



تحلیل ناپایداری دینامیکی و استاتیکی پولین نانوتیرهای نیمه‌متاثر با استفاده از تئوری تنش مزدوج اصلاح شده

امین‌رضا نقره‌آبادی^{۱*}، امیر حق‌پرست^۲

۱- دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز
*اهواز، صندوق پستی 6135743337 noghrehabadi@scu.ac.ir

چکیده

در این مقاله ناپایداری استاتیکی و دینامیکی یک مدل جامع از یک نانوتیر یکسر گیردار تحت تأثیر جریان مستقیم اعمالی و ناگهانی با استفاده از تئوری غیرکلاسیک تنش مزدوج اصلاح شده در حضور اثرات تش سطحی بررسی شده است. قسمتی از نانوتیر ک تحت تأثیر نیروهای الکترواستاتیک و نیروی موئینگی قرار دارد. نانوتیر یک براساس تئوری اوبلر-برنولی مدل‌سازی و معادله حرکت آن با استفاده از اصل همیلتون بدست آمده است. معادلات حاکم بر نانوتیر ک با استفاده از متغیرهای بی بعد مناسب به حالت بی بعد انتقال یافته و با استفاده از روش اجزا محدود حل شدند. نتایج بدست آمده از حل اجزا محدود با نتایج پژوهش‌های پیشین مقایسه گردید و تطبیق خوبی مشاهده شد. در ادامه، پارامترهای پایه برای طراحی مهندسی در مقیاس نانو همانند بیز بحرانی انتهای تیر و ولتاژ پولین در دو حالت استاتیکی و دینامیکی بررسی گردید. نتایج نشان می‌دهد که در حالت دینامیکی، با افزایش ولتاژ، تیر ک قبل از پیدا شدن طول الکتروود زیر لایه (افزایش تأثیر نیمه‌متاثر بودن)، افزایش اثر میدان لبه، اثر اندازه و اثر تنش سطحی همچنین مشاهده شد که کوچک‌تر شدن طول الکتروود زیر لایه (افزایش تأثیر نیمه‌متاثر بودن)، افزایش اثر میدان لبه، اثر اندازه و اثر تنش سطحی و یا کاهش نیروی موئینگی باعث افزایش ولتاژ نهایی پولین می‌شوند.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۰۵ مرداد ۱۳۹۵

پذیرش: ۰۳ شهریور ۱۳۹۵

ارائه در سایت: ۰۵ آبان ۱۳۹۵

کلید واژگان:

نانوتیر

بولین

تئوری تنش مزدوج

نانو تیر ک نیمه‌متاثر

Dynamic and static pull-in instability analysis of partially affected nano-cantilevers using modified couple stress theory

Aminreza Noghrehabadi*, Amir Haghparast

Department of Mechanical Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran
* P.O.B. 6135743337, Ahvaz, Iran, noghrehabadi@scu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 26 July 2016

Accepted 24 September 2016

Available Online 26 October 2016

Keywords:

Nano-beam

Pull-in

Couple stress theory

partially affected nano beam

ABSTRACT

In this paper, the modified couple stress theory is used to study static and dynamic pull-in instability of a general model of a nano-cantilever under a sudden applied DC voltage in the presence of the surface effects. A partial part of the nano-cantilever is subject to the electrostatic and capillary forces. Euler-Bernoulli theory is used to model the beam and the equation of motion is derived by using Hamilton's principle. The governing equations are transformed into a non-dimensional form and then solved using finite element method (FEM). The results, obtained using FEM are compared with the data available in the literature and found in good agreement. Basic parameters for engineering design at the nanoscale, such as deflection and pull-in voltage have been calculated for both of the dynamic and static modes. The results of dynamic analysis of the beam show that as the voltage increases, the beam goes into an oscillating mode with large amplitudes just before pull-in phenomenon occurs and the beam collapses into the substrate (fixed electrode). Moreover, it is found that a decrease in the length of the fixed electrode (increase of the partially affecting parameter), the increase of the fringing field effect, the size effect and the surface effect increases the pull-in voltage of the nano-cantilever beam.

۱- مقدمه

پیشرفت‌های فراوان در نانوتکنولوژی منجر به رشد سریع ابزارهای صنعتی در ابعاد میکرو و نانو شده است. سیستم‌های میکرو/نانو الکترومکانیکی^۱ به عنوان یک فناوری جدید در شاخه‌های مختلف مانند مکانیک، حرارت، شیمیابی، نور و اپتیک، مغناطیسی، سیستم‌های الکتریکی و غیره کاربردهای بسیار متنوعی

^۱ Micro/Nano Electromechanical Systems

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

گیردار تحت نیروهای الکترواستاتیک و بین‌مولکولی را با استفاده از تئوری کتروود مترکز می‌دانند.

نیروی مویینگی⁶ بین دو کتروود، اغلب زمانی رخ می‌دهد که پلی از مایع بین آن‌ها شکل گیرد. نیروی مویینگی می‌تواند حاصل یک حجم مایع باشد که در طی عمل شستشو و خشک‌کردن زیر تیر (الکتروود مترکز) به دام افتاده است [12]. مایع به دام افتاده در زیر تیر، نیروی قوی مویینگی را به وجود می‌آورد که تیر را به سمت بستر (الکتروود زیرلایه پایینی) می‌کشد. در صورت وجود نیروی مویینگی در کلیدهای میکرو و نانو، بررسی این موضوع بر روی تغییر پایداری کلید بسیار مهم و ضروری می‌باشد، زیرا این نیرو می‌تواند 10 تا 100 برابر بزرگ‌تر از نیروی الکترواستاتیک شود [12]. اگر نیروی مویینگی به اندازه کافی بزرگ باشد، ساختار سقوط خواهد کرد و به بستر می‌چسبد [12]. مسترانگلو و اچسو [13] اولین نفراتی بودند که نیروی مویینگی در زیر یک میکروساختار الکتروومکانیکی را تحلیل و پایداری آن را مورد بررسی قرار دادند.

از آنجایی که نسبت بین سطح به حجم ساختارهای با ابعاد نانو بسیار بزرگ است، اثرات سطحی⁷ بر رفتار پولین نانوکلیدها حائز اهمیت هستند. اثرات سطحی را می‌توان به دو دسته تنش سطحی باقیمانده و اثرات الاستیستیه الاستیستیه سطحی تقسیم نمود. تنش سطحی باقیمانده و اثرات الاستیستیه سطحی با استفاده از مدل الاستیک سطحی معرفی شده توسط گرتین و مورداخ [14] و معادله یانگ-لاپلاس تعیین یافته در مدل سازی مکانیک پیوسته ترکیب می‌شوند. مدل الاستیک سطحی و معادله یانگ-لاپلاس تعیین یافته به طور گستردگی در بررسی اثرات سطحی بر پاسخ‌های مکانیکی نانوساختارها به طور نمونه نانوتیرهای [15] مورد استفاده قرار گرفته‌اند. اخیراً محققین ناپایداری پولین نانوکلیدها را با در نظر گرفتن اثرات سطحی بررسی کرده و پی برندند که اثرات سطحی تأثیر بسزایی در ناپایداری پولین نانوتیرهای دارند [16].

باید به این نکته توجه نمود در صورتی که نرخ تغییر ولتاژ قبل صرف‌نظر کردن باشد، اینرسی اثری بر رفتار سیستم نخواهد داشت. به این شرایط، ناپایداری پولین استاتیکی⁸ اطلاق می‌شود. در مقابل، زمانی که ولتاژ به طور ناگهانی اعمال شود و یا نرخ تغییر ولتاژ قبل توجه باشد، اینرسی تأثیر مهمی بر رفتار سیستم داشته و ناپایداری متناظر با این شرایط، پولین دینامیکی⁹ خوانده می‌شود. تحقیقات سیاری در مورد رفتار دینامیکی و پولین دینامیکی میکروتیرهای تحت تحریک الکتریکی انجام شده است. چاترجی و پوهیت [18] پولین غیرخطی استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای یکسرگیر را مورد بررسی قرار دادند. مقیمی زند و همکاران [19] در تحقیق به بررسی اثرات ناپایداری‌های پولین استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای یکسرگیردار و دوسرگیردار تحت تأثیر نیروهای الکترواستاتیک و بین‌مولکولی پراختنند. رهایی‌فرد و همکاران [20] رفتار دینامیکی میکروتیرهای یکسرگیردار تحت تأثیر نیروی الکترواستاتیک مبنی را بر تئوری تنش مزدوج بررسی و نتایج به دست آمده را با نتایج تئوری کلاسیک مقایسه نمودند. برای یک نانوتیر یکسرگیردار با طول بسیار بلند، در نظر گرفتن ناپایداری‌های دینامیکی بسیار حائز اهمیت است. وانگ و همکاران [22] با توسعه یک مدل تیر یکسرگیردار در حضور اثرات تنش سطحی و نیروی الکترواستاتیک به بررسی اثر جایه‌جایی و تغییر طول الکتروود زیرلایه برای

کتروود مترکز در بالای الکتروود زیرلایه معلق است. اعمال اختلاف ولتاژ بین دو کتروود باعث تغییر شکل کتروود مترکز و انحراف آن به سوی الکتروود زیرلایه می‌شود. زمانی که ولتاژ بین دو کتروود از مقدار خاصی بیشتر شود، سیستم دچار ناپایداری شده و تماس بین دو کتروود به وجود می‌آید. این پدیده، ناپایداری پولین¹ و ولتاژ پولین² نامیده می‌شوند.

پیش از توسعه سیستم‌های نانوالکتروومکانیکی، اغلب این سیستم‌ها اجزایی در ابعاد میکرو داشتند که سیستم‌های میکروالکتروومکانیکی نامیده می‌شدند. در چندین دهه گذشته، تحقیقات بسیاری پیرامون ساختارهای با ابعاد میکرو انجام شده است. باترا و همکاران [5] ارتعاش میکروتیرهای در حوزه الکتریکی را مورد بررسی قرار دادند و تغییرات فرکانس مینا در برابر جریان مستقیم³ اعمالی را تفسیر کردند. رمضانی و همکاران [6] با استفاده از روش‌های عددی و تحلیلی به بررسی ناپایداری‌های استاتیکی نانوتیرهای یکسرگیردار تحت تأثیر نیروی الکترواستاتیک و نیروی بین‌مولکولی کاسیمیر پراختنند. احمدیان و همکاران [7] رفتار استاتیکی و ناپایداری پولین میکروتیرهای دوسرگیردار تحت نیروی الکترواستاتیک و اثر میدان لبه را بررسی نمودند.

یکی از تفاوت‌های کار کردن در مقایسه نانو در مقایسه با مقیاس میکرو و بزرگ‌تر، نقض شدن نسبی فرض پیوستگی ماده می‌باشد. در مجموع دو نوع تئوری کلی برای بررسی ناپایداری میکروکلیدها و نانوکلیدها استفاده می‌گردد. تئوری اول تئوری کلاسیک است که در آن ماده به صورت یک محیط پیوسته درنظر گرفته شده است. در این تئوری، پیوستگی محیط مادی فرض اساسی می‌باشد؛ به نحوی که در هر جز هر چند حجم کنترل کوچکی انتخاب شود باز هم ماده به صورت پیوسته وجود دارد. مدل کلاسیک به دلیل سادگی معادلات همواره مورد استقبال بوده اما با توجه به این نکته که در مقایس نانو شرط پیوستگی محیط ماده نقض شده و مواد به صورت ساختار اتمی وجود دارند، تئوری‌های کلاسیک محیط پیوسته توانایی توضیح بسیاری از پدیده‌ها را ندارند. نظریه‌های کلاسیک به علت در نظر نگرفتن طول‌های درونی مواد دقت خود را از دست می‌دهند. نتایج حاصل از تئوری‌های کلاسیک برای تیرهای در ابعاد نانو اختلاف زیادی با نتایج تجربی داشتند. این اختلاف باعث شد که محققان تئوری‌های جدیدی را ابداع کنند که در آن‌ها برخلاف حالت کلاسیک تنفس تنها تابعی از نیروی وارد نیست. از این‌رو محققان برای بررسی و تحلیل رفتار مکانیکی مواد در مقایس نانو به کمک معرفی ثابت‌های جدید برای ماده مانند پارامتر مقایس طول ماده، تئوری‌های غیرکلاسیک از جمله تئوری تنش مزدوج⁴ [8] و تنش مزدوج⁵ (MCST) [9] را ارائه کردند. پارامتر مقایس طول ماده (طول داخلی) یک خاصیت از ماده است که به جنس ماده بستگی دارد و به سیله آزمایش‌های تجربی محاسبه می‌گردد. تئوری‌های غیرکلاسیک بیان می‌کنند که بر اثر اعمال نیرو به ماده، علاوه بر تنفس، ممان نیز در ماده به وجود می‌آید و باید در معادلات تعادل ذرات یا اجزا در نظر گرفته شوند. رهایی‌فرد و همکاران [10] با استفاده از تئوری تنش مزدوج اصلاح شده، رفتار استاتیکی میکروتیر یکسرگیردار را در نظر گرفتند و نشان دادند که تئوری تنش مزدوج می‌تواند دلیل فاصله میان نتایج تجربی و تئوری کلاسیک را توضیح دهد. طلادی‌بنی و همکاران [11] ناپایداری پولین استاتیکی یک نانوتیر یکسر

¹ Pull-in Instability

² Pull-in Voltage

³ DC Voltage

⁴ Couple Stress Theory

⁵ Modified Couple Stress Theory

⁶ Capillary Force

⁷ Surface Effects

⁸ Static Pull-in Instability

⁹ Dynamic Pull-in Instability

ضابطه‌ای است که مقدارش برای اعداد منفی صفر و برای اعداد نامنفی یک است.

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

تابع هویساید برای تیر یکسر گیردار نیمه‌متاثر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(x) = H(x - D_1) - H(x - L + D_2) \quad (2)$$

که در اینجا D_1 فاصله بین انتهای چپ الکترود زیرلایه و کلید و D_2 فاصله بین انتهای سمت راست الکترود زیرلایه و کلید را نشان می‌دهند. تابع هویساید برای این مدل به گونه‌ای تعریف می‌شود که فقط در بازه‌ی $(D_1 - L \leq x \leq D_2)$ برابر با یک و در بقیه فواصل برابر با صفر شود. با ضرب این تابع در نیروهای الکترواستاتیک و موئینگی و ... فقط در فاصله‌ای که واقعاً بر تیر اثر می‌گذارد مدنظر قرار گرفته شده و در بقیه فواصل برابر با صفر هستند.

2-2- مبانی تئوری تنش مزدوج اصلاح شده
در سال 2003 لام و همکاران [24] با اصلاح تئوری کلاسیک تنش مزدوج، تئوری تنش مزدوج اصلاح شده را معرفی کردند. آن‌ها علاوه بر معادلات تعادلی کلاسیک نیروها و گشتاور نیروها، معادله گشتاور زوج نیروها را نیز در نظر گرفتند. در این نظریه فقط قسمت‌های متقابل گرادیان جابجایی و چرخشی در انرژی پتانسیل کرنشی مشارکت دارند. در نظر گرفتن گرادیان چرخش در انرژی پتانسیل کرنشی باعث به وجود آمدن ثابت جدیدی به نام اندازه طول ماده می‌شود که دارای بعد طول می‌باشد. بر اساس تئوری تنش مزدوج اصلاح شده انرژی کرنشی برای ماده الاستیک خطی ناشی از میدان جابجایی در حجم V ، هم وابسته به تانسور کرنش و هم وابسته به مشتق دوم تغییر مکان است که به صورت زیر ارائه می‌شود [24]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \epsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3)$$

در رابطه فوق σ_{ij} , ϵ_{ij} و m_{ij} به ترتیب نشان‌دهنده تانسور تنش، تانسور کرنش، جزء منحرف شده تانسور تنش مزدوج⁷ و تانسور انجنا⁸ (قسمت متقابل گرادیان چرخش) می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_{ij} = \lambda tr(\epsilon_{ij}) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (4)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i}] \quad (5)$$

$$m_{ij} = 2l^2 \mu \chi_{ij} \quad (6)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} [\theta_{i,j} + \theta_{j,i}] \quad (7)$$

که در روابط فوق λ , μ , δ_{ij} و $tr(\cdot)$ به ترتیب ثابت اول لام⁹, مدول برشی، تریس ماتریس¹⁰ و دلتای کرونکر¹¹ می‌باشند. l پارامتر اندازه طول و خاصیتی از ماده می‌باشد که در مقایسه با ابعاد گوچک است و تأثیر آن زمانی اهمیت می‌باید که ابعاد جسم در مقیاس میکرو و نانو باشد. u_i و θ_i مؤلفه‌های بردار جابجایی و چرخشی هستند که رابطه آن‌ها به صورت زیر است [24]:

$$\theta_i = \frac{1}{2} \text{curl}(u_i) \quad (8)$$

مریع پارامتر اندازه طول که در رابطه (6) بیان شده، مناسب با نسبت مدول انجنا به مدول برشی است [25]. از این‌رو خصوصیتی است که اثر تنش مزدوج را اندازه‌گیری می‌کند [26]. پارامتر اندازه طول با استفاده از روش‌های

حال استاتیکی پرداختند. هایامیزو و همکاران [23] به منظور بهینه‌سازی عملکرد و ساختار یک نانوتیوب کربنی، به بررسی مکان مختلف برای الکترود زیرلایه پرداختند. آن‌ها با بررسی سه مدل مختلف، به مدلی اقتصادی و در مقیاس کوچک‌تر دست یافتدند.

با بررسی پژوهش‌های پیشین در زمینه نانوکلیدها ملاحظه می‌شود که تاکنون عملکرد کلیدهای الکتروموکانیکی در حضور نیروی موئینگی و در حالی که الکترود زیرلایه کوتاه می‌باشد و انحراف تیر در طی زمان تغییر می‌کند با استفاده از تئوری غیرکلاسیک مورد بحث قرار نگرفته است. لذا در مطالعه حاضر، نانوکلیدهای نانوالکتروموکانیکی مدل‌سازی شده و تأثیر اندازه الکترود زیرلایه، نیروهای موئینگی و اثر تنش سطحی بر تغییر شکل و ناپایداری آن‌ها بررسی خواهد شد.

2- مدل‌سازی و به دست آوردن معادلات حاکم

2-1- توصیف مدل

در این بخش معادلات حاکم بر تغییر شکل و ناپایداری استاتیکی و دینامیکی نانوتیپر ارائه خواهد شد. شکل 1 نمای شماتیک نانوکلید مورد بررسی در پژوهش‌های [22] و [23] به صورت یک تیر یکسر گیردار ساخته شده است. در این نوع نانوکلیدها که بسیار جدید هستند، طول الکترود زیرلایه کمتر از الکترود متحرک بوده و به همین دلیل به عنوان نانوکلید نیمه‌متاثر شناخته می‌شوند. همان‌طور که ذکر شد، در نانوساختارهای نیمه‌متاثر، الکترود زیرلایه کوتاه‌تر از الکترود متحرک می‌باشد و کوتاه بودن الکترود زیرلایه باعث می‌شود، الکترود متحرک (نانوتیپر) به صورت کامل در گیر نباشد. در این نانوتیپر، الکترود متحرک بر روی یک صفحه ثابت معلق و دارای طول l , ضخامت h , پهنای b و فاصله اولیه برابر با g_0 می‌باشد. نیروی الکترواستاتیک¹ به سبب ولتاژ اعمالی V به مثابه موئینگی الکترود متحرک را به سوی پایه منحرف می‌کند. نانوتیپر در نظر گرفته شده، ایزوتropیک² و دارای ضریب مدول یانگ³ E , چگالی ρ , مساحت مقطع عرضی A و ممان اینرسی⁴ I است.

در همه پژوهش‌های ذکر شده در ادبیات تحقیق به جز پژوهش‌های [22] و [23] فرض کردند که تمامی تیرک در مقابل الکترود قرار دارد و نیروی الکتریکی بر تمام سطح تیرک اثر می‌کند. ولی در عمل و در کاربرد نانوکلیدهای نیمه‌متاثر فقط قسمتی از تیر (الکترود متحرک) که در ارتباط با قسمت الکترود ورودی (الکترود زیرلایه) قرار دارد با نیروی الکتریکی تحریک می‌گردد [23.22]. برای یک تصحیح درست و مدل‌سازی که مبتنی بر واقعیت باشد، لازم است که نیمه‌متاثر بودن تیرک در نظر گرفته شود. در مدل‌سازی پژوهش حاضر، از یک طول تا طول دیگر تیرک (همان قسمتی از الکترود متحرک که در ارتباط با الکترود زیرلایه است) تحت بارگذاری قرار خواهد گرفت و در بقیه تیر این نیروها حذف می‌شوند.

با توجه به شکل 1 محاسبه‌ی نیروها باید به گونه‌ای باشد که فقط در همان قسمتی از طول تیر که در ارتباط با الکترود زیرلایه قرار دارد، نیروها بر تیر اعمال می‌شوند و در بقیه طول تیرک نیروها صفر شوند. در این مدل مکان و طول الکترود زیرلایه به وسیله تابع پله‌ای هویساید⁵ $H(x)$ کنترل می‌شود. تابع پله‌ای هویساید (x) یا تابع پله‌ای یکه تابعی ناپیوسته و چند

¹ Electrostatic Force

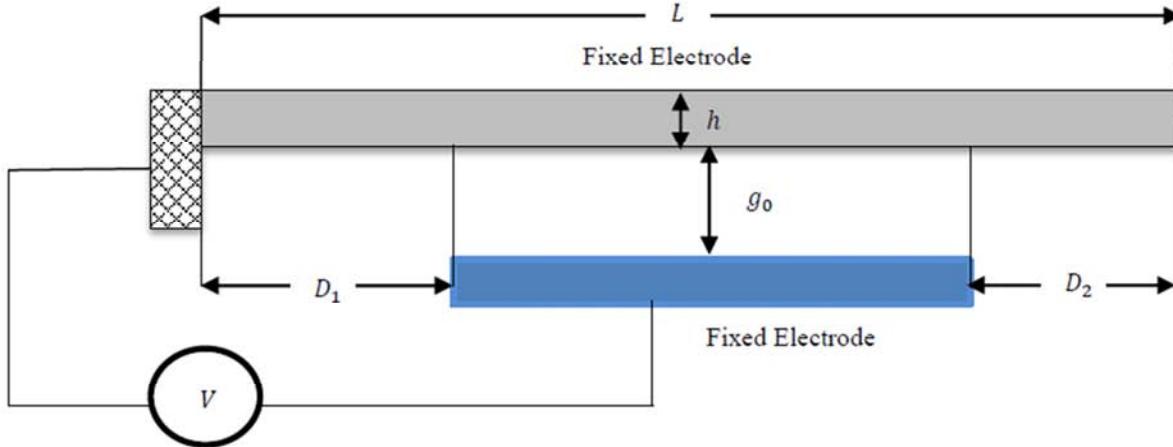
² Isotropic

³ Young Modulus

⁴ Cross Section Area

⁵ Cross Section Inertia Moment

⁶ Heaviside Function

**Fig 1** schematic of a half-effect cantilever nanoswitch**شکل 1** نمای شماتیک نانوتیر یکسرگیردار نیمه‌متاثر

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -EZ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \\ \sigma_{xx} &= \frac{-E}{(1-v^2)} Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \sigma_{yy} = \frac{-E}{(1-v^2)} Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0\end{aligned}\quad (15)$$

که v ضریب پواسون¹ است و λ ثابت لام و μ مدول برشی بر مبنای ضریب پواسون و مدول الاسیسیته تعریف می‌شوند [29]:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+v)}\end{aligned}\quad (16)$$

برای تیرهای باریک با نسبت طول به عرض بزرگ، اثر پواسون کوچک است و می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. همان‌گونه که در رابطه (15) نشان داده شده، برای هر دو حالت تنش صفحه‌ای (تیر کم‌پهنا) و کرنش صفحه‌ای (تیر پهن) به صورت زیر است:

$$\sigma_{xx} = -\tilde{E} \left(Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)\quad (17)$$

که \tilde{E} به ترتیب برای تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای نشان‌دهنده مدول الاسیسیته (E) و مدول صفحه‌ای ($E/(1-v^2)$) می‌باشد. به طور مشابه، با جایگذاری رابطه (14) در رابطه (6) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}m_{xy} &= -\mu l^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ m_{xx} = m_{yy} = m_{zz} &= m_{yz} = m_{zx} = 0\end{aligned}\quad (18)$$

اکنون با جایگذاری معادلات (12)، (14)، (17) و (18) در رابطه (3)، اثری کرنشی خمی تیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}U_{Bending} &= \frac{1}{2} \int_0^L M_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^L Y_{xy} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} dx\end{aligned}\quad (19)$$

که به ترتیب ممان کل² M_x و ممان مزدوج Y_{xy} می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}M_x &= \int \sigma_{xx} z dA \\ Y_{xy} &= \int m_{xy} dA\end{aligned}\quad (20)$$

اثری کرنش برای لایه سطحی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \phi_{\partial A}(\tau_{ij} \varepsilon_{ij}) dA\quad (21)$$

علاوه بر این، رابطه خطی تکبعده بین تنش سطحی σ_s و کرنش محوری ε_x به صورت زیر داده شده است:

آزمایشگاهی همچون آزمایش پیچش و خمی به دست می‌آید [27].

2-3- انرژی کرنشی

انرژی کرنشی کل برای مدل تیر اویلر-برنولی به صورت زیر است:

$$U_{Total} = U_{Bending} + U_{stretching}\quad (9)$$

که $U_{stretching}$ و $U_{Bending}$ به ترتیب انرژی‌های ذخیره‌شده در تیر به سبب نیروهای محوری و کرنش خمی هستند. با توجه به سیستم مختصاتی (x, z) شکل 1 که محور x بر راستای الکترود متحرک پیش از تغییر شکل منطبق است و محور z، راستای تقارن را نشان می‌دهد، مؤلفه‌های جابجایی بر اساس مدل تیر اویلر-برنولی به صورت زیر نشان داده می‌شود [28]:

$$u = -z\psi(x, t), \quad v = 0, \quad w = w(x, t)\quad (10)$$

که u و w به ترتیب مؤلفه‌های بردار جابجایی در راستای محورهای x و z می‌باشند و $\psi(x, t)$ زاویه چرخش حول محور y است که برای تغییر شکل‌های کوچک برابر است با:

$$\psi = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}\quad (11)$$

با در نظر گرفتن جابجایی‌های کوچک و با استفاده از روابط (5)، (10) و

(11) برای تنش صفحه‌ای (تیر کم‌پهنا) و کرنش صفحه‌ای (تیر پهن)، مؤلفه‌های تانسور کرنش به ترتیب به صورت زیر هستند:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (12)$$

$$\varepsilon_{yy} = VZ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{zz} = VZ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{v}{1-v} Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = 0, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0\quad (12)$$

با استفاده از روابط (8)، (10) و (11) بردار چرخشی در سه راستای x و y و z حاصل می‌شود.

$$\theta_y = -\frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad \theta_x = \theta_z = 0\quad (13)$$

با جایگذاری رابطه (13) در رابطه (7) می‌توان تانسورهای انحنای را به دست آورد:

$$\chi_{xy} = \chi_{yx} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}\quad (14)$$

$$\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_{yz} = \chi_{zx} = 0$$

و با جایگذاری رابطه (12) در رابطه (4) مؤلفه‌های تنش به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

¹ Poisson Ratio

² Resultant Moment

³ Couple Moment

$$\begin{aligned} T_K &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 dA dx \\ &= \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (31)$$

که A مساحت سطح مقطع عرضی تیر ($A = bh$) و c_d چگالی تیر می‌باشدند. کار مجازی ناشی از اثرات استهلاک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$W_d = \int_0^L \int_A c_d \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} dw dx \quad (32)$$

که ضریب استهلاک c_d می‌باشد.

6-2- معادله حاکم سیستم و بی‌بعدسازی

حال برای به دست آوردن معادله حاکم سیستم، با به کارگیری اصل همیلتون توسعه داده شده،

$$\delta \int_0^t (T_K - W_d - U_{\text{Total}} + W_{\text{ext}}) dt = 0 \quad (33)$$

که δ نشانگر نماد تغییرات است. با استفاده از روابط (19)، (26)، (27)، (31) و (33)، معادله حاکم دینامیکی حرکت نانوتیر به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} (EI_{\text{eff}} + \mu Al^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ + c_d \frac{\partial w}{\partial t} - 2\tau_0 b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (34)$$

رابطه (34) نشان می‌دهد که صلبیت خمشی تیر شامل دو بخش است، بخش EI_{eff} به عنوان صلبیت خمشی تئوری کلاسیک و بخش μAl^2 که مربوط به تئوری تنش مزدوج اصلاح شده، می‌باشد.

پارامتر l در این قسمت، باعث در نظر گرفته شدن خصوصیات ساختار با ابعاد میکرو و نانو در مدل جدید می‌شود و توضیح اثر اندازه را ممکن می‌سازد. بدینهای است که اگر $l = 0$ باشد از اثر ابعاد میکرو/نانو صرف‌نظر شده و رابطه (34) تعریف شده برای مدل جدید به مدل کلاسیک تیر اویلر-برنولی تبدیل می‌شود:

$$EI_{\text{eff}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_d \frac{\partial w}{\partial t} - 2\tau_0 b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q_{\text{ext}} \quad (35)$$

شرط مزدی برای تیر یکسردر گیر:

$$\begin{aligned} w(0,t) &= \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = 0 \\ EI_{\text{eff}} \frac{\partial^2 w(1,t)}{\partial x^2} &= 0 \\ EI_{\text{eff}} \frac{\partial^3 w(1,t)}{\partial x^3} - 2\tau_0 b \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

که $EI_{\text{eff}} = EI + E_s I_s$ صلبیت خمشی تیر با در نظر گرفتن اثر الاستیسیته سطح است [39].

به منظور ساده‌سازی محاسبات پارامتری، معادله حاکم و شرایط مزدی را می‌توان به حالت بی‌بعد تبدیل کرد. ایجاد پارامترهای بی‌بعد باعث ایجاد مفاهیم جدید و توضیح بهتر پدیده‌های فیزیکی می‌شود. از متغیرهای بی‌بعد

$X = \frac{x}{L}$ و $W = \frac{w}{g_0}$ و پارامترهای زیر جهت بی‌بعدسازی بهره برده می‌شود:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\varepsilon_0 b V^2 L^4}{2 g_0^3 E I_{\text{eff}}} , \quad \gamma_{\text{fr}} = 0.65 \frac{g_0}{b} , \quad \eta = \frac{2\tau_0 b L^4}{E I_{\text{eff}}} \\ \gamma_{\text{ca}} &= \frac{2\gamma_{\text{LA}} b L^4 \cos \theta_c}{E I_{\text{eff}} g_0^2} , \quad T = t \sqrt{\frac{E I_{\text{eff}}}{\rho A L^4}} , \quad \hat{c} = \frac{c_d L^2}{\sqrt{E I_{\text{eff}} (\rho A)}} \\ H' &= H(x/L) = H\left(\frac{x}{L} - \frac{D_2}{L}\right) - H\left(\frac{x}{L} - 1 + \frac{D_2}{L}\right), \\ d_1 &= \frac{D_1}{L}, d_2 = \frac{D_2}{L} \end{aligned} \quad (37)$$

که پارامترهای β ، γ_{ca} ، γ_{fr} ، T ، \hat{c} ، d_1 ، d_2 ، H' ، η ، δ ، D_1 و D_2 به ترتیب متناظر با پارامترهای بی‌بعد و لتاژ، میدان لبه، نیروی مویینگی، تابع هویساید بی‌بعد، پارامتر بی‌بعد فاصله بین انتهای چپ الکترود زیرلایه و کلید، پارامتر بی‌بعد فاصله بین انتهای راست الکترود زیرلایه و کلید، اثر اندازه، انرژی سطحی، زمان و استهلاک می‌باشند. همچنین پارامتر بی‌بعد فرکانس اصلی

$$\sigma_s = \tau_0 + E_s \varepsilon_x \quad (22)$$

که τ_0 تنش پسماند سطحی در راستای محور x و E_s مدول یانگ سطح است. بنا بر معادله یانگ-لابلس، پرس تنش در عرض هر سطح وابسته به انحنای سطح می‌باشد و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\langle \sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^- \rangle n_i n_j = \tau_{\alpha\beta}^s K_{\alpha\beta} \quad (23)$$

که n_i نشان‌دهنده مؤلفه‌های بردار واحد عمود سطح است. از این‌رو، بار عمودی معادل (x) ناشی از تنش سطحی به صورت زیر است [30]:

$$q = H_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (24)$$

H_s یک پارامتر ثابت است که با در نظر گرفتن تنش پسماند سطحی و مقطع عرضی نانوتیر اندازه‌گیری می‌شود و برای نانوتیر با مقطع مستطیلی برابر است با [30]:

$$H_s = 2\tau_0 b \quad (25)$$

با در نظر گرفتن روابط فوق و مؤلفه‌های سطحی که توسط تئوری پیوسته گرتین و مورداخ [32,31] پیشنهاد شده بودند، انرژی کرنشی لایه سطحی با در نظر گرفتن تنش پسماند الاستیسیته سطح به دست می‌آید.

$$U_{\text{Stretching}} = \frac{1}{2} \left[EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2\tau_0 b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (26)$$

$$. I_s = \int z^2 dA$$

2-4- کار نیروهای خارجی

با در نظر گرفتن نیروهای خارجی در واحد طول تیر، کار انجام شده توسط نیروهای خارجی اعمالی $(q(x,t))$ که با W_{ext} نشان داده می‌شود، به صورت زیر است:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_0^L q_{\text{ext}}(x,t) \delta w(x,t) dx \quad (27)$$

در این تحقیق نیروهای خارجی شامل نیروهای الکترواستاتیک و مؤنینگی می‌شوند. با در نظر گرفتن تیر نیمه‌متاثر:

$$q_{\text{ext}} = H(x)(q_{\text{elec}} + q_{\text{capillary}}) \quad (28)$$

با در نظر گرفتن ضریب اثر میدان لبه، نیروی الکترواستاتیک در واحد طول نانوتیر به صورت زیر است [33]:

$$q_{\text{elec}} = \frac{\varepsilon_0 b V^2}{2(g_0 - w)} \left(1 + 0.65 \frac{(g_0 - w)}{b} \right) \quad (29)$$

که $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ ضریب خلا، V ولتاژ خارجی اعمالی، g_0 فاصله اولیه بین دو الکترود زیرلایه و متحرک و w انحراف تیر است.

تحت عمل نیروی مویینگی، انحراف‌های میکرو و نانو تیر فاصله‌ی را تغییر می‌دهد که باعث می‌شود بزرگی نیروی مویینگی تغییر کند و این باعث انحراف بیشتر تیر می‌شود. این روند ادامه می‌یابد تا زمانی که تعادل بین تیر و نیروی مویینگی برقرار شود [34]. نیروی مویینگی اعمالی بر نانوتیر زاویه‌ای برابر با بردار واحد عمود بر سطح سیال دارد؛ بنابراین، با در نظر گرفتن تحقیق لگتبرگ و همکاران [35]، نیروی مویینگی در واحد طول تیر به صورت زیر محاسبه می‌شود [36]:

$$q_{\text{capillary}} = \frac{2\gamma_{\text{LA}} b \cos \theta_c}{(g_0 - w)} \quad (30)$$

که γ_{LA} تنش سطحی مایع-ها و θ_c زاویه تماس بین مایع و سطح جامد می‌باشد.

2-5- انرژی جنبشی و اتلاف استهلاکی

انرژی جنبشی نانوتیر به صورت زیر نوشته می‌شود [37]:

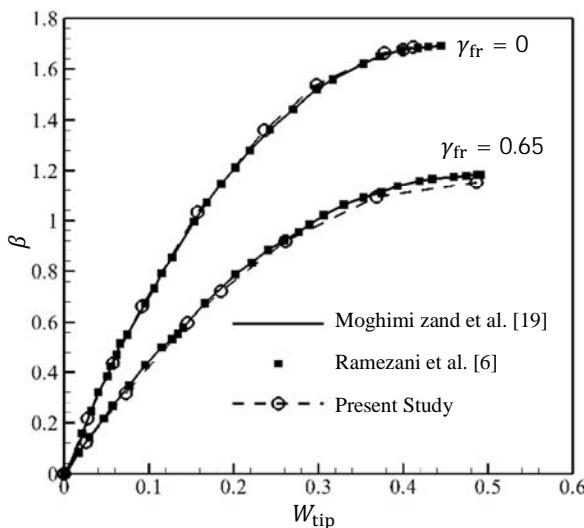


Fig 2 Effect of fringing field parameter on dimensionless pull-in Voltage and deflection ignoring Capillary force and size effect ($\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, d_1 = d_2 = 0$)

شکل 2 تأثیر اثر پارامتر میدان لبه بر پارامتر بدون بعد ولتاژ و انحراف نهایی نانوتیر
یکسرگیردار و بدون در نظر گرفتن نیروی موئینگی و اثر اندازه
($\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, d_1 = d_2 = 0$)

برای ولتاژها و ضریب استهلاک متفاوت نسبت به زمان به دست آمده است.
نسبت‌های $b/g_0 = 5$ و $b/g_0 = 3$ فرض شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج تطابق خوبی در مقادیر کم ولتاژ‌های اعمالی دارند.
زمانی که تیر دچار انحراف زیادی می‌شود، نیروی الکترواستاتیک در سطح تیلور استفاده شده در روش تحلیلی رهایی‌فرد و همکاران [20] ناچیز می‌شود؛ بنابراین، تقریب استفاده شده در مطالعه [20] می‌تواند دلیل اختلاف اندک میان نتایج حاضر و نتایج مرجع [20] باشد.

شکل 5 انحراف نهایی بی بعد نوک تیرک را نسبت به ولتاژ اعمالی برای ارزیابی می‌کند. نتایج بدست آمده با نتایج تحلیلی دینامیکی رهایی‌فرد و همکاران [20] و نتایج [10] مقایسه شده‌اند.

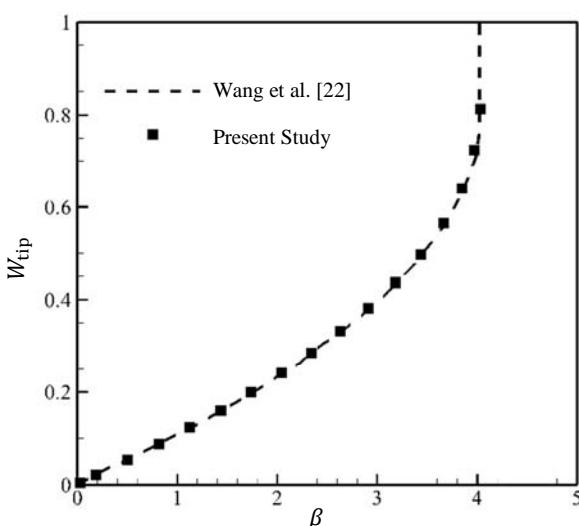


Fig 3 Relation Between dimensionless pull-in voltage and deflection parameters for a cantilever
($\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, d_1 = 0.3, d_2 = 0.3$)

شکل 3 رابطه بین پارامتر ولتاژ و انحراف نهایی بی بعد تیر یکسرگیردار
($\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, d_1 = 0.3, d_2 = 0.3$)

نانوتیر Ω به صورت زیر است [40]:

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho AL^4}{EI_{eff}}} \quad (38)$$

که ω فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد. با استفاده از پارامترهای بی بعد رابطه (37) در رابطه (34)، معادله حاکم بی بعد نانوکلید یکسرگیردار نیمه‌متاثر برای حالت دینامیکی به صورت زیر در می‌آید:

$$(1 + \delta) \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + \hat{C} \frac{\partial W}{\partial T} - \eta \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = H' \left(\frac{\beta}{(1-W)^2} + \frac{\gamma_{fr}\beta}{(1-W)} + \frac{\gamma_{ca}}{(1-W)} \right) \quad (39)$$

در معادلات بالا، اندیس n برای نیروی واندروالس 3 و برای نیروی کاسیمیر 4 است بنابراین، شرایط مرزی بی بعد با جایگذاری پارامترهای بی بعد در رابطه (36) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} W(0, t) &= \frac{\partial W(0, t)}{\partial X} = 0 \\ (1 + \delta) \frac{\partial^2 W(1, T)}{\partial X^2} &= 0 \\ (1 + \delta) \frac{\partial^3 W(1, T)}{\partial X^3} - \eta \frac{\partial W(1, T)}{\partial X} &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

به منظور به دست آوردن معادله حاکم برای حالت استاتیکی، عبارت وابسته به زمان حذف می‌شوند.

$$\begin{aligned} (1 + \delta) \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} - \eta \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} &= H' \left(\frac{\beta}{(1-W)^2} + \frac{\gamma_{fr}\beta}{(1-W)} + \frac{\gamma_{ca}}{(1-W)} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

3- روش حل و اعتبار سنجی

3-1- روش حل

دسته معادلات دیفرانسیل جزئی، یعنی روابط (39) و (41) و شرایط مرزی متناظر یعنی رابطه (40) از طریق روش اجزا محدود حل شده‌اند. بدین منظور معادلات یادشده در شکل ضعیف فرمول‌بندی و سپس با استفاده از روش گالرکین حل شده‌اند. جزئیات روش حل در [41] ذکر شده و برای اختصار از تکرار آن در اینجا صرف‌نظر می‌گردد.

3-2- اعتبار سنجی

3-2-1- استاتیکی - تیر کامل

شکل 2 رابطه بین پارامتر ولتاژ بی بعد و انحراف نهایی بدون بعد بدون در نظر گرفتن نیروهای بین‌مولکولی و موئینگی و اثر اندازه می‌شود. این شکل نشان می‌دهد که وجود اثر لبه به طور محسوسی بر انحراف نهایی بدون بعد و ولتاژ پولین استاتیکی تیرک تأثیر دارد. همچنین در این شکل مشاهده می‌شود که نتایج بدست آمده در پژوهش حاضر تطابق خوبی با نتایج رمضانی و همکاران [6] و مقیمی‌زند و همکاران [19] دارد.

3-2-2- استاتیکی - تیر نیمه‌متاثر

در شکل 3 نتایج بدست آمده برای تیر یکسرگیردار نیمه‌متاثر با نتایج پژوهش وانگ و همکاران [22] مقایسه شده است. در این شکل مشاهده می‌شود، در نبود نیروی موئینگی، افزایش ولتاژ باعث کاهش فاصله بین دو الکترود و درنهایت پدیده پولین می‌شود. همچنین تطابق خوبی بین نتایج بدست آمده در پژوهش حاضر و نتایج گزارش شده در [22] وجود دارد.

3-2-3- دینامیکی - تیر کامل

در شکل 4 نتایج بدست آمده با نتایج حل تحلیلی رهایی‌فرد و همکاران [20] مقایسه شده است. در [20] از روش گالرکین برای محاسبه ناپایداری نانوتیرک استفاده شده است. در این شکل انحراف بی بعد دینامیکی نانوتیر

مقادیر متفاوت از پارامترهای β , α_n و γ_{fr} و γ_{ca} انحراف نهایی پولین دینامیکی نانوتیر با حل رابطه (39) و برای پولین استاتیکی با حل رابطه (41) و در نظر گرفتن $\infty \rightarrow du(1)/d\beta \rightarrow$ به دست می‌آیدن. ابعاد و مشخصات فیزیکی نانوکلید یکسر گیردار که از جنس سیلیکون می‌باشد، در جدول ۱ ارائه شده است.

در مدل تیر مدنظر در این پژوهش تأثیر پارامترهای بی بعد میدان اثر لبه، اثر اندازه، موقعیت و طول الکترود زیر لایه، نیروهای الکترواستاتیک و مویینگی بر ناپایداری نانوکلید مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

4-1- اثر میدان لبه

شکل ۶ تأثیر اثر میدان لبه بر پارامترهای بی بعد ولتاژ و نیروی مویینگی نهایی برای حالت دینامیکی را در غیاب اثر اندازه ($\delta = 0$) نشان می‌دهند. از شکل ۶ نتیجه می‌شود که در حالت دینامیکی میکرو/نانوکلیدها در مقادیر یکسان نیروی مویینگی و اثر میدان لبه در ولتاژهای کمتری به ناپایداری می‌رسند و با افزایش پارامتر نیروی مویینگی، نسبت β_{PI} استاتیکی به دینامیکی افزایش می‌یابد.

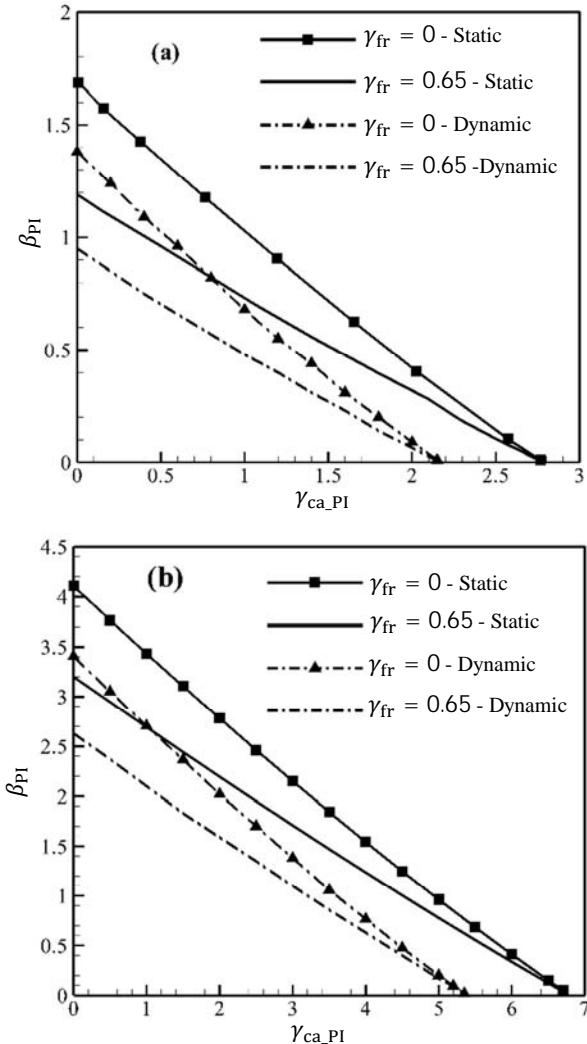


Fig 6 Effect of fringing field effect on dimensionless pull-in voltage and capillary force parameters in static and dynamic modes
($\delta = 0, \eta = 0$): (a) $d_1 = d_2 = 0$, (b) $d_1 = 0, d_2 = 0.2$

شکل ۶ تأثیر اثر میدان لبه بر پارامترهای بی بعد ولتاژ و مویینگی نهایی در دو حالت استاتیکی و دینامیکی (a) : ($\delta = 0, \eta = 0$) (a) : ($d_1 = d_2 = 0$) (b)

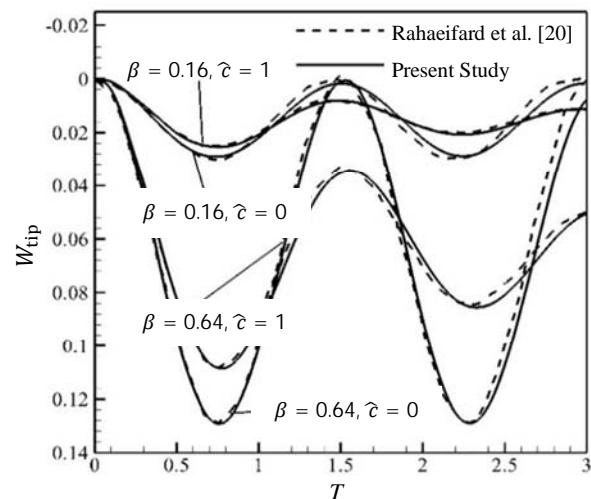


Fig 4 Relation between dimensionless pull-in voltage and deflection parameters for a cantilever ($\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, d_1 = d_2 = 0$)

شکل ۴ رابطه بین پارامتر ولتاژ نهایی بی بعد تیر یکسر گیردار و زمان برای ولتاژهای اعمالی و ضرایب استهلاک متفاوت ($\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, d_1 = d_2 = 0$)

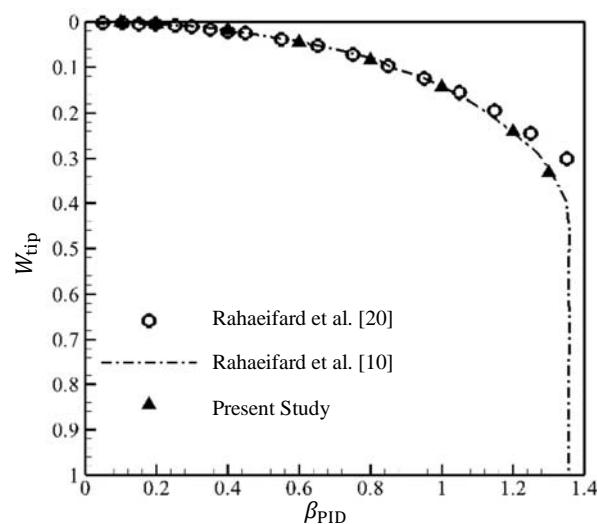


Fig 5 Relation Between dimensionless pull-in voltage and deflection parameters for a cantilever ($\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, h/l = 5, b/g_0 = 5, d_1 = d_2 = 0$)

شکل ۵ رابطه بین پارامتر ولتاژ و انحراف نهایی بی بعد تیر یکسر گیردار ($\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, h/l = 5, b/g_0 = 5, d_1 = d_2 = 0$)

همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج پژوهش حاضر سازگاری مناسبی با نتایج پژوهش‌های پیشین دارند. همان‌طور که ذکر شد اختلاف ناچیز بین نتایج [20] و تحقیق حاضر به علت استفاده از تقریب بسط تیلور در محاسبه نیروی الکترواستاتیک در مقاله مرجع است، زیرا که به طور معمول در حل، تمامی عبارات سری تیلور در نظر گرفته نشده و این باعث به وجود آمدن خطایی اندک در جواب نهایی می‌شود. بنابراین روش استفاده حاضر از دقت بالایی برخوردار می‌باشد.

4- تحلیل ناپایداری

به منظور بررسی ناپایداری نانومحرک، رابطه (34) با روش اجزا محدود حل شده و اثرات پارامترهای مختلف نسبت به یکدیگر بررسی می‌شود. برای

از دیدگاه دیگر فاصله‌ی بین دو الکترود و پهن‌تر شدن تیر باعث کاهش نسبت g/b و کاهش اثر میدان لبه می‌شود و بدین سبب پارامتر ولتاژ نهایی کلید افزایش می‌یابد.

4-2-اثر اندازه

شکل 7 تأثیر اثر اندازه بر پارامترهای بی‌بعد ولتاژ و نیروی مویینگی نهایی برای حالت دینامیکی را در غیاب نیروهای بین‌مولکولی نشان می‌دهد. در شکل 7 مشاهده می‌شود که برای میکروتیر یکسرگیردار با افزایش اثر اندازه، مقادیر نهایی پارامترهای ولتاژ و مویینگی افزایش می‌یابد و این اثر در صورت کوتاه شدن الکترود زیرلایه نیز باقی خواهد ماند. با مقایسه شکل‌های 7a و 7b می‌توان دریافت که در میکروکلیدهای یکسر گیردار تأثیر پارامتر اندازه بر پارامتر ولتاژ نهایی برای کلید با الکترود زیرلایه کوتاه بیشتر از کلید با الکترود زیرلایه با طول کامل می‌باشد. شکل‌های 7 می‌توان نتیجه گرفت که در صورت افزایش پارامتر اثر اندازه، به نیروی بیشتری جهت انحراف نانوکلید نیاز است، لذا افزایش آن سختی نانوکلید را افزایش می‌دهد.

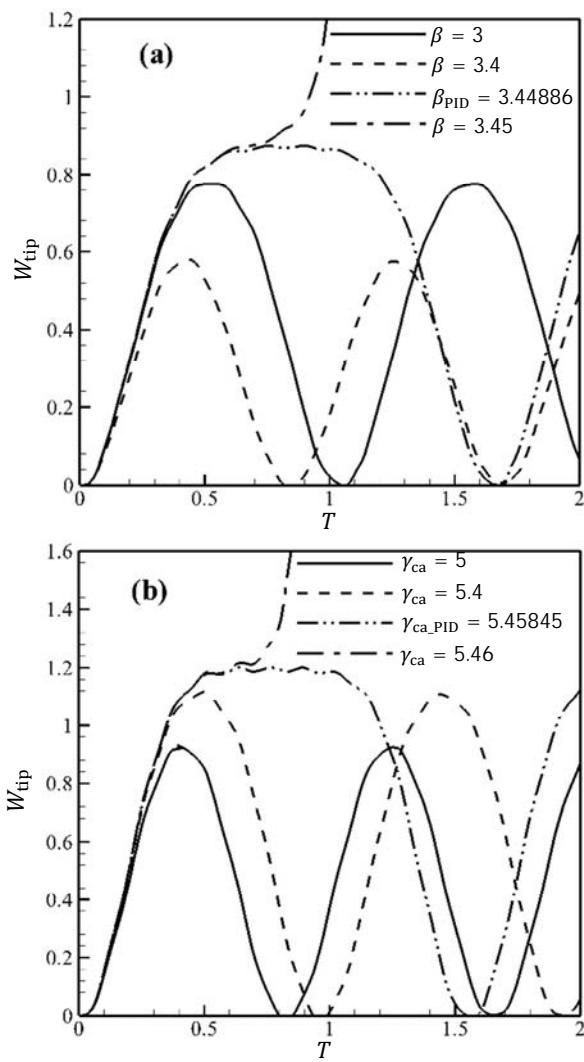


Fig 8 Variation of pull-in deflection during time for different values of:
 (a) Dimensionless Voltage parameter , (b) Dimensionless Capillary force parameter ($\gamma_{fr} = 0, \delta = 0, d_1 = 0.2, d_2 = 0.2$)

شکل 8 تغییرات پارامتر انحراف حداقل و نهایی تیر در طی زمان برای مقادیر متفاوت پارامترهای بی‌بعد: (a) ولتاژ نهایی (نیروی الکترواستاتیک)، (b) نیروی مویینگی ($\gamma_{fr} = 0, \delta = 0, d_1 = 0.2, d_2 = 0.2$)

جدول 1 ابعاد و مشخصات فیزیکی نانوکلید سیلیکونی

Table 1 Dimensions and physical properties of silicon nano-switch

پارامتر	مقدار
طول (L)	350(μm)
فاصله اولیه دو الکترود (g_0)	3(μm)
ضخامت (h)	1(μm)
عرض الکترود (b)	50(μm)
مدول یانگ (E)	169(GPa)
نسبت پواسون (ν)	0.33

همچنین در نانوکلید یکسر گیردار با کوتاه شدن طول الکترود زیرلایه از سمتی که سر آزاد تیر قرار دارد (غیر صفر بودن d_2 و یا زیادتر شدن مقدار آن) مقدار نهایی پارامترهای بی‌بعد ولتاژ و مویینگی افزایش می‌یابد. بنا بر شکل 6، افزایش پارامتر اثر میدان لبه باعث می‌شود تا پارامتر ولتاژ نهایی کاهش یابد. در واقع با افزایش این پارامتر یک نیروی خارجی اضافه به کلید وارد می‌شود و مقدار نیروی لازم برای رسیدن به ناپایداری را کاهش می‌دهد.

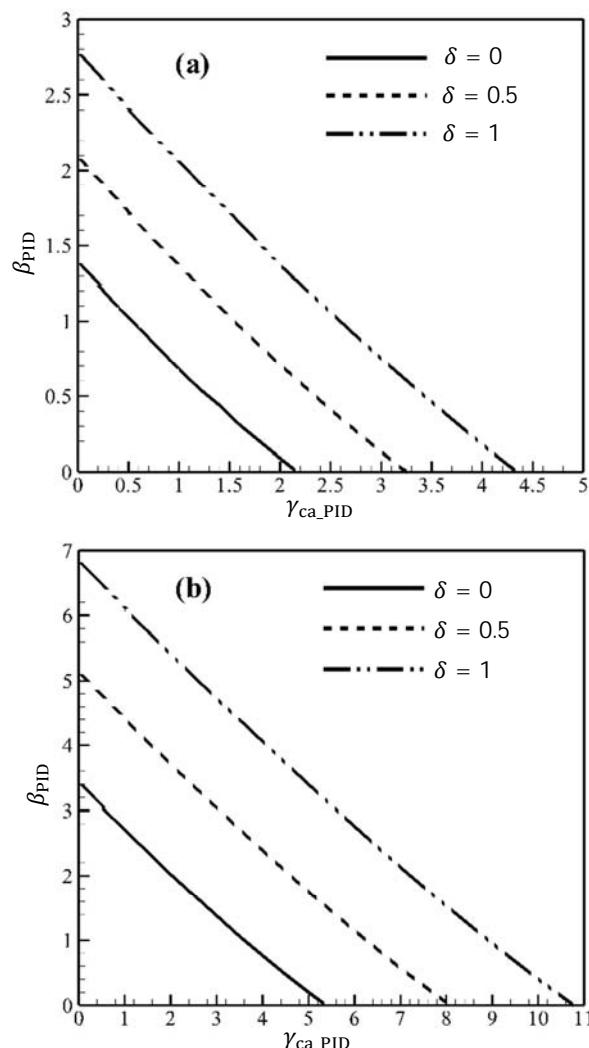


Fig 7 Variation of pull-in voltage parameter against pull-in capillary force parameter for different values of size effect parameter ($\gamma_{fr} = 0, \eta = 0$): (a) $d_1 = d_2 = 0$, (b) $d_1 = 0, d_2 = 0.2$

شکل 7 تغییرات پارامتر ولتاژ نهایی نسبت به پارامتر مویینگی نهایی برای مقادیر متفاوت پارامتر اثر اندازه (a): $(\gamma_{fr} = 0, \eta = 0)$: $d_1 = d_2 = 0$ (a)
 (b): $d_1 = 0, d_2 = 0.2$

را در غیاب نیروهای بین‌مولکولی و نیروی مویینگی را برای دو حالت استاتیکی و دینامیکی نشان می‌دهد.

همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش در مقدار تنش سطحی منجر به افزایش مقادیر ولتاژ پولین (پارامتر بی بعد نیروی الکترواستاتیک) در هر دو حالت استاتیکی و دینامیکی می‌شود. در مقادیر برابر تنش سطحی در حالت استاتیکی نسبت دینامیکی، نیروی بیشتری جهت رسیدن به پولین نیاز است. علاوه بر این، با افزایش تنش سطحی، نسبت پولین استاتیکی به پولین دینامیکی افزایش می‌باید.

4-5- اثر کوتاه شدن الکتروود زیرلایه

در شکل 10 تغییرات پارامتر بی بعد فرکانس اصلی نانوتیر نسبت به پارامتر بی بعد ولتاژ، برای دو نمونه تیر با الکتروود زیرلایه با طول کامل ($d_1 = d_2 = 0$) و نیمه‌متاثر ($d_1 = 0, d_2 = 0.2$) نشان داده شده است. همان‌گونه که در شکل 10 دیده می‌شود، با افزایش ولتاژ میان دو الکتروود، فرکانس اصلی نانوتیر به طور مداوم کاهش و نزدیک شدن به میان‌گذشت. همچنین با افزایش مقادیر پارامتر d_2 و نیمه‌متاثر شدن نانوتیر، برای مقادیر یکسان از پارامتر بی بعد ولتاژ، فرکانس اصلی افزایش می‌یابد. علاوه بر این از شکل 10 می‌توان نتیجه گرفت که با ناپایدار شدن نانوتیر فرکانس اصلی نانوتیر نیمه‌متاثر بیشتر از نانوتیر با طول الکتروود زیرلایه کامل می‌شود.

5- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این پژوهش از تئوری تنش مزدوج اصلاح شده به منظور به دست آوردن مدلی جامع برای بررسی ناپایداری‌های استاتیکی و دینامیکی پولین میکرو/نانوکلیدهای یکسرگیردار، استفاده شده است. در این مدل اثرات نیروهای الکترواستاتیک، مویینگی، اثر تنش سطحی، ضربی استهلاک، اثر میدان لبی، اثر اندازه و مکان و طول الکتروود زیرلایه در نظر گرفته شده‌اند و نتایج بر اساس رفتار آن‌ها نسبت به یکدیگر به دست آمده‌اند. برای حل معادلات از روش حل عددی اجزا محدود استفاده گردید. نتایج مهم پژوهش

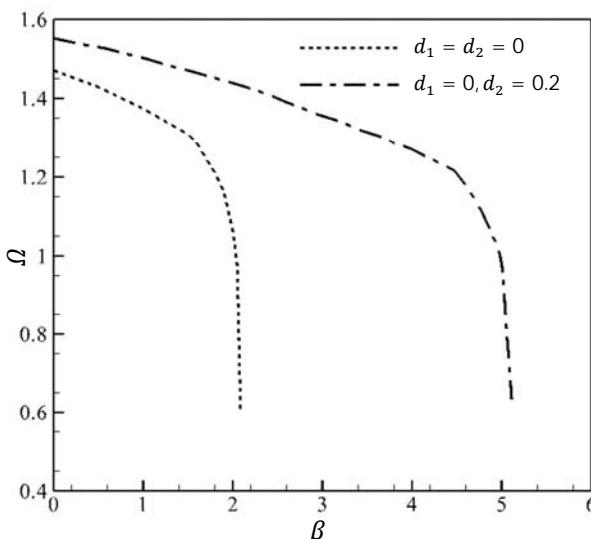


Fig 10 Variation of fundamental frequency against Dimensionless voltage parameter for different values of d_2 and $(\gamma_{fr} = 0, \delta = 0.5, \eta = 0, d_1 = 0)$

شکل 10 تغییرات فرکانس اصلی نانوتیر نسبت به پارامتر بی بعد ولتاژ برای مقادیر متفاوت d_2 و $d_1 = 0$ ($\gamma_{fr} = 0, \delta = 0.5, \eta = 0, d_1 = 0$)

به عبارت دیگر نیروی جاذبه‌ای که از طرف نیروهای الکترواستاتیک و مویینگی باید به نانوتیر وارد شود تا تیر حرکت کند افزایش یافته است. این بدین معنی است که تئوری تنش مزدوج اصلاح شده، میکرو/نانوتیر را سخت‌تر از تئوری کلاسیک ارزیابی می‌کند. لذا در نظر گفتن پارامتر اثر اندازه در طراحی و تحلیل میکرو/نانوکلیدهای بسیار حائز اهمیت است و همچنین این نتیجه، لزوم استفاده از تئوری‌های غیرکلاسیک مانند تنش مزدوج اصلاح شده در بررسی دقیق‌تر پارامترهای نانوکلیدهای نیمه‌متاثر را نشان می‌دهد.

4-3- اثر نیروی الکترواستاتیک و مویینگی

در شکل‌های 8a و 8b به ترتیب ناپایداری دینامیکی نانوتیر یکسرگیردار نیمه‌متاثر در صورت وجود تحریک ناشی از نیروهای الکترواستاتیک و مویینگی بررسی شده است.

در هر شکل اثرات تنها یک نیرو بررسی شده و از اثرات دیگر نیروها صرف‌نظر شده است. شکل‌های مذکور انحراف نهایی تیر در طی زمان برای پارامترهای بی بعد و متفاوت نیروهای الکترواستاتیک و مویینگی را نشان می‌دهند. با توجه به شکل‌های 8 زمانی که نیروها بین دو تیر از مقدار پولین دینامیکی بیشتر شود، روند خصوصیت پاسخ تیر به این نیروها در طی زمان تغییر می‌کند. این نمودارها نشان می‌دهند که دامنه ارتعاشات با افزایش نیروها، بیشتر می‌شود. در نتیجه‌ی بیشتر شدن هر کدام از پارامترها از مقدار پولین دینامیکی آن‌ها، معادله حرکت تیر پایداری خود را از دست می‌دهد و سیستم از نظر دینامیکی ناپایدار می‌شود. بعد از مقدار پولین دینامیکی، تغییری جزئی در مقدار نیروها باعث این ناپایداری می‌شود. قابل ذکر است که پیش از رسیدن به مقادیر پولین پارامترها، تیر رفتار حرکتی متناوب دارد و در صورت بیشتر شدن از مقدار پولین الکتروود متحرک بر روی پایه سقوط می‌کند. با توجه به شکل‌های 8، در صورت تحریک میکرو/نانوتیر یکسرگیردار نیمه‌متاثر مقادیر پولین برای پارامترهای بی بعد نیروهای الکترواستاتیک و نیروی مویینگی به ترتیب برابر با 3.44886 و 5.45845 می‌باشند.

4-4- اثر سطحی

شکل 9 اثر تغییر پارامتر بی بعد اثر تنش سطحی بر پارامتر بی بعد ولتاژ پولین

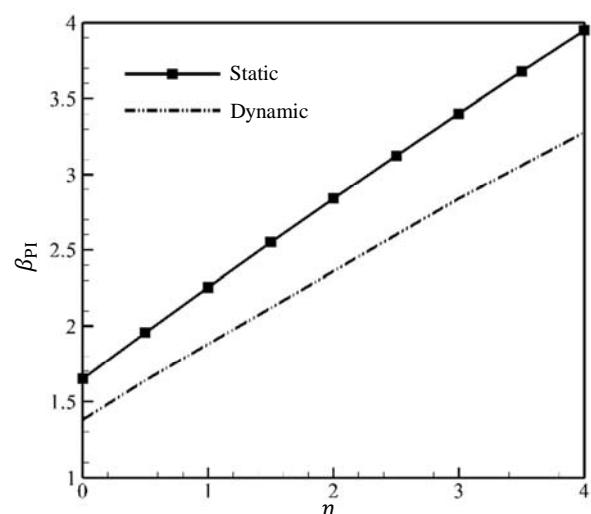


Fig 9 Variation of pull-in Voltage against surface effect parameter for static and dynamic modes ($\gamma_{fr} = 0, \delta = 0, d_1 = 0.2, d_2 = 0.2$)

شکل 9 تغییرات پارامتر ولتاژ نهایی نسبت به پارامتر اثر تنش سطحی برای دو حالت استاتیکی و دینامیکی ($\gamma_{fr} = 0, \delta = 0, d_1 = 0.2, d_2 = 0.2$)

فرکانس اصلی نانوتیر نیمه‌متاثر بیشتر از نانوتیر با طول الکترود زیرلایه کامل می‌شود.

حاضر را می‌توان به صورت زیر خلاصه نمود:

- افزایش اثر میدان لبه باعث کاهش ولتاژ پولین β_{PI} می‌شود. لذا برای مقادیر بزرگ اثر میدان لبه، می‌باشد این اثر در روابط در نظر گرفته شود. تأثیر تغییر اندازه پارامتر میدان لبه بر نرخ تغییر پارامترهای β_{PI} و $\gamma_{\text{ca_PI}}$ ، برای نانوتیر نیمه‌متاثر بیشتر از نانوتیر با الکترود با طول کامل است.

در حالت دینامیکی، میکرو/نانوکلیدها در مقادیر یکسان نیروی مویینگی و اثر میدان لبه در ولتاژهای کمتری نسبت به حالت استاتیکی به ناپایداری می‌رسند و با افزایش پارامتر نیروی مویینگی، نسبت ولتاژ پولین استاتیکی β_{PI} به ولتاژ پولین دینامیکی β_{PID} افزایش می‌یابد.

- با کوتاه شدن طول الکترود زیرلایه در میکرو/نانوکلید یکسر گیردار از سمتی که سر آزاد تیر قرار دارد، مقدار نهایی پارامترهای بی بعد ولتاژ پولین و اثر مویینگی افزایش می‌یابند.

برای نانوتیر یکسر گیردار، با افزایش اثر اندازه، مقادیر نهایی پارامترهای ولتاژ و مویینگی افزایش می‌یابد و این مساله برای نانوتیرهای نیمه‌متاثر نیز صادق است.

- مقدار نیروی الکترواستاتیک و مویینگی به پارامتر اثر اندازه وابسته است و با افزایش پارامتر اثر اندازه مقادیر نیروهای الکترواستاتیک و مویینگی بحرانی افزایش می‌یابد. همچنین در نانوتیرهای نیمه‌متاثر، تأثیر تغییر مقدار پارامتر اثر اندازه بر پارامتر ولتاژ پولین، بیشتر از نانوتیرها با الکترود زیرلایه کامل می‌باشد.

تئوری تنش مزدوج اصلاح شده، میکرو/نانوتیر را سخت‌تر از تئوری کلاسیک ارزیابی می‌کند. لذا در صورت افزایش پارامتر اثر اندازه، به نیروی بیشتری جهت انحراف تیر نیاز است و سختی کلید را افزایش می‌دهد.

- در حالت دینامیکی پیش از رسیدن تیرک به وضعیت پولین، تیر رفتار حرکتی متأوابی دارد. دامنه ارتعاشات تیر با افزایش نیروهای بین دو الکترود تا پیش از پدیده پولین، بیشتر می‌شود. در صورت بیشتر شدن نیروهای بین دو الکترود از مقدار پولین دینامیکی، معادله حرکت تیر پایداری خود را از دست می‌دهد و سیستم از نظر دینامیکی ناپایدار می‌شود.

افزایش در مقدار تنش سطحی منجر به افزایش مقادیر ولتاژ پولین (پارامتر بی بعد نیروی الکترواستاتیک) در هر دو حالت استاتیکی و دینامیکی می‌شود.

- در مقادیر برابر تنش سطحی در حالت دینامیکی نسبت به حالت استاتیکی، نیروی بیشتری جهت رسیدن به پولین نیاز است. علاوه بر این، با افزایش تنش سطحی، نسبت پولین استاتیکی به پولین دینامیکی افزایش می‌یابد.

با افزایش ولتاژ میان دو الکترود، فرکانس اصلی نانوتیر به طور مداوم کاهش و نرخ کاهش تا رسیدن به ولتاژ پولین افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش مقدار پارامتر d_2 و نیمه‌متاثر شدن نانوتیر، برای مقادیر یکسان از پارامتر بی بعد ولتاژ، فرکانس اصلی افزایش می‌یابد. با ناپایدار شدن نانوتیر

6- فهرست عالم

سطح مقطع تیر (μm^2)	A
پهنای تیر (μm)	b
سرعت نور (ms^{-1})	c
ضریب استهلاک	c_d
پارامتر بی بعد استهلاک	\hat{c}
فاصله بین انتهای الکترود زیرلایه و کلید (m)	D_1, D_2
فاصله بی بعد بین انتهای الکترود زیرلایه و کلید	d_1, d_2
مدول اسیسیته یانگ (GPa)	E
فاصله اولیه بین الکترود و پایه (μm^2)	g_0
تابع پله‌ای هویسايد	$H(x)$
تابع بی بعد پله‌ای هویسايد	H'
ضخامت تیر (μm^2)	h
مان اینترسی سطح (m^4)	I
طول تیر (μm)	L
پارامتر مقیاس طول	l
مان کل	M_x
جز منحرش شده تانسور تنش مزدوج	m_{ij}
مؤلفه بردار واحد عمود بر سطح	n_i
نیروی وارده بر تیر (Nm^{-1})	q
پارامتر بی بعد زمان	T
تریس ماتریس	$\text{tr}(\cdot)$
انرژی کرنشی	U
ولتاژ اعمالی بین پایه و الکترود	V
کار نیروها	W
کار ناشی از استهلاک	W_d
انحراف تیر (μm^2)	w
مان مزدوج	Y_{xy}
علائم یونانی	
مدول برشی	μ
چگالی (kgm^{-3})	ρ
ثابت اول لام	λ
تانسور تنش	σ_{ij}
تنش سطحی	σ_s
تانسور کرنش	ε_z
کرنش محوری	ε_x
زاویه چرخش حول محور y	$\psi(x, t)$
تانسور اعما	χ_{ij}
تابع دلتای کرونکر	δ_{ij}
اثر اندازه	δ
ضریب خلا ($\text{c}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$)	ε_0
ضریب پواسون	v
تنش سطحی مایع-هو	γ_{LA}

- Vol. 35, No. 2, pp. 941-951, 2011.
- [18] S. Chaterjee, G. A. Pohit, large deflection model for the pull-in analysis of electrostatically actuated microcantilever beams, *Journal of Sound Vibrations*, Vol. 322, No. 4-5, pp. 969-986, 2009.
- [19] M. Moghimi Zand, M. T. Ahmadian, B. Rashidian, Dynamic pull-in instability of electrostatically actuated beams incorporating casimir and van der waals force, *Journal of Mechanical Engineering Science: Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 224, No. 9, pp. 2037-2047, 2010.
- [20] M. Rahaeifard, M. T. Ahmadian, K. Firoozbakhsh, Size-dependent dynamic behavior of microcantilevers under suddenly applied DC voltage, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 228, No. 5, pp. 1-11, 2013.
- [21] M. Moghimi Zand, Analytic study of nonlinear dynamics in electrostatically-actuated microbeams considering Timoshenko theory, *ISME: Annual International Mechanical Engineering Conference*, Tehran, Iran, May 12-14, 2015. (in Persian) [فارسی]
- [22] K. F. Wang, B. L. Wang, A general model for nano-cantilever switches with consideration of surface effect and nonlinear curvature, *Physica E*, Vol. 66, No. 29, pp. 197-208, 2015.
- [23] Y. Hayamizu, t. Yamada, K. Mizuno, R. C. Davis, D. N. Futaba, M. Yumura, K. Hata, Integrated three-dimensional microelectromechanical devices from processable carbon nanotube wafers, *nature nanotechnology*, Vol. 3, No. 5, pp. 289-299, 2008.
- [24] F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, 2009.
- [25] W.D. Nix, H. Gao, Indentation size effects in crystalline materials: a low for strain gradient plasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 46, No. 3, pp. 411-425, 1998.
- [26] R. D. Mindlin, H. F. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 415-448, 1962.
- [27] M. Asghari, M. Rahaeifard, M.H. Kahrobaian, M. T. Ahmadian, The modified couple stress functionally graded Timoshenko beam formulation, *Materials & Design*, Vol. 32, No. 3, pp. 1435-1443, 2011.
- [28] S. K. Park, X. L. Gao, Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 2355-2359, 2006.
- [29] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, Third edition, pp. 409-413, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [30] J. He, C. M. Lilley, Surface effects on the persistence length of nanowires and nanotubes, *Nano Letters*, Vol. 8, No. 5, pp. 1798-1803, 2008.
- [31] M. E. Gurtin, A. I. Murdoch, A continuum theory of elastic material surfaces, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 57, No. 4, pp. 291-323, 1975.
- [32] M. E. Gurtin, A. Murdoch, Surface stress in solids, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 14, No. 6, pp. 431-440, 1987.
- [33] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Third edition, pp. 25-42, Wiley, New York, 1998.
- [34] A. S. Rollier, B. Legrand, D. Collard, L. Buchaillet, The stability and pull-in voltage of electrostatic parallel-plate actuators in liquid solutions, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 794-801, 2006.
- [35] R. Legtenberg, H. A. C. Tilmans, J. Elders, M. Elwenspoek, Stiction of surface micromachined structures after rinsing and drying : model and investigation of adhesion mechanisms, *Sensors Actuators Physics*, Vol. 43, No. 1-3, pp. 230-238, 1994.
- [36] E. Yazdanpanahi, A. R. Noghrehabadi, M. Ghalambaz, Balance dielectric layer for micro electrostatic switches in the presence of capillary effect, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 74, No. 7, pp. 83-90, 2013.
- [37] M. Keivani, M. Mardaneh, A. Koochi, M. Rezaei, M. Abadyan, On the dynamic instability of nano wire-fabricated electromechanical Actuators in the Casimir regime : Coupled effects of surface energy and size dependency, *Physica E*, Vol. 76, No. 8, pp. 60-69, 2016.
- [38] S.K. Park, X.L. Gao, Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 2355-2359, 2006.
- [39] A. Farrokhabadi, A. Mohebshahedin, R. Rach, J. S. Duan, An improved model for the cantilever NEMS actuator including the surface energy, fringing field and Casimir effects, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 75, No. 30, pp. 202-209, 2016.
- [40] M. Rahaeifard, M. T. Ahmadian, K. Firoozbakhsh, Vibration analysis of electrostatically actuated nonlinear microbridges based on the modified couple stress theory, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, No. 21, pp. 6694-6704.
- [41] J. N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, Third edition, pp. 233-248, McGraw-Hill, New York, 1993.

θ_c	زاویه تماس بین مایع و سطح جامد
γ_{fr}	پارامتر بی بعد میدان لبه
γ_{ca}	پارامتر بی بعد نیروی مویینگی
η	پارامتر بی بعد انرژی سطحی
Ω	پارامتر بی بعد فرکانس اصلی
ω	فرکانس طبیعی نانوتیر
	زیرنویس‌ها
Bending	خمشی
capillary	مویینگی
Elec	الکترواستاتیک
Ext	خارجی
Stretching	کششی
Total	کل

7- مراجع

- H. Xie, J. Vitard, S. Hafsiyo, S. Régnier, High-sensitivity mass and position detection of micro-objects adhered to microcantilevers, *Journal of Micro-Nano Mechatronics*, Vol. 4, No. 1-2, pp. 17-25, 2008.
- G. M. Rebeiz, J. B. Muldavin, RF MEMS switches and switch circuits, *IEEE Microwave Magazine*, Vol. 2, No. 4, pp. 59-71, 2001.
- S. Akiti, Y. Nakayama, S. Mizooka, Y. Takano, T. Okawa, Y. Miyatake, S. Yamanaka, M. Tsuji, T. Nosaka, Nanotweezers consisting of carbon nanotubes operating in an atomic force microscope, *Applied Physics Letters*, Vol. 79, No. 11, pp. 1691-1693, 2001.
- W. P. Taylor, M. G. Allen, C. R. Dauwalter, Fully integrated magnetically actuated micromachined relays, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 7, No. 2, pp. 181-191, 1998.
- R., Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Vibrations of narrow microbeams predeformed by an electric field, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 309, No. 98, pp. 600-612, 2008.
- A. Ramezani, A. Alasty, J. Akbari, Analytical investigation and numerical verification of Casimir effect on electrostatic nano-cantilevers, *Microsystem Technologies*, Vol. 14, No. 2, pp. 145-157, 2008.
- M.T. Ahmadian, M. Mojahedi, A. Barari, R. Firoozbakhsh, Characterization of static behavior of a nonlinear doubly clamped microbeam under electrostatic actuation and detection, *ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering*, San Diego, CA, USA, November 15-21, 2013.
- U. B. C. O. Ejike The plane circular crack problem in the linearized couple-stress theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 7, No. 9, pp. 947-961, 1969.
- F. Yang, A. C. M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, 2002.
- M. Rahaeifard, M. H. Kahrobaian, M. Asghari, Static pull-in analysis of microcantilevers based on the modified couple stress theory, *Sensors and Actuators A*, Vol. 171, No. 2, pp. 370-374, 2011.
- Y. Tadi Beni, I. Karimipour, Static pull-in instability analysis of beam type NEMS under molecular force using strain gradient theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 37-49, 2012. (in Persian) [فارسی]
- H. M. Ouakad, M. I. Younis, Modeling and simulations of collapse instabilities of microbeams due to capillary forces, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2009, No. 1, pp. 1-16, 2009.
- C. H. Mastrangelo, C. H. Hsu, Mechanical stability and adhesion of microstructures under capillary forces: I. Basic theory, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 2, No. 1, pp. 33-44, 1993.
- M. E. Gurtin, A. I. Murdoch, A continuum theory of elastic material surfaces, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 57, No. 4, pp. 291-323, 1975.
- J. He, C. M. Lilley, Surface effect on the elastic behavior of static bending nanowires, *Nano Letters*, Vol. 8, No. 7, pp. 1798-1802, 2008.
- K.F. Wang, B.L. Wang, Influence of surface energy on the non-linear pull-in instability of nano-switches, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 59, No. 9, pp. 69-75, 2014.
- Y. Fu, J. Zhang, Size-dependent pull-in phenomena in electrically actuated nano beams incorporating surface energies, *Applied Mathematical Modelling*,