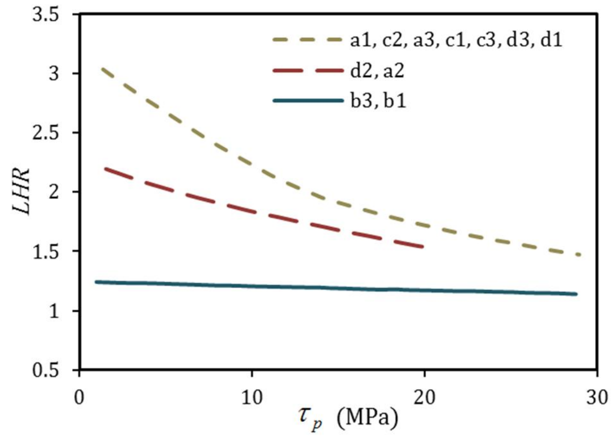
$$\dot{\gamma}^{\alpha}_{t+\Delta t} = \dot{\gamma}^{\alpha}_{t} + \frac{\partial\dot{\gamma}^{\alpha}}{\partial\tau^{\alpha}}\Delta\tau^{\alpha} + \frac{\partial\dot{\gamma}^{\alpha}}{\partial\tau^{\alpha}_{cr}}\Delta\tau^{\alpha}_{cr} \quad (36)$$

با به‌کارگیری روابط (34-36) نتیجه می‌شود:

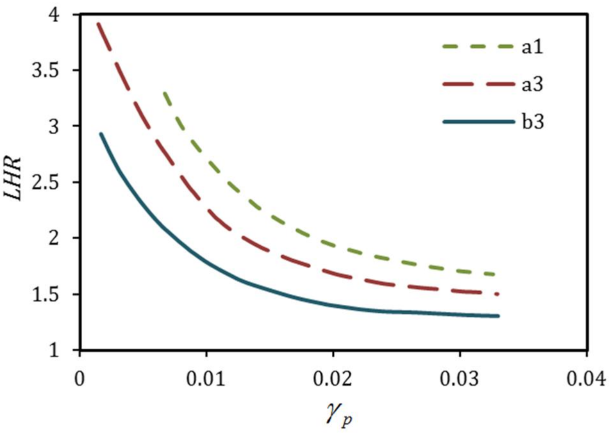
$$\Delta\gamma^{\alpha} = \left(\dot{\gamma}^{\alpha}_{t} + \theta\frac{\partial\dot{\gamma}^{\alpha}}{\partial\tau^{\alpha}}\Delta\tau^{\alpha} + \theta\frac{\partial\dot{\gamma}^{\alpha}}{\partial\tau^{\alpha}_{cr}}\Delta\tau^{\alpha}_{cr}\right)\Delta t \quad (37)$$

نمو استحکام برشی بر اساس رابطه کلی کارسختی (رابطه (24))، به صورت رابطه (38) به‌دست می‌آید:

$$\Delta\tau^{\alpha}_{cr} = \sum_{\beta=1}^{N} h^{\alpha\beta}\Delta\gamma^{\beta}\,\text{sign}(\dot{\gamma}^{\beta}) \quad (38)$$



شکل 5 نسبت کارسختی پنهان بر حسب تنش انتهای آزمون اولیه در آزمون‌های دوگانه مس خالص [23]



شکل 6 نسبت کارسختی پنهان بر حسب مقدار لغزش سیستم اولیه در آزمون‌های دوگانه مس خالص [24]

1- UMAT

با استفاده از روابط (7)، (16)، (17)، (19) و (22) نمو تنش برشی بر حسب نموهای کرنش و کرنش برشی قابل بیان است:

$$\Delta\tau^{\alpha} = \left(\ell_{ijkl}P^{\alpha}_{kl} + Q^{\alpha}_{ik}\sigma_{jk} + Q^{\alpha}_{jk}\sigma_{ik}\right)\left(\Delta\varepsilon_{ij} - \sum_{\beta=1}^{N} P^{\beta}_{ij}\Delta\gamma^{\beta}\right) \qquad (39)$$

با جایگذاری روابط (38) و (39) در رابطه (37)، دستگاه معادلات خطی، برای محاسبه نمو کرنش‌های برشی از نمو کرنش اعمال شده، به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\sum_{\beta=1}^{N}\Big\{\delta^{\alpha\beta} + \theta\Delta t\frac{\partial\dot\gamma^{\alpha}}{\partial\tau^{\alpha}}\left[\ell_{ijkl}P^{\alpha}_{kl} + Q^{\alpha}_{ik}\sigma_{jk} + Q^{\alpha}_{jk}\sigma_{ik}\right]P^{\beta}_{ij}\\ - \theta\Delta t\frac{\partial\dot\gamma^{\alpha}}{\partial\tau^{\alpha}_{cr}}h^{\alpha\beta}\,\mathrm{sign}\left(\dot\gamma^{\beta}_{t}\right)\Big\}\Delta\gamma^{\beta}\\ = \dot\gamma^{\alpha}_{t}\Delta t\\ + \theta\Delta t\frac{\partial\dot\gamma^{\alpha}}{\partial\tau^{\alpha}}\left[\ell_{ijkl}P^{\alpha}_{kl} + Q^{\alpha}_{ik}\sigma_{jk}\right.\\ \left. + Q^{\alpha}_{jk}\sigma_{ik}\right]\Delta\varepsilon_{ij}\end{aligned} \qquad (40)$$

4-2- حل غیرخطی

از آنجا که فرض خطی بودن روابط، مخصوصاً در تغییرشکل‌های بزرگ منجر به خطای قابل ملاحظه‌ای می‌شود، نیاز است روابط غیرخطی پیاده‌سازی و حل گردند. بر اساس رابطه (23) می‌توان نوشت:

$$\dot\gamma^{\alpha}_{t+\Delta t} = \dot\gamma_{0}\left|\frac{\tau^{\alpha}_{t} + \Delta\tau^{\alpha}}{\tau^{\alpha}_{cr\,t} + \Delta\tau^{\alpha}_{cr}}\right|^{n}\mathrm{sign}\left(\tau^{\alpha}_{t} + \Delta\tau^{\alpha}\right) \qquad (41)$$

با جایگذاری رابطه (41) در معادله (35) معادله غیرخطی (42) به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\Delta\gamma^{\alpha} - \Delta t(1-\theta)\dot\gamma^{\alpha}_{t} - \theta\Delta t\dot\gamma_{0}\left|\frac{\tau^{\alpha}_{t} + \Delta\tau^{\alpha}}{\tau^{\alpha}_{cr\,t} + \Delta\tau^{\alpha}_{cr}}\right|^{n}\mathrm{sign}\big(\tau^{\alpha}_{t}\\ + \Delta\tau^{\alpha}\big) = 0\end{aligned} \qquad (42)$$

معادله (42) توسط روش نیوتن رافسون و با حدس اولیه به‌دست آمده از روش خطی، حل می‌گردد. در نهایت نمو تنش با جایگذاری روابط (16)، (17) و (19) در رابطه (21) محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{ij} = \ell_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} - \sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{kk}\\ - \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\ell_{ijkl}P^{\alpha}_{kl} + Q^{\alpha}_{ik}\sigma_{jk} + Q^{\alpha}_{jk}\sigma_{ik}\right)\Delta\gamma^{\alpha}\end{aligned} \qquad (43)$$

4-3- چرخش سیستم‌های لغزش

چرخش شبکه‌ی کریستال در حین تغییرشکل پلاستیک سبب تغییر جهت بردار جهت‌های لغزش و عمود صفحه‌های لغزش می‌شود. این تغییر جهت باید در هر نمو از حل عددی لحاظ گردد. تغییرات جهت لغزش سیستم α و بردار عمود صفحه‌ی لغزش آن سیستم را می‌توان با استفاده از روابط (13) و (14) محاسبه نمود:

$$\Delta s^{\alpha}_{i} = \left(\Delta\varepsilon_{ij} + W_{ij}\Delta t - \sum_{\beta=1}^{N} S^{\beta}_{ij}\Delta\gamma^{\beta}\right)s^{\alpha}_{j} \qquad (44)$$

$$\Delta m^{\alpha}_{i} = -\left(\Delta\varepsilon_{ji} + W_{ji}\Delta t - \sum_{\beta=1}^{N} S^{\beta}_{ji}\Delta\gamma^{\beta}\right)m^{\alpha}_{j} \qquad (45)$$

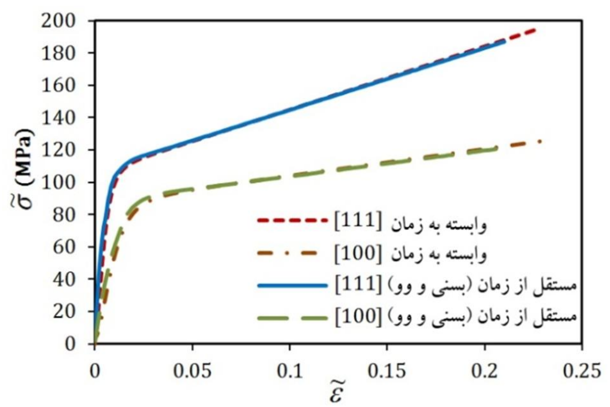
4-4- پیاده‌سازی عددی مدل بسنی و وو

ابتدا مدل کارسختی بسنی و وو پیاده‌سازی می‌گردد. برای این کار پارامترهای مختلف مطابق مرجع [15] مقداردهی شده است. ثابت‌های نرخ لغزش مرجع و پارامتر حساسیت نرخ در رابطه (23) مطابق مرجع [16] مقداردهی می‌گردند. بنابراین نرخ لغزش مرجع برابر با 0/001 و پارامتر حساسیت نرخ برابر با 83 (n^{-1} =0/012) در نظر گرفته می‌شود. جهت اعتبارسنجی فرآیند عددی، پاسخ شبیه‌سازی آزمایش کشش تک‌محوره در جهت‌های متقارن [111] و [100] با نتایج متناظر از آن مرجع در شکل 7 مقایسه گردیده است. با وجود استفاده از فرمول‌بندی وابسته به زمان در این پژوهش در مقابل فرمول‌بندی مستقل از زمان در آن مرجع، نتایج تطابق مناسبی دارند. در این جهت‌ها، ضریب اشمید در کل مسیر بارگذاری در چندین سیستم لغزش بیشینه بوده و در مابقی سیستم‌ها صفر است. بنابراین لغزش در سیستم‌های فعال یکسان رخ داده و در مابقی سیستم‌ها هیچ لغزشی رخ نخواهد داد. از این رو انتظار می‌رفت که اختلاف چندانی میان نتایج حاصل از فرمول‌بندی وابسته به زمان و مستقل از زمان وجود نداشته باشد. هر چند اختلاف در جهت‌های نامتقارن قابل پیش‌بینی است.

مقایسه میان نتایج در جهت [632] در شکل 8 آورده شده است. به دلیل استفاده از فرمول‌بندی مستقل از زمان توسط بسنی و وو، در مقابل فرمول‌بندی وابسته به زمان در این مقاله، نتایج در این جهت اختلاف قابل توجهی دارند. به نظر می‌رسد که فعالیت سیستم‌های لغزش در هر تنش غیر صفری در فرمول‌بندی وابسته به زمان، سبب این اختلاف شده است. زیرا افزایش فعالیت سیستم‌های لغزش نسبت به فرمول‌بندی مستقل از زمان، سبب افزایش سریع‌تر مقدار تابع G در رابطه (26) شده و گذار از ناحیه‌ی اول به دوم را نزدیک‌تر می‌سازد. بنابراین انتظار می‌رود با افزایش مقدار پارامتر حساسیت نرخ (n)، اختلاف نتایج دو فرمول‌بندی کمتر گردد. نتیجه حاصل از افزایش پارامتر حساسیت نرخ نیز در شکل 8 آمده است. اختلاف شیب انتهای نمودارها نشان‌دهنده‌ی اختلاف در فعالیت سیستم‌های ثانویه است.

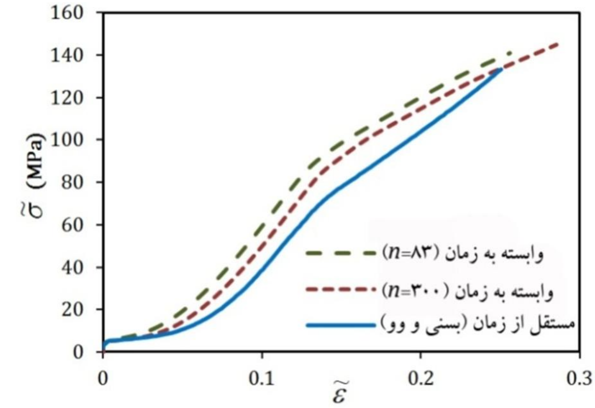
بررسی نتایج مدل بسنی و وو در شبیه‌سازی آزمایش تک‌لغزش نشان می‌دهد که این مدل در پیش‌بینی مقدار لغزش سیستم‌های ثانویه و همچنین مسیر چرخش شبکه خطای زیادی دارد. شکل 9 مسیر چرخش پیش‌بینی شده در جهتی مشابه جهت شماره 2 مرجع [15] را نشان می‌دهد. تغییر مسیر چرخش در داخل مثلث استاندارد گواه از فعالیت بیش از حد سیستم‌های ثانویه قبل از فراجهش است. این مشکل از آنجا نشأت می‌گیرد که به نظر می‌رسد در یک آزمایش تک‌لغزش، افزایش نرخ لغزش سیستم‌های ثانویه زمانی رخ می‌دهد که تنش در آن سیستم از حد معینی که وابسته به فعالیت سیستم اولیه است عبور کند، در حالی که در مدل بسنی و وو با عبور کرنش از حدی معین، این امر رخ می‌دهد.

پیش‌بینی رفتار ماده کریستالی در آزمون دوگانه نیز اختلاف قابل ملاحظه‌ای با نتایج تجربی دارد. در مقایسه شکل 6 و شکل 7 از مرجع [15] با شکل 3 این اختلافات روشن می‌گردد. از آن جمله می‌توان به افزایش شدید تنش در ابتدای لغزش و عدم وجود ناحیه لغزش آسان در سیستم‌های ثانویه اشاره نمود.

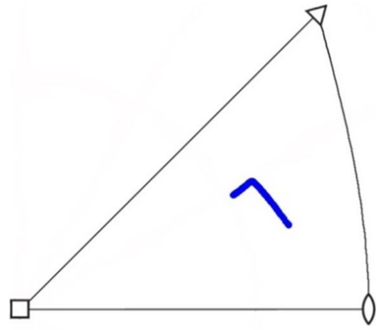


شکل 7 راستی‌سنجی شبیه‌سازی در جهت‌های متقارن (به‌ازای τ_0 = 1.7 MPa)

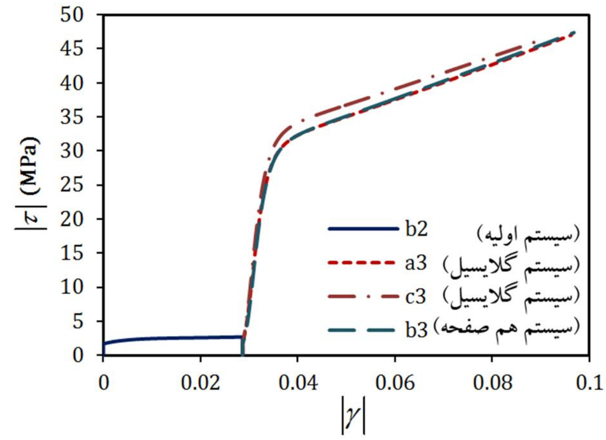
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.7.9]



شکل 8 مقایسه نمودار تنش-کرنش کشش محوری در فرمول‌بندی وابسته به زمان با مستقل از زمان (توسط بسنی و وو) در جهت [632]



شکل 9 پیش‌بینی مدل بسنی و وو از چرخش شبکه در کشش محوری جهت شماره 2 از مرجع [15]



شکل 10 نتایج شبیه‌سازی آزمون دوگانه توسط مدل بسنی و وو

از آنجا که شبیه‌سازی آزمون دوگانه در آن مرجع تنها با فرض وجود دو سیستم لغزش صورت گرفته است، این اختلافات در حالت کلی بسیار بیشتر نیز خواهد شد (شکل 10).

5- ارائه‌ی مدل کارسختی جدید

در این بخش مدل کارسختی جدیدی بر اساس بررسی‌های انجام شده در بخش‌های قبل ارائه می‌گردد که رفتار ماده کریستالی با ساختار FCC را بهتر و دقیق‌تر از مدل بسنی و وو پوشش دهد. از آنجا که در این پژوهش تمرکز بر روی ناهمسانگری کارسختی در تک‌کریستال‌ها است، همانند بسنی و وو پدیده‌های بازیابی دینامیکی[1] و لغزش تقاطعی[2] نادیده گرفته می‌شوند [14، 15]. بنابراین پاسخ شبیه‌سازی انجام شده توسط مدل ارائه شده فاقد ناحیه سوم خواهد بود.

در یک آزمایش کشش محوری تک‌کریستالی که برای تک لغزش جهت‌گیری شده است (آزمایش تک‌لغزش)، تغییرشکل پلاستیک ابتدا با نرخ کارسختی زیاد شروع شده و به تدریج با ادامه تغییرشکل، نرخ کارسختی کاهش می‌یابد تا به مقدار کمینه و ثابت متناظر با ناحیه لغزش‌آسان (نرخ کارسختی لغزش‌آسان) می‌رسد (شکل 1). با ادامه تغییرشکل و در انتهای ناحیه لغزش‌آسان، با فعال شدن سیستم‌های ثانویه، مجدداً نرخ کارسختی افزایش یافته و ناحیه دوم آغاز می‌گردد. جهت ارائه‌ی مدل ریاضی مناسب برای پیش‌بینی تغییرات نرخ کارسختی، می‌توان با تعریف پارامتر $\tau_{\rm r}$ به عنوان تنش اشباع ناحیه کارسخت شدید، فرض کرد تا زمانی که تنش جریان کمتر از مقدار $\tau_{\rm r}$ است، نرخ کارسختی زیاد و با عبور از آن کمینه خواهد شد. همچنین عامل اصلی افزایش مقدار $\tau_{\rm r}$ یک سیستم لغزش در حین تغییرشکل، فعالیت سیستم‌های دیگر در نظر گرفته می‌شود.

فرضیاتی که برای ارائه‌ی مدل ریاضی بیان گردید، با نتایج آزمون‌های دوگانه نیز مطابقت دارد. همان‌طور که در شکل 3 مشخص است، فعالیت سیستم اولیه باعث افزایش مقدار $\tau_{\rm r}$ در سیستم ثانویه گردیده و با تجاوز تنش جریان سیستم ثانویه از مقدار $\tau_{\rm r}$، نرخ کارسختی کاهش می‌یابد. مورد دیگری که می‌توان از نتایج آزمون دوگانه استنباط نمود، عدم تغییر نرخ کارسختی لغزش‌آسان با فعالیت سیستم‌های دیگر است، زیرا با وجود فعالیت قابل توجه سیستم اولیه، نرخ کارسختی لغزش‌آسان سیستم ثانویه تفاوت چندانی با مقدار متناظر آن در آزمون اولیه ندارد. بر این اساس رابطه (46) برای نرخ کارسختی پیشنهاد می‌گردد.

$$h^{\alpha} = h_{\rm s}\left[1 + d^{\alpha}\operatorname{sech}\left(\frac{\tau_{\rm cr}^{\alpha} - \tau_0}{\tau_{\rm r}^{\alpha} - \tau_0}\right)^{u}\right] \qquad (46)$$

در رابطه (46)، $h_{\rm s}$ نرخ کارسختی لغزش‌آسان، d ضریب کارسختی شدید و u پارامتر گذار است. d اعمال کننده افزایش نرخ کارسختی در ناحیه کارسخت شدید و u تنظیم کننده طول ناحیه گذار بین دو ناحیه الاستیک و لغزش آسان (نقطه A تا B در شکل 1) و همچنین دو ناحیه لغزش آسان و کارسخت شدید (نقطه C تا D) است. مطابق این رابطه در یک آزمایش تک‌لغزش و در آغاز لغزش (نقطه A)، که $\tau_{\rm cr} = \tau_0$ است، $h = h_{\rm s}(1 + d)$ خواهد بود. در ادامه و با کارسخت شدن سیستم لغزش فعال، مقدار $\tau_{\rm cr}$ آن افزایش یافته و در نتیجه نرخ کارسختی (h) کاهش می‌یابد تا در نقطه B به مقدار کمینه $h_{\rm s}$ برسد. سپس در نقطه C با شروع فعالیت موثر سیستم‌های ثانویه، مقدار $\tau_{\rm r}$ افزایش یافته و موجب افزایش نرخ کارسختی می‌گردد. نرخ کارسختی در نقطه D به مقدار $h_{\rm s}(1 + d)$ خواهد رسید.

همان‌طور که بیان گردید، تنش اشباع ناحیه‌ی کارسخت شدید سیستم α ($\tau_{\rm r}^{\alpha}$) در رابطه (46)، با فعالیت سیستم‌های دیگر افزایش می‌یابد. برای ارائه‌ی رابطه ریاضی مناسب، لازم است بررسی‌های دقیق‌تری روی نتایج آزمایش‌های آزمون دوگانه صورت گیرد. بر اساس بررسی‌های انجام شده در مرجع [14]، مشخص گردید که آن‌چه در واقع توسط روش برونیابی برگشتی به‌عنوان تنش تسلیم در آزمون ثانویه اندازه‌گیری شده است، تقریبی از تنش اشباع ناحیه‌ی کارسخت شدید (و نه تنش تسلیم) بوده است. پس آنچه در شکل 5 و شکل 6 آمده، نمودار تغییرات $\frac{\tau_{\rm rs}}{\tau_{\rm p}}$ (و نه $\frac{\tau_{\rm 0s}}{\tau_{\rm p}}$) است. زیرنویس‌های p و s به ترتیب نشان‌دهنده آزمایش اولیه و ثانویه است. در آغاز لغزش در سیستم اولیه، افزایش شدیدی در تنش اشباع ناحیه‌ی کارسخت شدید سیستم ثانویه نسبت به تنش جریان سیستم اولیه مشاهده می‌شود. این نسبت با ادامه

1- Dynamic recovery
2- Cross slip

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.7.9]

تغییرشکل به شدت کاهش یافته و در کرنش‌های بزرگ از نرخ تغییرات آن کاسته می‌شود.

در ارتباط با اثر فعالیت سیستم‌های هم‌صفحه بر τ_r باید بیان داشت که نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهد که فعالیت سیستم‌های هم‌صفحه افزایشی در τ_r ایجاد نمی‌کند و آنچه نتایج آزمون دوگانه نشان می‌دهد در واقع کارسختی پنهان سیستم اولیه بر سیستم هم‌صفحه است. این امر با بررسی رفتار تک‌کریستال در کشش تک محوره با جهت‌گیری ⟨110⟩ مشخص می‌گردد.

مطابق مرجع [26]، محور بارگذاری در کشش با جهت‌گیری ⟨110⟩ ناپایدار بوده و به‌سمت موقعیت ⟨111⟩ چرخش می‌کند. مشاهدات سطح‌نگاری وربروگ و همکارانش نشان می‌دهد که با کشش در جهت ⟨110⟩، دو سیستم لغزش هم‌صفحه هم‌زمان فعال می‌گردد، که این نتیجه با چرخش محور بارگذاری به‌سمت موقعیت ⟨111⟩ هم‌خوانی دارد [27]. به فعالیت هم‌زمان دو سیستم لغزش هم‌صفحه در بررسی‌های آزمایشگاهی فرانسیوسی و همکارانش نیز اشاره شده است (جدول 1 از مرجع [28]). بنابراین با توجه به وجود ناحیه‌ی لغزش آسان در بارگذاری کششی در جهت ⟨110⟩ (شکل 3 از مرجع [28]) با وجود فعالیت همزمان دو سیستم هم‌صفحه، می‌توان نتیجه گرفت که فعالیت همزمان سیستم‌های هم‌صفحه افزایش قابل ملاحظه‌ای در τ_r ایجاد نمی‌کند.

هرچند فعالیت بیش از یک سیستم لغزش در آزمون اولیه خلاف فرض آزمایش آزمون دوگانه است، ولی در تعدادی از آزمایش‌های جکسون و باسینسکی مانند نتایج آورده شده در شکل 4، نمونه اولیه (به ازای $\tau_p > 1.6\ MPa$) وارد ناحیه‌ی دوم شده است. این امر نشان از فعالیت بیش از یک سیستم لغزش در آزمون اولیه دارد. با این حال توسط نتایج حاصل از این آزمایش‌ها می‌توان اثر فعالیت سیستم‌های جدید در نمونه اولیه بر τ_r در نمونه ثانویه را مورد بررسی قرار داد. لازم به ذکر است که این موضوع تنها برای سیستم‌های متقاطع قابل بررسی است، زیرا در آزمایش‌هایی که نمونه اولیه وارد ناحیه‌ی دوم شده است، در آزمون ثانویه هرگز ناحیه‌ی لغزش‌آسان برای سیستم‌های هم‌صفحه پدیدار نشده و همواره در ناحیه‌ی کارسخت شدید قرار دارند (شکل 4).

رابطه (47) نرخ تغییرات تنش اشباع ناحیه کارسخت شدید سیستم α را متناسب با میزان فعالیت سیستم‌های دیگر و نوع برخوردگاه آن‌ها با سیستم α، به نرخ تغییرات استحکام آن سیستم‌ها ارتباط می‌دهد.

$$\dot{\tau}_r^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \sum_{\beta}^{\bar{N}_{act}} |\dot{\gamma}^{\beta}| = 0 \\ \dfrac{\sum_{\beta}^{\bar{N}_{act}} f^{\alpha\beta} |\dot{\gamma}^{\beta}| \dot{\tau}_{cr}^{\beta}}{\sum_{\beta}^{\bar{N}_{act}} |\dot{\gamma}^{\beta}|} & \sum_{\beta}^{\bar{N}_{act}} |\dot{\gamma}^{\beta}| \neq 0 \end{cases} \quad (47)$$

در رابطه (47)، $\bar{N}_{act}$ تعداد سیستم‌های متقاطع فعال و $f^{\alpha\beta}$ مانند رابطه (30)، ماتریس برهم‌کنش است. با این تفاوت که درایه‌های مربوط به سیستم‌های هم‌صفحه صفر است.

در فرمول‌بندی مستقل از زمان، $\dot{\gamma}$ برای سیستم‌های غیرفعال صفر است، ولی در فرمول‌بندی وابسته به زمان به‌ازای تنش‌های بزرگ‌تر از صفر همواره مقدار (هرچند بسیار ناچیز) دارد، بنابراین رابطه (47) بر روی سیستم‌هایی که فعالیت موثر دارند تعریف می‌گردد. به این منظور رابطه (48) به‌عنوان معیاری مناسب پیشنهاد می‌گردد. در این تابع مقدار برگشتی یک، نشانه فعال بودن سیستم α است.

$$act^{\alpha} = \begin{cases} 1 & \dfrac{h^{\alpha}|\dot{\gamma}^{\alpha}|}{\sum_{\beta=1}^{N} h^{\beta}|\dot{\gamma}^{\beta}|} \geq 0.01 \\ 0 & \dfrac{h^{\alpha}|\dot{\gamma}^{\alpha}|}{\sum_{\beta=1}^{N} h^{\beta}|\dot{\gamma}^{\beta}|} < 0.01 \end{cases} \quad (48)$$

روند کاهشی $f^{\alpha\beta}$ توسط رابطه (49) تعریف می‌گردد. در این رابطه z و τ_a ثابت‌های مادی و $f_0^{\alpha\beta}$ مقدار اولیه ماتریس برهم‌کنش است.

$$f^{\alpha\beta} = f_0^{\alpha\beta}\left[1 - z \cdot \tanh\left(\frac{\tau_{cr}^{\beta}}{\tau_a}\right)\right] \quad (49)$$

در این پژوهش جهت ساده‌سازی، $f_0^{\alpha\beta}$ برای تمام سیستم‌های متقاطع یکسان فرض می‌گردد، و از آنجا که رابطه (47) روی سیستم‌های متقاطع تعریف گردیده است، درایه‌های مربوط به سیستم‌های هم‌صفحه از ماتریس برخورد در رابطه (47) تأثیرگذار نیست، پس می‌توان تمام درایه‌های $f_0^{\alpha\beta}$ را یکسان در نظر گرفت، ($f_0^{\alpha\beta} = f_0$). بنابراین:

$$f^{\alpha\beta} = f_0\left[1 - z \cdot \tanh\left(\frac{\tau_{cr}^{\beta}}{\tau_a}\right)\right] \quad (50)$$

بررسی پدیده فراجهش نشان می‌دهد، در سیستم ثانویه‌ای که فعالیت بسیار کمی داشته است، با عبور تنش جریان از مقداری مشخص (تنش فراجهش؛ τ_{over})، نرخ کارسختی شدید آن کاسته شده و به مقدار متناظر با ناحیه دوم می‌رسد. به‌عنوان نمونه در آزمایش تک‌لغزش بر روی مس خالص مشخص شده است که با عبور محور کشش از خط تقارن میان دو ناحیه‌ی سیستم اولیه و سیستم مزدوج و به عبارتی وقوع پدیده فراجهش، همچنان نرخ کارسختی سیستم مزدوج زیاد بوده و فعالیت کمی دارد، تا اینکه تنش جریان آن به مقداری در حدود 1/1 برابر تنش جریان سیستم اولیه برسد، آنگاه از نرخ کارسختی آن کاسته شده و با فعالیت قابل توجه، سبب پایان فراجهش و چرخش محور بارگذاری می‌گردد [29]. آزمایش تک لغزش نشان می‌دهد، سیستمی که دارای بیشترین کرنش انباشته است، نقش اصلی را در تعیین تنش فراجهش سیستم‌های دیگر ایفا می‌کند. بنابراین مطابق رابطه (51)، تنش فراجهش سیستم α متناسب با میزان فعالیت سیستم‌های دیگر به تنش جریان آن سیستم‌ها ارتباط داده می‌شود.

$$\tau_{over}^{\alpha} = \begin{cases} 0.5\tau_0 & \sum_{\beta=1\neq\alpha}^{N} \bar{\gamma}^{\beta} = 0 \\ \dfrac{\sum_{\beta=1\neq\alpha}^{N} \zeta^{\alpha\beta}\bar{\gamma}^{\beta}\tau_{cr}^{\beta}}{\sum_{\beta=1\neq\alpha}^{N} \bar{\gamma}^{\beta}} & \sum_{\beta=1\neq\alpha}^{N} \bar{\gamma}^{\beta} \neq 0 \end{cases} \quad (51)$$

در رابطه (51)، $\zeta^{\alpha\beta}$ پارامتر فراجهش است. مقدار پارامتر فراجهش برای سیستم‌های سسیل و هیرس، به ترتیب توسط آزمایش تک‌لغزش در کشش و در فشار قابل اندازه‌گیری است (مانند [26]). از طرفی آزمون دوگانه سیستم هم‌صفحه در شکل 4 نشان می‌دهد که این پارامتر برای سیستم‌های هم‌صفحه برابر مقدار واحد است، زیرا به محض رسیدن تنش سیستم هم‌صفحه به تنش جریان سیستم اولیه، نرخ کارسختی آن کاهش می‌یابد. در این پژوهش جهت ساده‌سازی، مقدار پارامتر فراجهش برای تمام سیستم‌های متقاطع یکسان در نظر گرفته می‌شود. بنابراین:

$$\zeta^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & (\alpha \text{ و } \beta \text{ هم‌صفحه}) \\ \zeta & (\alpha \text{ و } \beta \text{ غیرهم‌صفحه}) \end{cases} \quad (52)$$

در مرجع [14] اشاره گردیده سیستمی که لغزش زیادی دارد، نسبت به سیستمی که لغزش بسیار کمتری داشته، نرخ خودسخت‌شوندگی بسیار کمتری خواهد داشت و بالعکس (نامساوی (33)). درحالی‌که مطابق آزمایش‌های آزمون دوگانه شکل 4، در ابتدای ورود نمونه ثانویه به ناحیه‌ی لغزش‌آسان، با وجود بیشتر بودن نرخ خودسخت‌شوندگی سیستم اولیه، مقدار لغزش در آن بسیار کمتر از لغزش در سیستم اولیه است. در واقع باید بیان داشت که نامساوی (33) برای نرخ خودسخت‌شوندگی در ناحیه‌ی کارسخت شدید صحت داشته و برای نرخ خودسخت‌شوندگی کل معتبر نیست. بر این

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.7.9]

اساس نامساوی (33) بدین صورت اصلاح می‌گردد:

$$d^1(\gamma^1,\gamma^2) \ll d^2(\gamma^1,\gamma^2),\ \gamma^2 \ll \gamma^1 \quad \text{اگر} \tag{53}$$

بر اساس بررسی نتایج آزمایشگاهی، رابطه (54) نیز برای d^α ارائه می‌گردد.

$$d^\alpha = d_{\mathrm{I}} K^\alpha(\bar\gamma^\beta;\beta = 1,\dots,N)\,\mathrm{sech}\left(\frac{\tau_{\mathrm{cr}}^\alpha}{\tau_{\mathrm{over}}^\alpha}\right)^r + d_{\mathrm{II}} \tag{54}$$

$$K^\alpha = \begin{cases} 0 & \sum_{\beta=1\neq\alpha}^{N} \bar\gamma^\beta = 0 \\ \mathrm{sech}\left(\dfrac{b\bar\gamma^\alpha}{\sum_{\beta=1\neq\alpha}^{N}\bar\gamma^\beta}\right) & \sum_{\beta=1\neq\alpha}^{N} \bar\gamma^\beta \neq 0 \end{cases} \tag{55}$$

در روابط (54) و (55)، d_{I}، d_{II}، r و b ثابت‌های مادی هستند. با جایگذاری رابطه (54) در رابطه (46) نرخ خودسخت‌شوندگی در ناحیه دوم برابر با $h_s(1 + d_{\mathrm{II}})$ و مقدار بیشینه نرخ خودسخت‌شوندگی برابر با $h_s(1 + d_{\mathrm{I}} + d_{\mathrm{II}})$ به‌دست می‌آید. بررسی نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهد که در لغزش‌های کوچک (ابتدای لغزش) مقدار سخت‌کنندگی پنهان یک سیستم لغزش قابل توجه بوده و با ادامه تغییرشکل کاهش می‌یابد. بر این اساس رابطه (56) برای کارسختی پنهان ارائه می‌گردد.

$$q^{\alpha\beta} = \left[q_{\mathrm{s}} + q_{\mathrm{n}}\mathrm{sech}\left(\frac{\bar\gamma^\alpha}{\gamma_{\mathrm{q}}}\right)\right] W^\alpha(\dot\gamma^\eta;\eta = 1,\dots,N)\,V(\bar\gamma^\alpha,\bar\gamma^\beta) \tag{56}$$

$$W^\alpha = \begin{cases} 1 & \sum_{\beta=1\neq\alpha}^{N} |\dot\gamma^\beta| = 0 \\ \tanh\left(\dfrac{|\dot\gamma^\alpha|}{\sum_{\beta=1\neq\alpha}^{N}|\dot\gamma^\beta|}\right)^e & \sum_{\beta=1\neq\alpha}^{N} |\dot\gamma^\beta| \neq 0 \end{cases} \tag{57}$$

$$V = \begin{cases} 1 & (\alpha \text{ و } \beta \text{ غیرهم‌صفحه}) \text{ و یا } (\bar\gamma^\beta = 0) \\ \left(\dfrac{\bar\gamma^\alpha}{\bar\gamma^{\alpha\beta}}\right) & (\alpha \text{ و } \beta \text{ هم‌صفحه}) \text{ و } (\bar\gamma^\beta \neq 0) \end{cases} \tag{58}$$

در روابط فوق q_s، q_{n}، e و γ_{q} ثابت‌های مادی و $\bar\gamma^{\alpha\beta}$ مجموع کرنش انباشته روی دو سیستم α و β هستند. بنا بر روابط ارائه شده کارسختی پنهان ابتدایی $q_{\mathrm{s}} + q_{\mathrm{n}}$ است.

6- پیاده‌سازی عددی مدل کارسختی جدید

در جدول 2 مقدارهای اختصاص داده شده به پارامترهای مختلف مدل جدید آورده شده است. پارامترهای τ_0، τ_{r0} (مقدار اولیه τ_{r})، h_s و d_{II} بر اساس نتایج آزمایش‌های تک لغزش مرجع [30] مقداردهی گردیده‌اند. برای این پارامترها از مقدار متوسط مقادیر اندازه‌گیری شده از تمام نمودارهای شکل 12 آن مرجع استفاده شده است. از نتایج آزمون‌های دوگانه مراجع [23] و [24] نیز در تعیین پارامترهای f_0، τ_{a} و z استفاده گردیده است. در اینجا برای پوشش بهتر نتایج آزمایشگاهی توسط رابطه (50)، از مقدار زیاد پارامتر f_0 در کرنش‌های بسیار کوچک (γ<0/01) صرف‌نظر شده است و همچنین مقدار پارامتر فراجهش (ζ) برای مس خالص مطابق آزمایش‌های مراجع [29] و [31] در حدود 1/1 مقداردهی گردیده است.

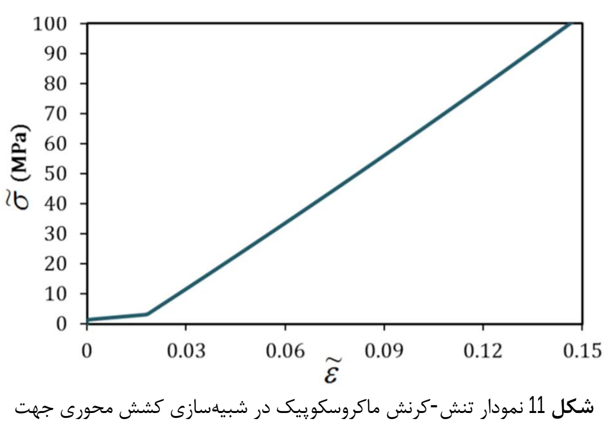
برای پارامتر b مقداری در حدود 3~2 باید در نظر گرفته شود زیرا انتخاب مقدارهای بزرگ‌تر سبب کاهش اثر d_I در حالت چند لغزشی (مانند بارگذاری در جهت‌های متقارن) می‌شود. از طرفی انتخاب مقدارهای کوچک‌تر باعث می‌شود در حالت تک‌لغزشی بازگشت محور بارگذاری پس از اتمام فراجهش به تأخیر بیفتد. با توجه به شیب نمودارهای تنش-کرنش در آزمایش‌های کشش محوری جهت‌های متقارن، مقدار d_{I} برای تنظیم نرخ کارسختی در حالات چند لغزشی، با استفاده از شکل 3 مرجع [28] انتخاب شده است.

ثابت‌های مربوط به کارسختی پنهان (q_s، q_{n}، γ_{q} و e) بر اساس بررسی‌های انجام شده بر روی نتایج آزمایشگاهی مراجع [23]، [24]، [30] و همچنین مشاهده پاسخ مناسب در شبیه‌سازی آزمون دوگانه، مقداردهی گردیده است. ثابت‌های توانی u و r نیز بر اساس رفتار مشاهده شده از مدل، مقداردهی شده‌اند.

شکل 11 نمودار تنش-کرنش ماکروسکوپیک حاصل از شبیه‌سازی آزمایش تک‌لغزش در جهت [632] را نشان می‌دهد. در این نمودار تنها ناحیه‌های اول و دوم قابل مشاهده است. شیب ناحیه اول کاملاً منطبق بر مقدار مورد نظر است (h=h_s). زیرا همان‌طور که در شکل 12 مشخص است، هیچ سیستم لغزش ثانویه‌ای در این ناحیه فعال نگشته است. با شروع فعالیت سیستم‌های ثانویه، گذار به ناحیه دوم، به‌خوبی در داخل مثلث استاندارد رخ داده است. مقدار زیاد در نظر گرفته شده برای پارامتر گذار (u=30) سبب گردیده است که طول ناحیه گذار از ناحیه اول به ناحیه دوم (نقطه C تا D) کوتاه‌تر از مقدار مشاهده شده در نتایج تجربی باشد (مقایسه با شکل 12 مرجع [30]). هرچند با انتخاب مقدارهای کمتر می‌توان طول این ناحیه را افزایش داد ولی جهت مشاهده رفتار مناسب در شبیه‌سازی آزمون‌های دوگانه، با صرف‌نظر از خطای رخ داده، این مقدار برای پارامتر گذار انتخاب گردیده است. شیب ناحیه دوم نیز تطابق کاملی با مقدار مورد نظر دارد (h=$h_s(1 + d_{\mathrm{II}})$). لحاظ نشدن کاهش شیب ناشی از بازیابی دینامیکی و لغزش تقاطعی در این مدل سبب گردیده است که ناحیه سهموی (ناحیه سوم) در این نمودار پدیدار نگردد.

میزان فعالیت سیستم‌های مختلف در کرنش‌های بزرگ در شکل 13 و پیش‌بینی مسیر چرخش شبکه در حین تغییرشکل پلاستیک در شکل 14 آورده شده است. مسیر پیش‌بینی شده تطابق مناسبی با نتایج آزمایشگاهی دارد، همانند نتایج آزمایشگاهی مرجع [29]، علیرغم فعالیت سیستم‌های ثانویه در داخل مثلث استاندارد، به دلیل فعالیت بسیار کم آن‌ها (شکل 13)، مسیر چرخش شبکه همانند حالت تک لغزش ادامه یافته و فراجهش رخ می‌دهد. پس از وقوع فراجهش، مسیر چرخش شبکه همچنان حفظ شده و در نقطه‌ای که تنش جریان سیستم مزدوج (d3)، ζ برابر تنش جریان سیستم اولیه است، با کاهش نرخ کارسختی سیستم مزدوج و در نتیجه افزایش فعالیت آن، فراجهش پایان یافته و مسیر چرخش شبکه تغییر می‌یابد.

پیش‌بینی مسیر چرخش شبکه برای جهتی که با خط تقارن فاصله زیادی دارد نیز تطابق مناسبی با نتایج تجربی دارد. همان‌طور که در شکل 15 مشخص است، با وجود فاصله زیاد تا خط تقارن، همانند نتایج تجربی فراجهش رخ داده و تا نقطه انتهایی فراجهش، همچنان فعالیت سیستم‌های ثانویه کم خواهد ماند.

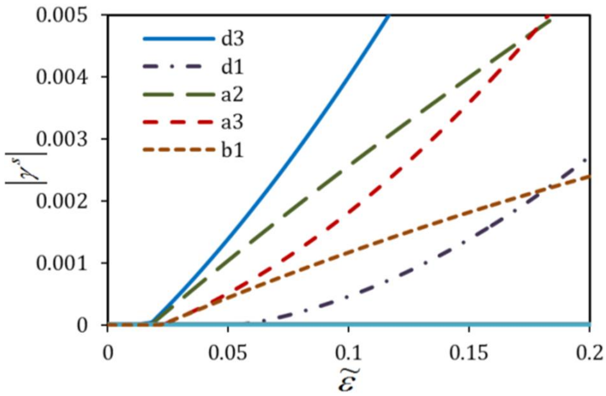


شکل 11 نمودار تنش-کرنش ماکروسکوپیک در شبیه‌سازی کشش محوری جهت [632] توسط مدل جدید

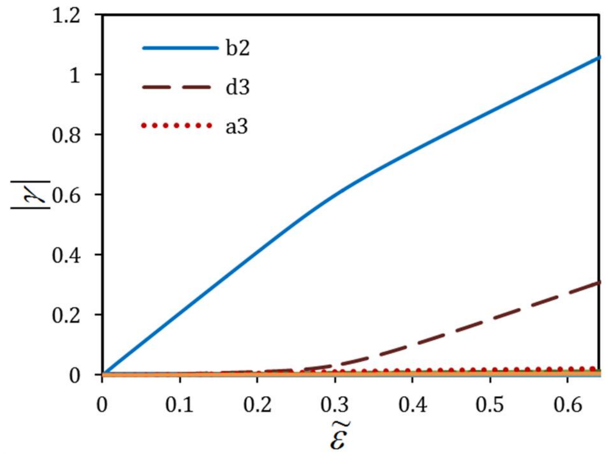
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.7.9]

جدول 2 پارامترهای مدل کارسختی جدید

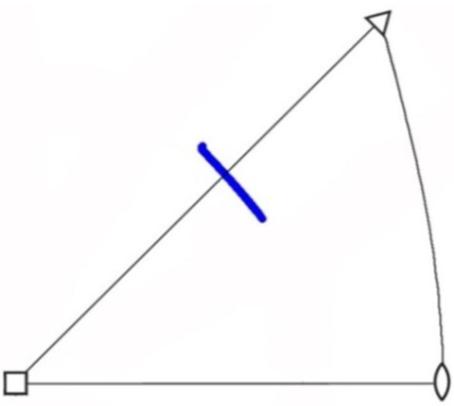
پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
τ_0 (MPa)	0/5	τ_{r_0}	1/3 τ_0
z	0/4	h_s	40 τ_0
d_{I}	150	τ_a	10 τ_0
d_{II}	7	q_n	0/35
f_0	2	q_s	0/5
e	2	u	30
ζ	1/1	r	30
γ_q	0/01	b	3



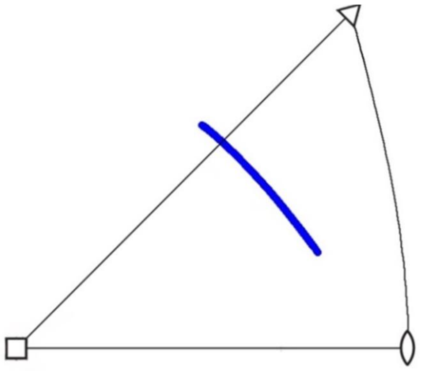
شکل 12 لغزش سیستم‌های ثانویه در حین تغییرشکل؛ شبیه‌سازی کشش در جهت [632] توسط مدل جدید



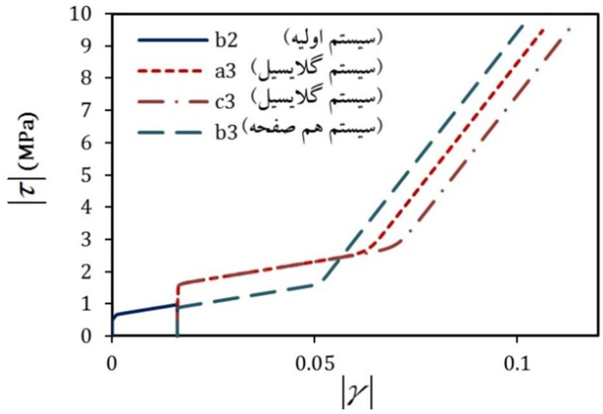
شکل 13 نمودارهای کرنش میکروسکوپیک- کرنش ماکروسکوپیک؛ کشش محوری در جهت [632]



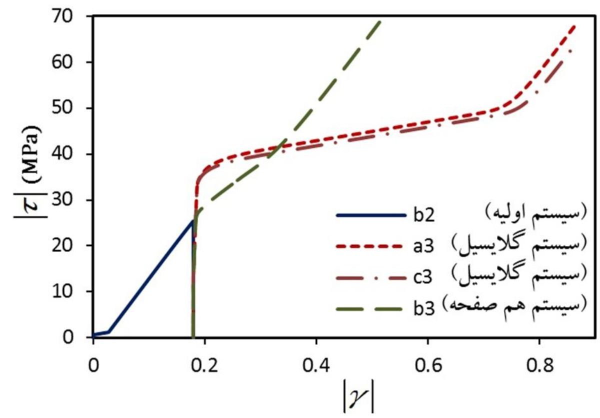
شکل 14 بیش‌بینی مدل جدید از چرخش شبکه در کشش محوری جهت [632]



شکل 15 بیش‌بینی مدل جدید از چرخش شبکه در کشش محوری جهت شماره 2



شکل 16 نتایج شبیه‌سازی آزمون دوگانه توسط مدل جدید (کشش نمونه اولیه در ناحیه اول)



شکل 17 نتایج شبیه‌سازی آزمون دوگانه توسط مدل جدید (کشش نمونه اولیه در ناحیه دوم)

نتایج شبیه‌سازی آزمون دوگانه توسط مدل کارسختی جدید در شکل 16 برای حالتی که نمونه اولیه در ناحیه اول باربرداری شده است و شکل 17 برای حالتی که در ناحیه دوم باربرداری گردیده، آورده شده است. جهت‌گیری بارگذاری برای نمونه‌های اولیه و ثانویه مطابق آزمون‌های تجربی دوگانه در شکل 3 انتخاب گردیده است. در مقایسه نمودارهای شکل 16 با شکل 3 و شکل 17 با شکل 4 توانایی این مدل در پیش‌بینی رفتار ماده کریستالی در آزمون دوگانه مشخص می‌گردد.

همانند آنچه که بسنی و وو بر آن تاکید داشتند، تسلیم برای تمام سیستم‌های ثانویه، پایین‌تر از تنش جریان سیستم اولیه در انتهای آزمون اولیه، رخ می‌دهد ($\tau_{0_s} < \tau_p$). تغییرات کارسختی سیستم هم‌صفحه در نمونه ثانویه تقریباً ادامه روند تغییرات کارسختی سیستم اولیه را دارد، گویی

تغییرشکل در همان سیستم اولیه ادامه یافته است. این امر در تمام آزمایش‌های مرجع [23] نیز مشاهده گردیده است. نمودارهای تنش-کرنش نمونه‌های ثانویه مربوط به سیستم‌های متقاطع در شکل 16 با شیب بسیار زیاد آغاز گردیده و با عبور از تنشی در حدود 1/6 برابر تنش جریان سیستم اولیه در انتهای آزمون اولیه ($\tau_r < 1.6\tau_p$)، وارد ناحیه لغزش آسان شده و پس از طی مقدار قابل قبولی لغزش (متناسب با نتایج آزمایشگاهی)، وارد ناحیه دوم می‌گردند. این روند در نمودارهای مربوط به سیستم‌های متقاطع در شکل 17 نیز قابل مشاهده است، با این تفاوت که تنش ورود به ناحیه لغزش‌آسان در حدود $1.4\tau_p$ بوده (متناسب با نتایج تجربی) و همچنین طول ناحیه لغزش‌آسان بیش از مقدار مشاهده شده در نتایج تجربی پیش‌بینی شده است. خطای رخ داده در پیش‌بینی طول ناحیه لغزش‌آسان، ناشی از ضعف روابط مربوط به کارسختی پنهان است.

7- نتیجه‌گیری

بسنی و وو با انجام بررسی‌های آزمایشگاهی تلاش نمودند مدل خود را بر اساس فرضیات مناسب‌تری بنا کنند. بنابراین در این مقاله ابتدا به استنتاج‌های آن‌ها از نتایج آزمایشگاهی پرداخته شد و سپس نتایج مدل ارائه شده توسط آن‌ها در شبیه‌سازی آزمایش‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفت. نادیده گرفتن کارسختی پنهان در مقابل خودسخت‌شوندگی و همچنین لحاظ نمودن برهمکنش‌های مختلف میان سیستم‌های لغزش، از اختلافات اصلی این مدل با مدل‌های دیگر است. در مدل‌های دیگر برای پوشش پدیده فراجهش، کارسختی پنهان بیشتر از خودسخت‌شوندگی لحاظ می‌شود. بسنی و وو با اشاره به وقوع ناحیه دوم در داخل مثلث استاندارد، استدلال نمودند که کارسختی پنهان کمتر از خودسخت‌شوندگی است. زیرا سیستم‌های ثانویه در موقعیتی که تنش کمتری نسبت به سیستم اولیه دارند، فعال شده‌اند. آن‌ها نه‌تنها کارسختی پنهان را کمتر از خودسخت‌شوندگی در نظر گرفتند، بلکه آن را بسیار کوچک و قابل صرف نظر فرض کردند. از طرفی بیان داشتند، سیستمی که فعالیت بیشتری داشته است، نرخ خودسخت‌شوندگی کمتری نسبت به سیستمی که فعالیت کمتری داشته است، دارد و بالعکس. بنابراین نرخ کارسختی سیستم‌های ثانویه را بسیار بیشتر از سیستم اولیه در نظر گرفتند.

در این تحقیق جهت بررسی مدل بسنی و وو ابتدا از نتایج شبیه‌سازی‌های انجام‌شده توسط آن‌ها استفاده گردید و سپس به سبب ناکافی بودن این نتایج، مدل بسنی و وو پیاده‌سازی شده و پس از اعتبارسنجی، نتایج آن در شبیه‌سازی آزمایش‌های مختلف استخراج گردید. از مزایای مدل بسنی و وو نسبت به دیگر مدل‌ها در شبیه‌سازی آزمایش تک‌لغزش می‌توان به پیش‌بینی ناحیه دوم در داخل مثلث استاندارد و فعالیت بسیار کم سیستم‌های ثانویه در شروع ناحیه دوم اشاره کرد. با این حال نقص‌های این مدل در مقایسه نتایج آن با نتایج تجربی مشخص گردید. این مدل در پیش‌بینی فراجهش و همچنین مسیر چرخش شبکه، به خصوص در جهت‌هایی که با خط تقارن فاصله زیادی دارند، با مشکل روبرو است. زیرا نرخ کارسختی شدید سیستم‌های ثانویه در موقعیت‌های نامناسبی کاسته شده و با فعالیت زیاد این سیستم‌ها اختلاف میان نتایج نظری و تجربی رقم می‌خورد. این ایرادات در فرمول‌بندی وابسته به زمان بیشتر نیز می‌گردد. در شبیه‌سازی آزمون دوگانه، هرچند این مدل همانند نتایج آزمایشگاهی، مقدار تنش اشباع اولیه در نمونه ثانویه را بیشتر از تنش انتهای آزمون اولیه پیش‌بینی می‌کند، ولی مقدار آن زیاد و غیر واقعی است. از طرف دیگر وقوع ناحیه لغزش‌آسان نیز در نمونه‌های ثانویه پیش‌بینی نگشته و حتی اختلاف قابل توجهی میان نتایج سیستم‌های هم‌صفحه و متقاطع وجود ندارد. این خطاها به سبب لحاظ نشدن کارسختی پنهان رخ می‌دهند.

در این پژوهش با توجه به خطاهای رخ داده در پیش‌بینی‌های مدل بسنی و وو، مدلی مناسب‌تر که توانایی پوشش بهتر نتایج تجربی را داشته باشد، ارائه گردید. در ارائه‌ی این مدل ابتدا با تعریف تنش اشباع ناحیه کارسخت شدید، فرض شد تا زمانی که تنش جریان کمتر از تنش اشباع ناحیه کارسخت شدید است، نرخ کارسختی زیاد بوده (ناحیه کارسخت شدید) و با عبور از آن، نرخ کارسختی، کمینه و متناظر با ناحیه لغزش‌آسان گردد. عامل اصلی افزایش تنش اشباع ناحیه کارسخت شدید در یک سیستم لغزش، فعالیت سیستم‌های دیگر در نظر گرفته شد. اثر فعالیت سیستم‌های مختلف بر تنش اشباع ناحیه کارسخت شدید با بررسی تنش اشباع اولیه نمونه‌های ثانویه در آزمون دوگانه قابل اندازه‌گیری است. نرخ کارسختی سیستم‌هایی که فعالیت کمی داشته‌اند و در ناحیه کارسخت شدید نیز قرار دارند، زیاد لحاظ گردید و همچنین فرض شد در صورتی که تنش جریان این سیستم‌ها به حد تنش فراجهش برسد، از نرخ کارسختی آن‌ها کاسته شود. تنش فراجهش با بررسی نقطه انتهایی فراجهش در آزمایش تک‌لغزش قابل تشخیص است. بر مبنای این فرضیات روابط خودسخت‌شوندگی مدل کارسختی جدید ارائه گردید.

توانایی بالای مدل کارسختی جدید در پوشش پدیده‌های آزمایشگاهی و همچنین پوشش ضعف‌ها و کاستی‌های مدل بسنی و وو، در مقایسه نتایج این مدل با نتایج تجربی مشخص گردید. از عیوب این مدل می‌توان به خطا در پیش‌بینی طول ناحیه لغزش‌آسان نمونه ثانویه در آزمون دوگانه در شرایطی که نمونه اولیه وارد ناحیه دوم شده است و همچنین دشواری تنظیم پارامترهای مربوط به کارسختی پنهان اشاره کرد. کاستی اصلی این مدل نیز در عدم پوشش ناحیه سوم است. در نهایت بنا بر برتری‌های مدل کارسختی جدید در این پژوهش، این مدل می‌تواند جایگزینی مناسب برای مدل بسنی و وو در مدل‌سازی رفتار کارسختی تک‌کریستال‌ها باشد، هرچند استفاده از آن در پیش‌بینی رفتار پلی‌کریستال‌ها نیاز به بررسی‌های بیشتر دارد.

8- مراجع

[1] J.R. Mayeur, I.J. Beyerlein, C.A. Bronkhorst, H.M. Mourad, B.L. Hansen, A Crystal Plasticity Study Of Heterophase Interface Character Stability Of Cu/Nb Bicrystals, *International Journal of Plasticity,* Vol. 48, pp. 72-91, 2013.

[2] J. H. Kim, M. Lee, D. Kim, F. Barlat, Numerical Procedures For Predicting Localization In Sheet Metals Using Crystal Plasticity, *Computational Materials Science,* vol. 72, pp. 107-115, 2013.

[3] S. Kweon, Damage at Negative Triaxiality, *European Journal of Mechanics A/Solids,* vol. 31, pp. 203-212, 2012.

[4] J. Kadkhodapour, A. Butz, S. Ziaei-Rad, S. Schmauder, A Micro Mechanical Study On Failure Initiation Of Dual Phase Steels Under Tension Using Single Crystal Plasticity Model, *International Journal of Plasticity,* vol. 27, pp. 1103-1125, 2011.

[5] A. Staroselsky, B. N. Cassenti, Creep, Plasticity, And Fatigue Of Single Crystal Superalloy, *International Journal of Solids and Structures,* vol. 48, pp. 2060-2075, 2011.

[6] W.B. Lee, Y.P. Chen, Simulation Of Micro-Indentation Hardness Of Fcc Single Crystals By Mechanism-Based Strain Gradient Crystal Plasticity, *International Journal of Plasticity,* vol. 26, pp. 1527-1540, 2010.

[7] A. Seeger, *Dislocations and Mechanical Properties of Crystals* New York: Wiley, 1957.

[8] Z. S. Basinski, Thermally Activated Glide In Face-Centred Cubic Metals And Its Application To The Theory Of Strain Hardening, *Philosophical Magazine,* vol. 4, pp. 393-432, 1959.

[9] P. B. Hirsch, *Internal Stresses and Fatigue in Metals,* Amsterdam: Elsevier, 1959.

[10] G. I. Taylor, The Mechanism Of Plastic Deformation Of Crystals. Part I. Theoretical, *Proceedings Of The Royal Society Of London A*, vol. 145, pp. 362-387, 1934

[11] K.S. Havner, A.H. Shalaby, A Simple Mathematical Theory of Finite Distortional Latent Hardening in Single Crystals, *Proceedings Of The Royal Society Of London A*, vol. 358, pp. 47-70, 1977.

[12] D. Peirce, R. J. Asaro, A. Needleman, An Analysis Of Nonuniform And Localized Deformation In Ductile Single Crystals, *Acta Metallurgica*, vol. 30, pp. 1087-1119, 1982.

[13] R. J. Asaro, Micromechanics of Crystals and Polycrystals, *Advances In Applied Mechanicsa*, vol. 23, pp. 1-115, 1983.

[14] Ti.-Y. Wu, John L. Bassani, C. Laird, Latent Hardening in Single Crystals I. Theory and Experiments, *Mathematical and Physical Sciences*, vol. 435, pp. 1-19, 1991.

[15] J. L. Bassani,T.-Y. Wu, Latent Hardening in Single Crystals II. Analytical Characterization and Predictions, *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences*, vol. 435, pp. 21-41, 1991.

[16] S. R. Kalidindi, C. A. Bronkhorst, L. Anand, Crystallographic Texture Evolution In Bulk Deformation Processing Of Fcc Metals, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 40, pp. 537-569, 1992.

[17] F. Zhang, A. F. Bower, R. K. Mishra, K.P. Boyle, Numerical simulations of necking during tensile deformation of aluminum single crystals, *International Journal of Plasticity*, vol. 25, pp. 49-69, 2009.

[18] E. H. Lee, Elastic-Plastic Deformations At Finite Strains, *Journal Of Applied Mechanics*, vol. 36, pp. 1-6, 1969.

[19] R. Hill, J. R. Rice, Constitutive Analysis Of Elastic-Plastic Crystals At Arbitrary Strain, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 20, pp. 401-413, 1972.

[20] A. F. Bower, *Applied Mechanics of Solids*, First Edittion, pp. 164-166, Boca Raton: CRC Press, 2010.

[21] R. J. Asaro, A. Needleman, Texture Development And Strain Hardening In Rate Dependent Polycrystals, *Acta Metallurgica*, vol. 33, pp. 923-953, 1985.

[22] R. HILL, Generalized Constitutive Relations For Incremental Deformation Of Metal Crystals By Multislip, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 14, pp. 95-102, 1966.

[23] P. J. Jackson, Z. S. Basinski, Latent Hardening And The Flow Stress In Copper Single Crystals, *Canadian Journal of Physics*, vol. 45, pp. 707-735, 1967.

[24] P. Franciosi, M. Berveiller, A. Zaoui, Latent Hardening In Copper And Aluminium Single Crystals, *Acta Metallurgica*, vol. 28, pp. 273-283, 1980.

[25] Y. Huang, *A User-Material Subroutine Incorporating Single Crystal Plasticity In The Abaqus Finite Element Program*, Thesis, Harvard University, Cambridge, 1991.

[26] B. Ramaswami, U. F. Kocks, B. Chalmers, Latent Hardening in Silver and an Ag-Au Alloy, *Transactions Of The Metallurgical Society Of AIME*, vol. 233, pp. 927-931, 1965.

[27] W. Vorbrugg, H. C. Goetting, C. Schwink, Work-Hardening and Surface Investigations on Copper Single Crystals Oriented for Multiple Glide, *Physica Status Solidi (B)*, vol. 46, pp. 257-264, 1971.

[28] P. Franciosi, A. Zaoui, Multislip Tests On Copper Crystals: A Junctions Hardening Effect, *Acta Metallurgica*, vol. 30, pp. 2141-2151, 1982.

[29] Z. S. Basinski, S. J. Basinski, Quantitative determination of secondary slip in copper single crystals deformed in tension, *Philosophical Magazine*, vol. 84, pp. 213-251, 2004.

[30] J. Garstone, R. W. K. Honeycombe, G. Greetham, Easy Glide Of Cubic Metal Crystals, *Acta Metallurgica*, vol. 4, pp. 485-494, 1956.

[31] T. E. Mitchell, P. R. Thornton, The work-hardening characteristics of Cu and α-brass single crystals between 4.2 and 500°K, *Philosophical Magazine*, vol. 8, pp. 1127-1159, 1963.