



## تحلیل کمانش پوسته‌ی مشبک کامپوزیتی براساس روش معادل سازی اصلاح شده

علی طالع زاده لاری<sup>1</sup>، غلامحسین رحیمی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\* تهران، صندوق پستی 14117-13116، rahimi\_gh@modares.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 24 مرداد 1394

پذیرش: 16 شهریور 1394

ارائه در سایت: 12 آبان 1394

کلید واژگان:

کمانش

پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی مشبک

روش تحلیلی

المان محدود

### چکیده

پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی به علت استحکام و نسبت مقاومت به وزن بالا کاربردهای گسترده‌ای در صنایع مختلف پیدا کرده‌اند. یکی از روش‌های افزایش مقاومت کمانشی این سازه‌ها تقویت آن‌ها با انواع ریب‌های تقویت‌کننده است. در این مقاله روش تحلیلی جدیدی برای تحلیل پوسته‌های مشبک کامپوزیتی به شیوه معادل‌سازی ارائه شده است. تفاوت اصلی روش ارائه شده و روش‌های پیشین در نحوه ترکیب کردن پارامترهای سفتی پوسته و تقویت‌کننده‌ها و محاسبه سفتی پوسته نهایی است. در این روش یک پوسته سه لایه به گونه‌ای تعیین می‌شود که حجم و سفتی آن برابر حجم و سفتی تقویت‌کننده‌ها باشد. با قرار دادن این سه لایه در کنار لایه‌های پوسته اصلی به راحتی می‌توان سفتی پوسته نهایی را محاسبه نمود سپس بار بحرانی کمانش محوری پوسته با استفاده از روش انرژی ریتز بدست آمده است. روش ارائه شده به کمک نرم‌افزار المان محدود آباکوس اعتبارسنجی شده است و بررسی نتایج نشان می‌دهد که نتایج این روش نسبت به روش‌های پیشین اختلاف کمتری با نتایج المان محدود دارد. همچنین اثر پارامترهای مختلف بر بار بحرانی و بار بحرانی ویژه پوسته مشبک بررسی شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که برای اثربخش بودن فرآیند تقویت سازه، وجود تعداد حداقلی از جفت ریب‌ها و سلول‌های واحد الزامیست. ضمناً اگرچه تقویت سازه به کمک ریب‌ها تقویت‌کننده می‌تواند بار بحرانی را افزایش دهد؛ اما الزاماً بار بحرانی ویژه را بهبود نمی‌بخشد. بهترین حالت برای قرارگیری ریب‌ها زاویه 30 تا 40 درجه نسبت به محور پوسته استوانه‌ای است.

## Buckling analysis of stiffened composite cylindrical shell based on the modified smear method

Ali Talezadehlari, Gholam Hosein Rahimi\*

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

\* P.O.B. 14117-13116 Tehran, Iran, rahimi\_gh@modares.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 15 August 2015  
Accepted 07 September 2015  
Available Online 03 November 2015

#### Keywords:

Buckling  
Stiffened composite cylindrical shell  
Analytical method  
Finite element (FE)

### ABSTRACT

Due to high strength and stiffness-to-weight ratio of composite cylindrical shells, they are increasingly being used in different industries. Applying different types of stiffeners is one of the ways to improve the buckling resistance of these structures. In this paper new analytical method based on smear method is developed to analyze the stiffened composite shells. The main difference of this method and previous methods is on technique of combination of shell's and stiffeners' stiffness parameters, and calculating the equivalent stiffness parameters. In the suggested method a three layered shell is designed in such a way that this shell and stiffeners have the same volume and stiffness. Putting these layers under the main layers of shell, the equivalent stiffness parameters could be calculated easily. Using the Ritz energy method the critical load of axial buckling of shell is calculated. The method is verified using finite element ABAQUS package. The results show that the proposed method has less difference from finite element's results compare to previous methods. In addition, the effects of different parameters on buckling load and special buckling load of stiffened shell is investigated. The results show that in order to have efficient stiffened structure; there must be an adequate number of ribs and unit cells. It also shows that, although adding stiffening ribs increase the buckling load of the shell, the special buckling load does not increase necessarily. The optimum angle for helical ribs is 30 to 40 degrees respect to axis of the cylindrical shell.

### 1- مقدمه

روش‌های بهبود کارایی پوسته‌های کامپوزیتی استفاده از انواع تقویت‌کننده‌ها است. تقویت‌کننده‌ها می‌توانند به صورت محیطی، محوری و یا مارپیچ باشند. طبیعت ساختار شبکه‌ای موجب تغییر مسیر بارهای تخریبی در اطراف نقاط آسیب دیده و در نتیجه افزایش قدرت تحمل آسیب در این سازه‌ها می‌شود. همچنین ساخته شدن تقویت‌کننده‌ها از الیاف تک جهته احتمال بروز پدیده

سازه‌های کامپوزیتی به علت نسبت مقاومت به وزن بالا و مقاومت در برابر رطوبت و خوردگی و سایر خواص منحصر به فرد، در صنایع مختلف از جمله صنایع هوایی و فضایی کاربرد دارند. در این میان پوسته‌های کامپوزیتی یکی از سازه‌های پرکاربرد هستند و از سال‌ها پیش مورد توجه بوده‌اند. یکی از

Please cite this article using:

A. Talezadehlari, Gh. H. Rahimi, Buckling analysis of stiffened composite cylindrical shell based on the modified smear method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 319-329, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. Talezadehlari, Gh. H. Rahimi, Buckling analysis of stiffened composite cylindrical shell based on the modified smear method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 319-329, 2015 (In Persian)

تورق را در آن‌ها کاهش می‌دهد و این عامل به نوبه خود مقاومت این سازه‌ها را در برابر ضربه و خستگی افزایش می‌دهد. علاوه بر این، مجزا بودن تقویت‌کننده‌ها از یکدیگر امکان سرایت ترک از یک ریب به ریب مجاور را از بین برده و قدرت تحمل آسیب دیدگی سازه را افزایش می‌دهد. همچنین به دلیل ساختار باز این سازه‌ها، تاثیر رطوبت در آن‌ها ناچیز است. کمانش پوسته‌ها مشبک تحت بارگذاری‌های مختلف، از جمله بار محوری، یکی از مهمترین مودهای واماندگی آن‌هاست. به همین سبب مطالعه رفتار کمانشی آن‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

در سال 1996 چن و تسای روشی را بر مبنای سفتی معادل سازه ابداع نموده‌اند که توانایی توصیف صحیحی از سازه شبکه‌ای را داشت و متعاقب آن روشی را برای بهینه کردن بار کمانشی سازه ارائه نموده‌اند. در این روش سفتی هر جفت از ریب‌های موازی به صورت مجزا تخمین زده شده، سپس سفتی کل سازه با استفاده از روش برهم نهی به دست آمده است. برای سازه شامل شبکه و پوسته ساخته شده با روش لایه چینی دستی، سفتی معادل محاسبه شده و به عنوان ورودی اولیه به روش المان محدود استفاده گردیده است [1]. در همین سال جانکی و همکارانش روشی را برای محاسبه بار کمانشی پنل‌های کامپوزیتی ارائه کرده و آن را تئوری تقویت‌کننده‌های معادل<sup>1</sup> نام نهاده‌اند. در این روش، پنل‌های صفحه‌ای تقویت شده با استفاده از روش‌های ریاضی به پنل صفحه‌ای یکنواخت معادل که دارای سفتی معادل ناهمسانگرد با پنل اولیه است، تبدیل می‌گردد. اثر متقابل پوسته خارجی و تقویت‌کننده‌ها با استفاده از محاسبه سفتی ریب‌ها و پوسته در ناحیه اتصال محاسبه گردیده است. بار کمانش با قرار دادن سفتی معادل نهایی در روش ریلی ریتز محاسبه شده است [2]. در سال 2003 کیدانه با استفاده از همین تئوری روش تحلیلی برای بررسی استوانه کامپوزیتی مشبک تحت بار کمانشی ارائه کرده است. روش به کار رفته بار بحرانی کمانش کلی را به دست می‌داد. در این روش یک سلول واحد از سازه در نظر گرفته شده و ماتریس تنش و کرنش و سفتی آن برحسب کرنش‌های لایه میانی پوسته محاسبه و به کل سازه تعمیم داده شده است. سپس با استفاده از روش انرژی بار بحرانی کمانشی محاسبه شده است و در نهایت تاثیر پارامترهای مختلف بر بار بحرانی مطالعه گردیده است [3]. در سال 2003 ودسنبت و همکارانش کمانش یک پوسته ایزوگرید را با استفاده از همین روش بررسی کرده‌اند. در این روش معادلات بر مبنای صفحه میانی پوسته ارائه و از روش کمینه کردن انرژی پتانسیل کل، بار بحرانی کمانش برای پوسته معادل محاسبه شده است. میزان اثر سفتی تقویت‌کننده‌ها در سفتی کل سازه با استفاده از اثر نیرو و ممان تقویت‌کننده‌ها بر روی یک المان واحد پوسته خارجی و انتگرال‌گیری بر روی کل سازه محاسبه شده است. علاوه بر این، با استفاده از مدل‌سازی سه بعدی در نرم‌افزار المان محدود انسیس<sup>2</sup> و آزمایش تجربی نتایج بدست آمده از حل تحلیلی اعتبارسنجی شده است [4]. در سال 2009 یزدانی و همکارانش به صورت تجربی به بررسی کمانش استوانه‌های مشبک کامپوزیتی پرداخته‌اند. در این تحقیق پوسته‌هایی با شبکه‌بندی‌های مختلف که توسط دستگاه پیچش الیاف ساخته شده بودند تحت بارگذاری شبه استاتیکی محوری قرار گرفتند. بر طبق نتایج آزمایش بار بحرانی برای استوانه‌های با شبکه‌بندی شش‌ضلعی و مثلثی بیشتر از استوانه با شبکه‌بندی لوزی و استوانه بدون شبکه‌بندی است [5]. در سال 2010 یزدانی و رحیمی اثرات تغییر شکل شبکه و تعداد مارپیچ را بر باربری پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده

کامپوزیتی به روش تجربی بررسی نموده‌اند. بر مبنای نتایج این پژوهش مشخص گردید که برای اثرگذاری ریب‌ها در مقاومت سازه نیاز به تعداد حداقلی از ریب‌ها می‌باشد. همچنین نتایج نشان می‌دهد که افزایش تعداد ریب‌های مورب در مقایسه با افزودن ریب‌های محیطی یا تغییر شبکه‌بندی تاثیر بیشتری بر میزان بار بحرانی دارد [6]. یزدانی و رحیمی در سال 2011 به بررسی تجربی اثر بارگذاری و باربرداری محوری سیکلی بر پوسته‌های ساده و مشبک کامپوزیتی پرداخته‌اند. نتایج مطالعات ایشان نشان می‌دهد که برای بارگذاری سیکلی پوسته‌های مشبک کارایی بهتری نسبت به پوسته‌های ساده دارند. همچنین رشد خرابی در پوسته‌های مشبک نسبت به پوسته‌های ساده آهسته‌تر می‌باشد [7]. در سال 2013 رحیمی و همکارانش اثر پروفیل سطح مقطع تقویت‌کننده بر بار کمانش محوری پوسته استوانه‌ای مشبک کامپوزیتی را بررسی کرده‌اند. در این پژوهش که با استفاده از نرم‌افزار المان محدود انسیس صورت گرفته، برای تقویت پوسته از ریب‌های محیطی و مارپیچ بهره گرفته شده است [8]. در همین سال، قاسمی و همکارانش براساس روش معادل‌سازی و با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول روش جدیدی برای تحلیل کمانش پوسته‌های مشبک کامپوزیتی ارائه کرده‌اند که اثر نیروهای برشی عرضی تقویت‌کننده‌ها را نیز در آن لحاظ شده است. همچنین اثر برخی پارامترهای هندسی موثر بر بار کمانش بررسی شده است [9]. در سال 2014 کلانتری و فدایی اصلاحاتی در روش معادل‌سازی انجام داده‌اند و با استفاده از آن اثر برخی پارامترهای هندسی بر بار بحرانی پوسته فلزی تقویت شده را بررسی نموده‌اند [10].

روش تحلیلی که کیدانه و همکارانش در سال 2002 و 2003 ارائه نموده‌اند [3,4]، یکی از روش‌هایی است که مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته و علی‌رغم محدودیت‌ها و تقریب‌هایی که در این روش وجود دارد طی سالیان اخیر ارجاعات فراوانی به آن شده است. در این پژوهش روش اصلاح شده‌ای برای تحلیل پوسته‌های مشبک ارائه شده است. در این روش تقویت‌کننده‌ها با یک پوسته سه لایه معادل خواهند شد. این لایه‌ها در کنار لایه‌چینی پوسته اصلی یک پوسته معادل را ایجاد خواهند کرد که می‌توان به راحتی ماتریس سفتی آن را محاسبه نمود. پس از تعیین سفتی معادل برای مجموعه پوسته و ریب، بار بحرانی کمانش محوری با استفاده از روش ریتز و براساس اصل مینیمم انرژی پتانسیل محاسبه شده است. برای اعتبارسنجی نتایج، از نرم‌افزار المان محدود آباکوس استفاده شده است. بررسی نتایج نشان می‌دهد که روش ارائه شده نسبت به روش‌های قبل اختلاف کمتری با نتایج المان محدود دارد و می‌توان ادعا نمود که نسبت به روش‌های موجود از دقت بالاتری برخوردار است. در ادامه اثر پارامترهای مختلف هندسی بر بار بحرانی و بار بحرانی ویژه پوسته مشبک بررسی شده است.

## 2- فرمول‌بندی روش معادل‌سازی

روش معادل‌سازی برای بررسی برهم‌کنش پوسته و تقویت‌کننده اولین بار توسط جانکی ارائه شده است [2]. کیدانه و همکارانش در سال‌های 2002 و 2003 با استفاده از همین تئوری، روشی برای بررسی کمانش محوری استوانه کامپوزیتی مشبک ارائه کرده‌اند [3,4]. در این روش، پوسته مشبک با یک پوسته کامپوزیتی ساده که دارای سفتی مساوی با پوسته مشبک است معادل‌سازی می‌شود. از این رو ابتدا باید سفتی معادل تقویت‌کننده‌ها محاسبه شده و سفتی آن‌ها به نحوی با سفتی پوسته کامپوزیتی ترکیب شده و سفتی معادل کل پوسته مشبک به دست آید. بدین منظور ابتدا یک سلول واحد از تقویت‌کننده‌ها به عنوان عضو تکرار شونده به نحوی انتخاب می‌شود

1- Smearred Stiffener Method  
2- ANSYS

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & s^2 - c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

که در آن  $s = \sin \phi$ ،  $c = \cos \phi$  و  $\phi$  زاویه تقویت‌کننده نسبت به محور استوانه است. طبق فرض 1 از اثرات کرنش‌های عرضی و برشی صرف‌نظر شده و با توجه به رابطه (2)، کرنش طولی از رابطه (3) به دست می‌آید:

$$\varepsilon_l = c^2 \varepsilon_x + s^2 \varepsilon_y + sc \varepsilon_{xy} \quad (3)$$

با داشتن کرنش‌های محوری تقویت‌کننده‌ها، نیروهای محوری مربوط به آن‌ها  $(F_2, F_1)$  به سادگی قابل محاسبه است. شکل 2 نیروهای وارد بر سلول واحد را نشان می‌دهد. با توجه به زوایای قرارگیری تقویت‌کننده‌ها نیروی هر ریب از رابطه (4) به دست می‌آید. در این رابطه  $\varepsilon_{li}$  و  $A$  به ترتیب کرنش‌های محوری، سطح مقطع و مدول الاستیسیته محوری هر تقویت‌کننده هستند.

$$F_1 = AE_l \varepsilon_{l1} = AE_l (c^2 \varepsilon_x + s^2 \varepsilon_y - sc \varepsilon_{xy}) \quad (4\text{-الف})$$

$$F_2 = AE_l \varepsilon_{l2} = AE_l (c^2 \varepsilon_x + s^2 \varepsilon_y + sc \varepsilon_{xy}) \quad (4\text{-ب})$$

با جمع نیروهای به دست آمده در جهات  $x, y$  و جای‌گذاری روابط (1) و (4) در آن‌ها، مجموع نیروهای وارده به تقویت‌کننده‌ها در جهات  $x, y$  به دست می‌آید. با تقسیم این نیروها بر طول لبه‌ی متناظر خود در سلول واحد، منته‌های نیرو مطابق رابطه (5) به دست می‌آید:

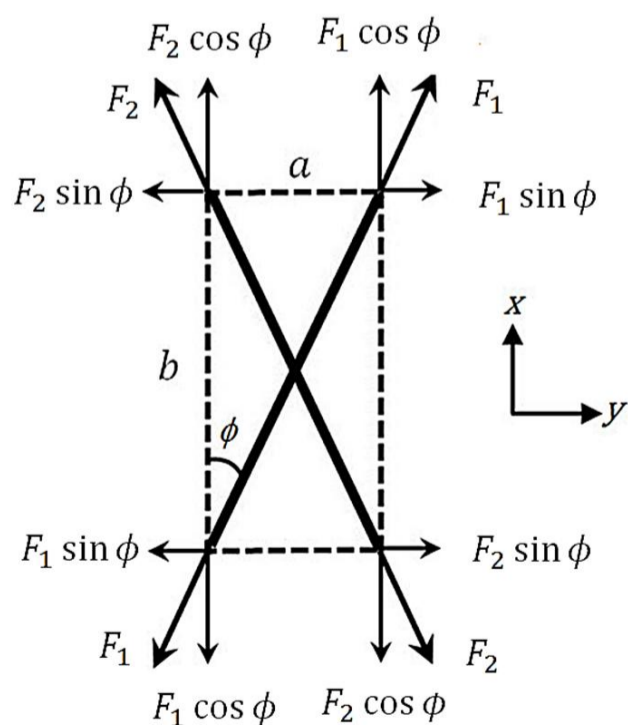
$$N_x = \frac{AE_l}{a} \left( 2c^3 \varepsilon_x^0 + 2c^3 \kappa_x \left( \frac{t}{2} \right) + 2cs^2 \varepsilon_y^0 + 2cs^2 \kappa_y \left( \frac{t}{2} \right) \right) \quad (5\text{-الف})$$

$$N_y = \frac{AE_l}{b} \left( 2sc^2 \varepsilon_x^0 + 2sc^2 \kappa_x \left( \frac{t}{2} \right) + 2s^3 \varepsilon_y^0 + 2s^3 \kappa_y \left( \frac{t}{2} \right) \right) \quad (5\text{-ب})$$

$$N_{xy} = \frac{AE_l}{b} \left( 2sc^2 \varepsilon_{xy}^0 + 2sc^2 \kappa_{xy} \left( \frac{t}{2} \right) \right) \quad (5\text{-پ})$$

## 2-2- تحلیل گشتاورها در سلول واحد

در اثر نیروهای برشی بین پوسته و تقویت‌کننده‌ها، گشتاورهایی ایجاد می‌شود که مقدار آن برابر است با حاصل ضرب نیرو در نصف ضخامت پوسته و ریب. شکل 3 نحوه ایجاد این گشتاورها بر اثر نیروی برشی  $F$  را نشان می‌دهد. این گشتاور را می‌توان به دو بخش  $M_{st}$  و  $M_{sh}$  تقسیم کرد که به ترتیب نشان دهنده گشتاور ایجاد شده در پوسته و تقویت‌کننده هستند. از این دو قسمت صرفاً  $M_{sh}$ ، که اثر گشتاور نیروهای برشی بر پوسته را نشان می‌دهد، دارای اهمیت است.



شکل 2 دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر سلول واحد

که تمام اجزای سازه در آن موجود باشد و عملاً کل سازه از تکرار این سلول واحد به دست آید. شکل 1 سلول واحد و محورهای آن را نشان می‌دهد.

برای محاسبه پارامترهای سفتی تقویت‌کننده‌ها در سلول واحد لازم است تا اثرات نیرویی و ممان‌های ریب‌ها و پوسته محاسبه شود. برای این‌که معادلات به دست آمده برای ماتریس‌های سفتی  $(D, B, A)$  تقویت‌کننده‌ها قابلیت ترکیب با ماتریس‌های سفتی پوسته را دارا باشند، لازم است تا ماتریس‌های سفتی آن‌ها تابعی از کرنش‌های صفحه‌ی میانی پوسته باشند. برای به دست آوردن معادلات تحلیلی، فرضیات زیر مورد استفاده قرار گرفته است:

1- به علت قرارگیری الیاف به صورت تک جهته و در راستای طولی، مدول برشی تقویت‌کننده‌ها بسیار کمتر از مدول طولی آن‌هاست. همچنین سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها در قیاس با طول آن‌ها کوچک است. بنابراین فرض شده که تقویت‌کننده‌ها فقط بار محوری تحمل می‌کنند و از تنش‌های برشی در آن‌ها صرف‌نظر شده است.

2- از پیش‌مقطع تقویت‌کننده‌ها حین بارگذاری صرف‌نظر کرد.

3- کرنش در طول سطح مقطع تقویت‌کننده یکسان است؛ از این جهت تنش فرض شده نیز یکنواخت خواهد بود.

4- بار وارده از طریق نیروهای برشی بین تقویت‌کننده‌ها و پوسته منتقل می‌شود.

5- معادلات بر پایه تئوری تغییر شکل‌های کلاسیک بنا نهاده شده است.

## 1-2- تحلیل نیروها در سلول واحد

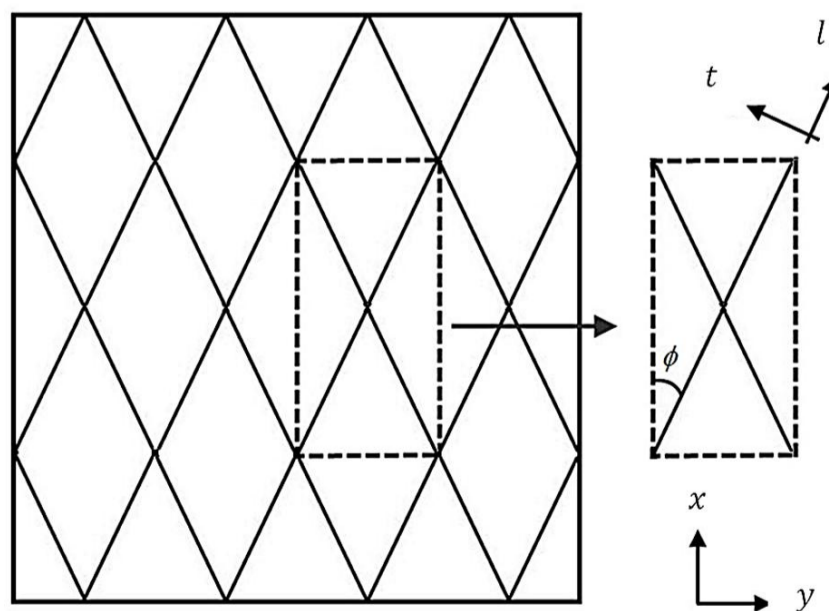
مولفه‌های کرنش و تغییر انحنای صفحه میانی پوسته به صورت،  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$  در نظر گرفته شده است. کرنش‌ها در محل لایه‌ی داخلی که محل اتصال پوسته و تقویت‌کننده‌ها می‌باشد، با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته‌ها و طبق رابطه (1) بیان شده است [3]. از آن‌جا که ریب‌ها در محل تماس به سطح داخلی پوسته چسبیده‌اند، کرنش تقویت‌کننده‌ها نیز برابر همین مقدار است.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + \kappa_x (t/2) \quad (1\text{-الف})$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + \kappa_y (t/2) \quad (1\text{-ب})$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}^0 + \kappa_{xy} (t/2) \quad (1\text{-پ})$$

در این رابطه  $t$  ضخامت پوسته است. با ضرب کردن این کرنش‌ها در ماتریس تبدیل، طبق رابطه (2) کرنش‌های در راستای طولی و عرضی تقویت‌کننده‌ها به دست می‌آیند [3]. در این رابطه  $\varepsilon_l$  و  $\varepsilon_t$  به ترتیب کرنش در راستای تقویت‌کننده، کرنش عمود بر محور تقویت‌کننده و کرنش برشی هستند.



شکل 1 سلول واحد و محورهای مختصات مربوطه

3-2- ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها

منتجه‌های نیرو و گشتاور که در روابط (5) و (7) بدست آمدند طبق معادله (8) با کرنش و انحنای لایه میانی پوسته در ارتباط هستند:

$$\begin{bmatrix} N^{st} \\ M^{st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{st} & B^{st} \\ B^{st} & D^{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (8)$$

بدین ترتیب می‌توان ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها  $(D^{st}, B^{st}, A^{st})$  را به صورت روابط (9) تا (11) استخراج نمود:

$$[A^{st}] = 2AE_l \begin{bmatrix} \frac{c^3}{a} & \frac{cs^2}{a} & 0 \\ \frac{sc^2}{b} & \frac{s^3}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{sc^2}{b} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[B^{st}] = AE_l t \begin{bmatrix} \frac{c^3}{a} & \frac{cs^2}{a} & 0 \\ \frac{sc^2}{b} & \frac{s^3}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{sc^2}{b} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[D^{st}] = \frac{AE_l t^2}{2} \begin{bmatrix} \frac{c^3}{a} & \frac{cs^2}{a} & 0 \\ \frac{sc^2}{b} & \frac{s^3}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{sc^2}{b} \end{bmatrix} \quad (11)$$

هرچند این ماتریس‌ها در ظاهر متقارن نیستند، اما با توجه به رابطه هندسی میان  $\sin \phi$ ،  $\cos \phi$  و  $a$  و  $b$  می‌توان تقارن آن‌ها را اثبات نمود.

4-2- سفتی معادل کل سازه

پس از یافتن سفتی معادل تقویت‌کننده‌ها، می‌توان سفتی کل سازه را از ترکیب نمودن سفتی پوسته و سفتی تقویت‌کننده‌ها به‌دست آورد. بدین منظور عموماً از دو روش در مراجع مختلف استفاده شده است: 1- استفاده از قانون مخلوط‌ها و 2- اصل برهم‌نهی.

یافتن ماتریس سفتی نهایی براساس قانون مخلوط‌ها اولین بار در سال 2003 توسط پژوهش‌های ودسنبت و همکارانش مطرح شده است [4] و پس از آن، مورد استفاده بسیاری از محققین واقع شده است؛ که از جمله آن‌ها می‌توان به شهسواری و همکارانش [11]، قاسمی و همکارانش [9]، لاکشمی و راتو [12] و همت‌نژاد و همکارانش [13, 14] اشاره نمود. در این روش سفتی پوسته و تقویت‌کننده‌ها مطابق رابطه (12) به نسبت کسر حجمی آن‌ها با یکدیگر ترکیب شده و سفتی نهایی سازه محاسبه می‌شود.

$$[A] = V_{st}[A]^{st} + V_{sh}[A]^{sh} \quad (الف-12)$$

$$[B] = V_{st}[B]^{st} + V_{sh}[B]^{sh} \quad (ب-12)$$

$$[D] = V_{st}[D]^{st} + V_{sh}[D]^{sh} \quad (پ-12)$$

در این رابطه  $V_{st}$  و  $V_{sh} = 1 - V_{st}$  به ترتیب کسر حجمی تقویت‌کننده‌ها و پوسته هستند که مقادیری بین صفر و یک دارند.

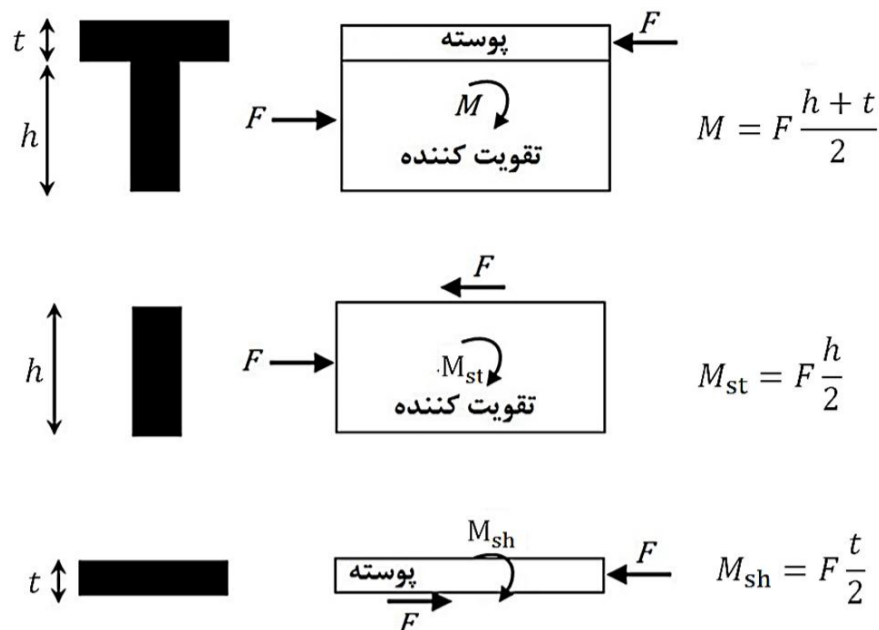
کیدانه و همکارانش در سال 2003، از اصل برهم‌نهی برای محاسبه ماتریس سفتی نهایی سازه استفاده کرده و رابطه (13) را ارائه نموده‌اند [3]:

$$[A] = [A]^{st} + [A]^{sh} \quad (الف-13)$$

$$[B] = [B]^{st} + [B]^{sh} \quad (ب-13)$$

$$[D] = [D]^{st} + [D]^{sh} \quad (پ-13)$$

ژانگ و همکارانش [15]، ژائو و همکارانش [16]، جم و همکارانش [17] و شان‌شان و همکارانش [18] نیز از اصل برهم‌نهی برای محاسبه سفتی نهایی سازه استفاده نموده‌اند.



شکل 3 گشتاورهای ایجاد شده در اثر نیروی برشی میان پوسته و تقویت‌کننده

شکل 4 گشتاورهای وارد بر سلول واحد را نشان می‌دهد. با دنبال کردن روندی مشابه آنچه در تحلیل نیروها برای سلول واحد انجام شد، منتجه گشتاورها در لبه‌های سلول واحد به دست می‌آیند:

$$M_x = M_1 \cos \phi + M_2 \cos \phi \quad (الف-6)$$

$$M_y = M_1 \sin \phi + M_2 \sin \phi \quad (ب-6)$$

$$M_{xy} = M_2 \cos \phi - M_1 \cos \phi \quad (پ-6)$$

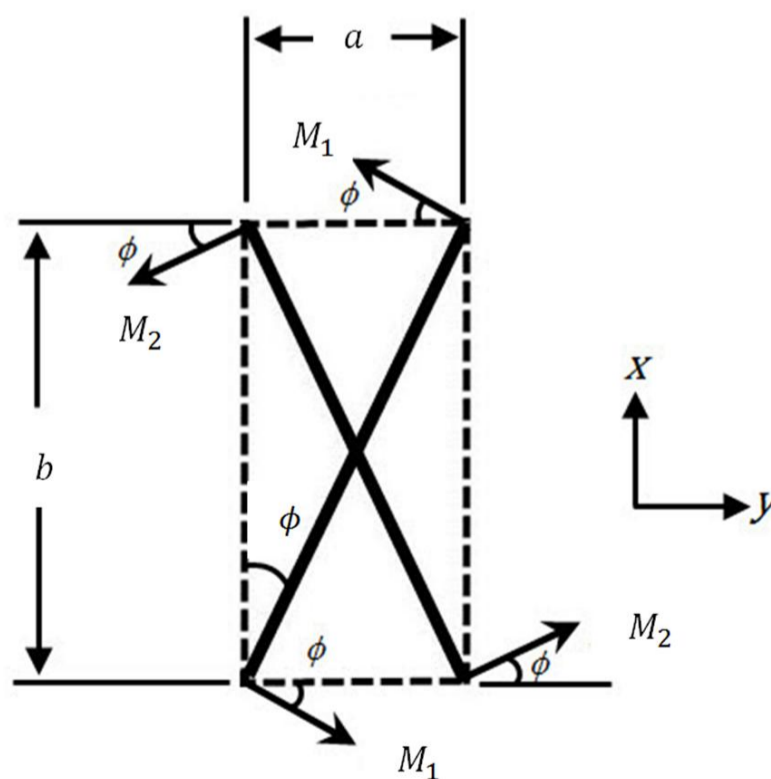
که در این رابطه  $M_1$  و  $M_2$  به ترتیب گشتاورهای وارد شده بر پوسته در اثر نیروهای  $F_1$  و  $F_2$  هستند که از حاصل ضرب این نیروها در نصف ضخامت پوسته حاصل می‌شود.

با جایگزینی مقادیر مربوط به این گشتاورها و استفاده از روابط (1) و تقسیم مقادیر به‌دست آمده بر طول لبه‌های متناظر در سلول واحد، معادلات منتجه گشتاورها طبق رابطه (7) بدست می‌آید.:

$$M_x = \frac{AE_l t}{2a} \left( 2c^3 \varepsilon_x^0 + 2c^3 \kappa_x \left( \frac{t}{2} \right) + 2cs^2 \varepsilon_y^0 + 2cs^2 \kappa_y \left( \frac{t}{2} \right) \right) \quad (الف-7)$$

$$M_y = \frac{AE_l t}{2b} \left( 2sc^2 \varepsilon_x^0 + 2sc^2 \kappa_x \left( \frac{t}{2} \right) + 2s^3 \varepsilon_y^0 + 2s^3 \kappa_y \left( \frac{t}{2} \right) \right) \quad (ب-7)$$

$$M_{xy} = \frac{AE_l t}{2b} \left( 2sc^2 \varepsilon_{xy}^0 + 2sc^2 \kappa_{xy} \left( \frac{t}{2} \right) \right) \quad (پ-7)$$



شکل 4 دیاگرام آزاد گشتاورهای وارد بر سلول واحد



$$A_{ij} = \sum_{k=1}^3 \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{(k+1)} - z_{(k)}) \quad (15\text{-الف})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{(k+1)}^2 - z_{(k)}^2) \quad (15\text{-ب})$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{(k+1)}^3 - z_{(k)}^3) \quad (15\text{-پ})$$

با توجه به مشخصات پوسته سه لایه نشان داده شده در شکل 6 این رابطه به صورت رابطه (16) در خواهد آمد:

$$(A_{ij})^{st} = \frac{t_{st}}{3} [\bar{Q}_{ij}^{(1)} + \bar{Q}_{ij}^{(2)} + \bar{Q}_{ij}^{(3)}] \quad (16\text{-الف})$$

$$(B_{ij})^{st} = \frac{t_{st}^2}{9} [\bar{Q}_{ij}^{(3)} - \bar{Q}_{ij}^{(1)}] \quad (16\text{-ب})$$

$$(D_{ij})^{st} = \frac{t_{st}^3}{324} [14\bar{Q}_{ij}^{(1)} + \bar{Q}_{ij}^{(2)} + 13\bar{Q}_{ij}^{(3)}] \quad (16\text{-پ})$$

که با حل این سه معادله فوق،  $\bar{Q}_{ij}^{(3)}$ ،  $\bar{Q}_{ij}^{(2)}$ ،  $\bar{Q}_{ij}^{(1)}$  طبق رابطه (17) به دست خواهند آمد:

$$\bar{Q}_{ij}^{(1)} = \frac{-3}{25t_{st}} (A_{ij})^{st} - \frac{108}{25t_{st}^2} (B_{ij})^{st} + \frac{324}{25t_{st}^3} (D_{ij})^{st} \quad (17\text{-الف})$$

$$\bar{Q}_{ij}^{(2)} = \frac{81}{25t_{st}} (A_{ij})^{st} - \frac{9}{25t_{st}^2} (B_{ij})^{st} - \frac{648}{25t_{st}^3} (D_{ij})^{st} \quad (17\text{-ب})$$

$$\bar{Q}_{ij}^{(3)} = \frac{-3}{25t_{st}} (A_{ij})^{st} + \frac{117}{25t_{st}^2} (B_{ij})^{st} + \frac{324}{25t_{st}^3} (D_{ij})^{st} \quad (17\text{-پ})$$

با تعیین ضخامت و خواص مکانیکی لایه‌های پوسته معادل تقویت‌کننده‌ها، ضخامت و خواص مکانیکی تمام لایه‌های پوسته نهایی که در شکل 5 نشان داده شده مشخص است و سفتی پوسته نهایی به راحتی قابل محاسبه است.

### 3- محاسبه بار بحرانی کمانش

پس از معادل‌سازی پوسته مشبک با یک پوسته ساده، در این مرحله بار بحرانی برای کمانش محوری پوسته ساده نهایی با حل مسئله مقدار ویژه بدست آمده است. برای حل از روش ریتز و اصل مینیمم انرژی پتانسیل استفاده شده است. در این روش میدان جابجایی به گونه‌ای حدس زده می‌شود که شرایط مرزی را ارضا نماید. سپس با استفاده از آن، تابع انرژی پتانسیل کل تشکیل شده و با مینیمم کردن تابع انرژی پتانسیل نسبت به ضرایب مجهول میدان جابجایی، بار بحرانی سازه بدست می‌آید.

رابطه جابجایی‌ها با کرنش‌ها و تغییر انحنای لایه میانی که در رابطه (1) به آن‌ها اشاره شد طبق تئوری کلاسیک پوسته‌ها و به صورت خطی فرض شده که در روابط (18) و (19) بیان شده است [19]:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (18)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (19)$$

در این رابطه  $w$  و  $v, u$  به ترتیب جابجایی در راستای محوری، محیطی و شعاعی استوانه هستند.

انرژی پتانسیل کل برابر است با مجموع انرژی کرنشی پوسته و کار انجام شده توسط نیروی محوری که به ترتیب در روابط (20) و (21) آورده شده‌اند [4]:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^L (N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + N_{xy} \gamma_{xy}^0 + M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + M_{xy} \kappa_{xy}) dx dy \quad (20)$$

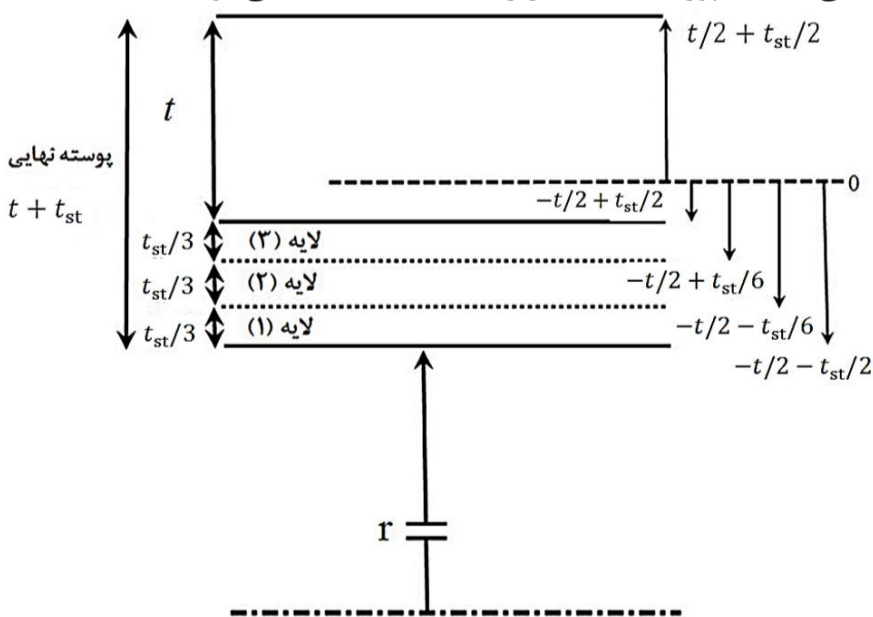
مقایسه نتایج این روش‌ها با نتایج المان محدود که در ادامه آورده شده است نشان می‌دهد که نتایج هر دو روش اختلاف معناداری با نتایج المان محدود دارند. استفاده از قانون مخلوط‌ها سفتی سازه را کمتر از مقدار واقعی تخمین زده و اصل برهم‌نهی سفتی سازه را بیشتر از مقدار واقعی در نظر می‌گیرد. به همین سبب استفاده از این دو روش بار بحرانی سازه را به ترتیب کمتر و بیشتر از مقدار واقعی پیش‌بینی می‌کنند. از این رو و برای بهبود دقت نتایج روش جدیدی برای یافتن سفتی نهایی سازه ارائه شده است. در این روش تقویت‌کننده‌ها با یک پوسته سه لایه معادل می‌شوند و سپس با قرار دادن این سه لایه در کنار لایه‌های پوسته اصلی، پوسته نهایی ایجاد می‌شود که محاسبه سفتی آن  $(D, B, A)$  به سادگی امکان‌پذیر است. شکل 5 نحوه قرارگیری پوسته معادل تقویت‌کننده‌ها در کنار پوسته اصلی و تشکیل پوسته نهایی را نشان می‌دهد.

از آن‌جا که در مقاومت کمانشی سازه‌ها حجم و سفتی سازه دو عامل تعیین‌کننده هستند؛ پوسته سه لایه معادل تقویت‌کننده‌ها به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که حجم و سفتی آن برابر با حجم و سفتی محاسبه شده برای تقویت‌کننده‌ها  $(D^{st}, B^{st}, A^{st})$  باشد. بنابراین در نخستین گام باید ضخامت و خواص مکانیکی سه لایه موجود در پوسته معادل تقویت‌کننده‌ها به روشی مناسب تعیین گردد. ضخامت پوسته سه لایه  $(t_{st})$  از برابر قرار دادن حجم تقویت‌کننده‌ها و حجم پوسته معادل تقویت‌کننده‌ها بدست آمده و در رابطه (14) بیان شده است. ضمن آن‌که ضخامت هر سه لایه برابر فرض شده است.

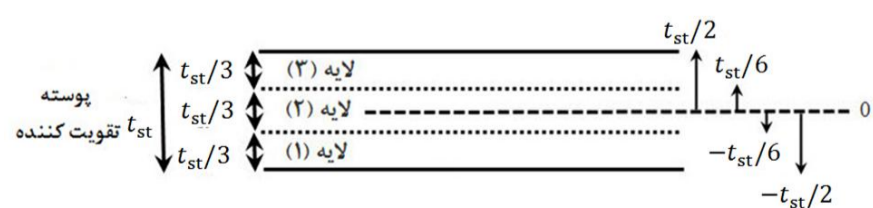
$$t_{st} = Vol_{st} / (2\pi r L) \quad (14)$$

که در این رابطه  $Vol_{st}$  حجم تقویت‌کننده‌ها و  $r$  و  $L$  به ترتیب شعاع و ارتفاع پوسته معادل تقویت‌کننده‌هاست که برابر شعاع و ارتفاع پوسته کامپوزیتی ساده در نظر گرفته شده است.

شکل 6 نمایی از پوسته معادل تقویت‌کننده‌ها را نشان می‌دهد. خواص مکانیکی لایه‌های این پوسته که به ترتیب با  $\bar{Q}_{ij}^{(1)}$ ،  $\bar{Q}_{ij}^{(2)}$ ،  $\bar{Q}_{ij}^{(3)}$  نشان داده می‌شود باید به گونه‌ای انتخاب شوند که سفتی آن‌ها با سفتی محاسبه شده برای تقویت‌کننده‌ها که از روابط (9) تا (11) بدست آمده است برابر باشند. سفتی یک کامپوزیت سه لایه از رابطه (15) محاسبه می‌شود:



شکل 5 نحوه قرارگیری پوسته معادل تقویت‌کننده‌ها در کنار پوسته اصلی



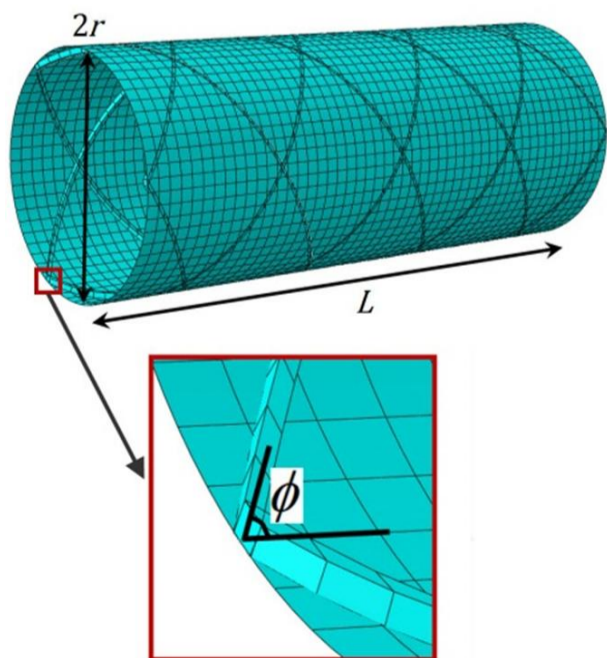
شکل 6 نمایی از پوسته معادل تقویت‌کننده‌ها

صفر برای تعریف آن‌ها استفاده شده است. پس از مونتاژ پوسته و تقویت‌کننده‌ها با استفاده از قید مناسب اتصال میان آن‌ها برقرار شده است. همچنین برای اعمال بار یکنواخت به لبه پوسته از قید MPC استفاده شده است. برای المان‌بندی پوسته از المان درجه دو S8R استفاده شده است. این المان اجازه پیچش‌های بزرگ و کرنش‌های کوچک را می‌دهد و برای آنالیز کمانش مناسب است. تقویت‌کننده‌ها نیز با المان خطی C3D8R المان‌بندی شده‌اند. لازم به ذکر است که در تمامی موارد، آنالیز مش صورت گرفته است و با کوچک کردن اندازه المان‌ها روند همگرایی نتایج مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه، برای ایجاد اختصار از ذکر نتایج مربوط به آنالیز مش صرف‌نظر شده است. مدل ایجاد شده در شکل 7 نمایش داده شده است.

از دو آنالیز خطی و غیرخطی می‌توان برای بررسی رفتار کمانشی پوسته‌های کامپوزیتی استفاده نمود. روش خطی مقدار ویژه که در نرم‌افزار المان محدود آباکوس نیز تعبیه شده، یک روش ساده برای آنالیز چنین سازه‌هایی است که برای طراحی اولیه می‌توان از آن بهره برد. این روش نسبت به روش‌های غیرخطی هزینه محاسباتی بسیار کمتری دارد. برای بررسی دقیق‌تر و نیز در نظر گرفتن نقص‌های هندسی در سازه می‌توان از تحلیل‌های غیرخطی نظیر تحلیل Riks استفاده نمود. البته برای انجام چنین تحلیلی نیاز است که ابتدا آنالیز خطی مقدار ویژه صورت پذیرد. آنالیز مقدار ویژه مودهای کمانش و بارهای نظیر هر مود را در اختیار قرار می‌دهد. البته باید توجه داشت که تغییر مکان‌های نشان داده شده در هر کدام از این مودها، نسبی بوده و معرف تغییر مکان واقعی سازه نیست. در این مقاله برای تحلیل کمانش پوسته‌های کامپوزیتی و بررسی تاثیر پارامترهای مختلف از این روش استفاده شده است.

شکل 8 نتایج بدست آمده از قانون مخلوطها، اصل برهم‌نهی، روش جدید ارائه شده و المان محدود را در مقایسه با یکدیگر نشان می‌دهد. همان‌گونه که در این شکل پیداست، در محدوده‌ی 0/75 تا 2 میلی‌متر نتایج هر سه روش با نتایج المان محدود هم‌خوانی قابل قبولی دارند. اما با افزایش ضخامت پوسته به بیش از 2 میلی‌متر، کمانش موضعی در ریب‌ها رخ می‌دهد و همین عامل باعث اختلاف نتایج حل تحلیلی با نتایج المان محدود می‌شود. مطابق انتظار در این محدوده هیچ کدام از روش‌ها پیش‌بینی مناسبی از بار بحرانی کمانش ندارند.

همان‌گونه که در شکل مشخص است و پیش از این نیز اشاره شد، استفاده از قانون مخلوطها بار بحرانی کمانش را کمتر از حد واقعی تخمین می‌زند. از طرف دیگر استفاده از اصل برهم‌نهی بار بحرانی را بیشتر از میزان



شکل 7 نمونه ای از مدل ایجاد شده (m=3 و n=4)

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi r} N_x \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx dy \quad (21)$$

تکیه‌گاه‌ها به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده‌اند و میدان جابجایی طبق رابطه (22) حدس زده شده است:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} \cos(\bar{M}x) \sin(\bar{N}y) \quad (22\text{-الف})$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_{mn} \sin(\bar{M}x) \cos(\bar{N}y) \quad (22\text{-ب})$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_{mn} \sin(\bar{M}x) \sin(\bar{N}y) \quad (22\text{-پ})$$

در این روابط  $\bar{M} = m\pi/L$  و  $\bar{N} = n/r$  می‌باشند و  $L$  و  $r$  به ترتیب طول و شعاع استوانه هستند.

با قرار دادن میدان جابجایی فوق در روابط (18) تا (21)، انرژی پتانسیل کل بر حسب ضرایب ماتریس سفتی پوسته، بار محوری  $N_x$  و ضرایب مجهول  $\bar{A}_{mn}$ ،  $\bar{B}_{mn}$  و  $\bar{C}_{mn}$  به دست می‌آید. برای برقرار تعادل پایدار لازم است انرژی پتانسیل، مینیمم مقدار خود را داشته باشد. بدین منظور باید مشتق اول انرژی پتانسیل کل نسبت به ضرایب مجهول میدان جابجایی صفر شود. این امر منجر به ایجاد یک مسئله مقدار ویژه شده که با حل آن برای نیروی مجهول  $N_x$ ، تعداد زیادی مقادیر ویژه به دست می‌آید. کمترین مقدار ویژه به دست آمده برابر با بار بحرانی کمانش پوسته است.

#### 4- تحلیل المان محدود و اعتبارسنجی

به منظور اعتبارسنجی نتایج به دست آمده از روش تحلیلی، کمانش محوری پوسته مشبک کامپوزیتی با استفاده از نرم‌افزار المان محدود آباکوس نیز بررسی شده است. پوسته کامپوزیتی مشابه آنچه در مرجع [6] آمده از جنس شیشه اپکسی انتخاب شده که خواص آن در جدول 1 آورده شده است. رشته پیچی به صورت  $[-60,60]_5$  انتخاب شده است. طول و شعاع پوسته به ترتیب 360 و 80 میلی‌متر فرض شده و ضخامت پوسته از 0/3 تا 3 میلی‌متر متغیر در نظر گرفته شده است. برای تقویت پوسته از چهار جفت ریب با سطح مقطع مربع و به ضلع 3 میلی‌متر استفاده شده است. زاویه قرارگیری ریب‌ها  $\pm 46^\circ$  درجه نسبت به محور استوانه انتخاب شده است. بدین ترتیب سه سلول واحد در راستای طول استوانه وجود خواهد داشت. در ادامه‌ی این مقاله تعداد جفت ریب‌ها و تعداد سلول‌های واحد در طول استوانه به ترتیب با  $m$  و  $n$  نشان داده شده است.

پوسته به وسیله ارتفاع دادن به یک دایره ایجاد می‌شود. تقویت‌کننده‌ها نیز با روشی مشابه و با دادن ارتفاع و پیچ مناسب به سطح مقطع مربعی ایجاد شده است. پیچ تقویت‌کننده از رابطه (23) قابل محاسبه است:

$$p = mL/n \quad (23)$$

به علت نازکی پوسته حالت تنش صفحه‌ای برقرار است و پوسته به صورت یک لمینیت مدل شده است. تقویت‌کننده‌ها نیز به صورت یک جسم سه‌بعدی مدل شده‌اند. برای تخصیص خواص به تقویت‌کننده یک دستگاه مختصات محلی به گونه‌ای تعریف شده است که محور اصلی آن در امتداد مارپیچ تقویت‌کننده باشد و با چرخش تقویت‌کننده، محورهای دستگاه مختصات نیز دوران نمایند. به علت ساختار تک جهته تقویت‌کننده‌ها، از یک لایه با زاویه

جدول 1 خواص مکانیکی الیاف شیشه اپکسی [6]

$E_{11}$ (GPa)	$E_{22}$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
36	5/8	3/2	0/3	1600



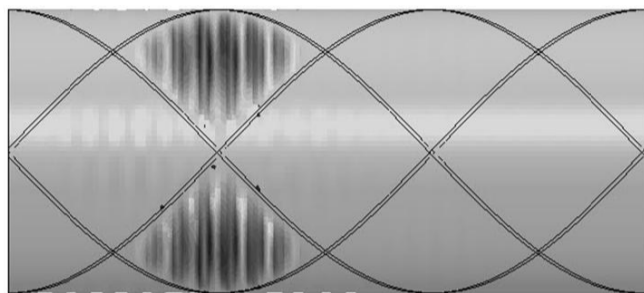
پوسته در شکل 10 نمایش داده شده است. با افزایش ضخامت پوسته، تا قبل از رسیدن به کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها بار بحرانی ویژه نیز افزایش می‌یابد. اما برای ضخامت‌های بیشتر از 2 میلی‌متر که کمانش به صورت موضعی در ریب‌ها رخ می‌دهد بار بحرانی ویژه کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر در این محدوده اثر افزایش وزن پوسته بیشتر از اثر افزایش بار بحرانی آن است.

#### 5-2- اثر مساحت سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها

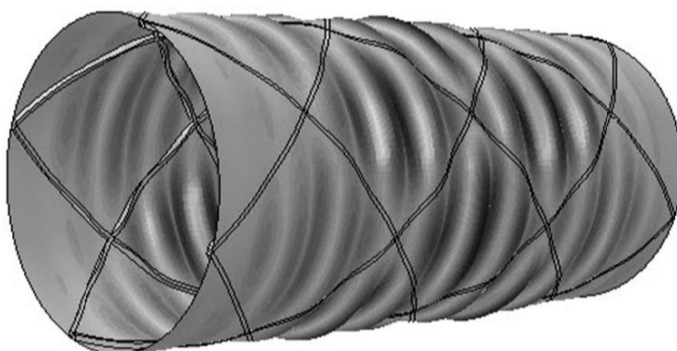
همان‌گونه که اشاره شد روش‌های تحلیلی نمی‌تواند کمانش موضعی پوسته و تقویت‌کننده‌ها را در نظر بگیرد. از این رو در ادامه برای مطالعه پارامترهای موثر بر بار کمانش و بار کمانش ویژه پوسته مشبک از روش المان محدود نیز استفاده شده است.

جداول 2 تا 4 بار بحرانی پوسته مشبک با تقویت‌کننده‌هایی با سطح

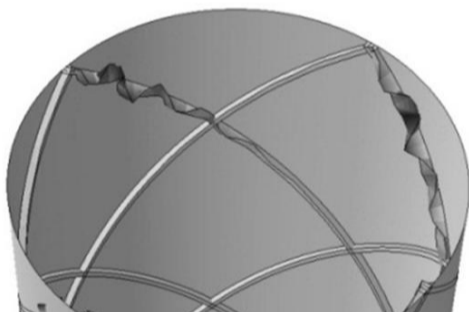
مقطع مختلف را نشان می‌دهند. مطابق انتظار افزایش سطح مقطع



(الف)



(ب)



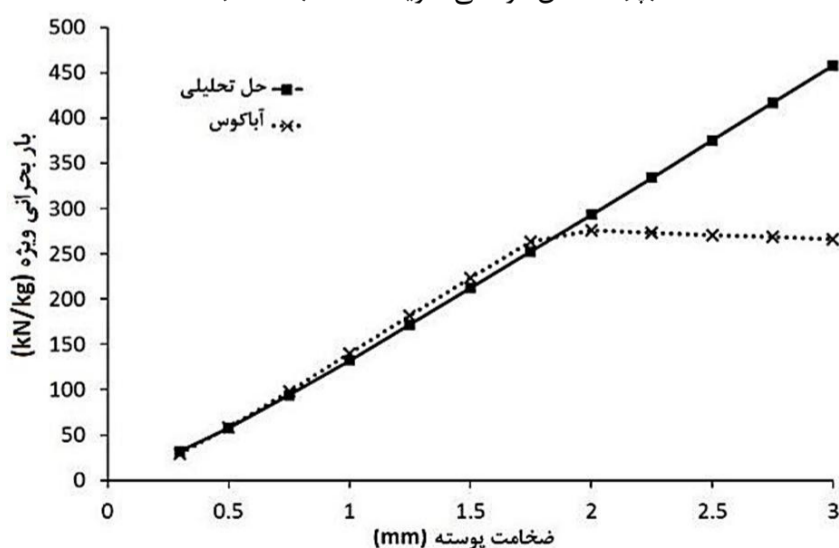
(پ)

شکل 9 مدهای مختلف کمانش پوسته به ازای ضخامت‌های مختلف پوسته

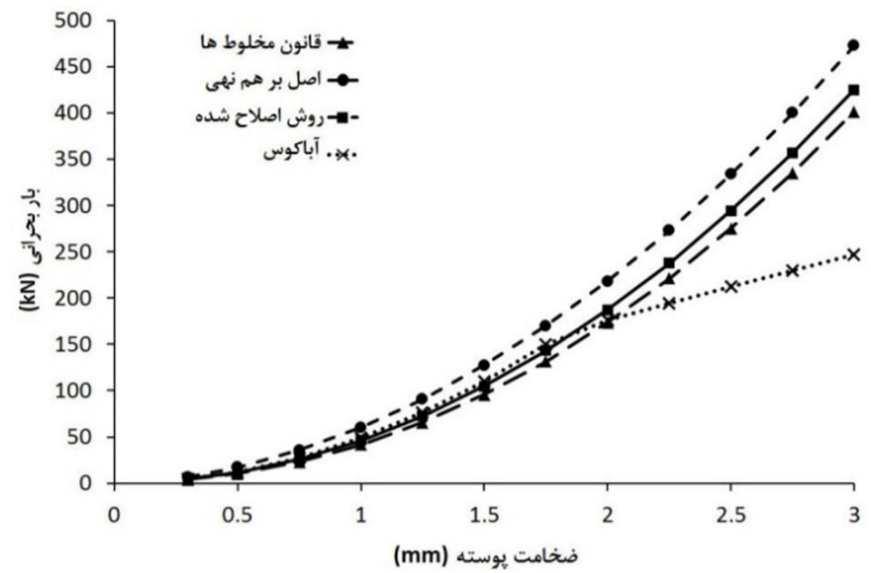
(الف) کمانش موضعی پوسته (0/3 mm) (ب) کمانش کلی سازه

(1/75mm)

(پ) کمانش موضعی تقویت‌کننده (3 mm)



شکل 10 اثر افزایش ضخامت بر بار بحرانی ویژه پوسته مشبک



شکل 8 مقایسه نتایج قانون مخلوط‌ها، اصل برهم‌نهی و روش ارائه شده جدید با نتایج آباکوس

واقعی پیش‌بینی خواهد کرد. روشی که در این پژوهش ارائه شده است، همواره بار بحرانی را بین این دو مقدار پیش‌بینی می‌کند؛ و نتایج آن تطابق بهتری با نتایج المان محدود بدست آمده دارد. حداکثر اختلاف نتایج این روش با نتایج المان محدود در محدوده کمانش کلی پوسته 5/3% است. این در حالیست که اختلاف نتایج دو روش قبل با نتایج المان محدود در همین بازه به ترتیب به 15% و 23% می‌رسد. این مقایسه، صحت روش پیشنهادی برای تعیین سفتی معادل پوسته مشبک و نیز دقت بالاتر آن نسبت به روش‌های پیشین را نشان می‌دهد.

#### 5- تحلیل نتایج

در ادامه اثر برخی پارامترهای هندسی از جمله مساحت سطح مقطع، تعداد و زاویه قرارگیری ریب‌ها و نیز ضخامت پوسته بر بار بحرانی پوسته مشبک بررسی شده است. همچنین، از آنجا که یکی از مزیت‌های اصلی سازه‌های کامپوزیتی دارا بودن نسبت بار بحرانی به وزن بهتر در مقایسه با سازه‌هایی از جنس‌های دیگر است؛ در این مقاله نسبت بار بحرانی به وزن پوسته مشبک که از این به بعد با نام "بار بحرانی ویژه" از آن یاد خواهد شد نیز مورد توجه قرار گرفته است.

#### 5-1- اثر ضخامت پوسته

بررسی نتایج المان محدود نشان می‌دهد که امکان بروز سه مود کمانش برای پوسته مشبک وجود دارد. برای پوسته با ضخامت کم (کمتر از 0/75 میلی‌متر)، شکل کمانش سازه به صورت کمانش موضعی پوسته است. با افزایش ضخامت (ضخامت‌های 1 تا 1/75 میلی‌متر)، مود کمانش به کمانش کلی در پوسته تغییر می‌یابد. با افزایش مجدد ضخامت پوسته (ضخامت‌های بیشتر از 2 میلی‌متر) مود کمانش به صورت کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها در می‌آید. البته در اغلب موارد ترکیبی از دو مود کمانش ایجاد می‌شود و تغییر شکل کمانش از یک مود به مود دیگر به صورت ناگهانی نیست. شکل 9 سه مود کمانش یاد شده را برای ضخامت‌های مختلف پوسته نشان می‌دهد.

شکل 8 که پیش از این بدان اشاره شد، اثر افزایش ضخامت بر بار بحرانی پوسته مشبک را نشان می‌دهد. به طور کلی مطابق انتظار با افزایش ضخامت، در محدوده کمانش موضعی پوسته و کمانش کلی سازه بار بحرانی پوسته افزایش می‌یابد، اما با افزایش ضخامت پوسته و بروز کمانش موضعی ریب شیب افزایش بار بحرانی کاهش یافته شده و بار بحرانی تقریباً ثابت می‌شود. همان‌گونه که اشاره شد روش تحلیلی برای محدوده کمانش‌های موضعی ریب قابل استفاده نیست. تغییرات بار بحرانی ویژه پوسته مشبک بر حسب ضخامت

تقویت‌کننده باعث افزایش سفتی تقویت‌کننده شده و به ازای ضخامت یکسان پوسته مود کمانش سازه به سمت کمانش پوسته تغییر خواهد یافت. به عبارت دیگر کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها به ازای ضخامت‌ها بیشتر پوسته رخ می‌دهد. ضمن آن‌که افزایش سطح مقطع تقویت‌کننده در محدوده کمانش موضعی پوسته تاثیر چندانی بر بار بحرانی ندارد اما در محدوده کمانش کلی و کمانش موضعی تقویت‌کننده بار بحرانی را افزایش می‌دهد.

علاوه بر این، با افزایش سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها اختلاف جواب‌های حل المان محدود و حل تحلیلی در محدوده کمانش موضعی پوسته افزایش می‌یابد. علت آنست که با افزایش مساحت تقویت‌کننده‌ها سفتی آن‌ها و در نتیجه سفتی نهایی که در حل تحلیلی وارد می‌شود افزایش می‌یابد؛ و به تبع آن بار بحرانی محاسبه شده از حل تحلیلی افزایش می‌یابد. حال آن‌که افزایش سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها تاثیر بر کمانش موضعی پوسته ندارد. ضمن آن‌که درصد اختلاف جواب‌ها در محدوده کمانش کلی پوسته تغییر محسوسی ندارد و حداکثر اختلاف جواب‌ها در این محدوده 7/81% است. در محدوده کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها نیز با افزایش سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها اختلاف جواب‌ها کمتر خواهد شد اما همچنان جواب‌های به دست آمده برای این قسمت قابل قبول نیست. این بررسی‌ها ناکارآمدی حل تحلیلی در محدوده کمانش موضعی پوسته و تقویت‌کننده‌ها را به خوبی نشان می‌دهد.

اثر تغییر سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها بر بار بحرانی ویژه پوسته مشبک در شکل 11 بررسی شده است. همان‌گونه که گفته شد افزایش سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها بار بحرانی پوسته مشبک را در محدوده کمانش موضعی پوسته تحت تاثیر قرار نمی‌دهد. بنابراین طبیعی است که با افزایش سطح مقطع ریب‌ها بار بحرانی ویژه در این محدوده کاهش یابد. از طرف دیگر هرچند افزایش مساحت مقطع تقویت‌کننده‌ها بار بحرانی را در محدوده کمانش کلی سازه و کمانش موضعی ریب‌ها افزایش می‌دهد، اما بار بحرانی ویژه حتی در این محدوده نیز با افزایش سطح مقطع ریب‌ها کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر اثر افزایش وزن بیشتر از افزایش بار بحرانی است. این روند به گونه‌ای است که بار بحرانی ویژه پوسته مشبک از بار بحرانی ویژه پوسته ساده نیز کمتر خواهد شد. این مسئله به خوبی در شکل 11 قابل مشاهده است.

جدول 2 بار بحرانی پوسته مشبک با تقویت‌کننده مربعی به ضلع 3 میلی‌متر

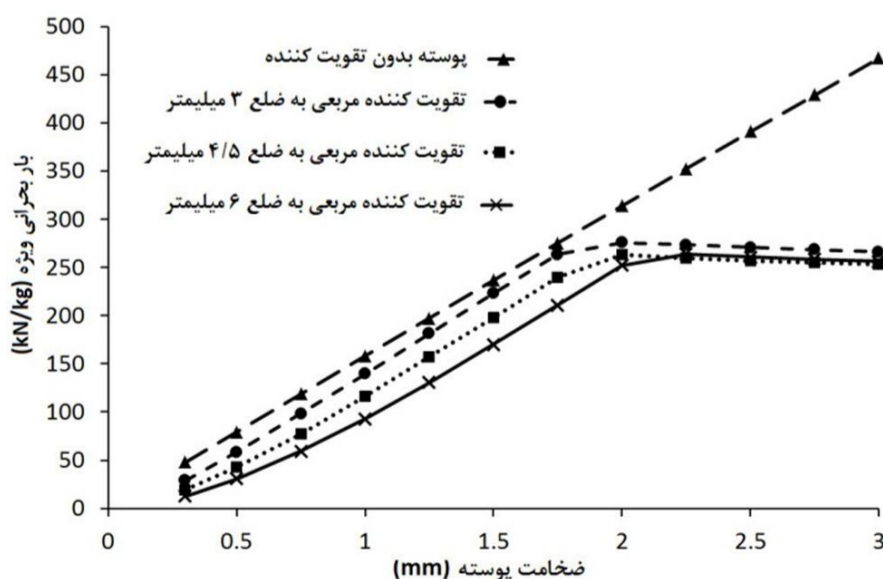
ضخامت پوسته (mm)	مود کمانش	نتایج آباکوس (kN)	حل تحلیلی (kN)	درصد اختلاف
0/3	پوسته	4/26	4/69	10/06
0/5	پوسته	11/95	11/75	1/65
0/75	پوسته	27/25	25/99	4/60
1	کلی	48/87	46/28	5/30
1/25	کلی	76/62	72/58	5/27
1/5	کلی	110/25	104/83	4/91
1/75	کلی	149/43	143/13	4/21
2	ریب	176/35	187/32	6/23
2/25	ریب	194/42	237/63	22/22
2/5	ریب	212/27	294/14	38/57
2/75	ریب	229/88	256/98	55/29
3	ریب	247/38	424/91	71/76

جدول 3 بار بحرانی پوسته مشبک با تقویت‌کننده مربعی به ضلع 4/5 میلی‌متر

ضخامت پوسته (mm)	مود کمانش	نتایج آباکوس (kN)	حل تحلیلی (kN)	درصد اختلاف
0/3	پوسته	4/23	8/36	97/55
0/5	پوسته	11/89	15/43	29/77
0/75	پوسته	27/24	28/68	5/28
1	کلی	49/23	47/86	2/79
1/25	کلی	77/88	73/26	5/93
1/5	کلی	112/88	104/92	7/05
1/75	کلی	153/93	142/63	7/34
2	ریب	187/84	186/48	0/72
2/25	ریب	204/13	236/53	15/87
2/5	ریب	220/62	292/90	32/76
2/75	ریب	237/41	355/44	49/72
3	ریب	254/46	423/38	66/38

جدول 4 بار بحرانی پوسته مشبک با تقویت‌کننده مربعی به ضلع 6 میلی‌متر

ضخامت پوسته (mm)	مود کمانش	نتایج آباکوس (kN)	حل تحلیلی (kN)	درصد اختلاف
0/3	پوسته	4/20	13/78	228/44
0/5	پوسته	11/83	23/27	96/72
0/75	پوسته	27/17	38/66	42/30
1	پوسته	49/33	57/59	16/74
1/25	کلی	78/56	81/63	3/91
1/5	کلی	114/77	111/64	2/73
1/75	کلی	157/55	147/86	6/15
2	کلی	206/45	190/32	7/81
2/25	ریب	235/20	294/03	1/63
2/5	ریب	251/43	294/21	17/01
2/75	ریب	267/68	356/39	33/14
3	ریب	284/17	423/34	48/97

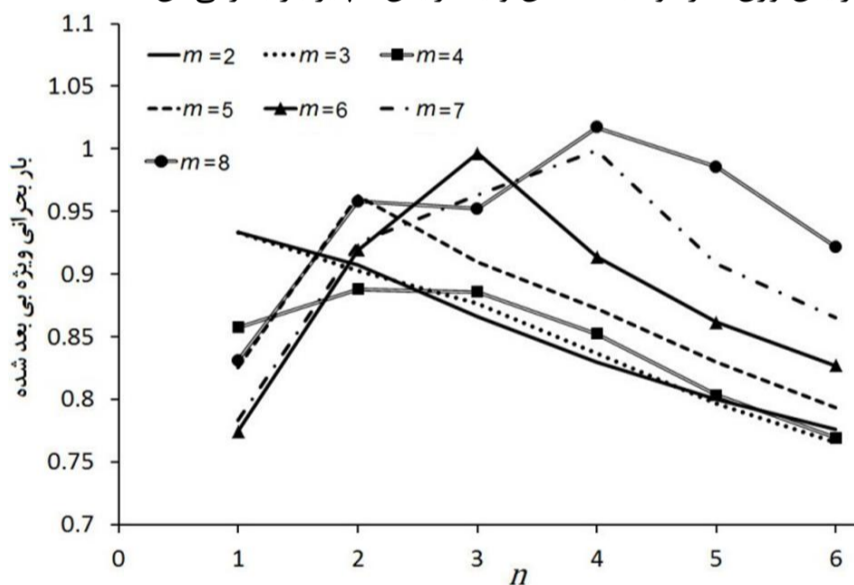


شکل 11 اثر تغییر سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها بر بار بحرانی ویژه پوسته مشبک

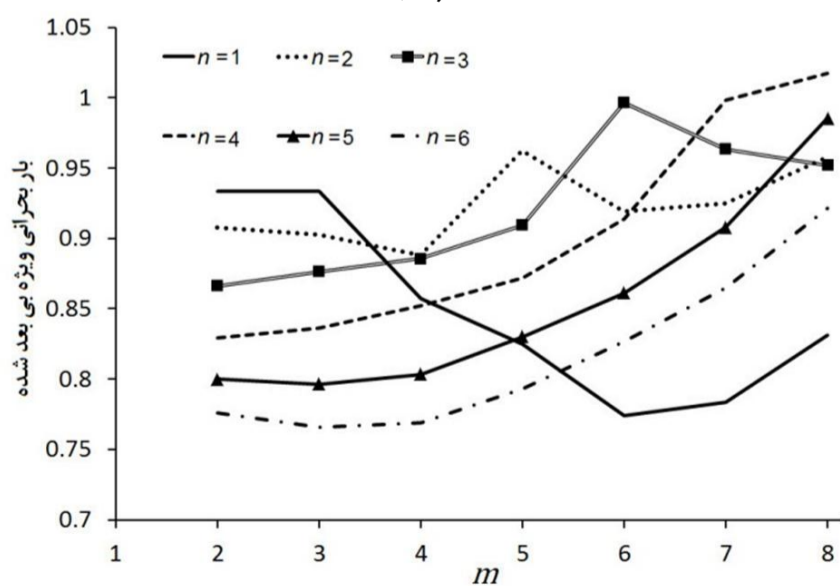


بررسی شکل 12-ب نشان می‌دهد که وجود یک سلول واحد در راستای طول استوانه نمی‌تواند بار بحرانی را افزایش دهد و برای اثربخشی ریب‌ها وجود حداقل دو سلول واحد در طول استوانه ضروری است. به ازای  $n$  ثابت، افزایش تعداد جفت ریب‌ها سفتی سازه را افزایش داده ضمن آنکه این امر موجب کوچک‌تر شدن نواحی بدون تقویت پوسته شده و مقاومت پوسته به کمانش موضعی را افزایش می‌دهد. این موضوع سبب تغییر مود کمانش از کمانش موضعی پوسته و کمانش کلی سازه به کمانش ریب‌ها می‌شود. در محدوده کمانش موضعی پوسته و کمانش کلی سازه، افزایش تعداد جفت ریب‌ها بار بحرانی را افزایش می‌دهد؛ اما در محدوده‌ای که مود کمانش، کمانش موضعی ریب‌هاست افزودن تعداد جفت ریب‌ها تاثیر چندانی بر بار بحرانی ندارد.

اثر پارامترهای  $m$  و  $n$  بر بار بحرانی ویژه پوسته مشبک در شکل 13 بررسی شده است. همان‌گونه که پیداست، با این‌که تقویت پوسته به کمک ریب‌های تقویت‌کننده توانسته بار بحرانی را در بهترین شرایط تا حدود 40% افزایش دهد؛ اما هیچ‌کدام از حالات قرارگیری ریب‌ها نتوانسته سبب بهبود چشمگیر بار بحرانی ویژه شود و در اکثر حالات بار بحرانی ویژه پوسته مشبک حتی از بار بحرانی پوسته ساده بدون تقویت نیز کمتر است. برای دو، سه و یا چهار جفت ریب، افزایش  $n$  بار بحرانی ویژه را به شدت کاهش می‌دهد؛ که این مطلب با توجه به نتایج شکل 12-الف و توضیحات ارائه شده در مورد آن، قابل پیش‌بینی بود. برای پوسته با بیش از چهار جفت ریب افزایش  $n$  ابتدا بار بحرانی ویژه را افزایش می‌دهد و بعد از تغییر مود کمانش به کمانش موضعی ریب‌ها افزایش  $n$  بار بحرانی ویژه را به شدت کاهش می‌دهد. علت این امر افزایش وزن سازه و ثابت ماندن و یا افزایش ناچیز بار بحرانی آن است.



(الف)



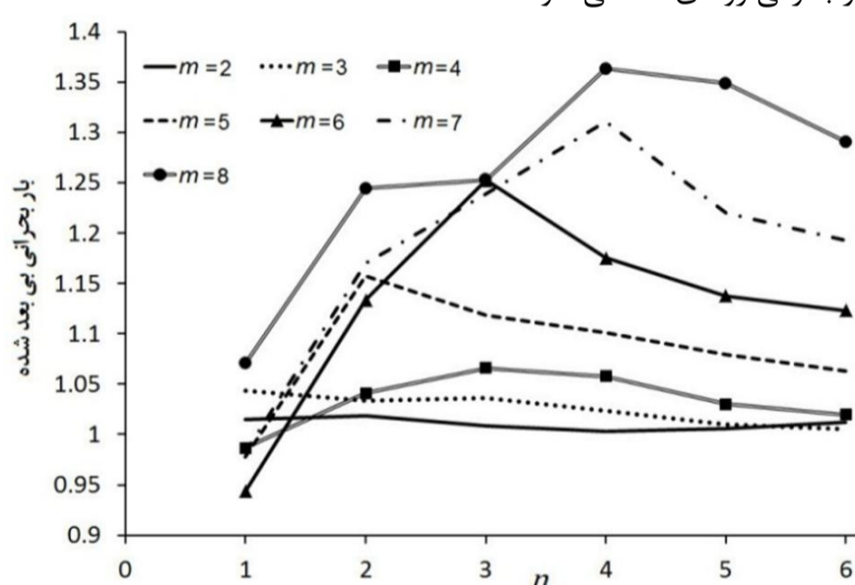
(ب)

شکل 13 اثر تغییرات  $m$  و  $n$  بر بار بحرانی ویژه بی‌بعد شده

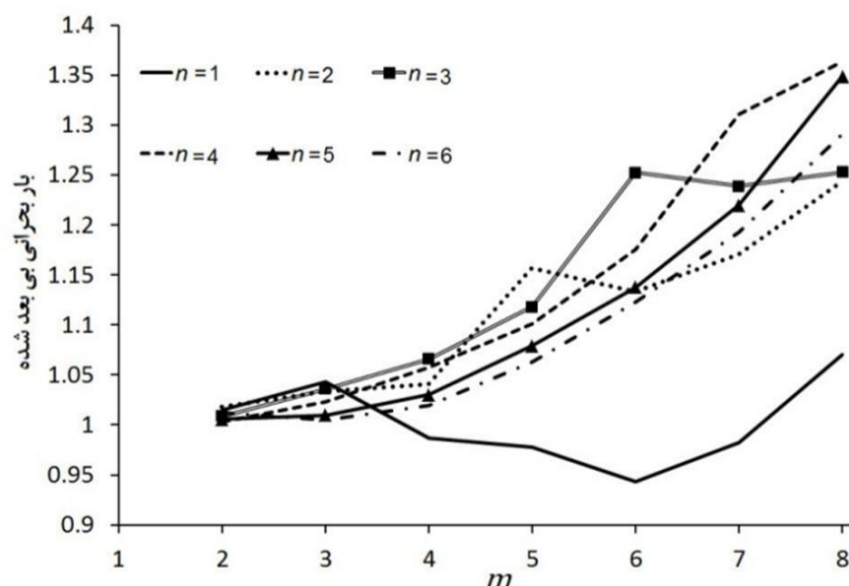
### 3-5- اثر تعداد تقویت‌کننده‌ها و سلول‌های واحد

برای بررسی بهتر میزان اثربخشی تعداد تقویت‌کننده و نحوه قرارگیری آن‌ها، بر بار بحرانی و بار بحرانی ویژه پوسته‌های مشبک؛ در ادامه بار بحرانی و بار بحرانی ویژه پوسته ساده بدون تقویت‌کننده بی‌بعد شده است. در این مطالعه ضخامت پوسته 1 میلی‌متر و مقطع تقویت‌کننده‌ها، مربعی به ضلع 3 میلی‌متر در نظر گرفته شده است. شکل 12 اثر پارامترهای  $m$  و  $n$  بر بار بحرانی پوسته مشبک را نشان می‌دهد. با توجه به شکل 12-الف پیداست که برای اثربخشی ریب‌های تقویت‌کننده به تعداد حداقلی از ریب‌ها نیاز است. به عبارت دیگر وجود دو، سه یا چهار جفت ریب تقویت‌کننده تاثیر قابل توجهی بر بار کمانش پوسته مشبک ندارد و برای افزایش بار بحرانی پوسته باید از تعداد جفت ریب‌های بیشتری استفاده شود. نتایج به‌دست آمده از تست تجربی که در مرجع [6] بدان اشاره شده است نیز مؤید همین مطلب هستند.

از آن‌جا که افزایش تعداد ریب‌ها سفتی سازه را افزایش می‌دهد، به طور کلی افزایش تعداد جفت ریب‌ها عموماً بار بحرانی را افزایش می‌دهد. البته باید توجه داشت که با تغییر تعداد جفت ریب‌ها به ازای تعداد سلول‌های واحد ثابت، و یا تغییر تعداد سلول‌های واحد به ازای تعداد جفت ریب‌های ثابت، مود کمانش پوسته نیز تغییر می‌کند. شکستگی‌های ایجاد شده در نمودارها به علت همین تغییر مود کمانش است. به ازای تعداد جفت ریب‌های ثابت افزایش  $m$ ، مود کمانش را از کمانش موضعی ریب‌ها به کمانش موضعی پوسته و کمانش کلی سازه تغییر خواهد داد. به ازای تعداد جفت ریب‌های ثابت افزایش  $m$ ، در ابتدا بار بحرانی را افزایش می‌دهد و سپس با تغییر مود کمانش بار بحرانی روندی کاهشی خواهد داشت.



(الف)



(ب)

شکل 12 اثر تغییرات  $m$  و  $n$  بر بار بحرانی بی‌بعد شده

می‌شود. تفاوت اصلی روش ارائه شده و روش‌های پیشین در نحوه ترکیب کردن سفتی پوسته و تقویت‌کننده‌ها و محاسبه سفتی پوسته نهایی است. در این روش یک پوسته سه لایه به گونه‌ای تعیین می‌شود که حجم و سفتی آن برابر حجم و سفتی تقویت‌کننده‌ها باشد. در ادامه با قرار دادن این سه لایه در کنار لایه‌های پوسته اصلی به راحتی می‌توان سفتی پوسته نهایی را محاسبه نمود. پس از تعیین پارامترهای سفتی پوسته نهایی بار بحرانی کمانش محوری پوسته با استفاده از روش ریتز و اصل مینیمم انرژی پتانسیل به‌دست آمده است. نتایج بدست آمده از این روش به کمک نرم‌افزار المان محدود آباکوس اعتبارسنجی شده است. بررسی نتایج نشان می‌دهد که روش ارائه شده برای محدوده کمانش کلی پوسته معتبر است. مقایسه نتایج روش حاضر با روش قانون مخلوط‌ها و اصل برهم‌نهی دقت بالاتر این روش را نشان می‌دهد.

در ادامه اثر پارامترهای مختلف بر کمانش محوری پوسته مشبک کامپوزیتی بررسی شده است. از آنجا که حل تحلیلی صرفاً برای کمانش کلی سازه معتبر است؛ برای بررسی پارامتری از حل المان محدود نیز استفاده شده است. پوسته از جنس شیشه اپکسی و با لایه‌چینی  $[5_{60}, 60]_{-}$  در نظر گرفته شده است. طول و شعاع پوسته به ترتیب 360 و 80 میلی‌متر انتخاب شده و اثر پارامترهای مساحت سطح مقطع، تعداد و زاویه قرارگیری ریب‌ها و نیز ضخامت پوسته بر بار بحرانی و بار بحرانی ویژه پوسته بررسی شده است.

نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت پوسته مود کمانش از کمانش موضعی پوسته به کمانش کلی سازه و نهایتاً کمانش موضعی ریب‌ها تغییر می‌یابد. در حین این تغییر و با افزایش ضخامت پوسته تا قبل از رسیدن به کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها بار بحرانی افزایش می‌یابد اما پس از آن شیب افزایش بار بحرانی کم خواهد شد. بار بحرانی ویژه پوسته نیز با افزایش ضخامت بحرانی به صورت خطی افزایش می‌یابد و با رسیدن به کمانش موضعی ریب‌ها روندی کاهشی پیدا می‌کند.

افزایش سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها به ازای ضخامت یکسان پوسته مود کمانش سازه را به سمت کمانش پوسته سوق خواهد داد. ضمن آنکه افزایش سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها در محدوده کمانش موضعی پوسته تأثیر چندانی بر بار بحرانی ندارد و بار بحرانی ویژه را کاهش می‌دهد. در محدوده کمانش کلی و کمانش موضعی ریب، با افزایش سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها بار بحرانی افزایش می‌یابد؛ اما اثر آن از اثر افزایش وزن سازه کمتر بوده و در نتیجه بار بحرانی ویژه سازه با کاهش مواجه می‌شود. ضمناً افزایش سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها اختلاف جواب‌های حل المان محدود و حل تحلیلی در محدوده کمانش موضعی پوسته را افزایش داده اما تغییر محسوسی در محدوده کمانش کلی پوسته ایجاد نمی‌کند.

بررسی نتایج نشان داد که برای اثر بخش بودن تقویت پوسته، به تعداد حداقلی از ریب‌های تقویت‌کننده نیاز است. علاوه بر این وجود یک سلول واحد در راستای طول استوانه نیز تأثیر مثبتی ندارد و برای اثربخشی تقویت‌کننده‌ها، الزاماً باید بیش از یک سلول واحد در راستای طول استوانه وجود داشته باشد. تغییر تعداد جفت ریب‌ها و تعداد سلول‌های واحد موجب تغییر در مود کمانش سازه می‌شود و روند تغییرات بار بحرانی را دچار پیچیدگی می‌نماید. از این رو نمی‌توان یک حکم کلی برای نحوه اثرگذاری این پارامترها صادر کرد؛ اما به طور کلی افزایش تعداد جفت ریب‌ها و تعداد سلول‌های واحد تا قبل از رسیدن به مود کمانش موضعی ریب‌ها، بار بحرانی را افزایش می‌دهد.

به ازای  $n$  ثابت، افزایش تعداد جفت ریب‌ها عموماً بار بحرانی ویژه را تا زمانی که مود کمانش به کمانش موضعی تقویت‌کننده تغییر یابد، افزایش می‌دهد و پس از آن با افزودن تعداد جفت ریب‌ها بار بحرانی ویژه کاهش می‌یابد.

#### 4-5- اثر زاویه قرارگیری تقویت‌کننده‌ها

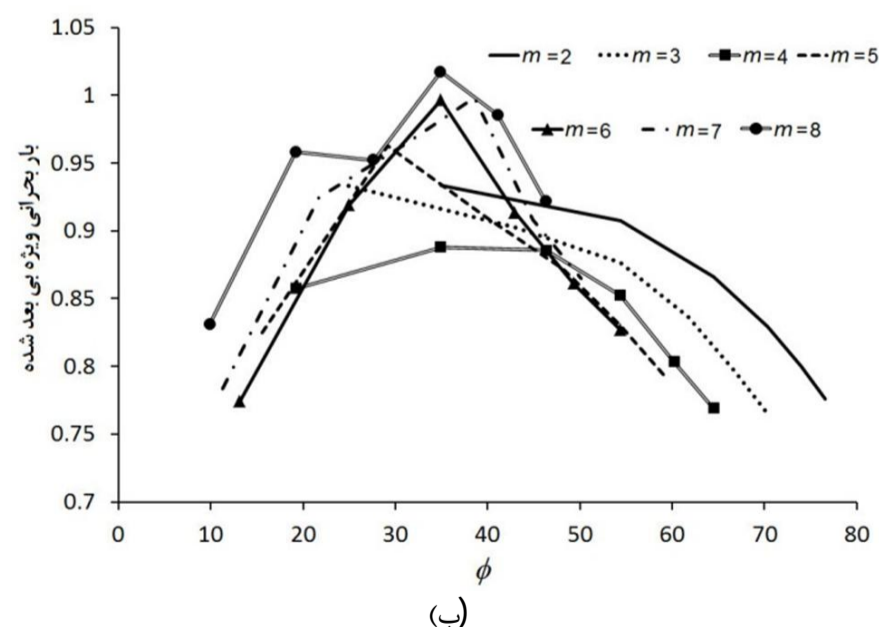
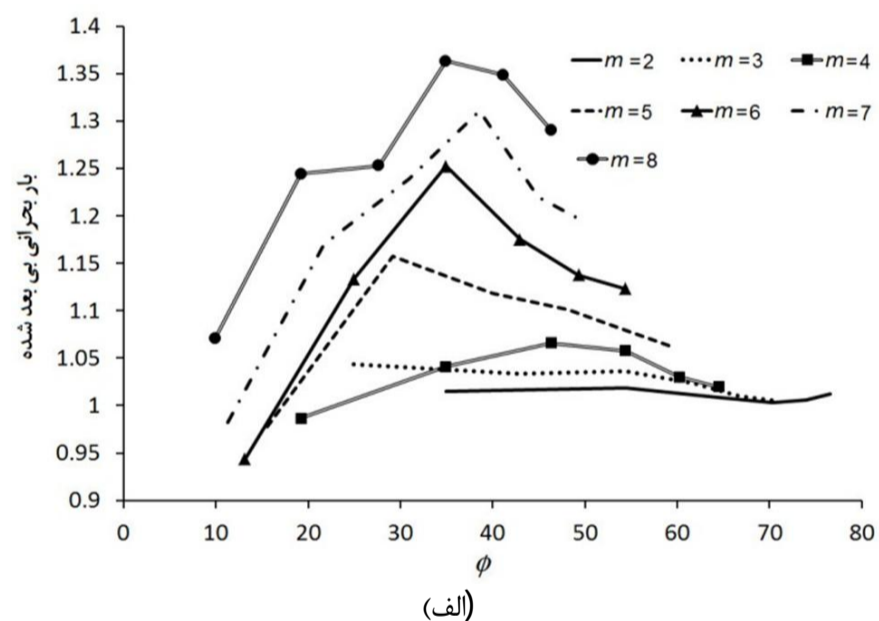
باتوجه به نتایج به‌دست آمده، در ادامه اثر زاویه قرارگیری ریب‌ها بر بار بحرانی و بار بحرانی ویژه پوسته مشبک در شکل 14 بررسی شده است. لازم به ذکر است که زاویه قرارگیری تقویت‌کننده‌ها طبق رابطه (24) به پارامترهای  $m$  و  $n$  مرتبط است:

$$\tan \phi = \frac{2\pi r n}{mL} \quad (24)$$

با توجه به شکل مشخص است که برای زوایای کمتر از  $30^\circ$  درجه مود کمانش عموماً کمانش موضعی در ریب است. بیشترین بار بحرانی برای  $30^\circ < \phi < 40^\circ$  بدست می‌آید و به ازای زوایای بزرگتر از  $40^\circ$  درجه بار بحرانی کاهش می‌یابد. نتایج مشابهی نیز برای بار بحرانی ویژه به‌دست آمده است. بیشترین بار بحرانی ویژه نیز برای  $30^\circ < \phi < 40^\circ$  به‌دست می‌آید. همان‌گونه که پیش از این نیز اشاره شد، افزودن ریب‌های تقویت‌کننده بار بحرانی ویژه را چندان بهبود نبخشیده و بار بحرانی ویژه در محدوده فوق در حدود بار بحرانی ویژه پوسته ساده بدون تقویت‌کننده است.

#### 6- جمع‌بندی

در این مقاله روش جدیدی برای تحلیل پوسته‌های مشبک کامپوزیتی ارائه شده است. در این روش پوسته مشبک با یک پوسته کامپوزیتی ساده معادل



شکل 14 اثر تغییر زاویه ریب بر

(الف) بار بحرانی بی‌بعد شده (ب) بار بحرانی ویژه بی‌بعد شده

- [8] G. H. Rahimi, M. Zandi, S. F. Rasouli, Analysis of the effect of stiffener profile on buckling strength in composite isogrid stiffened shell under axial loading, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 24, No. 1, pp. 198-203, 2013.
- [9] M. Y. M.A.Ghasemi, S.M.Hoseini, Analysis of effective parameters on the buckling of grid stiffened composite shells based on first order shear deformation theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 10, pp. 51-61, 2013. (In Persian)
- [10] M. F. Saeed Kalantari, Stability analysis of weight optimum waffle cylindrical shells- A new approach, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 14, pp. 177-184, 2014. (In Persian)
- [11] H. S. Alavijeh, S. Sadeghnejad, M. Sadighi, Parametric Study of Specific Buckling Load of Cylindrical Grid Stiffened Composite Shells, *Advanced Science Letters*, Vol. 13, No. 1, pp. 482-485, 2012.
- [12] K. Lakshmi, A. Rama Mohan Rao, Hybrid shuffled frog leaping optimisation algorithm for multi-objective optimal design of laminate composites, *Computers & Structures*, Vol. 125, No. 0, pp. 200-216, 2013.
- [13] M. Hemmatnezhad, G. H. Rahimi, R. Ansari, On the free vibrations of grid-stiffened composite cylindrical shells, *Acta Mechanica*, Vol. 225, No. 2, pp. 609-623, 2014.
- [14] M. Hemmatnezhad, G. H. Rahimi, M. Tajik, F. Pellicano, Experimental, numerical and analytical investigation of free vibrational behavior of GFRP-stiffened composite cylindrical shells, *Composite Structures*, Vol. 120, No. 0, pp. 509-518, 2015.
- [15] B. Zhang, J. Zhang, Z. Wu, S. Du, A load reconstruction model for advanced grid-stiffened composite plates, *Composite Structures*, Vol. 82, No. 4, pp. 600-608, 2008.
- [16] Q. Zhao, Y. Ding, H. Jin, A Layout Optimization Method of Composite Wing Structures Based on Carrying Efficiency Criterion, *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 24, No. 4, pp. 425-433, 2011.
- [17] J. Jam, M. Zadeh, H. Taghavian, B. Eftari, Vibration Analysis of Grid-Stiffened Circular Cylindrical Shells with Full Free Edges, *Polish Maritime Research*, Vol. 18, No. 4, pp. 23-27, 2011.
- [18] S. Shi, Z. Sun, M. Ren, H. Chen, X. Hu, Buckling resistance of grid-stiffened carbon-fiber thin-shell structures, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 45, No. 1, pp. 888-896, 2013.
- [19] M. Buragohain, R. Velmurugan, Buckling analysis of composite hexagonal lattice cylindrical shell using smeared stiffener model, *Defence Science Journal*, Vol. 59, No. 3, pp. 230-238, 2009.

هر چند تقویت پوسته می‌تواند بار بحرانی را تا حدود 40% افزایش دهد؛ اما هیچ‌کدام از حالات قرارگیری ریب‌ها نمی‌تواند بهبود چشمگیر در بار بحرانی ویژه پوسته ایجاد نماید، و در اکثر حالات بار بحرانی ویژه پوسته مشبک حتی از بار بحرانی پوسته ساده بدون تقویت نیز کمتر است. بهترین حالت برای تقویت‌کننده‌ها قرارگیری آن‌ها در زوایای بین 30 تا 40 درجه نسبت به محور استوانه است. ضمن آن‌که برای زوایای کمتر از 30 درجه مود کمانش عموماً کمانش موضعی ریب خواهد بود.

## 7- مراجع

- [1] H.-J. Chen, S. W. Tsai, Analysis and optimum design of composite grid structures, *Journal of composite materials*, Vol. 30, No. 4, pp. 503-534, 1996.
- [2] N. Jaunky, N. F. Knight, D. R. Ambur, Formulation of an improved smeared stiffener theory for buckling analysis of grid-stiffened composite panels, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 27, No. 5, pp. 519-526, 1996.
- [3] S. Kidane, G. Li, J. Helms, S.-S. Pang, E. Woldesenbet, Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 34, No. 1, pp. 1-9, 2003.
- [4] E. Woldesenbet, S. Kidane, S.-S. Pang, Optimization for buckling loads of grid stiffened composite panels, *Composite Structures*, Vol. 60, No. 2, pp. 159-169, 2003.
- [5] M. Yazdani, H. Rahimi, A. A. Khatibi, S. Hamzeh, An experimental investigation into the buckling of GFRP stiffened shells under axial loading, *Scientific Research and Essay*, Vol. 9, pp. 914-920, 2009.
- [6] M. Yazdani, G. Rahimi, The Effects of Helical Ribs' Number and Grid Types on the Buckling of Thin-walled GFRP-stiffened Shells under Axial Loading, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 29, No. 17, pp. 2568-2575, 2010.
- [7] M. Yazdani, G. Rahimi, The behavior of GFRP-stiffened and-unstiffened shells under cyclic axial loading and unloading, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 30, No. 5, pp. 440-445, 2011.