



بهینه‌سازی روش مکمل متعامد طبیعی جداشده با استفاده از مفاهیم فنر مجازی

علی رئوفیان¹، افشین تقوایی پور²، علی کمالی ایگلی^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

* صندوق پستی 15875-4413، aut.ac.ir، alikamalie@aut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 11 دی 1395

پذیرش: 11 خرداد 1396

ارائه در سایت: 08 تیر 1396

کلید واژگان:

دینامیک مستقیم

ربات‌های موازی

فنر مجازی

روش مکمل متعامد طبیعی جداشده

چکیده

در پژوهش پیش‌رو به معرفی روشی بهینه‌شده در تحلیل دینامیک مستقیم ربات‌های موازی سریع پرداخته شده است. بدین منظور با الهام‌گیری از روش فنر مجازی لاگرانژ، روش نیوتنی مکمل متعامد طبیعی جداشده، اصلاح شده است. پیشتر در خصوص روش‌های انرژی از مفاهیم فنرهای مجازی استفاده شده است. استفاده از روش فنر مجازی در روش نیوتنی مکمل متعامد طبیعی جداشده شیوه‌ای جدید که در این پژوهش معرفی شده است. به منظور شفاف‌سازی روش اصلاح شده و مقایسه ابعاد مختلف آن‌ها از یک مکانیزم صفحه‌ای 3RRR به عنوان مدل مرجع استفاده شده است. با توجه به نتایج به‌دست آمده فرایند استخراج معادلات در روش دینامیکی جدید بسیار کم هزینه‌تر است. این در حالی است که دقت این روش مشابه روش فنر مجازی لاگرانژ و همچنین بر خلاف روش‌های انرژی قادر به محاسبه عکس‌العمل‌های قیدی نیز است. از سویی دیگر روش اصلاح شده نسبت به روش مکمل متعامد طبیعی جدا شده زمان حل بیشتری دارد و برای محاسبات ریل تایم¹ مناسب به نظر نمی‌رسد. قیود سیستم در سیستم‌های حلقه بسته باید به گونه‌ای تعریف شده باشد که بیانگر تغییرات طولی فنرهای مجازی باشد، در غیر این صورت روش پیشنهادی پاسخ صحیح به‌دست نمی‌دهد.

A Modification in the Decoupled Natural Orthogonal Complement Method, Using Virtual Spring Concepts

Ali Raoofian¹, Afshin Taghvaeipour¹, Ali Kamali Eigoli^{1*}

1- Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran.

* P.O.B. 15875-4413 Tehran, Iran, alikamalie@aut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 January 2016
Accepted 09 June 2016
Available Online 29 June 2017

Keywords:

Forward dynamics
Parallel robots
Virtual spring
Decoupled natural orthogonal complement method

ABSTRACT

In this study, a modified method has been introduced for forward dynamic analysis of fast parallel robots. For this purpose, inspired by the Lagrange-Virtual Spring (LVS) method, the Decoupled Natural Orthogonal Complement (DeNOC) method is modified which is a Newtonian based method. So far, virtual springs have already been used in energy based methods. However, using the virtual springs in DeNOC method is a novel approach which is proposed in current study. In order to clarify the advantages of Modified Decoupled Natural Orthogonal Complement (MDeNOC) method, a planar 3RRR mechanism is chosen as case study. According to the results, the process of deriving the equations of motion is much less costly while the accuracy of MDeNOC is similar to the LVS and unlike the energy methods; the modified method is also able to calculate the constraint reactions, as well. On the other hand, the calculation time of MDeNOC is much more than the DeNOC and hence, is not suitable for real time calculations. Also, in closed loop systems, constraints must be defined in such a way that expresses the virtual springs' longitudinal changes; otherwise, MDeNOC will not give proper results.

1- مقدمه

سرعت و شتاب بالا نیستند. این در حالی است که موتورهای و عملگرهای ربات‌های موازی در پایه ثابت شده و نیازی به استفاده از بازوهای مستحکم و با جرم زیاد در طراحی آن‌ها نیست. اگرچه ربات‌های موازی سبک، سریع و پرشتاب هستند، اما به دلیل وجود قیود سینماتیکی در آن‌ها محاسبات سینماتیکی و دینامیکی آن‌ها با چالش‌های جدی‌تری روبرو است و در بسیاری از موارد استخراج فرم بسته برای حل معادلات یادشده تقریباً غیرممکن است.

روش‌های گوناگونی جهت استخراج معادلات دینامیکی وجود دارد. از این قبیل می‌توان به روش‌های بر پایه انرژی مانند لاگرانژ، اصل همیلتون، اصل

استفاده از ربات‌های موازی که به نوعی مکانیزم‌های حلقه بسته هستند، در سال‌های اخیر افزایش چشمگیری داشته است. دلیل این امر را می‌توان در موارد گوناگون استفاده از این دست ربات‌ها در صنایع جستجو کرد. به دلیل سرعت و شتاب بالای ربات‌های موازی بسیاری از صنایع در بخش‌های بسته‌بندی و گردآوری نیاز جدی به این‌گونه ربات‌ها احساس می‌کنند. مکانیزم‌های حلقه باز مانند ربات‌های سری به دلیل استفاده از موتور و عملگر² در مفصل‌ها دارای جرم و اینرسی بالایی هستند و قادر به تولید

¹ Real time

² Actuator

Please cite this article using:

A. Raoofian, A. Taghvaeipour, A. Kamali Eigoli, A Modification in the Decoupled Natural Orthogonal Complement Method, Using Virtual Spring Concepts, Modares Mechanical Engineering, Vol. 17, No. 6, pp. 377-384, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

کار مجازی و روش‌های برداری نظیر نیوتن- اوپلر و روش مکمل متعامد طبیعی اشاره کرد [2,1]. از آنجا که معادلات دینامیک استخراج شده از روش‌های گفته شده غیرخطی و کوپل هستند، حل تحلیلی این دست از معادلات غیرممکن به نظر می‌رسد. برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی کوپل از روش‌های عددی مختلفی استفاده می‌گردد. متغیرهای موجود در معادلات در تحلیل ربات‌های موازی به دلیل وجود قیود سینماتیکی حلقه بسته مستقل نیستند و پاسخ‌های به دست آمده باید معادلات قیدی را علاوه بر معادلات دیفرانسیل ارضا کند. در نتیجه روش‌های مختلفی از سوی محققان برای حل این گونه معادلات پیشنهاد شده است. معادلات دینامیکی به دست آمده از این روش‌ها از نظر تئوری یکسان است، ولی از لحاظ هزینه محاسباتی تفاوت دارند [4,3].

روش نیوتن- اوپلر شناخته شده ترین روش تحلیل و بررسی سیستم‌های دینامیکی است. برای نمونه یزدانی و همکاران وی در [5] به تحلیل دینامیک ربات‌های موازی با استفاده از روش نیوتن- اوپلر پرداخته‌اند. سالاریه نیز با استفاده از روش یاد شده دینامیک یک ربات اسکلت خارجی را تحلیل کرده است [6]. استفاده از این روش منجر به محاسبه تمامی عکس‌العمل‌های قیدی می‌شود که ممکن است لزوماً نیازی به آن‌ها نباشد؛ بنابراین نیازمند صرف زمان مازاد جهت محاسبات نیروها و گشتاورهای مقاوم است. تاکنون محققان بسیاری در پی معرفی روش‌هایی بودند تا بدون نیاز به محاسبه عکس‌العمل‌های قیدی از روش نیوتن- اوپلر جهت استخراج معادلات دینامیکی بهره جویند. اساس این روش‌ها بر پایه استفاده از ماتریس تبدیل سرعت¹ است. ستون‌های ماتریس یاد شده فضای پوچ² ماتریس قیود سرعتی³ را تشکیل می‌دهند و می‌توان با ضرب ماتریس تبدیل سرعت در ماتریس قیود سرعتی این ترم‌ها را از دسته معادلات حذف کرد. ماتریس تبدیل سرعت رابطی میان بردار سرعت مرکز جرم هر لینک (خطی و دورانی) با بردار سرعت‌های مفصلی⁴ است [7]. پس از آن انجس و لی⁵ مکمل متعامدی را از قیود سرعتی استخراج کردند که منتهی به روش «مکمل متعامد طبیعی» شد [8]. در مراجع [10,9] ساه⁶ ماتریس تبدیل سرعت را برای ربات‌های سری به دو ماتریس جداگانه تجزیه و روش خود را «مکمل متعامد طبیعی جدا شده» نام گذاری کرد. روش یاد شده علاوه بر بازگشتی⁷ بودن دارای مرتبه حداقلی⁸ نیز هست. هیچ یک از روش‌های دیگری که تا پیش از این روش ارائه شده بودند دو ویژگی گفته شده را با هم نداشت. ماتریس اینرسی موجود در معادلات حرکت با تجزیه شدن ماتریس تبدیل سرعت به صورت تحلیلی تجزیه و در نتیجه آن الگوریتم‌هایی برای محاسبه دینامیک مستقیم سیستم‌ها به صورت بازگشتی ارائه شد [11]. در سال 2001 میلادی ساه و شیلن⁹ با اعمال تصحیحاتی در روش مکمل متعامد طبیعی جدا شده توانستند این روش را برای ربات‌های موازی نیز به کار ببرند [12]. پس از آن خان¹⁰ با استفاده از روش یاد شده به تحلیل دینامیکی یک ربات صفحه‌ای موازی 3RRR پرداخت [4]. دیمیتروو¹¹ نیز با استفاده از همین روش به تحلیل ربات‌های فضایی پرداخت [13]. راتو و همکاران وی نیز با به کارگیری فرایندی مشابه

مدل دینامیکی را برای دسته خاصی از ربات‌های موازی به نام هگزاسلاید¹² ارائه کردند [14].

روش فنر مجازی نخستین بار توسط ونگ¹³ و همکاران جهت مدل سازی دینامیکی سیستم‌های دارای حلقه بسته معرفی شد [15]. این روش جهت ساده سازی فرایند به دست آوردن معادلات حرکت سیستم‌ها پیشنهاد شد. از فنر و دمپرهای مجازی برای تحلیل ربات‌های سری دارای لینک و مفصل‌های انعطاف پذیر نیز استفاده شده است تا انعطاف پذیری آن‌ها را به صورت جدا¹⁴ مدل کنند. منطق به کار گرفته شده در این روش باز کردن زنجیرهای سینماتیکی سیستم و اتصال آن‌ها با فنرهایی با ضریب کشسانی بسیار زیاد است. در نتیجه دوباره حلقه بسته سینماتیکی سیستم به وجود می‌آید. با استفاده از این روش وابستگی متغیرها و مختصه‌های تعمیم یافته سیستم به هم از بین می‌رود و به جای آن ترم انرژی پتانسیل کشسانی در معادلات لاگرانژ ظاهر می‌شود. معادلات به دست آمده جبری نیستند و فرایند استخراج معادلات نیازمند صرف زمان کمتری است، چرا که نیازی به استخراج روابط قیدی موجود در سیستم نیست. سادگی موجود در این روش سبب استفاده گسترده آن در دهه اخیر شد. ونگ و همکاران روش فنر مجازی را بر یک مکانیزم چهار میله‌ای صفحه‌ای اعمال کردند و تأثیر مقادیر مختلف ضریب کشسانی فنر به کار رفته را مورد بررسی قرار دادند [15]. خان در [17,16] روش فنر مجازی، تثبیت قیود¹⁵ و ضرایب لاگرانژ (با استفاده از روش حذف ضرایب) را برای یک مکانیزم چهار میله‌ای صفحه‌ای با یکدیگر مقایسه کرده است.

در پژوهش پیش رو نخست روش مکمل متعامد طبیعی جدا شده (م.م.ط.ج) معرفی و تبیین می‌شود، سپس با الهام از رابطه تحلیلی میان روش ضرایب لاگرانژ و ف.م.ل. به معرفی روش مکمل متعامد طبیعی جدا شده اصلاح شده (م.م.ط.ج.ا) پرداخته خواهد شد. کاربرد فنر مجازی در روش نیوتونی م.م.ط.ج. شیهوای جدید از محاسبه دینامیک سیستم‌های مقید است که در تحقیق پیش رو بررسی خواهد شد. از مزیت‌های روش م.م.ط.ج.ا. می‌توان به هزینه محاسباتی کمتر استخراج معادلات نسبت به م.م.ط.ج. و دقت محاسبات مشابه ف.م.ل. اشاره کرد. با استفاده از م.م.ط.ج.ا. قابلیت محاسبه عکس‌العمل‌های قیدی موجود در مسئله نیز وجود دارد. این در حالی است که روش ف.م.ل. از چنین ویژگی برخوردار نیست. سپس نشان داده خواهد شد قیود سیستم و نحوه بیان آن‌ها نیز نقشی اساسی ایفا می‌کنند و روش جدید ارائه شده تنها هنگامی به درستی عمل می‌کند که قیود تعریف شده دارای مفهوم فیزیکی باشند. در انتها روش‌های م.م.ط.ج. و م.م.ط.ج. اصلاح شده بر یک ربات صفحه‌ای 3RRR اعمال خواهند شد و دقت روش جدید ارائه شده و تأثیر نحوه تعریف قیود سیستم مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

2- روش مکمل متعامد طبیعی جدا شده اصلاح شده

روابط پیش رو براساس تئوری پیچه¹⁶ نوشته شده‌اند. براساس این تئوری بردارهای پیچه¹⁷ و رنج¹⁸ به صورت رابطه (1) بیان می‌شوند.

$$t_i = \begin{bmatrix} \omega_i \\ v_i \end{bmatrix}; \quad w_i = \begin{bmatrix} f_i \\ \tau_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

¹² Hexaslide

¹³ Wang

¹⁴ Lump

¹⁵ Stabilization Method

¹⁶ Screw Theory

¹⁷ Twist Vector

¹⁸ Wrench Vector

¹ Velocity Transformation Matrix

² Null Space

³ Velocity Constraint Matrix

⁴ Joint Velocity Vector

⁵ Angeles and Lee

⁶ Saha

⁷ Recursive

⁸ Minimal Order

⁹ Schiehlen

¹⁰ Khan

¹¹ Dimitrov

فرم سرعتی قیود سیستم در یک سیستم حلقه بسته متشکل از z حلقه باز را میتوان به صورت همگن خطی^۴ رابطه (3) نشان داد [18].

$$\dot{c} = Kt = 0; \quad t = [t_1^T \dots t_z^T]^T \quad (3)$$

در آن، K و t به ترتیب ماتریس ژاکوبین قیود و بردار پیچ کلی سیستم است [17].

بردار پیچ هر شاخه را می توان با استفاده از ماتریس مکمل متعامد طبیعی^۵ T^i برحسب متغیرهای مفصلی همان شاخه نوشت. رابطه متغیرهای مفصلی که همان مختصات تعمیم یافته سیستم نیز هستند را با بردار پیچ کلی هر شاخه می توان به صورت رابطه (4) نوشت.

$$t^i = T^i \dot{q}^i; \quad t^i = [t_1^T \dots t_k^T]^T \quad (4)$$

در رابطه (4)، $\dot{q}$ بردار سرعت تعمیم یافته سیستم است. با جای گذاری رابطه (4) در رابطه (3) می توان فرم سرعتی قیود سیستم را به شکل رابطه (5) خلاصه کرد.

$$\dot{c} = Kt = KT\dot{q} = A\dot{q} = 0 \quad (5)$$

در رابطه (5)، $A = KT$ و به ماتریس ژاکوبین قیود اطلاق می گردد. در روش م.م.ط.ج. ماتریس مکمل متعامد طبیعی به صورت رابطه (6) به دو ماتریس جداگانه تجزیه می شود.

$$t^i = T^i \dot{q}^i = N_d^i \dot{q}_d^i + N_f^i \dot{q}_f^i \quad (6)$$

در آن N_d^i و N_f^i مکمل متعامد جدا شده است. به ترتیب ماتریس های پایین مثلثی و قطری است. با مشتق گیری از رابطه (6) می توان رابطه (7) را به صورت زیر نوشت.

$$\dot{t}^i = \dot{N}_d^i \dot{q}_d^i + N_d^i \ddot{q}_d^i + \dot{N}_f^i \dot{q}_f^i + N_f^i \ddot{q}_f^i \quad (7)$$

در سیستم های حلقه بسته کار نیروهای مربوط به قیود هولونوم به صورت رابطه (8) صفر است.

$$(w^c)^T t^i = 0 \quad (8)$$

با جای گذاری رابطه (4) در رابطه (8) به صورت رابطه (9) نتیجه می شود.

$$(w^c)^T T^i \dot{q}^i = 0 \quad (9)$$

با توجه به این که متغیرهای مفصلی یک حلقه باز نسبت به یکدیگر مستقل هستند، از رابطه (9) می توان نتیجه گرفت $(w^c)^T T^i = 0$ یا به عبارت دیگر رابطه (10) است.

$$(T^i)^T w^c = 0 \quad (10)$$

در صورتی که بردار قیود سیستم به گونه ای تعریف شده باشد که بیانگر تغییرات طولی فنرهای مجازی باشد، بردار نیروهای اعمالی توسط فنرها برابر است با $f_s = K_s c$ که K_s ماتریس قطری ضرایب سختی فنرهای مجازی سیستم است. در شرایط ایده آل باید $c = 0$ باشد. با توجه به آن که عناصر بردار f_s کراندار هستند، جهت برقراری $c = 0$ ، باید عناصر ماتریس K_s به بی نهایت میل کنند. در شرایطی که مقادیر عناصر K_s بسیار بزرگ هستند، فنرهای به کار رفته چون مفصل های سیستم حلقه بسته عمل می کنند و کار رنج های اعمالی توسط فنرها w^{cs} ، مانند رنج های قیدی صفر است. کار این رنج ها بر بردار پیچ کلی t برای هر حرکت دلخواه به صورت رابطه (11) صفر است.

$$t^T w^{cs} = 0; \quad w^{cs} = [w^{cs1} \dots w^{csj}]^T \quad (11)$$

با توجه به سختی زیاد فنرها رابطه (3) نیز قابل اعمال بر سیستم است. در صورتی که طرفین رابطه (3) ترانزاده شوند و سپس در بردار f_s پس ضرب شوند می توان به صورت رابطه (12) نوشت.

$$t^T K^T K_s c = 0 \quad (12)$$

با مقایسه روابط (12,11) رابطه (13) نتیجه می شود.

$$w^{cs} = K^T K_s c \quad (13)$$

در آن، ω_i و v_i به ترتیب بردار سه بعدی سرعت زاویه ای و بردار سه بعدی سرعت خطی مرکز جرم لینک i هستند. n_i و f_i نیز به ترتیب بردار سه بعدی مماس و نیروهای وارد بر لینک i هستند.

در روش م.م.ط.ج.ا. برای استخراج معادلات حرکت سیستم های دینامیکی حلقه بسته از یک الگوی دو مرحله ای استفاده می شود که مشابه روش فنر مجازی لاگرانژ است. در مرحله نخست ابتدا حلقه های بسته سیستم باز و پس از آن معادلات نیوتن-اولر برای هر شاخه به صورت جداگانه نوشته می شود. شاخه های جدانشده توسط فنرهای مجازی دوباره به یکدیگر متصل می شوند. با افزایش ضریب سختی فنرها قیودی که سبب بسته بودن حلقه هاست دوباره برقرار می شود. فرایند گفته شده را می توان به صورت شماتیک در شکل 1 مشاهده کرد.

در یک سیستم چند جسمی حلقه بسته متشکل از z حلقه باز، معادلات نیوتن-اولر حلقه باز i -ام را می توان به صورت رابطه (2) نشان داد [18].

$$M^i \ddot{t}^i = -\dot{M}^i \dot{t}^i + w^{A^i} + w^{G^i} + w^{C^i} + w^{cs^i} \quad (2)$$

با فرض این که در هر حلقه باز، k میله^۱ صلب وجود داشته باشد، متغیرهای موجود در رابطه (2) به صورت زیر است.

$$6k \times 6k \text{ ماتریس جرم با ابعاد } M^i$$

$$6k \times 6k \text{ بردار } t^i = [t_1^T \dots t_k^T]^T \text{ بعدی پیچ}$$

$$6k \text{ بردار } w^{C^i} \text{ بعدی رنج های قیود مفصلی}^2$$

$$6k \text{ بردار } w^{cs^i} \text{ بعدی رنج های فنرهای مجازی موجود در سیستم}$$

$$6k \text{ بردار } w^{A^i} \text{ بعدی رنج های عملگرها}^3$$

$$6k \text{ بردار } w^{G^i} \text{ بعدی سایر رنج های موجود در مسئله (از قبیل جاذبه زمین و ...)}$$

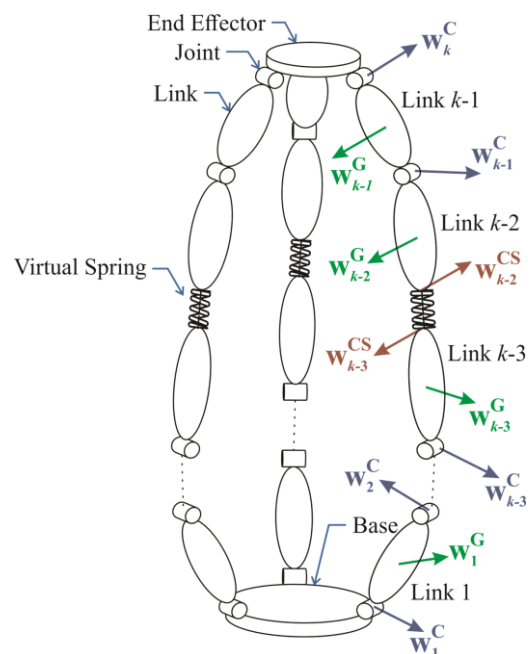


Fig. 1 Incorporating virtual springs in modified decoupled natural orthogonal complement method and the corresponding wrenches of one chain with k links

شکل 1 به کارگیری فنرهای مجازی در روش مکمل متعامد طبیعی جدانشده و رنج های معادل وارد بر یک شاخه متشکل از k میله صلب

¹ Link

² Joint Constraints

³ Actuators

⁴ Linear Homogeneous Form

در هر بازه زمانی نیاز به حل سینماتیک مستقیم سیستم است. برخلاف روش م.م.ط.ج. به دلیل وجود فنر در روش م.م.ط.ج. وابستگی مختصات سیستم به یکدیگر حذف می‌شود و در روش م.م.ط.ج. نیازی به محاسبه سینماتیک مستقیم در هر بازه زمانی نیست. نتایج هر بازه زمانی شرایط اولیه بازه زمانی بعدی را تشکیل می‌دهند، همچنین حداقل‌سازی معادلات در روش مکمل متعامد طبیعی جداشده با استفاده از ماتریس ژاکوبین قیود و نرخ زمانی تغییرات آن صورت می‌گیرد. در روش م.م.ط.ج. نیازی به محاسبه ماتریس ژاکوبین و نرخ تغییرات آن نیست. محاسبه ماتریس‌های یادشده در روش مکمل متعامد طبیعی جدا شده نیازمند صرف زمان قابل توجهی است که در روش جدید پیشنهادی حذف شده است.

3- مدل مرجع: مکانیزم صفحه‌ای 3RRR

شماتیک مکانیزم صفحه‌ای 3RRR در شکل 2 نشان داده شده است. سیستم سه درجه آزادی مورد نظر دارای سه شاخه متقارن است که هر شاخه با اندیس‌های I, II و III نشان داده می‌شود. هر سه شاخه سکوی ثابت B^3 (زمین) را به سکوی متحرک P^4 متصل می‌کنند. سکوی متحرک یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع S_P است که انتهای هر شاخه به رئوس آن لولا شده‌اند. تمامی مفصل‌های مکانیزم از نوع لولاست. مفصل‌های ثابت و محرک هر شاخه به ترتیب با O^I , O^{II} و O^{III} نشان داده شده‌اند و بر رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع بزرگ‌تر به ضلع S_B قرار گرفته‌اند. باقی مفصل‌ها غیرفعال است.

هر شاخه نیز از دو میله با طول‌های l_1 و l_2 تشکیل شده است (شکل 2). جرم و ممان اینرسی حول محور عمود بر صفحه حرکت هر لینک به ترتیب m_i و I_i در $i = 1, 2$ در نظر گرفته شده است. جرم و ممان اینرسی سکوی متحرک نیز به ترتیب با m_P و I_P مشخص می‌شوند.

جهت تحلیل دینامیک مستقیم مکانیزم پیش‌رو با استفاده از روش م.م.ط.ج. همان‌طور که در بخش 2 اشاره شد، نخست باید حلقه‌های بسته سیستم باز شود؛ بنابراین مانند شکل 3 ابتدا اتصال سکوی متحرک به سه شاخه باز شده و با استفاده از فنرهای مجازی دوباره شاخه‌ها به سکوی متحرک متصل شده‌اند. در حالت کنونی تمامی مختصات تعمیم‌یافته سیستم نسبت به یکدیگر مستقل و بردار مختصات تعمیم‌یافته سیستم به صورت

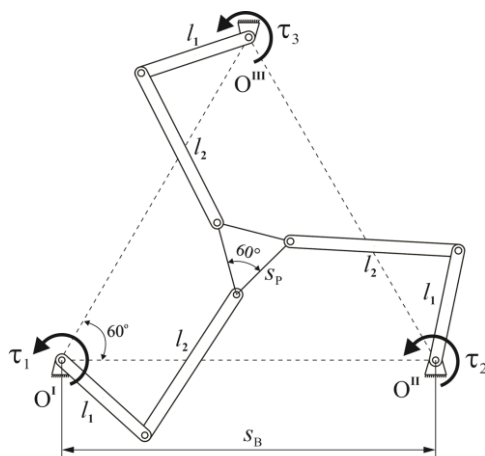


Fig. 2 The 3RRR planar mechanism

شکل 2 مکانیزم صفحه‌ای 3RRR

حال به پیش ضرب $(T^i)^T$ در رابطه (2) و با توجه به رابطه (10) می‌توان رابطه (14) را نوشت.

$$(N_d^i)^T (N_f^i)^T M^i \ddot{t}^i = -(N_d^i)^T (N_f^i)^T \dot{M}^i \dot{t}^i + \tau^A^i + \tau^G^i + (T^i)^T W^{cs^i} \quad (14)$$

در آن $\tau^A^i = (N_d^i)^T (N_f^i)^T W^A^i$ و $\tau^G^i = (N_d^i)^T (N_f^i)^T W^G^i$ است. حال با جای‌گذاری مقدار $\ddot{t}^i$ از رابطه (7) در رابطه (14) و مرتب‌سازی حاصل، رابطه (15) به‌دست خواهد آمد.

$$(N_d^i)^T (N_f^i)^T [M^i \ddot{N}_d^i \ddot{q}^i + (M^i \dot{N}_d^i \dot{N}_d^i + M^i \dot{N}_f^i \dot{N}_d^i + M \dot{N}_f^i \dot{N}_d^i) \dot{q}^i] = \tau^A^i + \tau^G^i + (T^i)^T W^{cs^i} \quad (15)$$

رابطه (15) را می‌توان به حالت خلاصه به صورت رابطه (16) نوشت.

$$I^i \ddot{q}^i + C^i \dot{q}^i = \tau^A^i + \tau^G^i + (T^i)^T W^{cs^i} \quad (16)$$

که در آن رابطه (17) برقرار است.

$$I^i = (N_d^i)^T (N_f^i)^T M^i N_d^i N_d^i \quad (17)$$

$$C^i = (N_d^i)^T (N_f^i)^T (M^i \dot{N}_d^i \dot{N}_d^i + M^i \dot{N}_f^i \dot{N}_d^i + M \dot{N}_f^i \dot{N}_d^i)$$

I^i و C^i به ترتیب ماتریس اینرسی تعمیم‌یافته¹ و ماتریس نیروهای گریز از مرکز و کوریولیس² نام دارند [6].

همان‌طور که پیش‌تر توضیح داده شد شاخه‌های باز شده سیستم توسط فنرهای مجازی به یکدیگر متصل می‌شوند. با توجه به این‌که نیروهای وارده از طرف هر فنر به دو شاخه متصل به آن برابر است، معادلات حرکت به‌دست‌آمده از تمامی شاخه‌ها را می‌توان به صورت رابطه (17) مرتب کرد.

$$\begin{bmatrix} [I\ddot{q} + C\dot{q}]^1 \\ \vdots \\ [I\ddot{q} + C\dot{q}]^j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [\tau^A + \tau^G]^1 \\ \vdots \\ [\tau^A + \tau^G]^j \end{bmatrix} = T^T W^{cs} \quad (18)$$

که در آن رابطه (18) به صورت زیر است.

$$T = \text{blkdiag}(T^i); \quad W^{cs} = [W^{cs^1} \quad \dots \quad W^{cs^j}]^T \quad (19)$$

در رابطه (18)، T ماتریسی است که T^i عناصر روی قطر آن را تشکیل می‌دهند و سایر عناصر آن صفر است.

با فرض به میزان کافی سخت‌بودن فنرهای موجود در سیستم حاصل جای‌گذاری رابطه (13) در رابطه (17) برابر با رابطه (19) است.

$$\begin{bmatrix} [I\ddot{q} + C\dot{q} - \tau^A - \tau^G]^1 \\ \vdots \\ [I\ddot{q} + C\dot{q} - \tau^A - \tau^G]^j \end{bmatrix} = T^T K^T K_s C = A^T K_s C \quad (20)$$

رابطه‌ای که در [17] برای روش مکمل متعامد طبیعی جداشده استخراج شده و به صورت رابطه (20) است.

$$\begin{bmatrix} [I\ddot{q} + C\dot{q} - \tau^A - \tau^G]^1 \\ \vdots \\ [I\ddot{q} + C\dot{q} - \tau^A - \tau^G]^j \end{bmatrix} = A^T \lambda \quad (21)$$

در رابطه (20)، λ بردار ضرایبی است که معادلات دینامیکی شاخه‌های سیستم را به یکدیگر مرتبط می‌کند و سبب برقراری قیود سیستم می‌شود. با مقایسه روابط (20,19) می‌توان دریافت در صورتی که در روش مکمل متعامد طبیعی جدا شده به جای متغیر λ عبارت $K_s C$ جای‌گذاری شود، رابطه دینامیکی روش م.م.ط.ج. حاصل می‌شود. ماهیت بردار قیود C نکته حائز اهمیت در این قسمت است. در فرایند استخراج معادلات دینامیکی روش م.م.ط.ج. بردار قیود C بیانگر تغییرات طولی فنرهای مجازی است. در صورتی که قیود به گونه‌ای دیگر بیان شوند پاسخ به‌دست‌آمده از روش م.م.ط.ج. صحیح نخواهد بود.

با توجه به این‌که روش مکمل متعامد طبیعی معرفی شده در [17] بازگشتی و حداقلی (با حداقل تعداد معادلات دیفرانسیل ممکن حل می‌شود)

³ Base

⁴ Moving Platform

¹ Generalized Inertia Matrix

² Matrix of Centrifugal and Coriolis Forces

رابطه (21) است.

$$q = [\theta_1^I \ \theta_2^I \ \theta_1^{II} \ \theta_2^{II} \ \theta_1^{III} \ \theta_2^{III} \ x \ y \ \theta_p]^T \quad (22)$$

در هر شاخه و برای هر میله یک بردار مکان دو بعدی d_i تعریف می‌شود که واصل محور مفصلی i -ام به مرکز جرم میله i -ام است. بردار دوبعدی r_i نیز به صورت واصل مرکز جرم میله i -ام به محور مفصلی میله $i+1$ تعریف می‌شود. بردارهای یادشده برای شاخه II در شکل 3 نشان داده شده است. مرکز جرم هر میله نیز در مرکز سطح آن فرض می‌شود. رابطه میان پیچیه دو لینک متوالی را می‌توان به صورت رابطه (22) نشان داد [17].

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= B_{i+1,i} t_i + p_{i+1} \dot{\theta}_{i+1} \\ B_{i+1,i} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ E(r_i + d_{i+1}) & 1 \end{bmatrix} \\ p_{i+1} &= \begin{bmatrix} 1 \\ E d_{i+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

1 ماتریس واحد 2×2 و $0^T = [0 \ 0]$ است. به ماتریس $B_{i+1,i}$ و p_{i+1} به ترتیب ماتریس توزیع پیچیه¹ و ماتریس مولد پیچیه² اطلاق می‌شود [17]. در هر شاخه رابطه بین t_1^j و t_2^j براساس رابطه (22) به صورت رابطه (23) خواهد بود.

$$t_2^j = B_{21}^j t_1^j + p_2^j \dot{\theta}_2^j \quad j = I, II, III \quad (24)$$

از سویی دیگر رابطه (24) به شرح زیر است.

$$t_1^j = p_1^j \dot{\theta}_1^j \quad j = I, II, III \quad (25)$$

با توجه به روابط (24,23,6) ماتریس‌های N_d^j و N_l^j برای هر شاخه به صورت رابطه (25) خواهد بود.

$$N_l^j = \begin{bmatrix} 1_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ B_{21}^j & 1_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad N_d^j = \begin{bmatrix} p_1^j & 0_{3 \times 1} \\ 0_{3 \times 1} & p_2^j \end{bmatrix} \quad j = I, II, III \quad (26)$$

به صورت مشابه برای سکوی متحرک نیز می‌توان رابطه (26) را نوشت.

$$t_p = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}_p]^T \quad (27)$$

بنابراین رابطه (27) به شرح زیر است.

$$N_l^p = N_d^p = 1_{3 \times 3} \quad (28)$$

با توجه به اتصال شاخه‌ها توسط فنرهای مجازی سیستم دارای 9 مشخصات تعمیم‌یافته مستقل است (رابطه (21)). از آنجایی که مکانیزم صفحه‌ای 3RRR دارای 3 درجه آزادی است، 6 رابطه قیدی در مسئله وجود دارد که تغییر طول‌های فنرهای مجازی در راستای افقی و عمودی است؛ بنابراین c یک بردار 6×1 بعدی است و با استفاده از رابطه (28) می‌توان ماتریس

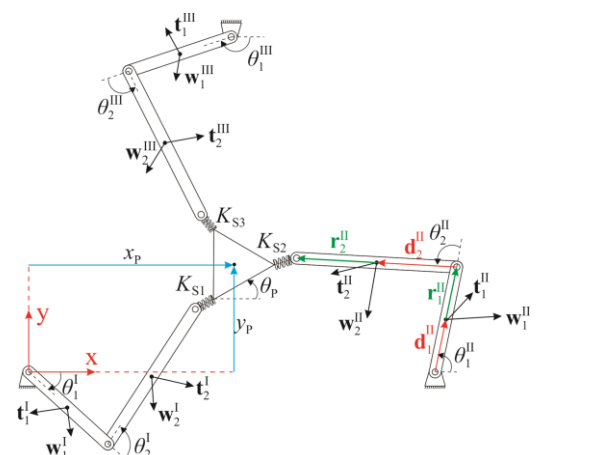


Fig. 3 Incorporating virtual springs in order to connect the cut open chains

شکل 3 به‌کارگیری فنر مجازی جهت اتصال شاخه‌های باز سیستم

ژاکوبین قیود را به‌دست آورد.

$$A = \frac{\partial c}{\partial q} \quad (29)$$

4- نتایج

جهت استخراج پاسخ دینامیکی سیستم نخست باید ورودی‌های مسئله مشخص شوند. ورودی‌ها متشکل از شرایط اولیه و گشتاورهای ورودی موتورهایست. شرایط اولیه با توجه به مسیر حرکت³ مرکز جرم سکوی متحرک و سینماتیک سیستم به‌دست می‌آید. برای استخراج گشتاورهای ورودی نخست روابط دینامیک معکوس ربات با استفاده از روش مکمل متعامد طبیعی استخراج و گشتاورهای مورد نیاز موتورها (واقع در مفصل‌های 0^I , 0^{II} و 0^{III} در شکل 2) برای مسیر حرکتی استخراج شده است.

مسیر مورد نظر باید به گونه‌ای انتخاب شود که خود و مشتقات اول و دوم آن علاوه بر پیچیدگی نسبی دارای پیوستگی نیز باشند تا از اعمال شوک به سیستم جلوگیری شود. یکی از این مسیرها مسیر رزی⁴ شکل است. مسیر رزی شکل به‌کار گرفته شده با ضابطه به فرم قطبی رابطه (29) نشان داده می‌شود.

$$r = r_0 \cos(2\theta) \quad (30)$$

مسیر حرکتی ربات 3RRR را می‌توان در شکل 4 مشاهده نمود.

ابعاد و جرم میله‌های مکانیزم مورد نظر به همراه مشخصات ابعادی مسیر در جدول 1 مشخص شده است. مشخصات ابعادی و جرمی مکانیزم مانند داده‌های موجود در [17] در نظر گرفته شده است.

جهت ارزیابی دقت روش مکمل متعامد طبیعی جدادشده اصلاح شده، لگاریتم مجموع اندازه قیود به عنوان خطای قیدی در رابطه (30) در نظر گرفته شده است.

$$e_c = \log \left(\sum_{i=1}^6 |C_i| \right) \quad (31)$$

در رابطه (30)، C_i عناصر بردار قیود c هستند

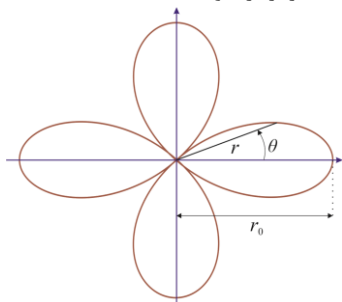


Fig. 4 The Rose trajectory

شکل 4 مسیر حرکت رزی شکل

جدول 1 مشخصات ابعادی و جرمی

Table 1 Dimensions and inertia properties

مشخصات مکانیزم			مشخصات مسیر		
کمیت	مقدار	کمیت	مقدار	کمیت	مقدار
l_1	0.4 m	m_1	3 kg	r_0	5 cm
l_2	0.6 m	m_2	4 kg		
S_B	1.2 m	m_p	8 kg		
S_p	0.4 m	I_1	0.04 kg m ²		
I_p	0.0817 kg m ²	I_2	0.12 kg m ²		

³ Trajectory

⁴ Rose

¹ Twist Propagation Matrix

² Twist Generator

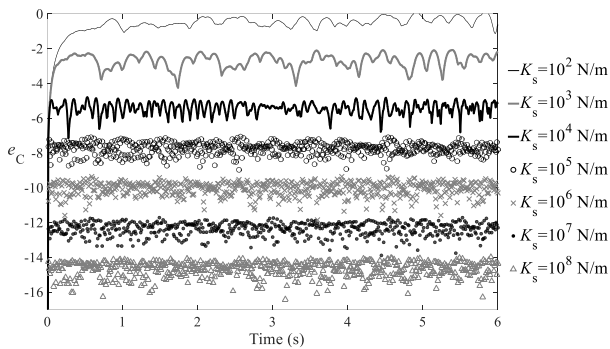


Fig. 5 The constraint error of the modified natural orthogonal complement method with different values of K_s

شکل 5 خطای قیدی روش مکمل متعامد طبیعی جدادشده اصلاح‌شده به ازای مقادیر مختلف K_s

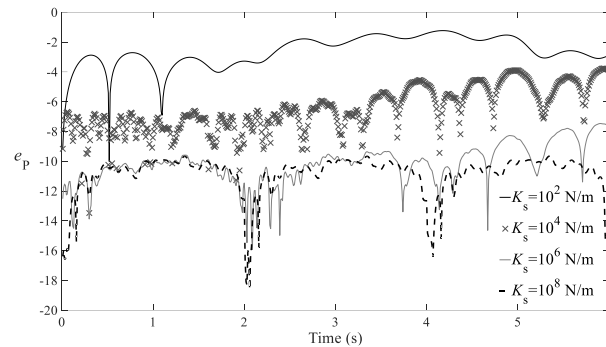


Fig. 6 The position error of the modified natural orthogonal complement method with different values of K_s

شکل 6 خطای موقعیت روش مکمل متعامد طبیعی جدادشده اصلاح‌شده به ازای مقادیر مختلف K_s

اصلاح شده بسیار بیشتر از روش پایه است. این در حالی که در روش پایه فرایند استخراج معادلات دینامیکی بسیار طولانی‌تر است. بنابراین روش اصلاح شده برای حل دینامیک مستقیم و محاسبه نیروهای قیدی به صورت تخمینی و با هزینه محاسبات اولیه کمتر مناسب است.

5- نتیجه‌گیری

در این پژوهش به معرفی روشی اصلاح شده جهت تحلیل دینامیک مستقیم ربات‌های موازی سریع پرداخته شد. روش پیشنهادی با استفاده از مفاهیم روش فنر مجازی لاگرانژ توسعه یافته است. استفاده از روش فنر مجازی در روش نیوتونی مکمل متعامد طبیعی جدا شده شیوه‌ای جدید است که در این مطالعه معرفی شد.

در روش جدید پیشنهادی برخلاف روش مکمل متعامد طبیعی جدا شده وابستگی مختصات سیستم به یکدیگر حذف می‌شود و در روش اصلاح شده نیازی به محاسبه سینماتیک مستقیم در هر بازه زمانی نیست، و نتایج هر بازه زمانی شرایط اولیه بازه زمانی بعدی را تشکیل می‌دهند. از سویی دیگر با مقایسه روابط مشخص شد در روش اصلاح شده نیازی به محاسبه ماتریس ژاکوبین و نرخ تغییرات آن نیست. محاسبه ماتریس‌های یادشده در روش مکمل متعامد طبیعی جدادشده نیازمند صرف زمان قابل توجهی که در روش جدید پیشنهادی حذف شده است.

در ادامه روش اصلاح‌شده پیشنهادی بر یک مکانیزم صفحه‌ای 3RRR اعمال شد. براساس نتایج عددی به‌دست آمده اگرچه خطای قیدی و موقعیت به‌دست‌آمده از روش اصلاح‌شده در محدوده قابل قبولی قرار داشتند، زمان

برای مقایسه بهتر نتایج خطای موقعیت نیز علاوه بر خطای قیدی برای نتایج حاصل مطابق رابطه (31) محاسبه شده است.

$$e_p = \log||r| - |\bar{r}|| \quad (32)$$

در رابطه (31)، $\bar{r}$ و r به ترتیب بردار موقعیت مرکز جرم سکوی متحرک به‌دست‌آمده از منحنی مسیر و روش مکمل متعامد طبیعی جدادشده اصلاح شده است.

شبیه‌سازی در مدت 6 ثانیه و با استفاده از روش رنگ کوتای 4 و 5 و با بازه‌بندی انطباقی و با خطای نسبی 10^{-3} انجام شده است. مسیر حرکت سکوی متحرک نیز به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که هر مسیر کامل در مدت 2 ثانیه طی می‌شود.

جدول 2 زمان حل هر روش مکمل متعامد طبیعی جدادشده اصلاح‌شده را به ازای مقادیر مختلف ضریب سختی فنرهای مجازی نشان می‌دهد. با توجه به جدول 2 با افزایش مقدار ضرایب سختی فنرهای مجازی، زمان حل به صورت محسوسی افزایش می‌یابد. دلیل این امر استفاده از مقادیر بسیار زیاد برای K_s است که منجر به استیف¹ شدن معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله می‌شود. از سویی دیگر مقادیر بسیار زیاد K_s نیز سبب بروز خطاهای محاسباتی در روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل می‌شود و در نتیجه دقت پاسخ کاهش می‌یابد. مقدار بهینه‌ای برای K_s باید پیدا شود. افزایش قابل توجه زمان حل را می‌توان در پژوهش‌های دیگری که از روش فنر مجازی لاگرانژ استفاده کرده‌اند (و معادلات حاکم بر دینامیک مسئله استیف بوده‌اند) نیز مشاهده کرد [17-16,4]. روش ارائه شده را نمی‌توان برای محاسبات ریل‌تایم² به‌کار برد.

شکل 5 خطای قیدی (e_c) روش مکمل متعامد طبیعی جدادشده اصلاح‌شده را با مقادیر مختلف K_s و با خطای نسبی $RT=1e-3$ نشان می‌دهند. با توجه به شکل 5 با ازدیاد K_s خطای قیدی کاهش می‌یابد. در صورتی که خطای قیدی با دقت صدم میلی‌متر مورد نظر باشد خطای قیدی به ازای $K_s \geq 10^5$ N/m کمتر از 5- و قابل قبول است. جهت مقایسه بهتر نتایج میزان خطای موقعیت (e_p) نیز در شکل 6 نشان داده شده است. با توجه به شکل 6 خطای موقعیت نیز به ازای $K_s \geq 10^6$ N/m کمتر از 5- است. در نهایت با در نظر گرفتن نتایج خطای قیدی و موقعیت می‌توان گفت برای $K_s \geq 10^6$ N/m مقادیر هر دو خطا در محدوده مناسب قرار دارند. $K_s = 10^6$ N/m به عنوان مقدار بهینه ضریب سختی فنرهای مجازی انتخاب می‌شود. از سوی دیگر با توجه به نتایج جدول 2 زمان محاسبات به‌ازای $K_s = 10^6$ N/m حدود 45 ثانیه است. زمان تقریبی حل مسئله پیش‌رو با استفاده از روش مکمل متعامد طبیعی جدادشده حدود 2 ثانیه است. زمان حل روش

جدول 2 زمان محاسبه روش مکمل متعامد طبیعی جدادشده اصلاح‌شده به ازای مقادیر مختلف ضریب سختی فنرهای مجازی

Table 2 Calculation time of the modified natural orthogonal complement method with different stiffness coefficient of virtual springs

ضریب سختی فنرهای مجازی	زمان محاسبات
$K_s = 10^1$ N/m	0.576 s
$K_s = 10^2$ N/m	0.921 s
$K_s = 10^3$ N/m	1.648 s
$K_s = 10^4$ N/m	3.550 s
$K_s = 10^5$ N/m	11.898 s
$K_s = 10^6$ N/m	45.592 s
$K_s = 10^7$ N/m	160.600 s
$K_s = 10^8$ N/m	499.424 s

¹ Stiff

² Real Time

حل روش اصلاح شده (حدود 45 ثانیه) به صورت قابل توجهی بیشتر از روش مکمل متعامد طبیعی جدادشده (حدود 2 ثانیه) بود که به دلیل استفاده از مقادیر بسیار زیاد برای K_s و استیف‌شدن معادلات است. همچنین با استفاده از روش اصلاح‌شده تمامی عکس‌العمل‌های قیدی سیستم قابل محاسبه هستند. روش پیشنهادی م.م.ط.ج.ا. برای تخمین عکس‌العمل‌های قیدی سیستم‌های دینامیکی مناسب است.

در روش‌های مبتنی بر فنر مجازی از نظر تئوری با افزایش مقدار K_s دقت نتایج نیز افزایش می‌یابد، ولی در عمل با افزایش بیش از حد مقدار K_s ، معادلات استیف‌شده و دقت محاسبات عددی کاهش می‌یابد. به مقداری بهینه برای K_s نیاز و چگونگی بیان رابطه قیدی در این دو روش بسیار حائز اهمیت است. قیود به کار رفته در این روش‌ها حتماً باید بیانگر تغییرات طولی فنرهای مجازی به کار رفته باشند. در غیر این صورت پاسخ به‌دست‌آمده از این دو روش صحیح نخواهد بود.

6- فهرست علائم

A, K	ماتریس ژاکوبین قیود
B	ماتریس توزیع پیچ
c	بردار قیود مکانی سیستم
C	ماتریس نیروهای گریز از مرکز و کوریولیس
e_c	خطای قیدی
e_p	خطای موقعیت
E	ماتریس ضرب خارجی
f	بردار نیرو
g	شتاب گرانش
I	ماتریس اینرسی تعمیم‌یافته
I_c	ماتریس اینرسی جرمی مرکز جرم
K_s	ثابت کشسانی فنر
l	طول میله ربات
m	جرم
M	ماتریس جرم
n	بردار ممان
N_l	ماتریس پایین مثلثی مکمل متعامد طبیعی جدادشده
N_d	ماتریس قطری مکمل متعامد طبیعی جدادشده
p	بردار مولد پیچ
q	بردار مختصات عمومی سیستم
$\dot{q}$	بردار سرعت‌های عمومی سیستم
RT	خطای نسبی
t	زمان
t	بردار پیچ
T	ماتریس مکمل متعامد طبیعی
v	بردار سرعت انتقالی
w	بردار رنج
x	موقعیت افقی مرکز جرم سکوی متحرک
y	موقعیت عمودی مرکز جرم سکوی متحرک
علائم یونانی	
λ	بردار ضرایب
τ	بردار نیروهای عمومی سیستم

بالانویس‌ها

ω	بردار سرعت زاویه‌ای
θ	زاویه نسبت به افق با میله‌ی قبل
A	مربوط به تحریک کننده‌ها
C	مربوط به قید
CS	مربوط به فنرهای مجازی
G	مربوط به گرانش
I	شاخه اول مکانیزم
II	شاخه دوم مکانیزم
III	شاخه سوم مکانیزم
P	سکوی متحرک

زیرنویس‌ها

B	پایه ثابت
C	مربوط به قید
P	سکوی متحرک - موقعیت

7- مراجع

- [1] L. W. Tsai, *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, pp. 424-447, New Jersey: Wiley, 1999.
- [2] J. Ginsberg, *Advanced Engineering Dynamics*, pp. 245-285, Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [3] J. Brinker, B. Corves, M. Wahle, A comparative study of inverse dynamics based on clavel, *Proceedings of the 14th IFToMM World Congress*, Taipei, Taiwan, October 25-30, 2015.
- [4] W. A. Khan, V. N. Krovi, S. K. Saha, J. Angeles, Modular and recursive kinematics and dynamics for parallel manipulators, *Multibody System Dynamics*, Vol. 14, No. 3-4, pp. 419-455, 2005.
- [5] M. Yazdani, M. Tale Masouleh, M. Hasanvand, I. Yahyapour, M. Ghafouri Tabrizi, Inverse dynamic problem of two parallel manipulators with identical limbs structures, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 13, pp. 281-290, 2014. (in Persian)
- [6] H. Salarieh, Dynamic analysis and control system design for a lower extremity exoskeleton, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 5, pp. 102-116, 2013. (in Persian)
- [7] S. Saha, S. Shah, P. Nandihal, Evolution of the DeNOC-based dynamic modelling for multibody systems, *Mechanical Sciences*, Vol. 4, No. 1, pp. 1-20, 2013.
- [8] J. Angeles, S. K. Lee, The formulation of dynamical equations of holonomic mechanical systems using a natural orthogonal complement *Applied Mechanics*, Vol. 55, No. 1, pp. 243-244, 1988.
- [9] S. K. Saha, The UDUT decomposition of manipulator inertia matrix, *Proceeding of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2829-2834, Nagoya, Aichi, Japan, May 21-27, 1995.
- [10] S. K. Saha, A decomposition of the manipulator inertia matrix, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 13, No. 2, pp. 301-304, 1997.
- [11] S. K. Saha, Simulation of industrial manipulators based on the UDUT decomposition of inertia matrix, *Multibody System Dynamics*, Vol. 9, No. 1, pp. 63-85, 2003.
- [12] S. K. Saha, W. O. Schiehlen, Recursive kinematics and dynamics for parallel structured closed-loop multibody systems, *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 29, No. 2, pp. 143-175, 2001.
- [13] D. N. Dimitrov, *Dynamics and Control of Space Manipulators During a Satellite Capturing Operation*, PhD Thesis, Department of Aerospace Engineering, Tohoku University, Sendai, 2006.
- [14] A. B. K. Rao, S. Saha, P. V. Rao, Dynamics modelling of hexaslices using the decoupled natural orthogonal complement matrices, *Multibody System Dynamics*, Vol. 15, No. 2, pp. 159-180, 2006.
- [15] J. Wang, C. M. Gosselin, L. Cheng, Modeling and simulation of robotic systems with closed kinematic chains using the virtual spring approach, *Multibody System Dynamics*, Vol. 7, No. 2, pp. 145-170, 2002.
- [16] W. A. Khan, C. P. Tang, V. N. Krovi, Modular and distributed

- Kinematic Chains*, Thesis, McGill University, Montréal, 2002.
- [18] J. Angeles, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*, Fourth Edition, pp. 512-523, Springer Science & Business Media, 2013.

- forward dynamic simulation of constrained mechanical systems—A comparative study, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 42, No. 5, pp. 558-579, 2007.
- [17] W. A. Khan, *Distributed Dynamics of Systems with Closed*