

تحلیل ناپایداری دینامیکی بال پسگرا در حوزه زمان

بهزاد قدیری^{۱*}، مانی رازی^۲، صباح حمیدی^۳

- ۱- استادیار، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس
۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

*تهران، صندوق پستی ۱۱۱-۱۴۱۱۵

ghadirib@modares.ac.ir

(دریافت مقاله: آبان ۱۳۸۵، پذیرش مقاله: آبان ۱۳۸۷)

چکیده- در این مقاله تحلیل آیروالاستیک خطی بال پسگرا در حوزه زمان با دو درجه آزادی در جریان تراکم‌ناپذیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. معادلات حرکت بال الاستیک، با در نظر گرفتن آن به صورت تیر یک‌سر درگیر و با استفاده از معادلات لاگرانژ در حوزه زمان استخراج شده و اتصال بال در ریشه، صلب فرض شده است. با در نظر گرفتن مودهای ارتعاشی تیر یک‌سر درگیر و با به کار گرفتن تئوری نوارهای باریک، نیروها و ممان‌های آیرودینامیکی وارد شده به بال پسگرا در جریان سیال پتانسیل غیر دائم و تراکم‌ناپذیر به دست آمده است. معادلات آیروالاستیک به صورت بی‌بعد استخراج و به روشی عددی حل شده است. نتایج حاصل از روش به کار رفته برای چند بال پسگرای مورد مطالعه، با نتایج تجربی و دیگر مراجع مقایسه شده و تطابق مناسبی بین آنها مشاهده شده است.

کلید واژگان: آیروالاستیسیته خطی، بال پسگرا، حوزه زمان، روش مودهای فرضی، فلاتر.

۱- مقدمه

دانش آیروالاستیسیته به عنوان فصل مشترک علوم آیرودینامیک، الاستیسیته و دینامیک تعریف می‌شود. یکی از مسائل مهم پیش روی متخصصان آیروالاستیسیته، تعیین مرز ناپایداری فلاتر است. از آنجاکه حل دقیق و کامل معادلات آیروالاستیک حاکم در تمامی حوزه‌های جریان، نیازمند تلفیق روشهای المان محدود و دینامیک سیالات محاسباتی است، لذا

استفاده از مدل‌های آیرودینامیک تحلیلی برای شرایط خاصی از جریان مانند جریان تراکم‌ناپذیر غیردائم از اهمیت خاصی در ساده‌سازی حل و کاهش زمان محاسبه برخوردار است. در سال ۱۹۳۵ تئودرسن معادلات آیروالاستیک حاکم را برای ایرفویل با دو درجه آزادی در جریان تراکم‌ناپذیر غیردائم در حوزه فرکانس ارائه کرد [۱]. روشهای حل مختلفی برای این معادلات ارائه شده است [۲].

رونک - کوتای مرتبه چهار محاسبه شده است. سرعت ناپایداری بال، با مطالعه پاسخ دینامیکی سیستم مورد بحث در سرعت‌های مختلف به دست می‌آید. نتایج حاصل از حل عددی این معادلات در حوزه زمان برای چهار نمونه، با نتایج تجربی [۷] مقایسه شده است. در پایان اثر پارامترهای مختلف بر سرعت فلاتر مطالعه شده است.

۲- به دست آوردن معادلات حاکم بر بال پسگرا در حوزه زمان

هنگامی که بال در معرض جریان هوا قرار می‌گیرد، به علت وجود نیروها و ممان‌های آیرودینامیکی، حرکت‌های ارتعاشی در خمش و پیچش در آن به وجود می‌آید. اگر سرعت هوا کم باشد، این ارتعاشات با گذشت زمان میرا می‌شوند، اما اگر سرعت هوا از مقدار مشخصی بالاتر رود، ممکن است بر دامنه ارتعاشات افزوده و موجب شکست بال شود. این پدیده به عنوان فلاتر در بال شناخته می‌شود و سرعتی که در آن، این پدیده روی می‌دهد، سرعت فلاتر نام دارد. در این مقاله برای بررسی پدیده فلاتر، فرضیات زیر در مدل‌سازی مسأله در نظر گرفته می‌شود:

- ۱- بال دارای زاویه پسگرایی Λ است.
- ۲- بال الاستیک فرض می‌شود.
- ۳- جریان سیال تراکم‌ناپذیر بوده و معادله حاکم جریان پتانسیل غیردائم برای اغتشاشات کوچک است.
- ۴- جابه‌جایی با دو مؤلفه خمش و پیچش توصیف می‌شود. یعنی بال در حین جابه‌جایی تاب برنمی‌دارد و شکل وتر بال تغییر نمی‌کند.
- ۵- بال مورد نظر دو بُعدی و به شکل تیر یک‌سر درگیر با اتصال صلب به بدنه در ریشه بوده و طول وتر بال از ریشه تا نوک بال تغییر نمی‌کند.
- ۶- محور الاستیک به صورت پیوسته فرض می‌شود.

اولین بار در سال ۱۹۴۷ کولار پدیده‌های آیروالاستیک را در بال پسگرا مطالعه کرد. در همین زمان دیدریچ و بودیانسکی نیز بررسی کاملی را در زمینه ناپایداری در بال پسگرا انجام دادند [۳].

در حوزه زمان، معادلات حاکم بر بال در جریان تراکم‌ناپذیر با استفاده از تابع واگنر توسط فانگ استخراج شده است. [۴] این معادلات توسط لی و همکاران [۵] به صورت عددی حل شده است. قدیری و رازی [۶] بررسی کاملی را در زمینه تحلیل خطی آیروالاستیک ایرفویل با دو درجه آزادی در هر دو حوزه زمان و فرکانس انجام دادند. از سوی دیگر پویرل و پرایس [۷] تحلیل کاملی را در زمینه تعیین سرعت ناپایداری ایرفویل با دو درجه آزادی در جریان آشفته انجام دادند. آنان با استفاده از تابع واگنر، مدل ریاضی آشفته‌گی عرضی و همچنین با استفاده از تابع کاسنر، معادلات حاکم را استخراج کردند.

در بحث تحلیل آیروالاستیک بال، بارمی و همکاران [۸] معادلات حاکم بر بال پسگرا با دو درجه آزادی را در جریان تراکم‌ناپذیر و در حوزه فرکانس استخراج کردند. آنان با استفاده از حل معادلات به دست آمده، سرعت ناپایداری انواع مختلفی از بال‌های پسگرا را به دست آورده و با نتایج تجربی مقایسه کردند. قدیری و اسلامی [۹] و همچنین قدیری و رازی [۱۰] معادلات آیروالاستیک حاکم بر بال غیرپسگرا را در حوزه زمان با استفاده از روش‌های نوارهای باریک و مدهای فرضی استخراج و به روش عددی رونک - کوتای مرتبه چهار این معادلات را حل کردند. در این مقالات، اعتبارسنجی نتایج از طریق مقایسه با داده‌های تجربی انجام شده است.

مقاله حاضر در واقع توسعه بحث تحلیل خطی ارائه شده در [۱۰] است. در این مقاله معادلات آیروالاستیک حاکم بر بال پسگرا در حوزه زمان استخراج و سرعت فلاتر برای چند مورد بال پسگرا با استفاده از روش عددی

معادلات لاگرانژ برای ارتعاشات آزاد بال در حالت کلی به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (۱)$$

با در نظر گرفتن بال پسگرا با دو درجه آزادی α و h به ترتیب به عنوان تغییر مکان کلی پیچش و خمش و نوشتن معادلات انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و انرژی میرایی سازه‌ای برای بال با دو درجه آزادی که به ترتیب با T, V و D نشان داده می‌شوند، داریم:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^S \left[m(\dot{h} + b_n x_\alpha \dot{\alpha})^2 + I_{C.G} \dot{\alpha}^2 \right] d\bar{y} \quad (۲)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^S \left[EI \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \bar{y}^2} \right)^2 + GJ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] d\bar{y} \quad (۳)$$

$$D = \frac{1}{2} \int_0^S \left[C_h \dot{h}^2 + C_\alpha \dot{\alpha}^2 \right] d\bar{y} \quad (۴)$$

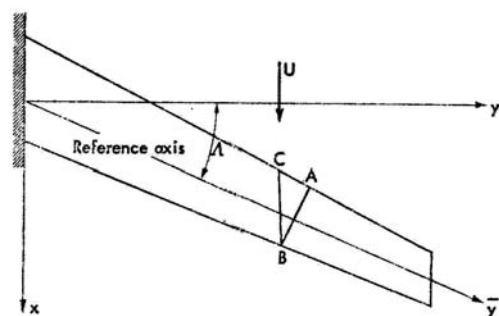
در این روابط، $b_n, m, I_{C.G}, EI, GJ, C_\alpha, C_h$ به ترتیب ضریب میرایی سازه‌ای برای خمش و پیچش، سختی پیچشی، سختی خمشی، ممان اینرسی حول مرکز جرم، جرم بر واحد طول بال و نصف طول وتر در راستای عمود بر محور الاستیک از مرکز جرم بال است.

همان‌گونه که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، x_α فاصله بی‌بعد بین مرکز ثقل و محور الاستیک، a_h فاصله بی‌بعد محور الاستیک تا وسط وتر بال و b نصف طول وتر است. رابطه b_n با b چنین است:

$$b_n = b \cos \Lambda \quad (۵)$$

۷- از آثار غیرخطی سازه‌ای و آیرودینامیکی صرف‌نظر می‌شود. همان‌گونه که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، در بال‌های پسگرا محور الاستیک، بر بدنه هواپیما عمود نیست. در این حالت تحلیل خمش و پیچش نسبت به بال مستقیم و غیرپسگرا پیچیده‌تر بوده و زاویه پسگرایی Λ ، تأثیر زیادی بر نیرو و ممان‌های آیرودینامیکی وارد به بال و در نتیجه بر رفتار آیروالاستیک آن خواهد داشت.

با توجه به شکل ۱ می‌توان دریافت که در جهت جریان، زاویه حمله نسبت به بال غیرپسگرا کاهش می‌یابد. اگر در این بال نیرویی روبه بالا وارد شود، نقاط A و B تقریباً به یک میزان جابه‌جایی خواهند داشت. به وضوح دیده می‌شود که جابه‌جایی این نقاط نسبت به نقطه C بیشتر است. بنابراین مقطع BC که موازی جریان است، زاویه حمله کمتری خواهد داشت. در نتیجه نیروی لیفت در این مقطع کاهش می‌یابد. هنگامی که بال در معرض ممان پیچشی مثبت قرار می‌گیرد، این نیروی لیفت منفی، تأثیر مثبتی بر پایداری خواهد داشت و سرعت فلاتر در بال را افزایش می‌دهد. در نتیجه این کار، خمش در بال پسگرا تمایل دارد که مرکز فشار نیروهای آیرودینامیکی را به داخل صفحه انتقال دهد، در حالی که در بال پیشگرا، خمش تمایل دارد که مرکز فشار نیروهای آیرودینامیکی را به خارج از صفحه انتقال دهد [۳].



شکل ۱ نمای کلی بال پسگرا با دید از بالا

معادله (۱) برای بال پسرگرای با دو درجه آزادی در خمش و پیچش داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{h}} \right) - \frac{\partial T}{\partial h} + \frac{\partial V}{\partial h} + \frac{\partial D}{\partial \dot{h}} &= Q_h \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} &= Q_\alpha \end{aligned} \quad (10)$$

با جایگذاری روابط (۸) و (۹) در معادلات (۲)، (۳) و (۴) روابط زیر را برای انرژی جنبشی، پتانسیل و میرایی بال پسرگرا می توان نوشت:

$$T = \frac{A_r}{2} (S m \dot{h})^2 + \frac{A_i}{2} S m (b_n x_\alpha \dot{\alpha})^2 + A_o (S m b_n x_\alpha \dot{h} \dot{\alpha}) + \frac{A_i}{2} S I_{C.G} \dot{\alpha}^2 \quad (11)$$

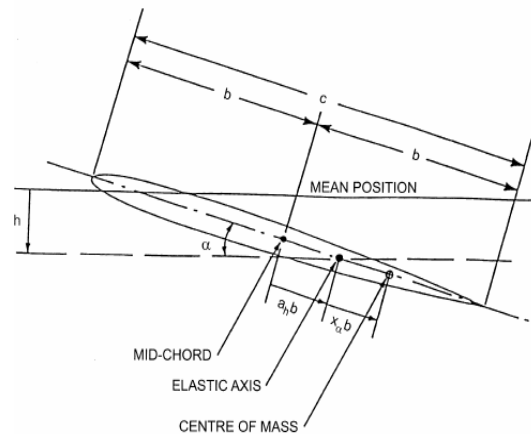
$$V = \frac{A_1}{2} \left(\frac{EI}{S^r} h^r \right) + \frac{A_r}{2} \left(\frac{GJ}{S} \alpha^r \right) \quad (12)$$

$$D = \frac{A_r}{2} S C_h \dot{h}^2 + \frac{A_i}{2} S C_\alpha \dot{\alpha}^2 \quad (13)$$

در این روابط، ضرایب A_1 تا A_o ثابتهای وابسته به موده های فرضی است. روابط این ضرایب در معادله (۳۳) ارائه شده است. در رابطه (۱۰)، Q_α و Q_h نیروهای تعمیم یافته به ترتیب مربوط به درجات آزادی خمش و پیچش است که با استفاده از قانون کار مجازی برای مقطع بال به دست می آیند [۸]:

$$\begin{aligned} W &= -L \cdot F_h(\eta) \delta h_1 + M_{E.A} \cdot F_\alpha(\eta) \delta \alpha_1 \\ Q_h &= \frac{\partial W}{\partial \delta h_1} = -L \cdot F_h(\eta) \\ Q_\alpha &= \frac{\partial W}{\partial \delta \alpha_1} = M_{E.A} \cdot F_\alpha(\eta) \end{aligned} \quad (14)$$

در این رابطه، L و $M_{E.A}$ به ترتیب نیروی برا و ممان حول محور الاستیک است. با انتگرالگیری بر روی طول



شکل ۲ نمای کلی مقطع بال پسرگرا و فواصل بی بُعد

با مدلسازی بال به صورت تیر یک سر درگیر، موده های فرضی برای خمش و پیچش را می توان به صورت زیر نوشت [۲، ۸]:

$$F_h(\eta) = K_1 \left\{ \left(\frac{\sinh \beta_1 + \sin \beta_1}{\cosh \beta_1 + \cos \beta_1} \right) (\cos(\beta_1 \eta) - \cosh(\beta_1 \eta)) + \sinh(\beta_1 \eta) - \sin(\beta_1 \eta) \right\} \quad (6)$$

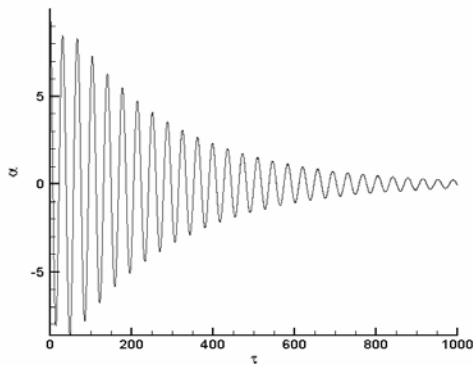
$$F_\alpha(\eta) = K_r \sin(\beta_r \eta) \quad (7)$$

در این روابط، $\beta_r = 0.5\pi$ و $\beta_1 = 0.5969\pi$ گرفته می شود. η مختصه بی بُعد بال است ($\eta = \bar{y}/S$) و K_1 و K_r اعدادی ثابت است. با ترکیب حرکت وابسته و غیروابسته به زمان برای بال داریم:

$$h = F_h(\eta) h_1(t) \quad (8)$$

$$\alpha = F_\alpha(\eta) \alpha_1(t) \quad (9)$$

در این روابط h_1 و α_1 توابع وابسته به زمان تغییر مکان خمشی و پیچشی بوده و توابع مستقل از زمان خمش و پیچش همان موده های فرضی هستند که از ضرب این دو تابع، تغییر مکان کلی به دست می آید [۸]. با نوشتن



شکل ۳ نوسان پیچشی بال مدل $2-B-30$ در سرعت $U = 103/301 (m/s)$ (مطابق جدول ۲، سرعت فلاتر به دست آمده برابر $103/908$ است).

در به دست آوردن این معادله، همچنین فرض شده که تحریک برای مدت زمانی طولانی وجود دارد به طوری که پاسخ گذرای سیستم مستهلک شده و سیستم به حالت پایای خود می رسد. ضریب $e^{\varepsilon\tau}$ در رابطه (۱۷)، ضریب همگرایی است. در اینجا ابتدا حرکت واگرای سیستم را در نظر گرفته اما مرتبه آن را به سمت صفر میل داده ایم [۴]. به راحتی می توان نتیجه گرفت که در این حالت حرکت ایرفویل نیز به صورت تناوبی خواهد بود:

$$h = h_0 e^{ik\tau} \quad (18)$$

$$\alpha = \alpha_0 e^{ik\tau} \quad (19)$$

در معادلات فوق τ زمان بی بُعد $\tau = \frac{U_n t}{b_n}$ و $\phi(\tau)$ تابع واگنر، است که در مقاله حاضر برای این تابع از تقریب جونز به صورت زیر استفاده شده است [۵]:

$$\phi(\tau) = 1 - \psi_1 e^{-\varepsilon_1 \tau} - \psi_2 e^{-\varepsilon_2 \tau} \quad (20)$$

بال (S) نیروهای تعمیم یافته مربوط به خمش و پیچش را برای کل بال به صورت زیر می توان به دست آورد:

$$Q_h = -S \int L \cdot F_h(\eta) \cdot d\eta \quad (15)$$

$$Q_\alpha = S \int M_{EA} \cdot F_\alpha(\eta) \cdot d\eta$$

روابط ارائه شده در [۸] برای نیرو و ممان آیرودینامیکی برای مقطع بال پسگرا در حوزه فرکانس به صورت زیر است:

$$(16)$$

$$L = 2\pi\rho U_n b_n C(k) \left[\dot{h} + U_n \alpha + U_n \frac{\partial h}{\partial y} \tan \Lambda + b_n \left(\frac{1}{r} - a_h \right) \left(\dot{\alpha} + U_n \frac{\partial \alpha}{\partial y} \tan \Lambda \right) + \pi \rho b_n \left[\ddot{h} + U_n \dot{\alpha} + U_n \frac{\partial \dot{h}}{\partial y} \tan \Lambda + U_n \frac{\partial \alpha}{\partial y} \tan \Lambda + U_n \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \tan^2 \Lambda \right] - \pi \rho b_n \left[\ddot{\alpha} + U_n \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial y} \tan \Lambda + U_n \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \tan^2 \Lambda \right] \right],$$

$$M_{EA} = \pi \rho U_n b_n \left(\frac{1}{r} + a_h \right) C(k) \left[\dot{h} + U_n \alpha + U_n \frac{\partial h}{\partial y} \tan \Lambda + b_n \left(\frac{1}{r} - a_h \right) \left(\dot{\alpha} + U_n \frac{\partial \alpha}{\partial y} \tan \Lambda \right) - \pi \rho U_n b_n \left[\left(\frac{1}{r} - a_h \right) \ddot{\alpha} + \frac{1}{r} U_n \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial y} \tan \Lambda + \pi \rho b_n \left[\ddot{h} + U_n \frac{\partial \dot{h}}{\partial y} \tan \Lambda + U_n \frac{\partial \alpha}{\partial y} \tan \Lambda + U_n \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \tan^2 \Lambda \right] - \pi \rho b_n \left[\left(\frac{1}{r} + a_h \right) \left(\ddot{\alpha} + U_n \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial y} \tan \Lambda + U_n \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \tan^2 \Lambda \right) \right] \right] \right],$$

در اینجا ρ و U_n به ترتیب چگالی هوا و مؤلفه عمودی سرعت سیال بر بال پسگرا است. $C(k)$ تابع تنودرسن وابسته به k - فرکانس کاهش یافته گردابه های جریان اطراف مقطع بال - است. از سوی دیگر فانگ با در نظر گرفتن تحریک تناوبی برای ایرفویل با دو درجه آزادی و با فرض نوسانات متناوب برای آن، تعریف تابع تنودرسن را بر حسب تابع واگنر به صورت زیر ارائه کرد [۴]:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ik \int_{-\infty}^{\tau} \phi(\tau - \tau') e^{ik\tau' + \varepsilon\tau'} d\tau' = C(k) e^{ik\tau} \quad (17)$$

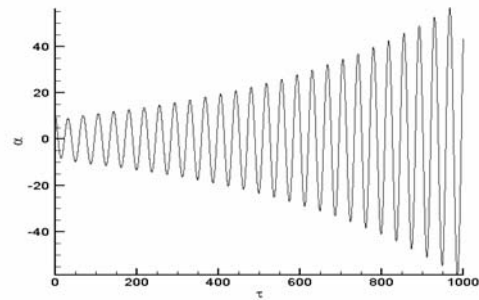
$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\tau} \phi(\tau - \tau_*) U_n \left[\frac{h''}{b_n} + \alpha' + \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) \alpha'' \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial h'}{\partial y} + b_n \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) \frac{\partial \alpha'}{\partial y} \right) \tan \Lambda \right] e^{i\varepsilon \tau_*} d\tau_* \quad (21) \\ & = C(k) U_n \left[\frac{h'}{b_n} + \alpha + \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) \alpha' \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial h}{\partial y} + b_n \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \tan \Lambda \right] \end{aligned}$$

با اعمال حد فوق و با نوشتن طرف راست معادله فوق بر حسب مشتقات زمانی نسبت به t ، به رابطه مناسبی برای نوشتن معادلات حاکم بر سیستم در حوزه زمان دست می‌یابیم:

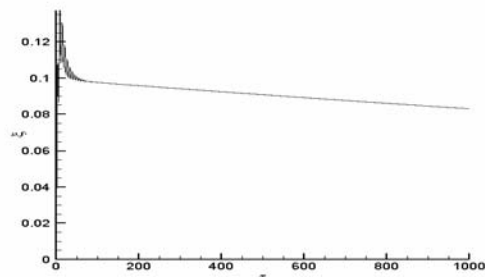
$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\tau} \phi(\tau - \tau_*) U_n \left[\frac{h''}{b_n} + \alpha' + \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) \alpha'' \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial h'}{\partial y} + b_n \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) \frac{\partial \alpha'}{\partial y} \right) \tan \Lambda \right] d\tau_* \quad (22) \\ & = C(k) \left[\dot{h} + U_n \alpha + b_n \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) \dot{\alpha} \right. \\ & \left. + U_n \left(\frac{\partial h}{\partial y} + b_n \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \tan \Lambda \right] \end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که با تعویض عبارت معادل طرف راست معادله (۲۲) در معادله (۱۶) با عبارت سمت چپ رابطه (۲۲)، عبارتهای زیر برای نیرو و ممان آیرودینامیک حول محور الاستیک مقطع بال پسگرا در جریان تراکم‌ناپذیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & L(t) = \pi \rho b_n \left(\ddot{h} + U_n \dot{\alpha} + \gamma U_n \tan \Lambda \frac{\partial \dot{h}}{\partial y} + U_n \gamma \tan \Lambda \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + U_n \gamma \tan \Lambda \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \\ & - \pi \rho b_n \gamma a_h \left(\ddot{\alpha} + \gamma U_n \tan \Lambda \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial y} + U_n \gamma \tan \Lambda \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \right) \\ & + \gamma \pi \rho U_n b_n \left(\omega(\gamma) \phi(\tau) + \int_{-\infty}^{\tau} \frac{d\omega(\sigma)}{d\sigma} \phi(\tau - \sigma) d\sigma \right) \quad (23) \end{aligned}$$



شکل ۴ نوسان پیچشی بال مدل ۲-۳۰B در سرعت $U = 104/285 \text{ (m/s)}$ (مطابق جدول ۲، سرعت فلاتر به دست آمده برابر ۱۰۳/۹۰۸ است).



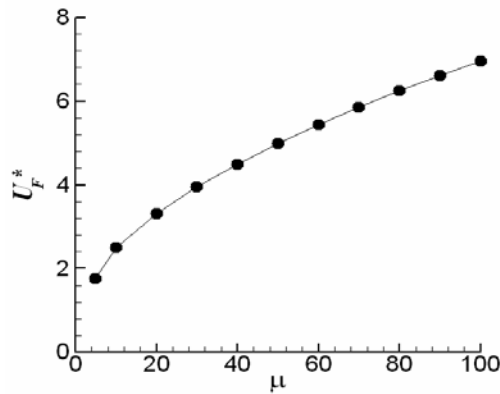
شکل ۵ نوسان خمشی بال مدل ۲-۵۰A از جدول ۱ در سرعت $U = 44/908 \text{ (m/s)}$ (مطابق جدول ۲، سرعت واگرایی به دست آمده برابر ۴۵/۰۴۴ است).

همچنین $\psi_1 = 0/165$ ، $\psi_2 = 0/335$ ، $\varepsilon_1 = 0/0455$ ، $\varepsilon_2 = 0/3$ و h ، α ثوابت مختطی است که قدر مطلق آنها معادل با دامنه نوسانات سیستم به ترتیب در درجات آزادی خمشی و پیچش است با ضرب کردن عبارتهای زیر:

$$\begin{aligned} & \frac{i}{b_n} k U_n h + U_n \alpha + i k U_n \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) \alpha + U_n \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right. \\ & \left. + b_n \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \tan \Lambda \end{aligned}$$

در دو طرف معادله (۱۷) و با در نظر گرفتن روابط (۱۸) و (۱۹) و همچنین با فرض این که h ، α و k مستقل از زمان باشند، خواهیم داشت:

در این معادلات علامت پرایم نشان‌دهنده مشتق نسبت به زمان بی‌بعد و نقطه نشان‌دهنده مشتق نسبت به زمان مطلق است.



شکل ۷ تغییرات سرعت بی‌بعد فلاتر ایرفویل به‌ازای تغییرات μ (نسبت جرمی ایرفویل به هوا در واحد طول): ●، نتایج [۲]، نتایج حل عددی معادلات حاصل.

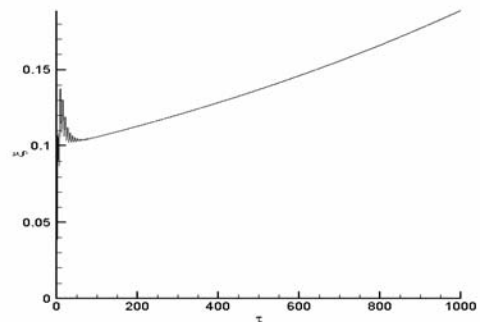
$$(\bar{\omega} = \frac{\sqrt{1.0}}{1.0}, a_h = -0.3, r_\alpha = 0.5, x_\alpha = 0)$$

با در نظر گرفتن معادله (۱۰) و با استفاده از معادلات (۱۱) تا (۱۳) و همچنین (۲۳) و (۲۴) در آن و با اعمال تئوری نوارهای باریک، روش موده‌های فرضی و انجام مقدار زیادی عملیات جبری، معادلات نهایی حاکم بر بال پسگرا در حوزه زمان را به‌صورت بی‌بعد زیر می‌توان ارائه کرد:

$$\begin{aligned} & c_1 \xi_1'' + c_2 \alpha_1'' + c_3 \xi_1' + c_4 \alpha_1' + c_5 \xi_1 + c_6 \alpha_1 + c_7 w_1 + c_8 w_r \\ & + c_9 w_r + c_{10} w_i + A_r \left(\frac{\bar{\omega}}{U^*} \right)^T \xi_1 = f(\tau) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & d_1 \xi_1'' + d_2 \alpha_1'' + d_3 \alpha_1' + d_4 \xi_1' + d_5 \xi_1 + d_6 w_1 + d_7 w_r \\ & + d_8 w_r + d_9 w_i + A_i \left(\frac{1}{U^*} \right)^T \alpha_1 = g(\tau) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} M_{E.A}(t) = & \pi \rho b_n^T a_h \left(\ddot{h} + U_n^T \tan^T \Lambda \frac{\partial^T h}{\partial y^T} + U_n^T \tan^T \Lambda \frac{\partial \dot{h}}{\partial y^T} + \right. \\ & \left. - \pi \rho b_n^T \left(\frac{1}{\Lambda} + a_h^T \right) \left[\ddot{\alpha} + U_n \tan \Lambda \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial y} + U_n^T \tan^T \Lambda \frac{\partial^T \alpha}{\partial y^T} \right] \right. \\ & \left. - \pi \rho U_n b_n^T \left[\left(\frac{1}{\Lambda} - a_h \right) \dot{\alpha} + \frac{1}{\Lambda} U_n \tan \Lambda \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right] \right. \\ & \left. + U_n \rho U_n b_n^T \left(\frac{1}{\Lambda} + a_h \right) \left(w(\cdot) \phi(\tau) + \int \frac{dw(\sigma)}{d\sigma} \phi(\tau - \sigma) d\sigma \right) \right) \end{aligned} \quad (24)$$



شکل ۶ نوسان خمشی بال مدل ۲-۵۰A در سرعت $U = 45/362 (m/s)$ (مطابق جدول ۲، سرعت واگرایی حاصل برابر ۴۵/۰۴۴ است).

در به‌دست آوردن این معادلات، $\tau = 0$ به‌عنوان زمان آغاز حرکت فرض شده است. در اینجا سرعت فروزش (سرعت جریان عمود بر بال در فاصله ربع طول وتر بال از لبه فرار) یا $w(t)$ برای بال پسگرا به‌صورت زیر است [۸]:

$$\begin{aligned} w(t) = & b_n \left(\frac{1}{\Lambda} - a_h \right) \dot{\alpha} + U_n \alpha + \dot{h} + U_n \frac{\partial h}{\partial y} \tan \Lambda \\ & + b_n \left(\frac{1}{\Lambda} - a_h \right) U_n \frac{\partial \alpha}{\partial y} \tan \Lambda \end{aligned} \quad (25)$$

و همچنین بر حسب زمان بی‌بعد داریم:

$$\begin{aligned} w(\tau) = & U_n I \left[\frac{h''}{b_n} + \alpha' + \left(\frac{1}{\Lambda} - a_h \right) \alpha'' \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial h'}{\partial y} + b_n \left(\frac{1}{\Lambda} - a_h \right) \frac{\partial \alpha'}{\partial y} \right) \tan \Lambda \right] \end{aligned} \quad (26)$$

$$A_r = \int \left[\frac{df_\alpha(\eta)}{d\eta} \right]^r \cdot d\eta,$$

$$A_r = \int [f_h(\eta)]^r \cdot d\eta,$$

$$A_r = \int [f_\alpha(\eta)]^r \cdot d\eta,$$

$$A_\delta = \int [f_h(\eta) \cdot f_\alpha(\eta)] \cdot d\eta,$$

$$A_p = \int \left[f_h(\eta) \cdot \frac{df_h(\eta)}{d\eta} \right] d\eta,$$

$$A_v = \int \left[f_h(\eta) \cdot \frac{df_\alpha(\eta)}{d\eta} \right] d\eta,$$

$$A_\lambda = \int \left[f_\alpha(\eta) \cdot \frac{df_h(\eta)}{d\eta} \right] d\eta,$$

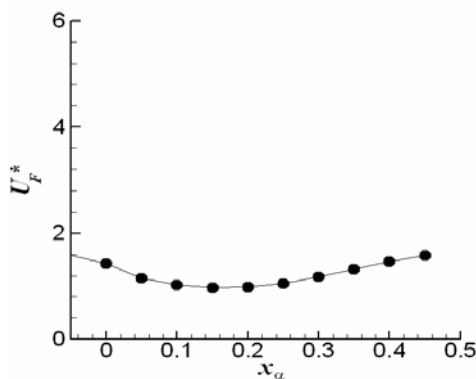
$$A_\kappa = \int \left[f_\alpha(\eta) \cdot \frac{df_\alpha(\eta)}{d\eta} \right] d\eta,$$

$$A_{\lambda^*} = \int \left[f_h(\eta) \cdot \frac{d^* f_h(\eta)}{d\eta^*} \right] d\eta,$$

$$A_{\lambda^*} = \int \left[f_h(\eta) \cdot \frac{d^* f_\alpha(\eta)}{d\eta^*} \right] d\eta,$$

$$A_{\lambda^*} = \int \left[f_\alpha(\eta) \cdot \frac{d^* f_h(\eta)}{d\eta^*} \right] d\eta,$$

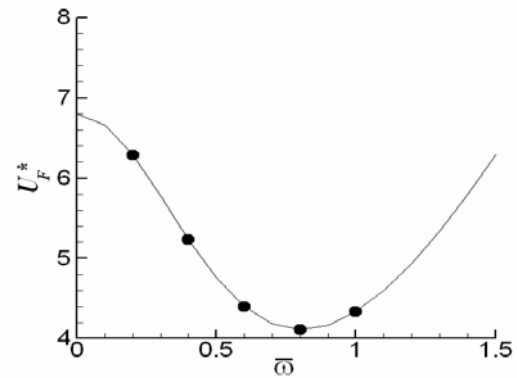
$$A_{\lambda^*} = \int \left[f_\alpha(\eta) \cdot \frac{d^* f_\alpha(\eta)}{d\eta^*} \right] d\eta,$$



شکل ۹ تغییرات سرعت بی‌بعد فلاتر ایرفویل به‌ازای تغییرات

x_α : نتایج [۲]، نتایج حل عددی معادلات حاصل

$$\left(\bar{\omega} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } a_h = 0, r_\alpha = 0.5, \mu = 10 \right)$$



شکل ۸ تغییرات سرعت بی‌بعد فلاتر ایرفویل به‌ازای تغییرات

نسبت فرکانس $\bar{\omega}$: نتایج [۱۱]، نتایج حل

عددی معادلات حاصل. $(r_\alpha = 0.5, x_\alpha = 0.25)$

$$(\mu = 100 \text{ و } a_h = -0.5)$$

در این معادلات $U^*, \bar{\omega}, \xi = \frac{h}{b_n}$ به‌ترتیب تغییر

مکان بی‌بعد خمش، نسبت فرکانس طبیعی و

سرعت بی‌بعد است. در اینجا متغیرهای انتگرالی w_1 تا

w_4 به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$w_1 = \int_0^\tau e^{-\varepsilon_1(\tau-\sigma)} \alpha_1(\sigma) d\sigma \quad (29)$$

$$w_r = \int_0^\tau e^{-\varepsilon_r(\tau-\sigma)} \alpha_1(\sigma) d\sigma \quad (30)$$

$$w_r = \int_0^\tau e^{-\varepsilon_r(\tau-\sigma)} \xi_1(\sigma) d\sigma \quad (31)$$

$$w_\xi = \int_0^\tau e^{-\varepsilon_\xi(\tau-\sigma)} \xi_1(\sigma) d\sigma \quad (32)$$

ثوابت A_1 تا A_{13} که وابسته به مودهای فرضی هستند،

به‌قرار زیر است:

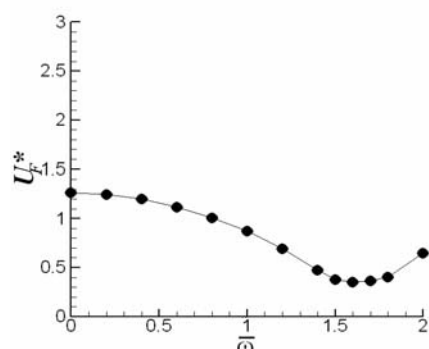
$$A_1 = \int \left[\frac{d^* f_h(\eta)}{d\eta^*} \right]^2 \cdot d\eta, \quad (33)$$

$$c_\lambda = \frac{\gamma}{\mu} \left[-\psi_\gamma \varepsilon_\gamma A_r + \frac{\tan \Lambda}{AR} \psi_\gamma \varepsilon_\gamma A_\gamma \right],$$

$$c_\delta = \frac{\gamma}{\mu} \left[-\psi_\gamma \varepsilon_\gamma A_r + \frac{\tan \Lambda}{AR} \psi_\gamma \varepsilon_\gamma A_\gamma \right],$$

$$f(\tau) = \frac{\gamma}{\mu} \left[\left[\psi_\gamma \varepsilon_\gamma e^{-\varepsilon_\gamma \tau} + \psi_\gamma \varepsilon_\gamma e^{-\varepsilon_\gamma \tau} \right] \right.$$

$$\left. \left(A_r \xi_\gamma(\cdot) + A_\delta \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) \alpha_\gamma(\cdot) \right) \right],$$



شکل ۱۰ تغییرات سرعت بی‌بعد فلاتر ایرفویل به‌ازای تغییرات نسبت فرکانس $\bar{\omega}$: نتایج [۳]، نتایج حل عددی معادلات حاصل ($r_\alpha = 0.25$, $x_\alpha = 0.2$) ($\mu = 4$ و $a_h = -0.3$)

$$d_\lambda = A_\delta \left(\frac{x_\alpha}{r_\alpha} \right) - \frac{a_h A_\delta}{\mu r_\alpha}, d_\delta = A_\delta + \frac{1}{\mu r_\alpha} \left(\frac{1}{\lambda} + a_h \right) A_\delta,$$

$$d_\gamma = \gamma A_\delta \frac{\xi_\alpha}{U^*} - \frac{1}{\mu r_\alpha} \left[\left(1 + \gamma a_h \right) \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) A_\delta (1 - \psi_\gamma - \psi_\gamma) \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) A_\delta - \left(\frac{1}{\lambda} + a_h \right) \frac{\gamma \tan \Lambda}{AR} A_\delta \right],$$

$$d_\tau = -\frac{1}{\mu r_\alpha} \left[\gamma \left(\frac{1}{\gamma} + a_h \right) A_\delta [1 - \psi_\gamma - \psi_\gamma] + \right.$$

$$\left. (1 + \gamma a_h) \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) A_\delta [\psi_\gamma \varepsilon_\gamma + \psi_\gamma \varepsilon_\gamma] + \frac{\tan \Lambda}{AR} \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) (1 + \gamma a_h) A_\delta [1 - \psi_\gamma - \psi_\gamma] + \right.$$

$$\left. \frac{\tan \Lambda}{\gamma AR} A_\delta [\gamma a_h - 1] - \left(\frac{1}{\lambda} + a_h \right) \left(\frac{\tan \Lambda}{AR} \right)^\gamma A_\gamma \right],$$

$$d_\varepsilon = -\frac{1}{\mu r_\alpha} \left[(1 + \gamma a_h) A_\delta [1 - \psi_\gamma - \psi_\gamma] + a_h \frac{\gamma \tan \Lambda}{AR} A_\gamma \right],$$

در این تحقیق از پارامتر بی‌بعد AR که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، استفاده شده است:

$$AR = \frac{S}{b_n} \quad (34)$$

همچنین ضرایب c تا c_δ ، d تا d_δ و توابع $f(\tau)$ و $g(\tau)$ با استفاده از روابط ذیل به‌دست می‌آیند:

$$(35)$$

$$c_\lambda = A_r + \frac{A_r}{\mu}, c_\delta = A_\delta x_\alpha - \frac{a_h A_\delta}{\mu},$$

$$c_\gamma = \gamma A_r \xi_\gamma \left(\frac{\bar{\omega}}{U^*} \right) + \frac{\gamma}{\mu} \left[A_r (1 - \psi_\gamma - \psi_\gamma) \right.$$

$$\left. + \frac{\tan \Lambda}{AR} A_\gamma \right],$$

$$c_\tau = \frac{1}{\mu} \left[\gamma \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) A_\delta (1 - \psi_\gamma - \psi_\gamma) \right.$$

$$\left. - a_h \frac{\gamma \tan \Lambda}{AR} A_\gamma + A_\delta \right],$$

$$c_\varepsilon = \frac{1}{\mu} \left[\gamma A_r (\psi_\gamma \varepsilon_\gamma + \psi_\gamma \varepsilon_\gamma) + \frac{\gamma \tan \Lambda}{AR} \times \right.$$

$$\left. A_\gamma (1 - \psi_\gamma - \psi_\gamma) + \left(\frac{\tan \Lambda}{AR} \right)^\gamma A_\gamma \right],$$

$$c_\delta = \frac{1}{\mu} \left[\gamma A_\delta (1 - \psi_\gamma - \psi_\gamma) + \gamma \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) \times \right.$$

$$\left. \left[A_\delta (\psi_\gamma \varepsilon_\gamma + \psi_\gamma \varepsilon_\gamma) + \frac{\tan \Lambda}{AR} A_\gamma (1 - \psi_\gamma - \psi_\gamma) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\tan \Lambda}{AR} A_\gamma - a_h \left(\frac{\tan \Lambda}{AR} \right)^\gamma A_\gamma \right],$$

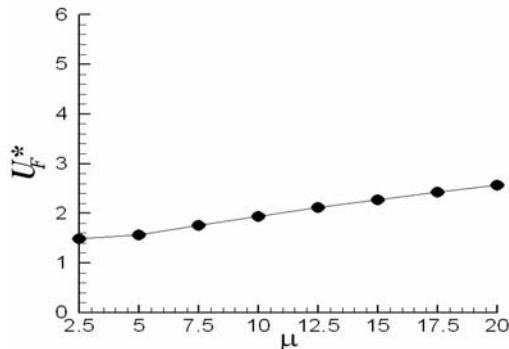
$$c_\gamma = \frac{\gamma}{\mu} \left[\psi_\gamma \varepsilon_\gamma A_\delta \left(1 - \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) \varepsilon_\gamma \right) + \right.$$

$$\left. \frac{\tan \Lambda}{AR} \psi_\gamma \varepsilon_\gamma \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) A_\gamma \right],$$

$$c_\delta = \frac{\gamma}{\mu} \left[\psi_\gamma \varepsilon_\gamma A_\delta \left(1 - \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) \varepsilon_\gamma \right) + \right.$$

$$\left. \frac{\tan \Lambda}{AR} \psi_\gamma \varepsilon_\gamma \left(\frac{1}{\gamma} - a_h \right) A_\gamma \right],$$

(۳۶)



شکل ۱۱ تغییرات سرعت بی‌بعد فلاتر ایرفویل به‌ازای تغییرات μ

(نسبت جرمی ایرفول به هوا در واحد طول): ●، نتایج

[۳]، نتایج حل عددی معادلات حاصل ($x_\alpha = 0/2$)،

$$(\bar{\omega} = \sqrt{0/1} \text{ و } a_h = -0/4, r_\alpha = 0/25)$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم در حوزه زمان را که به‌صورت معادلات (۲۷) و (۲۸) ارائه شده می‌توان به‌صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول زیر نوشت [۵]:

$$\frac{dX}{d\tau} = F(X, \tau) \quad (37)$$

که در آن:

$$X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8]^T \quad (38)$$

$$= [\alpha \ \alpha' \ \xi \ \xi' \ w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4]^T$$

برای حل عددی به این روش، به شرایط اولیه نیاز است. از معادلات (۲۹) تا (۳۲) به‌راحتی می‌توان نتیجه گرفت:

$$\tau = 0 \Rightarrow w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0 \quad (39)$$

بنابراین، با دانستن $\xi_1(0), \xi_2(0), \alpha_1'(0), \alpha_2(0)$ - که به‌ترتیب مقادیر وابسته به زمان تغییر مکان و سرعت پیچش، تغییر مکان و سرعت خمش اولیه است - معادله (۳۷) را می‌توان به‌روش رونگ - کوتای مرتبه چهار حل

$$d_\phi = -\frac{1}{\mu r_\alpha} \left[(1 + 2a_h) A_\phi [\psi_1 \varepsilon_1 + \psi_2 \varepsilon_2] + \frac{\tan \Lambda}{AR} (1 + 2a_h) \times \right.$$

$$\left. A_\lambda [1 - \psi_1 - \psi_2] + a_h \left(\frac{\tan \Lambda}{AR} \right) A_{12} \right],$$

$$d_\gamma = -\frac{1}{\mu r_\alpha} \left[(1 + 2a_h) \psi_1 \varepsilon_1 \left(A_1 \left(1 - \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \varepsilon_1 \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\tan \Lambda}{AR} \left(\frac{1}{2} - a_h \right) A_3 \right) \right],$$

$$d_\nu = -\frac{1}{\mu r_\alpha} \left[(1 + 2a_h) \psi_2 \varepsilon_2 \left(A_2 \left(1 - \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \varepsilon_2 \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\tan \Lambda}{AR} \left(\frac{1}{2} - a_h \right) A_3 \right) \right],$$

$$d_\lambda = \frac{1}{\mu r_\alpha} \left[(1 + 2a_h) \psi_1 \varepsilon_1 \left(\varepsilon_1 A_\phi - \frac{\tan \Lambda}{AR} A_\lambda \right) \right],$$

$$d_\delta = \frac{1}{\mu r_\alpha} \left[(1 + 2a_h) \psi_2 \varepsilon_2 \left(\varepsilon_2 A_\phi - \frac{\tan \Lambda}{AR} A_\lambda \right) \right],$$

$$g(\tau) = -\frac{(1 + 2a_h)}{\mu r_\alpha} \left[\left(\psi_1 \varepsilon_1 e^{-\varepsilon_1 \tau} + \psi_2 \varepsilon_2 e^{-\varepsilon_2 \tau} \right) \times \right.$$

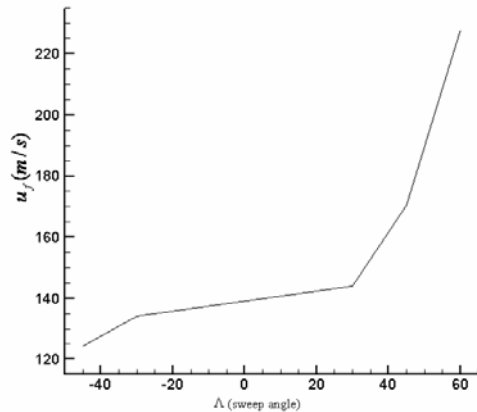
$$\left. \left(A_3 \xi_1(0) + A_2 \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \alpha_1(0) \right) \right],$$

این ضرایب، ثابت‌های معادلات (۲۷) و (۲۸) هستند که وابسته‌اند به متغیرهای بی‌بعد بال نظیر نسبت جرمی بال به هوا در واحد طول بال (μ)، فاصله بی‌بعد محور الاستیک از وسط وتر (a_h)، شعاع ژیراسیون بال حول محور الاستیک (r_α) و همچنین ثوابت A_1 تا A_3 و ثوابت تابع واگنر $\phi(\tau)$. توابع $f(\tau)$ و $g(\tau)$ وابسته‌اند به شرایط اولیه، زمان بدون‌بعد و ثوابت تابع واگنر. ξ_2 و ξ_α به‌ترتیب نسبت میرایی بی‌بعد در درجات آزادی خمش و پیچش است.

۳- روش عددی رونگ - کوتای مرتبه چهار

روشی که در این مقاله برای حل معادلات (۲۷) و (۲۸) به‌کار گرفته شده، روش استاندارد رونگ - کوتای مرتبه چهار است که در حل معادلات دیفرانسیل معمولی دقت بسیار خوبی ($O(\Delta \tau^5)$) دارد.

است. در شکل ۳ به خلاف شکل ۴، دامنه نوسان با گذشت زمان به صفر میل می کند.



شکل ۱۲ تغییرات سرعت فلاتر به ازای تغییرات زاویه پسرگاری
برای شرایط: $\mu=5\%$, $\bar{\omega}=0/2$, $\bar{x}_\alpha=0/25$, $a_h=-0.5$, $r_\alpha=0.5$, $AR=20$

در شکل ۵ تغییر مکان خمشی یک گونه از بال های مورد مطالعه، پیش از سرعت واگرایی آن نشان داده شده است؛ در این سرعت دامنه نوسانات به صفر میل می کند. در سرعت های بالاتر از مرز ناپایداری، ممکن است پدیده واگرایی بروز نماید؛ رفتاری که برای مثال برای بال 50A-2 در شکل ۶ مشاهده می شود. از طرفی با صفر قرار دادن زاویه پسرگاری Λ و با در نظر گرفتن ثوابت A_i برابر واحد، معادلات به دست آمده ((۲۷) و ((۲۸) در این مقاله، به معادلات حاکم بر ایرفویل با دو درجه آزادی تبدیل می شود. لذا تحلیل آیروالاستیک ایرفویل و مقایسه نتایج حاصل از آن با نتایج سایر مراجع می تواند به عنوان معیار مناسبی برای اعتبارسنجی معادلات حاصل در نظر گرفته شود. در شکل های ۷ تا ۱۱، نتایج [۲]، [۳] و [۱۱] با نتایج حاصل از حل عددی معادلات ((۲۷) و ((۲۸) مقایسه شده است. U_F^* سرعت بی بُعد فلاتر است.

کرد. با حل این معادلات، مقادیر وابسته به زمان تغییر مکان های پیچش و خمش به دست می آیند. با استفاده از معادلات (۸) و (۹) و معادلات موده های فرضی ارتعاشی یعنی معادلات (۶) و (۷)، مقادیر کلی تغییر مکان پیچش و خمش را برای سطح مقطع دلخواه می توان به دست آورد و نمودار آنها را بر حسب زمان بی بُعد τ ترسیم کرد.

۴- نتایج

در جدول ۱ مشخصات چهار بال مورد بررسی و در جدول ۲ نتایج روش به کار گرفته شده برای معادلات به دست آمده در این تحقیق (U_c)، نتایج تجربی [۸] (U_e) و همچنین درصد خطا نسبت به نتایج تجربی ارائه شده است. در بال های مذکور نسبت میرایی بی بُعد برابر صفر در نظر گرفته و از میرایی صرف نظر شده است.

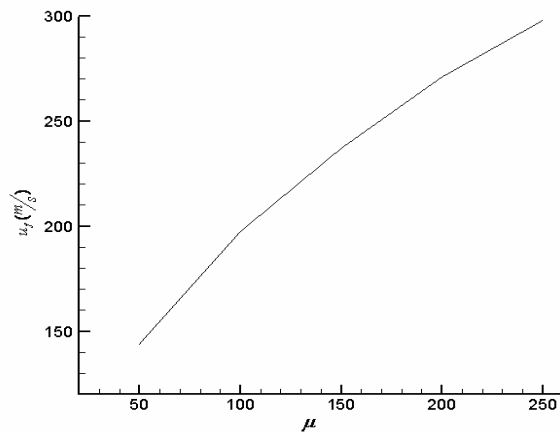
جدول ۱ مشخصات هندسی بال های مورد مطالعه [۸]

Case	۲۲'	30B-2	40C	50A-2
$A(deg)$	۱۵	۳۰	۰	-۱۵
$f_h (Hz)$	۳۱	۱۲/۱	۹	۱۵
$f_\alpha (Hz)$	۶۱	۸۸/۸	۵۸/۲	۱۳۷
$S(m)$	۰/۴۲۱۶	۰/۶۲۹۹	۰/۶۲۹۹	۰/۶۲۹۹
$b_n(m)$	۰/۰۹۷۸	۰/۰۵۰۹	۰/۰۵۰۹	۰/۰۵۰۹
a_h	-۰/۱۵۲	-۰/۲	-۰/۲۳	-۰/۳۴
x_α	۰/۱۲۸	۰/۱۲	۰/۱۵	۰/۳۴
r_α^2	۰/۲۹۲	۰/۲۷۷	۰/۲۸۷	۰/۳۵۲
μ	۲/۱۹	۳۷/۷	۸/۷۴	۸/۰

در جدول فوق f_h و f_α نشانگر فرکانس طبیعی کوپل نشده سیستم به ترتیب در درجات آزادی خمش و پیچش است. همچنین نوسانات خمشی و پیچشی دو بال مورد بررسی در جدول ۱ در کمی بالاتر از سرعت فلاتر و کمی پایین تر از سرعت فلاتر در شکلهای ۳ تا ۶ نشان داده شده

جدول ۲ مقایسه نتایج تئوری و تجربی

Case	۲۲'	۳۰B-۲	۴۰C	۵۰A-۲
$U_e (m/s)$	۴۶/۴۹	۱۰۵/۰۵	۳۳/۶۶۲	۴۶/۹۳۹
$U_c (m/s)$	۴۶/۶۵۳	۱۰۳/۹۰۸	۳۳/۵۴۶	۴۵/۰۴۴
درصد خطا	+۰/۳۵	-۱/۰۹	-۰/۳۵	-۴/۰۴

شکل ۱۴ تغییرات سرعت فلاتر بال به ازای تغییرات μ برای:

$$r_{\alpha} = 0.5, AR = 2; a_h = -0.5, x_{\alpha} = 0.25, \bar{\omega} = 0.2, \Lambda = 3;$$

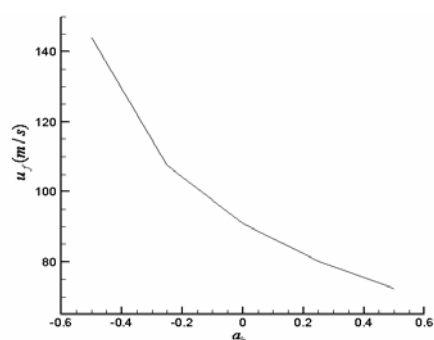
با دقت در معادلات حاصل می‌توان دریافت که با کمی ساده‌سازی می‌توان معادلات آیروالاستیک حاکم بر ایرفویل با دو درجه آزادی در جریان تراکم‌ناپذیر را به‌دست آورد. با توجه به این، تحلیل آیروالاستیک ایرفویل را می‌توان به‌عنوان حالت خاصی از نتایج حاصل از معادلات ارائه شده در این مقاله محسوب کرد. در این رابطه در شکل‌های ۷ تا ۱۱ نتایج حاصل از این معادلات برای ایرفویل با دو درجه آزادی با مشخصه‌های فیزیکی و هندسی مختلف با نتایج [۲]، [۳] و [۱۱] - که با استفاده از روشهای مرسوم در حوزه فرکانس، نظیر روشهای U-g و P-k حاصل شده - مقایسه شده است. همان‌طور که در نمودارهای مذکور مشاهده می‌شود، نتایج به‌دست آمده تطابق خوبی با نتایج دو مرجع بالا دارد.

با به‌دست آوردن سرعت فلاتر برای بال پسگرا مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه پسگرایی در بال ($\Lambda > 0$)، سرعت فلاتر افزایش می‌یابد. این در حالی است که در بال پیشگرا ($\Lambda < 0$)، سرعت فلاتر با افزایش قدر مطلق زاویه پسگرایی یا Λ کاهش می‌یابد (شکل ۱۲).

از سوی دیگر در شکل‌های ۱۲ تا ۱۶ تأثیر عوامل مختلفی مانند زاویه پسگرایی و متغیرهای بی‌بعد بر سرعت فلاتر مورد بررسی قرار گرفته است. در این بررسی یکی از پارامترها متغیر و بقیه ثابت در نظر گرفته شده تا تأثیر آن بر سرعت ناپایداری بال مشخص شود. همچنین در اینجا لازم است ذکر شود که فواصل بی‌بعد x_{α} و a_h هنگامی مثبت است که به طرف لبه فرار مقطع بال اندازه‌گیری شوند (شکل ۲).

۵- بحث و نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج ارائه شده در جدول ۲ می‌توان دریافت که نتایج حاصل از حل در حوزه زمان و نتایج تجربی، تطابق بسیار خوبی دارند که این نشان‌دهنده تطابق مناسب مدل ریاضی ارائه شده با فیزیک مسئله است. همچنین یکنواختی بال پسگرا - که ویژه تئوری نوارهای باریک است - در دقت جوابها تأثیر به‌سزایی دارد.

شکل ۱۳ تغییرات سرعت فلاتر بال به ازای تغییرات فاصله بی‌بعد محور الاستیک از وسط وتر بال (a_h) برای شرایط:

$$x_{\alpha} = 0.25, \bar{\omega} = 0.2, \mu = 50, \Lambda = 3, r_{\alpha} = 0.5, AR = 20$$

محل محور الاستیک به لبه فرار نزدیکتر باشد، سرعت فلاتر کاهش می‌یابد و به عکس هر چه به لبه حمله نزدیکتر بوده و در جلوی مرکز آیرودینامیکی قرار گیرد، سیستم پایدارتر شود. به طور خلاصه با بررسی شکل‌های ۵ تا ۱۶ می‌توان به نتایج مهمی به شرح ذیل دست یافت:

- با افزایش زاویه پسگرایی، سرعت فلاتر افزایش می‌یابد.
- با افزایش a_h ، سرعت فلاتر کاهش می‌یابد.
- با افزایش μ ، سرعت فلاتر افزایش می‌یابد، اما روند این افزایش در ابتدا سریعتر بوده و با افزایش بیشتر μ ، این روند کاهش می‌یابد.

• در رابطه با تغییرات u_f در برابر افزایش x_α نمی‌توان اظهار نظر دقیقی ارائه کرد و روند مشخصی در تمامی موارد حاکم نیست. در برخی موارد مانند شکل ۹ ابتدا کاهش و سپس افزایش سرعت فلاتر مشاهده می‌شود و در برخی مانند شکل ۱۶، کاهش آن را مشاهده می‌کنیم. مواردی را نیز می‌توان یافت که این روند در آنها معکوس است.

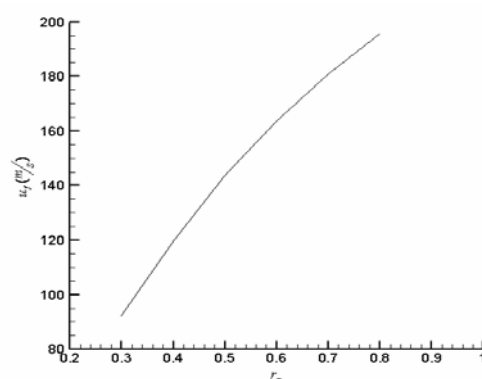
• با افزایش نسبت فرکانس در بیشتر موارد مانند شکل‌های ۸ و ۱۰، ابتدا کاهش و رسیدن آن به مقدار کمینه و سپس افزایش آن را مشاهده می‌کنیم.

• با افزایش شعاع ژیراسیون حول محور الاستیک (r_α)، سرعت فلاتر افزایش می‌یابد. آهنگ این افزایش، با افزایش r_α کاهش می‌یابد.

نتایج فوق برای طراحی بهینه بال، از دید بالا بردن سرعت فلاتر بال باید مدنظر قرار گیرند. به این منظور باید پارامترهای بی‌بعد بال به‌ترتیبی انتخاب شود که a_h کمینه و همچنین μ و r_α بیشینه باشند.

۶- منابع

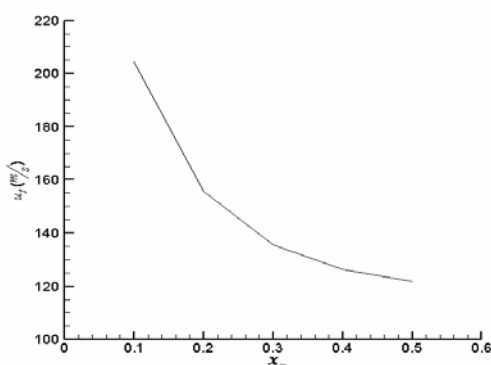
- [1] Theodorsen T.; "General Theory of Aerodynamic Instability and the



شکل ۱۵ تغییرات سرعت فلاتر بال به‌ازای تغییرات شعاع

ژیراسیون (r_α) در: $x_\alpha = 0.25, \bar{\omega} = 0.2, \Lambda = 30$,

$$AR=2; a_h = -0.5; \mu = 50$$



شکل ۱۶ تغییرات سرعت فلاتر بال به‌ازای تغییرات x_α

در: $r_\alpha = 0.5, \bar{\omega} = 0.2, \Lambda = 30, AR=2; a_h = -0.5; \mu = 50$

با توجه به شکل‌های ۱۴ و ۱۵ می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش r_α و μ ، سرعت فلاتر u_f افزایش می‌یابد و نوعی تأثیر پایدارکننده بر سیستم دارند. از بررسی تأثیر افزایش μ بر سرعت فلاتر بال می‌توان نتیجه گرفت که امکان رخداد فلاتر بال در ارتفاعات پروازی پایین (در هنگام نشستن و برخاستن هواپیما) بیشتر است؛ در حالی که در شکل ۱۳ مشاهده می‌شود که متغیر a_h نوعی تأثیر ناپایدارکننده بر سیستم دارد و با افزایش این متغیر، سرعت فلاتر u_f کاهش می‌یابد. هر چه

- [8] armby J. G., Cunningham H. J., Garrick I.E.; "Study of effect of sweep on the flutter of cantilever wings", NACA TN-2121, 1950.
- [9] قدیری بهزاد، اسلامی وحید؛ «تعیین سرعت ناپایداری بال هواپیما به روش حل در حوزه زمان»؛ چهاردهمین کنفرانس سالانه و دهمین کنفرانس بین‌المللی مهندسی مکانیک، اصفهان، دانشگاه صنعتی اصفهان؛ ۱۳۸۵.
- [10] Ghadiri B., Razi M.; "Limit cycle oscillations of rectangular cantilever wings containing cubic nonlinearity in an incompressible flow", Journal of Fluids and Structures; Vol. 23, No. 4, 2007, pp. 665-680.
- [11] Liu, L., Wong, Y. S., Lee, B. H. K.; "Application of the center manifold theory in nonlinear aeroelasticity", Journal of Sound and Vibration; Vol. 234, 2000, pp. 641-659.
- Mechanism of Flutter", T. R. No. 496, N. A. C. A, 1935.
- [2] Hodges D. H., Pierce G. A.; "Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity", Cambridge University Press, 2002.
- [3] Bisplinghoff R. L., Ashley H.; "Principles of aeroelasticity", Dover Publication, 1962.
- [4] Fung Y. C.; "An Introduction to the Theory of Aeroelasticity", New York, Dover Publications, 1969.
- [5] Lee B. H. K., Price S. J., Wong Y. C.; "Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils bifurcation and chaos", Progress in Aerospace Sciences, Vol. 35, No. 3, 1999, pp. 205-334.
- [۶] قدیری بهزاد، رازی مانی؛ «تحلیل آیروالاستیک خطی ایرفویل با دو درجه آزادی در دو حوزه فرکانس و زمان در جریان تراکم‌ناپذیر»؛ چهاردهمین کنفرانس سالانه و دهمین کنفرانس بین‌المللی مهندسی مکانیک، اصفهان، دانشگاه صنعتی اصفهان؛ ۱۳۸۵.
- [7] Poirel, D., Price S. J.; "Random binary (coalescence) flutter of a two-dimensional linear airfoil", Journal of Fluids and Structures; Vol. 18, 2003, pp. 23-42.

