مجله مهندسی مکانیک مدرس، اردیبهشت 1396، دوره 17، شماره 2، ص‌ص 177-186

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مطالعه تاثیر المان‌های ناسازگار بر روی رفتار الاستیک-پلاستیک تیرها و صفحات ایزوتروپیک تحت بارگذاری تک محوری و خمشی

حامد محمود سلطانی[1]، مهسا خرازی[2*]

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز
2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز
* تبریز، صندوق پستی 51335-1996، kharazi@sut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 10 آبان 1395
پذیرش: 25 دی 1395
ارائه در سایت: 19 بهمن 1395

کلید واژگان:
المان ایزوپارامتریک
المان ناسازگار
روش اجزاء محدود
تحلیل الاستوپلاستیک

چکیده

یکی از مهم‌ترین دستاوردهای روش اجزاء محدود معرفی المان‌های ایزوپارامتریک می‌باشد. در کنار کاربردهای زیاد این المان‌ها، المان‌های ایزوپارامتریک مرتبه پایین دارای مشکلاتی از قبیل قفل‌شدگی برشی، حجمی و مُدهای جعلی انرژی صفر می‌باشند. مشکلات مذکور با افزایش تعداد المان‌ها و یا مرتبه المانی بهبود می‌یابد. از طرفی افزایش تعداد المان‌ها موجب بالا رفتن زمان محاسباتی می‌شود. بدین منظور استفاده از المان‌های مرتبه پائین دارای مد ناسازگار موجب افزایش دقت و کاهش زمان محاسباتی می‌شود. هدف این مقاله، مطالعه و بررسی رفتار الاستوپلاستیک صفحات و تیرها با آلیاژ منیزیم، تحت بارگذاری یکنواخت محوری و خمشی با استفاده از المان‌های ناسازگار و مقایسه نتایج بدست آمده با المان‌های استاندارد می‌باشد. به منظور کدنویسی و تحلیل عددی صفحه و تیر از المان‌های سه بعدی هشت و بیست گرهی استاندارد و هشت گرهی ناسازگار و المان‌های دوبعدی چهار گرهی استاندارد و چهار گرهی ناسازگار استفاده شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که استفاده از المان‌های ناسازگار سه‌بعدی در همگرایی تغییرمکان‌ها تاثیر زیادی داشته و باعث کاهش زمان محاسباتی می‌شود. همچنین در خصوص تنش پلاستیک ون-میزز پس از همگرایی جواب‌ها تفاوت چشمگیری در نتایج المان‌های سازگار و ناسازگار دو بعدی دیده نمی‌شود.

Study the effect of the incompatible elements on the elastic-plastic behavior of isotropic plates and beams under axial and bending loading

Hamed Mahmoud Soltani, Mahsa Kharazi*

Department of Mechanical Engineering, Sahand Technical University, Tabriz, Iran
* P.O.B. 51335-1996, Tabriz, Iran, kharazi@sut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 31 October 2016
Accepted 14 January 2017
Available Online 07 February 2017

Keywords:
Isoparametric element
Incompatible element
Finite element method
Elastoplastic analysis

ABSTRACT

One of the most remarkable achievements of finite element method is the introduction of isoparametric elements. Although these elements can be used in numerous applications, the lower order isoparametric elements make some difficulties such as shear locking, volumetric locking and hourglass. These issues may improve with an increase in the number of the elements or by increasing the order of the elements, which increases the computational time. Therefore, for solving these problems, using the lower order elements with incompatible modes, which enhances accuracy and reduces the computational time, could be considered as an alternative solution option. The aim of this paper is to study the effect of using the incompatible elements on the elastoplastic behavior of isotropic plates and beams under uniform axial and bending loadings. For this purpose, 3D standard elements with eight and twenty nodes and incompatible eight-node elements are used in modeling the 3-D case studies. Besides, the 2D standard elements with four and eight nodes and incompatible ones with four nodes are employed to analyze the 2-D plane stress problems. The obtained results show that using 3D incompatible elements achieves the faster rate of convergence in the solution procedure for obtaining the displacement components and also makes significant run-time reduction. However, there are not any remarkable differences between the obtained plastic Von-Mises stresses using 2D standard and incompatible elements.

1- مقدمه

کاربرد صفحات و تیرهای نازک و نسبتاً ضخیم در صنایع هوافضا، عمران، دریایی و خودروسازی، ضرورت نیاز به طراحی و ملاحظه پایداری این سازه‌ها تحت انواع بارگذاری را روز به روز افزایش داده است. از طرفی پیچیدگی مدلسازی و طراحی مسائل فیزیکی با استفاده از روش‌های تحلیلی موجب شده است تا طراحان از روش‌های عددی برای شبیه‌سازی مسائل فیزیکی استفاده کنند. یکی از پرکاربردترین روش‌های عددی که از بیش از نیم قرن اخیر مورد استفاده قرار گرفته است، روش اجزاء محدود[1] می‌باشد که جایگاه بسیار مهمی را در مراکز صنعتی و دانشگاهی به خود اختصاص داده است. در

[1] Finite Element Method

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

H. Mahmoud Soltani, M. Kharazi, Study the effect of the incompatible elements on the elastic-plastic behavior of isotropic plates and beams under axial and bending loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 177-186, 2017 (in Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-29]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.2.13.5]

سال‌های اولیه که روش اجزاء محدود ارائه شده بود، منحصراً از المان‌های با شکل ساده و تعداد درجات آزادی پایین استفاده می‌شد، که این المان‌ها قابلیت بسیار پایینی در مدلسازی مسائل داشتند. بعدها مشخص شد که استفاده از المان‌ها با درجات آزادی بالا و بکارگرفتن چندجمله‌ای‌های مرتبه بالا در توابع شکل موجب افزایش دقت جواب‌ها می‌شود. روش اجزاء محدود سختی سازه را همواره بیشتر از مقدار واقعی تخمین می‌زند که باعث می‌شود جابجایی‌های بدست آمده از مقدار واقعی کمتر باشند. برای حل این مشکل با کوچک کردن المان‌ها و یا با استفاده از افزایش مرتبه المان می‌توان دقت جواب‌ها را بهبود بخشید و از تخریب المان‌ها جلوگیری کرد، که این یکی از معایب روش مذکور می‌باشد. به همین دلیل استفاده از روش‌های انتگرالگیری متفات و المان‌های بهینه برای رسیدن به جواب دقیق از ملزومات این روش عددی می‌باشد. با معرفی المان‌های ایزوپارامتریک بسیاری از المان‌های مرتبه بالا، توسعه یافتند. برای اولین بار در سال 1962 تایگ [1] و در سال 1971 آیرون [2]، المان‌های ایزوپارامتریک را ارائه دادند. با اینکه این المان‌ها دقت زیادی در تخمین جواب‌ها دارند ولی نیازمند زمان حل بالایی می‌باشند. همچنین المان‌های ایزوپارامتریک دارای سه مشکل اساسی، 1) پدیده قفل‌شوندگی برشی[1]، 2) پدیده قفل‌شوندگی حجمی[2] در مواد تراکم ناپذیر و3) نمایش مود انرژی صفر در تحلیل‌های اجزاء محدود می‌باشند. بدین منظور برای مرتفع کردن این مشکلات و بهبود عملکرد این المان‌ها، از روش انتگرال‌گیری انتخابی و اضافه کردن مودهای جابجایی ناسازگار استفاده شده است. اضافه کردن مودهای جابجایی ناسازگار به منظور جلوگیری از قفل‌شوندگی برشی در المان‌های ایزوپارامتریک توسط ویلسون و همکاران [3] در اوایل دهه هفتاد میلادی ارائه شد. بازلی و همکاران [4] در سال 1965 رفتار خمشی صفحه با شرایط مرزی هندسی و نیرویی متفاوت را با استفاده از المان‌های صفحه‌ای مثلثی ناسازگار مورد بررسی قرار دادند. آنها نتایج بدست آمده از المان مثلثی ناسازگار را با نتایج حاصل از المان‌های سازگار مقایسه کردند. آنها همچنین با استفاده از این المان‌ها فرکانس طبیعی صفحه یکسر گیردار را بدست آوردند. نتایج بدست آمده حاکی از این بود که استفاده از المان‌ها با مود جابجایی ناسازگار موجب کاهش تعداد المان‌ها می‌گردد و این در حالی است که جواب‌ها منطبق با مدل المان‌های سازگار می‌باشد. چوی وکیم [5] در سال1989 با استفاده از تلفیق تکنیک انتگرال‌گیری کاهش یافته و مود ناسازگار در المان‌های مربعی چهار گرهی میندلین[3] المان‌های ناسازگار جدیدی را ارائه دادند. ویلسون و ابراهیم‌بگوویچ [6] در سال 1990 از المان‌های ناسازگار سه بعدی برای محاسبه تنش‌ها و جابجایی‌ها استفاده کردند. آنها از روش حداقل مربعات[4] برای بدست آوردن تنش‌ها استفاده کردند. هدف آنها بدست آوردن تنش‌ها به صورت مستقیم و مستقل از جابجایی‌ها بود، بطوریکه دقت تنش‌ها مستقل از دقت جابجایی‌های بدست آمده باشد. سریونی و همکاران [7] رفتار دینامیکی پنل بنائی را با استفاده از المان‌های ناسازگار مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند که المان‌های با مد ناسازگار قابلیت انجام تحلیل‌های غیرخطی و وابسته به زمان را دارند. ژو و سین [8] در سال 1996 با استفاده از روش ماتریس کرنش-تغییرمکان، جابجایی ناسازگاری را برای المان چهار گرهی متقارن محوری بدست آوردند. تایبت و کارتر [9] در سال 2001 دقت و زمان همگرایی المان سه‌بعدی استاندارد هشت و بیست گرهی را با المان ناسازگار هشت گرهی در دو حالت تیر یکسر گیردار با بار متمرکز و استوانه کوتاه توپر با یکدیگر مقایسه کردند. نتایج بدست آمده حاکی از این بود که استفاده از المان ناسازگار هشت گرهی موجب کاهش زمان همگرایی همراه با افزایش دقت جواب‌ها می‌شود. حسنی و توکلی [10] در سال 2015 مد جابجایی ناسازگاری برای المان‌هایی که در آن‌ها از توابع شکل موروثی[5] استفاده شده است را بدست آوردند. آنها نتایج بدست آمده را با نتایج حاصل از المان‌های سازگار و ناسازگار با توابع شکل درجه دوم برای حالت تیر یکسر گیردار و تیر دارای پیچش مقایسه کردند. سوسمن و بَته [11] در سال 2014 با استفاده از المان‌های ناسازگار دو بعدی 4 گرهی و سه‌بعدی 8 گرهی، وجود مود جعلی در المان‌های با هندسه غیرخطی و جابجایی‌های کوچک را بررسی کردند. آنها در این تحقیق نشان دادند وجود مود جعلی جزء جدانشدنی در المان‌های ناسازگار می‌باشد، به نحوی که در غیاب پدیده‌ی قفل‌شوندگی برشی، مود جعلی نتیجه مستقیم ناسازگاری مود ناسازگار جابجایی می‌باشد. همچنین از المان‌های ناسازگار در تحلیل‌ها با هندسه غیرخطی می‌بایستی با احتیاط استفاده شود. با توجه به مطالعات انجام شده در زمینه المان‌های ناسازگار، بیشتر تحقیقات در بخش الاستیک و در ناحیه کرنش‌های برگشت‌پذیر انجام گرفته است و بررسی‌های مختصری در مورد رفتار المان‌های مذکور در ناحیه پلاستیک شده است. لازم به ذکر است که در حل مسایل پلاستیسیته، غیرخطی بودن تحلیل باعث زمان‌بر شدن حل مساله می‌گردد. از طرفی نیاز به دقت بالا در محاسبه مقادیر جابجایی و تنش در این مسایل نیازمند استفاده از تعداد المان بیشتر و ریزتر می باشد که این خود نیز باعث افزایش زمان محاسباتی می‌گردد. با توجه به مطالعات پیشین، استفاده از المان‌های ناسازگار در محدوده الاستیک باعث بهبود سرعت همگرایی حل می‌گردد و لذا هدف این مقاله بررسی تاثیر استفاده از این المان‌ها بر روی دقت و زمان محاسباتی (سرعت همگرایی) در تحلیل‌های الاستیک-پلاستیک می‌باشد. بنابراین در این مقاله مد نظر می‌باشد، تاثیر استفاده از المان‌های استاندارد و ناسازگار در رفتار الاستوپلاستیک صفحات و تیرها تحت بارگذاری محوری و خمشی مورد بررسی قرار گیرد. بدین منظور از المان‌های دو بعدی و سه بعدی استاندارد و ناسازگار برای مدلسازی صفحات و تیرهای مذکور استفاده شده است و نتایج همگرایی و دقت جواب‌ها در بخش نتایج مورد بحث و بررسی قرار گرفته شده است.

2-روش حل اجزاء محدود

2-1- نحوه استخراج معادلات روش اجزاء محدود بر مبنای اصل کار مجازی[6] [12]

اصل کار مجازی برای یک المان به صورت رابطه (1) نوشته می‌شود:

$$\delta U^m = \delta W^m \qquad (1)$$

در رابطه 1، δU^m وردش انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های داخلی و δW^m وردش کار مجازی نیروهای خارجی وارد بر المان می‌باشد. وردش انرژی کرنشی را می‌توان به فرم ماتریسی بصورت رابطه (2) نوشت:

$$\delta U^m = \iiint \delta\varepsilon^{\mathrm{T}}\,\sigma\, d\mathrm{V} \qquad (2)$$

و روابط تنش-کرنش برای هر المان به صورت رابطه (3) نوشته می‌شوند:

$$\sigma^m = D^m\,\varepsilon^m \qquad (3\text{-الف})$$

$$\varepsilon^m = B^m\,U \qquad (3\text{-ب})$$

[1] Shear Locking Phenomena
[2] Volumetric Locking Phenomena
[3] Quadratic Mindlin Plate Element
[4] Least square
[5] Hierarchical shape functions
[6] Principle of virtual work

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-29]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.2.13.5]

در رابطه (3)، ε^m و σ^m تنش و کرنش المان‌ها، B^m ماتریس کرنش-تغییرمکان، U تغییرمکان‌های نقاط گرهی و D^m ماتریس مصالح می‌باشد. با جاگذاری رابطه (3) در رابطه (1) و با در نظر گرفتن نیروهای خارجی به شکل نیروهای گرهی، اصل کار مجازی به صورت رابطه (4) بدست می‌آید:

$$\delta U^{\mathrm{T}}\left[\sum_{m}\iiint B^{m\mathrm{T}}\,D^{m}\,B^{m}dV^{m}\right]U=\delta U^{\mathrm{T}}\sum_{i}R_{C}^{i} \qquad (4)$$

در رابطه (4)، R_C^i، dV^m و δU^{T} به ترتیب نیروهای گرهی متمرکز، دیفرانسیل حجمی المان و تغییرمکان‌ها مجازی نقاط گرهی می‌باشند. با ساده سازی بردار تغییرمکان مجازی (δU^{T}) از طرفین رابطه 4، در نهایت معادله نهایی روش اجزاء محدود به صورت رابطه (5) بدست می‌آید:

$$K\mathrm{U}=\mathrm{R} \qquad (5\text{-الف})$$

$$K=\sum\iiint B^{m\mathrm{T}}\,D^{m}\,B^{m}dV^{m} \qquad (5\text{-ب})$$

$$\mathrm{R}=\sum_{i}^{m}\mathrm{R}_{\mathrm{C}}^{i} \qquad (5\text{-ج})$$

در رابطه 5- الف، K ماتریس سختی بوده و به صورت رابطه (5- ب)، بدست می‌آید، U بردار جابجایی گرهی و R مجموع نیروهای خارجی اعمال شده به صورت نیروهای متمرکز می‌باشد که در رابطه (5- ج) نشان داده شده است.

2-2- المان‌های ایزوپارامتریک دوبعدی

برای توضیح جزئیات روش مدهای ناسازگار از المان دو بعدی ایزوپارامتریک استفاده می‌شود. برای المان دوبعدی چهار گرهی عمومی نشان داده شده در " شکل1 " مختصات محلی و کلی به صورت رابطه (6) نوشته می‌شود:

$$u_j=\sum_{i=1}^{4}u_{ij}\,h_i \qquad j=1,2 \qquad (6)$$

در رابطه 6، h_i توابع درون‌یابی، u_j جابجایی کلی در راستای x یا y و u_{ij} جابجایی گره i ام در راستای j مختصات نقاط گرهی می‌باشند. توابع درونیابی به صورت رابطه (7) تعریف می‌شوند:

$$h_1=\frac{1}{4}(1-r)(1-s),\ h_2=\frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$
$$h_3=\frac{1}{4}(1+r)(1+s),\ h_4=\frac{1}{4}(1-r)(1+s) \qquad (7)$$

در رابطه 7، r و s مختصات محلی می‌باشند.

2-3- المان چهار گرهی ناسازگار دوبعدی

پایه‌ای‌ترین روش برای اضافه کردن مد ناسازگار، همانند اضافه نمودن درجه آزادی به المان می‌باشد. برای المان مربعی چهار گرهی تقریب جابجایی‌ها به فرم رابطه (8) بدست می‌آید [3]:

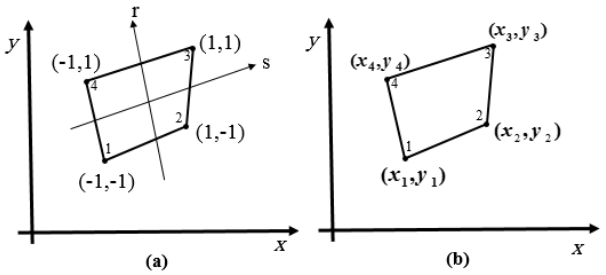


Fig. 1 Two dimensional isoparametric element a) local coordinate b) global coordinate

شکل 1 المان دو بعدی ایزوپارامتریک،(الف) مختصات محلی (ب) مختصات کلی

$$u_j=\sum_{i=1}^{4}u_{ij}\,h_i+\sum_{i=1}^{2}a_{ij}\,P_i \qquad j=1,2 \qquad (8)$$

در رابطه (8)، P_i توابع درون‌یابی ناسازگار و a_{ij} جابجایی ناسازگاری مد iام در راستای j می‌باشد. P_i ها در چهار گره المان می‌بایستی صفر باشند، لذا P_iها بصورت رابطه (9) تعریف می‌شوند:

$$P_1=1-r^2\ ,P_2=1-s^2 \qquad (9)$$

مدهای ناسازگاری که مطابق رابطه (9) به المان سازگار اضافه شده‌اند، در "شکل 2" نشان داده شده اند.

با توجه به توابع جابجایی، کرنش به صورت رابطه (10) بدست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{4}B_i\{u_{1i},u_{2i}\}^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{2}G_i\{a_{1i},a_{2i}\}^{\mathrm{T}}\ \ j=1,2 \qquad (10)$$

در رابطه (10) تانسورهای کرنش-جابجایی B_i و G_i به صورت رابطه (11) تعریف می‌شوند:

$$B_i=\begin{bmatrix}h_{i,1} & 0\\ 0 & h_{i,2}\\ h_{i,2} & h_{i,1}\end{bmatrix},G_i=\begin{bmatrix}P_{i,1} & 0\\ 0 & P_{i,2}\\ P_{i,2} & P_{i,1}\end{bmatrix} \qquad (11)$$

با استفاده از اصل کار مجازی معادله تعادل برای المان مربعی 4 گرهی ناسازگار به صورت رابطه (12) بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}K_{\mathrm{uu}} & K_{\mathrm{ua}}\\ K_{\mathrm{au}} & K_{\mathrm{aa}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_0\\ a_0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (12)$$

در رابطه 12، u_0 و a_0 مجموعه مقادیر گرهی u_{ij} و a_{ij} المان و f بردار نیروهای گرهی می‌باشند. همچنین ماتریس‌های سختی با استفاده از رابطه (13) محاسبه می‌شوند:

$$(K_{\mathrm{uu}})_{ij}=\int B_i^{\mathrm{T}}\,\mathrm{D}B_j dV$$
$$(K_{\mathrm{ua}})_{ij}=\int B_i^{\mathrm{T}}\,\mathrm{D}G_j dV$$
$$(K_{\mathrm{au}})_{ij}=\int G_i^{\mathrm{T}}\,\mathrm{D}B_j dV$$
$$(K_{\mathrm{aa}})_{ij}=\int G_i^{\mathrm{T}}\,\mathrm{D}G_j dV \qquad (13)$$

به منظور حذف جابجایی ناسازگار از رابطه (12) با استفاده از روش چگالش استاتیکی، ابتدا از رابطه (12)، a_0 بصورت زیر محاسبه می‌شود:

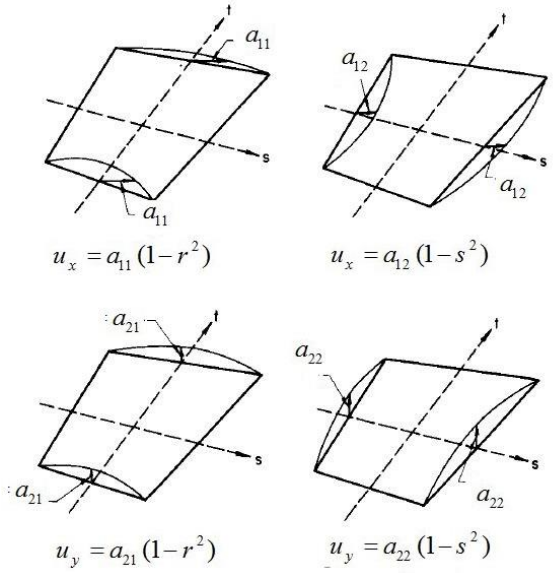


Fig.2 Incompatible displacement mode for quadrilateral element [3]

شکل 2 مدهای جابجایی ناسازگار برای المان مربعی چهار گرهی [3]

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-29]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.2.13.5]

$$a_0 = -K_{aa}^{-1} K_{au} u_0 \quad (14)$$

سپس با جاگذاری رابطه (14) در معادله اول بدست آمده از رابطه (12)، فرم نهایی معادله تعادل به صورت رابطه (15) بدست می‌آید:

$$(K_{uu} - K_{ua}^{-1} K_{aa} K_{au}) u_0 = f \quad (15)$$

در نهایت ماتریس سختی نهایی به صورت رابطه (16) بدست می‌آید:

$$K = K_{uu} - K_{ua}^{-1} K_{aa} K_{au} \quad (16)$$

ماتریس سختی نهایی بدست آمده از رابطه (16) را می‌توان همانند المان استاندارد سرهم‌بندی نمود و شرایط مرزی را اعمال کرده و جابجایی مقادیر گرهی را محاسبه نمود. جابجایی‌های ناسازگار را می‌توان از رابطه (14) محاسبه و در بدست آوردن میدان کرنش استفاده کرد.

2-4- المان‌های هشت گرهی ناسازگار سه بعدی

همانند المان‌های ناسازگار چهار گرهی دوبعدی، برای المان هشت گرهی توابع درون یابی ناسازگار به صورت رابطه (17) ارائه می‌شوند [9]:

$$P_1 = 1 - r^2 , P_2 = 1 - s^2 , P_3 = 1 - t^2 \quad (17)$$

در رابطه (17)، r ، s و t مختصات محلی می‌باشند. سیستم مختصات کلی و محلی نیز با استفاده از توابع درونیابی استاندارد مطابق رابطه (18) به همدیگر مرتبط می‌شوند:

$$u_j = \sum_{i=1}^{8} u_{ij} h_i \qquad j = 1,2,3 \quad (18)$$

در رابطه (18)، u_j مختصات کلی و u_{ij} مختصات محلی گره iام در راستای jام می‌باشد. در نهایت همانند المان ناسازگار دو بعدی، میدان جابجایی به صورت رابطه (19) بدست می‌آید:

$$u_j = \sum_{i=1}^{8} u_{ij} h_i + \sum_{i=1}^{3} a_{ij} P_i \quad , j = 1,2,3 \quad (19)$$

کرنش‌های نرمال و برشی با در نظر گرفتن میدان جابجایی رابطه (19) بصورت رابطه (20) بدست می‌آیند:

$$\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{13}\}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{8} B_i \{u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}\}^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{8} G_i (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})^{\mathrm{T}} \quad (20)$$

در رابطه (20)، B_iها و G_iها ، ماتریس‌های کرنش- جابجایی می‌باشند که به صورت رابطه (21) تعریف می‌شوند:

$$B_i = \begin{bmatrix} h_{i,1} & 0 & 0 \\ 0 & h_{i,2} & 0 \\ 0 & 0 & h_{i,3} \\ h_{i,2} & h_{i,1} & 0 \\ 0 & h_{i,3} & h_{i,2} \\ h_{i,3} & 0 & h_{i,1} \end{bmatrix} \qquad G_i = \begin{bmatrix} P_{i,1} & 0 & 0 \\ 0 & P_{i,2} & 0 \\ 0 & 0 & P_{i,3} \\ P_{i,2} & P_{i,1} & 0 \\ 0 & P_{i,3} & P_{i,2} \\ P_{i,3} & 0 & P_{i,1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

و در نهایت همانند روابط (15) و (16) ماتریس سختی و معادله تعادل با استفاده از اصل کار مجازی بدست می‌آیند.

2-5- فرمولاسیون پلاستیسیته

در این بخش به بررسی مدل پلاستیک و روش حل عددی بکار گرفته شده در این تحقیق پرداخته شده است. برای اعمال شرایط الاستوپلاستیک از مدل مصالح ون-میزز[1] همراه با سخت شوندگی ایزوتروپیک خطی استفاده شده است. از بُعد پدیدارشناسی، سه بخش عمده در مسائل پلاستیسیته مورد مطالعه قرار می‌گیرد،1) وجود ناحیه الاستیک بطوریکه تنش‌های وارده صرفاً منجر به رفتار الاستیک در ماده شده باشند؛ 2) تنش تسلیم پلاستیک و یا شروع جریان پلاستیک‌شدگی و 3) گسترش کرنش پلاستیک و رشد تنش تسلیم که به پدیده سخت‌شدگی[2] معروف می‌باشد.

2-6- روش انتگرالی برای سخت‌شدگی ایزوتروپیک مدل ون-میزز

ابتدا معادلات پایه‌ای برای مدل ون-میزز و قاعده جریان[3] متناسب بصورتی که در ادامه توضیح داده خواهد شد، بدست می‌آید.

مقادیر تنش مطابق قانون الاستیک خطی (قانون هوک) به صورت رابطه (22) محاسبه می‌شود:

$$\sigma = D^{\mathrm{e}} : \varepsilon^{\mathrm{e}} \quad (22)$$

که در رابطه (22)، D^{e} تانسور الاستیک مصالح می‌باشد.

همچنین تابع تسلیم بصورت رابطه (23) در نظر گرفته می‌شود [13]:

$$\varphi_{(\sigma,\sigma_y)} = \sqrt{3J_{2(s)}} - \sigma_y \quad (23)$$

که در رابطه (23)، σ_y و $J_{2(s)}$ به ترتیب تنش تسلیم و نامتغیر دوم تانسور تنش انحرافی می‌باشند. مقدار نامتغیر دوم تانسور تنش انحرافی به صورت رابطه (24) تعریف می‌شود [13]:

$$J_{2(s)} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (24)$$

در رابطه (24)، S_{ij} تانسور تنش انحرافی می‌باشد. در ادامه برای محاسبه میزان گسترش کرنش پلاستیک از قاعده جریان وابسته[4] مطابق رابطه (25) استفاده می‌شود [13]:

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \dot{\gamma} N = \dot{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \quad (25)$$

که $\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$، $\dot{\gamma}$ و N در رابطه (25) به ترتیب نرخ کرنش پلاستیک، ضریب پلاستیک و بردار جریان (پرانتل-رئوس) می‌باشد. بردار جریان با توجه به رابطه (23)، به صورت رابطه (26) محاسبه می‌شود [13]:

$$N = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{S}{||S||} \quad (26)$$

2-7- روش حل ضمنی[5]

اساساً برای حل مسائل غیرخطی دو روش عددی گام به گام صریح[6] و ضمنی وجود دارد. در روش صریح یا باز مقدار پاسخ سیستم در هر گام توسط مقادیر بدست آمده از گام قبلی محاسبه می‌شود. بنابراین جواب تحلیل از یک گام به گام دیگر به صورت مستقیم بدست می‌آید. در حالیکه در روش ضمنی، پاسخ سیستم وابسته به گام قبلی و گام فعلی مجهول می‌باشد. بنابراین مقادیر آزمایشی می‌بایست توسط روش‌های تکراری تصحیح شوند. انتخاب هر یک از روش‌های عددی صرفاً وابسته به بازده و دقت مورد نظر در بازه زمانی دلخواه می‌باشد. در تحلیل مسائل الاستوپلاستیک، روند به‌هنگام کردن حالت[7] و محاسبه مدول تانژانت[8] سازگار مورد نیاز می‌باشد.

2-8- روند به‌هنگام کردن حالت

در مواد الاستوپلاستیک نیاز به بدست آوردن فرمولاسیون انتگرال‌گیری عددی در نمونه‌های زمانی به منظور به‌هنگام کردن تنش‌ها و متغیرهای داخلی

[1] Von-mises

[2] Hardening phenomenon
[3] Flow Rule
[4] Associated flow rule
[5] Implicit
[6] Explicit
[7] The state update procedure
[8] Tangent modulus

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-29]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.2.13.5]

است. برای این منظور در بازه زمانی $[t_n, t_{n+1}]$ برای تنش‌ها و متغیرهای داخلی از رابطه (27) استفاده می‌شود [13]:

$$\sigma_{n+1} = \hat{\sigma}_{(\alpha_n+\varepsilon_{n+1})}$$
$$\alpha_{n+1} = \hat{\alpha}_{(\alpha_n+\varepsilon_{n+1})} \quad (27)$$

در رابطه (27)، α_n نشان دهنده متغیرهای داخلی شامل پارامترهای سخت‌شدگی می‌باشد و اندیس n گام بارگذاری را مشخص می‌کند. تنش بدست آمده ($\hat{\sigma}$) برای بدست آوردن بردار نیروهای داخلی المان مطابق رابطه (28) مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$f_{\mathrm{e}}^{\mathrm{int}} = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{gaussian}}} J_i \; W_i \; B_i^{\mathrm{T}} \; \sigma_{n+1}^{i} \quad (28)$$

که در رابطه (28)، $f_{\mathrm{e}}^{\mathrm{int}}$ ، J_i و W_i به ترتیب بردار نیروی داخلی، دترمینان ماتریس ژاکوبین و توابع وزنی انتگرال‌گیری عددی در گام تکرار iام می‌باشند.

2-9- محاسبه مدول تانژانت سازگار

زمانیکه ناحیه پلاستیک ایجاد می‌شود ماتریس تانژانت سازگار با این ناحیه به منظور محاسبه ماتریس سختی مورد نیاز می‌باشد. ماتریس تانژانت سازگار مطابق رابطه (29) محاسبه می‌شود [13]:

$$D^{\mathrm{ep}} = \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (29)$$

با محاسبه ماتریس تانژانت سازگار و جاگذاری ماتریس الاستوپلاستیک بدست آمده از رابطه (29)، ماتریس سختی بدست آمده در رابطه (5) به صورت رابطه (30) قابل محاسبه می‌باشد:

$$K^{\mathrm{e}} = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{gaussian}}} W_i \; J_i \; B_i^{\mathrm{T}} \; \mathrm{D}^{\mathrm{ep}}{}_i \; B_i \quad (30)$$

که در رابطه (30)، K^{e} ماتریس سختی المان می‌باشد که به صورت انتگرال گیری عددی محاسبه می‌شود.

2-10- الگوریتم پیش‌بینی الاستیک- تصحیح پلاستیک[1] [13]

2-10-1- گام الاستیک آزمایشی[2]

در این گام ابتدا فرض می‌شود که در گام زمانی $[t_n, t_{n+1}]$، ضریب پلاستیک صفر می‌باشد و ماده در ناحیه الاستیک قرار دارد. در این حالت کرنش‌ها و متغیرهای داخلی آزمایشی از رابطه (31) بدست می‌آیند:

$$\varepsilon^{\mathrm{e}\,\mathrm{trial}}_{n+1} = \varepsilon^{\mathrm{e}}_{n} + \Delta\varepsilon$$
$$\alpha^{\mathrm{trial}}_{n+1} = \alpha_n \quad (31)$$

که در رابطه (31)، $\Delta\varepsilon$ نمو کرنش الاستیک می‌باشد. با استفاده از کرنش‌ها و متغیرهای داخلی آزمایشی بدست آمده از رابطه (31) و جاگذاری در رابطه (27) تنش‌های آزمایشی بدست می‌آیند. سپس با بکارگیری رابطه (23) مقدار تابع تسلیم محاسبه می‌شود. اگر تابع تسلیم بدست آمده کوچکتر یا مساوی صفر باشد، فرضیات گام الاستیک صحیح و متغیرهای آزمایشی به متغیرهای واقعی تبدیل می‌شوند (مطابق رابطه 32).

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)^{\mathrm{trial}}_{n+1} \quad (32)$$

2-10-2- گام تصحیح پلاستیک یا الگوریتم نگاشت بازگشتی[3]

چنانچه تابع تسلیم محاسبه شده از رابطه (23) مقداری مثبت باشد در اینصورت فرض الاستیک بودن اشتباه بوده و می‌بایست تنش‌ها تصحیح و نمو پلاستیک محاسبه شود. برای این منظور از روابط (33) استفاده می‌شود:

$$\varepsilon^{\mathrm{e}}_{n+1} = \varepsilon^{\mathrm{e}\,\mathrm{trial}}_{n+1} - \Delta\varepsilon^{\mathrm{p}}_{n+1}$$
$$\alpha_{n+1} = \alpha^{\mathrm{trial}}_{n+1} - \Delta\alpha_{n+1}$$
$$\varphi_{(\sigma_{n+1},\alpha_{n+1})=0} \quad (33)$$

2-11- روش نیوتن رافسون[4]

روش نیوتن-رافسون، روش قدرتمندی برای حل معادلات به صورت عددی است، که براساس ایده‌ی ساده‌ی تقریب خطی می‌باشد. با استفاده از این روش و با داشتن چند ترم اول بسط سری تیلور تابع می‌توان ریشه‌های یک تابع مشتق پذیر حقیقی غیرخطی را تخمین زد. بسته به مسئله‌ی مورد نظر در صورتیکه حدس اولیه به اندازه‌ی کافی نزدیک ریشه‌ی تابع باشد، این روش می‌تواند سریعا به ریشه‌ی واقعی همگرا شود. در یک توضیح کلی این روش بدین صورت عمل می‌کند: ابتدا یک حدس اولیه که به ریشه‌ی واقعی تابع نزدیک باشد انتخاب می‌شود. سپس خط مماس تابع در نقطه مورد نظر تخمین زده می‌شود و محل تقاطع این خط با محور x ها بدست می‌آید. این نقطه تقاطع با محور x تخمین بهتری از ریشه‌ی تابع است و برای بهبود جواب این روند تکرار می‌شود. همانطور که در "شکل 3" نشان داده شده است، x_1 حدس اولیه و x_2 تخمین بهتری از ریشه‌ی تابع می‌باشد.

بسط سری تیلور تابع $f(x)$ به صورت رابطه (34) می‌باشد [15,14]:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^n(x_i)}{n!}h^n \;, : (x_{i+1} - x_i = h) \quad (34)$$

با صرف نظر کردن از ترم‌های مرتبه بالا و با در نظر گرفتن دو جمله‌ی اول، رابطه (35) بدست می‌آید:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (35)$$

برای محاسبه محل تلاقی مماس تابع با محور x رابطه (35) به صورت رابطه (36) در نظر گرفته می‌شود:

$$f(x_{i+1}) = 0 \quad \rightarrow \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (36)$$

با توجه به رابطه (36)، حدس جدید برای ریشه تابع محاسبه می‌شود و با توجه به تکرار پذیری رابطه (36) با ادامه‌ی این روند می‌توان به تقریب ریشه تابع رسید.

مساله اصلی در تحلیل اجزاء محدود یافتن حالت تعادل جسم متناظر با

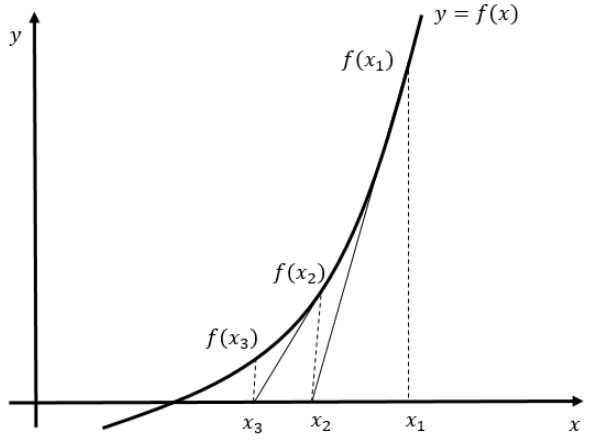


Fig. 3 Newton-Raphson method for obtaining roots of function

شکل 3 روش نیوتن-رافسون برای بدست آوردن ریشه‌های تابع

[1] The elastic predictor/Plastic corrector algorithm
[2] The elastic trial step
[3] The plastic corrector step or return mapping algorithm
[4] The newton-Raphson method

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-29]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.2.13.5]

بارهای وارده که به صورت رابطه (5- الف) بدست آمده است می‌باشد کـه بـه صورت رابطه (37) می‌توان بازنویسی نمود:

$$R - F = 0 \quad (37\text{- الف})$$

$$F = KU \quad (37\text{- ب})$$

در رابطه (37- الف)، F بردار نیروهای نقاط گرهی متناظر با تنش‌هـای داخلی می‌باشد. برای یک مساله شامل غیرخطی هندسی و مصالح وابسته بـه مسیر بارگذاری رابطه 37- الف می‌بایستی در طـول زمـان بارگـذاری برقـرار باشد، در نتیجه با تحلیل نموی نیوتن-رافسون می‌توان در هر گـام بارگـذاری پاسخ مسئله را به شکل بردار جابجایی گرهی (U) بدست آورد. روش اساسـی در یک تحلیل غیرخطی گام به گام نموی، درنظر گرفتن این فرض است کـه جواب در زمان گسسته t معلوم می‌باشد و جواب در زمان گسسـته $t + \Delta t$ مورد نیاز است که Δt نمو زمانی است. در نتیجه رابطه (37- الـف) بصـورت رابطه (38) بدست می‌آید:

$$R^{t+\Delta t} - F^{t+\Delta t} = 0 \quad (38)$$

با فرض اینکه جواب در زمان t معلوم می‌باشد، می‌توان بـردار نیروهـای داخلی در گام بارگذاری $t + \Delta t$ را به صورت رابطه (39) تجزیه کرد:

$$F^{t+\Delta t} = F^t + \Delta F \quad (39)$$

در رابطه (39)، ΔF نمو در نیروهـای نقـاط گرهـی متنـاظر بـا نمـو در تغییرمکان ها و تنش ها از زمان t تا $t + \Delta t$ است. بردار ΔF را می‌توان بـا استفاده از یک ماتریس سختی مماسی در گام باگذاری t مانند رابطه (40) تقریب زد:

$$\Delta F \cong K_T^t \, U \quad (40\text{- الف})$$

$$K_{\mathrm{T}}^t = \frac{\partial F^t}{\partial U^t} \quad (40\text{- ب})$$

در رابطه (40- الف)، K_{T}^t ماتریس سختی مماسی می‌باشد که به صورت رابطه (40- ب) بدست می‌آید. با جاگذاری رابطه (40- الف) در رابطـه (39) فرم نهایی معادله تعادل بصورت رابطه (41) بدست می‌آید:

$$K_{\mathrm{T}}^t = R^{t+\Delta t} - F^t \quad (41)$$

با توجه به اینکه ΔF به صورت تقریبی بدست می‌آید، جواب‌هـای بدسـت آمده می‌توانند دارای خطای قابل توجهی باشند در نتیجـه اسـتفاده کـردن از روش تکراری نیوتن-رافسون موجب بهبود دقت جواب‌های بدست آمده مـی-شود. در رابطه (42) روش تکراری نیوتن-رافسون برای گام‌هـای بارگـذاری و انجام تکرار تا رسیدن به جواب با دقت قابل قبول نشان داده شده است:

$$K_{\mathrm{T}(i-1)}^{t+\Delta t} \cdot \Delta U_{(i)} = R^{t+\Delta t} - F_{(i-1)}^{t+\Delta t}$$
$$U_{(i)}^{t+\Delta t} = U_{(i-1)}^{t+\Delta t} - \Delta U_{(i)} \quad (42)$$

در رابطه (42) اندیس پایین نویس نشان دهنده تعـداد تکـرار و انـدیس بالانویس نشان دهنده گام بارگذاری می‌باشد. در "شکل 4" فلوچارت مربوط به روند برنامه نوشته شده با استفاده از روش اجزاء محدود و الگوریتم نیوتن-رافسون نشان داده شده است.

3-تعریف مسئله

مسئله مورد بررسی یک صفحه مستطیلی از جنس آلیاژ آلومنیوم-منیزیم است که خواص مکانیکی ماده در جدول 1 آورده شده است. این صفحه تحت بارگذاری یکنواخت خطی در راستای محوری و عرضی می‌باشد. برای مدلسازی صفحه مورد مطالعه در دو حالت تنش صفحه‌ای و سه بعدی از المان‌های استاندارد مرتبه پایین، مرتبه بالا و همچنین المان‌های ناسازگار استفاده شده است.

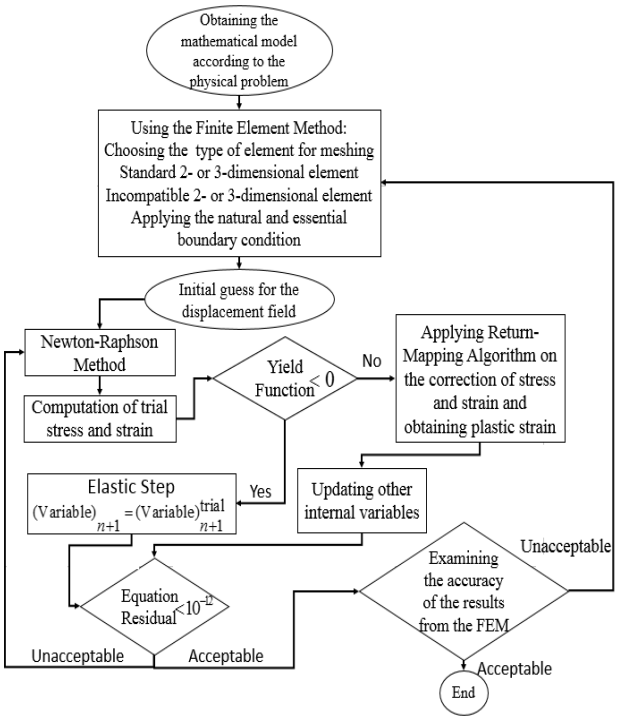


Fig. 4 Flowchart of numerical procedure

شکل 4 روند فرآیند عددی

جدول 1 خواص مکانیکی آلیاژ آلومینیوم- منیزیم

Table 1 Mechanical properties of AZ91

خصوصیات آلیاژ آلومینیوم منیزیم AZ91	مقادیر
E	45(GPa)
ϑ	0.33
μ	17(GPa)
σ_y	160(MPa)

برای مدلسازی مسئله مذکور در حالت سه بعدی از تیر بـا آلیـاژ آلومینیـوم-منیزیم به ابعاد 600 mm × 120 mm و ضـخامت 60 mm و همچنـین برای حالت دو بعدی از صفحه به ابعاد 120 mm × 120 mm میلی‌متر که در" شکل5 " نشان داده شده اند، استفاده شده است. شرایط مرزی هندسـی دو نمونه به صورت یکسر گیردار می‌باشد.

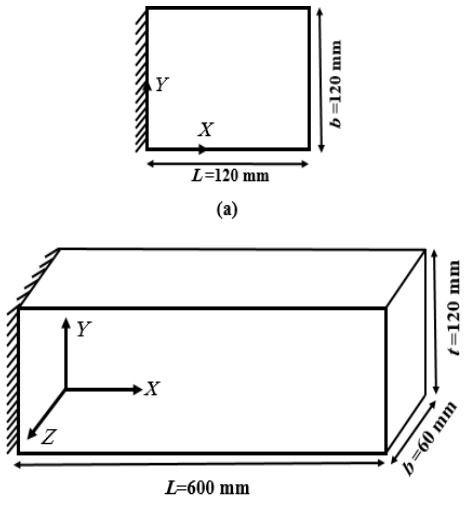


Fig. 5 a) 2D plate dimension b) 3D beam dimension

شکل 5 ابعاد سازه‌ها الف) ابعاد صفحه دوبعدی ب) ابعاد تیر سه بعدی

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-29]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.2.13.5]

4-نتایج و بحث

در این بخش نتایج بدست آمده از المان‌های استاندارد مرتبه پایین، مرتبه بالا و ناسازگار 2 و 3 بعدی تحت دو نوع بارگذاری یکنواخت به صورت بارگذاری محوری کششی و خمشی عرضی با تکیه‌گاه یکسر گیردار مطابق "شکل 5" مقایسه و بررسی شده است. نوع و مشخصه المان‌های مورد استفاده در مش بندی صفحات و تیرهای مورد مطالعه در جدول 2 آورده شده است.

ابتدا به منظور صحت سنجی نتایج بدست آمده از المان‌های استاندارد و ناسازگار در کد توسعه داده شده، نتایج بدست آمده برای جابجایی سر آزاد تیر یکسرگیردار تحت بار گسترده جانبی به شدت $100\ MN/m^2$ در حالت الاستیک، با نتایج تحلیلی مقایسه و صحت سنجی شده است. برای این منظور مطابق "شکل 6" جابجایی عرضی بی بعد شده نسبت به ضخامت تیر با ابعاد $600\ mm \times 12\ mm \times 6\ mm$ برحسب درجات آزادی برای المان‌های سه بعدی ترسیم شده است.

همانطورکه مشاهده می‌شود منحنی همگرایی برای المان‌های C20 و C11 به مراتب سریع‌تر از المان C8 بوده و مقدار خطای دو المان مذکور نسبت به نتایج تحلیلی کمتر از المان C8 است.

در "شکل 7" جابجایی بی بعد شده در راستای بارگذاری تحت نیروی گسترده 200 MN/m نسبت به طول صفحه بر حسب تعداد درجات آزادی برای المان‌های استاندارد مربعی Q4 و Q8 و المان ناسازگار Q6 نشان داده شده است. مطابق " شکل 7 " با مقایسه نرخ همگرایی جواب‌ها برای المان‌های مذکور در بارگذاری کششی یکنواخت می‌توان مشاهده کرد که برای هر سه المان نرخ همگرایی تقریبا در تعداد درجه آزادی یکسان اتفاق می‌افتد (در حدود 2000 درجه آزادی جابجایی‌های بدست آمده از سه المان همگرا شده است). با این تفاوت که منحنی همگرایی المان چهار گرهی

جدول 2 مشخصه المان‌ها

Table 2 Element attributes

نوع المان	مشخصه تعریف
المان مربعی 4 گرهی استاندارد	Q4
المان مربعی 8 گرهی استاندارد	Q8
المان مربعی 4 گرهی ناسازگار	Q6
المان آجری 8 گرهی استاندارد	C8
المان آجری 20 گرهی استاندارد	C20
المان آجری 8 گرهی ناسازگار	C11

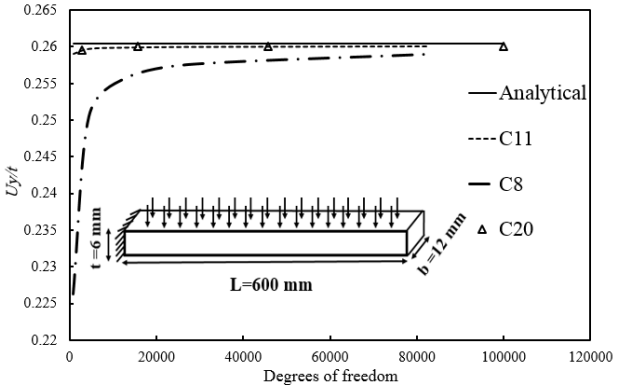


Fig. 6 Dimensionless lateral displacement of beam due to degrees of freedom for C8, C11 and C20 elements

شکل 6 نمودار جابجایی عرضی بی بعد شده بر حسب تعداد درجات آزادی برای المان‌های C8، C11 و C20

استاندارد بدلیل تخمین سختی بیشتر در مقایسه با دو المان دیگر در تعداد درجه آزادی کمتر، زیر منحنی‌های المان‌های Q8 و Q6 قرار گرفته است.

در "شکل 8" منحنی رفتار پلاستیک تنش ون-میزز در لبه بالایی در راستای طول صفحه برای المان‌های استاندارد مربعی Q4 و Q8 و المان ناسازگار Q6 ترسیم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود برای المان استاندارد Q8 با تعداد المان 40×40 بیشتر از دو المان دیگر محاسبه شده است. همچنین برای المان ناسازگار مقدار تنش ون-میزز نزدیک تکیه‌گاه کمتر از سایر المان‌ها تخمین زده شده است و با دور شدن از تیکه‌گاه نتایج حاصل از سه المان با همدیگر همخوانی خوبی دارند. همچنین با توجه به " شکل 9 " کرنش معادل پلاستیک بدست آمده از سه المان رفتاری مشابه با رفتار تنش ون-میزز دارد. با مقایسه نمودارهای جابجایی، تنش و کرنش می‌توان نتیجه گرفت که همگرایی جابجایی‌ها با استفاده از المان ناسازگار مطلوب می‌باشد در حالیکه برای تخمین تنش‌ها و کرنش‌ها با استفاده المان ناسازگار تفاوتی در دقت جواب‌ها مشاهده نمی‌شود. در "شکل 10" منحنی‌های همگرایی بیشینه جابجایی سر آزاد صفحه دو بعدی تحت بارگذاری خمشی یکنواخت به شدت 100 MN/m نشان داده شد است. مطابق "شکل 8" نرخ همگرایی المان استاندارد Q8 و المانQ6 نسبت به المان Q4 سریع‌تر می‌باشد. همچنین در "شکل 11" و"شکل 12" منحنی‌های رفتار تنش پلاستیک ون-میزز و کرنش پلاستیک معادل برای سه المان مذکور در شرایط بارگذاری خمشی یکنواخت نشان داده شده است. همانند حالت بارگذاری کششی یکنواخت، المان ناسازگار Q6 در نزدیکی

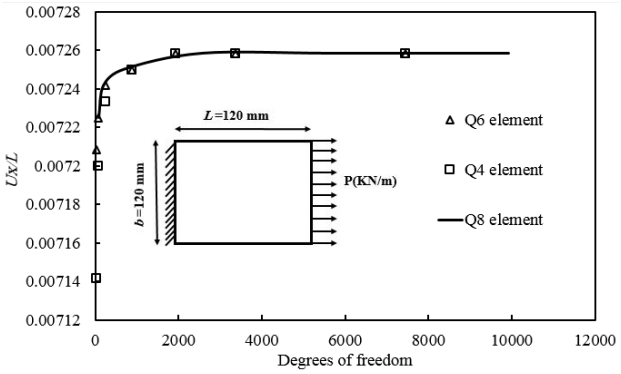


Fig.7 Dimensionless inplane displacement in loading direction due to degrees of freedom for Q4, Q6 and Q8 elements

شکل 7 نمودار جابجایی بی‌بعد شده در راستای بارگذاری نسبت به طول صفحه بر حسب تعداد درجات آزادی برای المان‌های Q4، Q6 و Q8

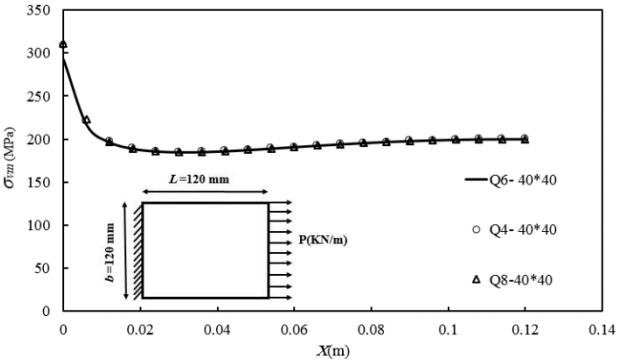


Fig. 8 Von-Mises stress through the plate length for Q4, Q6 and Q8 elements at y= 120mm and $0 < x < 120$ mm

شکل 8 تغییرات تنش ون-میزز در راستای طول صفحه برای المان‌های Q4، Q6 و Q8 در y= 120mm و $0 < x < 120$ mm

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-29]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.2.13.5]

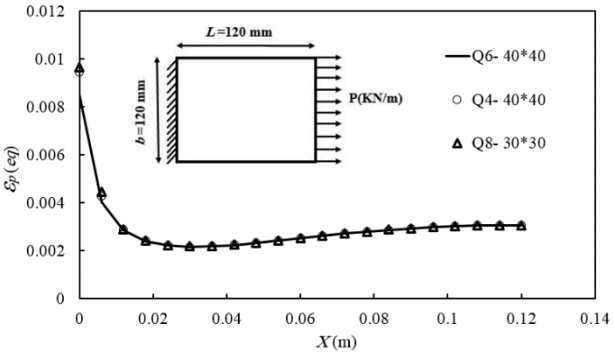


Fig. 9 Equivalent plastic strain through the plate length for Q4, Q6 and Q8 elements at y= 120mm and $0 < x < 120$ mm

شکل 9 نمودار کرنش معادل پلاستیک در راستای طول صفحه برای المان‌های Q4، Q6 و Q8 در مختصات y=120mm و $0 < x < 120$ mm

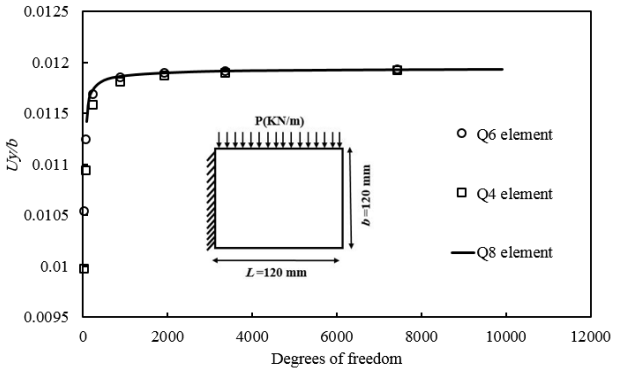


Fig.10 Dimensionless displacement in loading direction due to degrees of freedom for Q4, Q6 and Q8 elements

شکل 10 نمودار جابجایی بی‌بعد شده در راستای جابجایی بر حسب تعداد درجات آزادی برای المان‌های Q4، Q6 و Q8

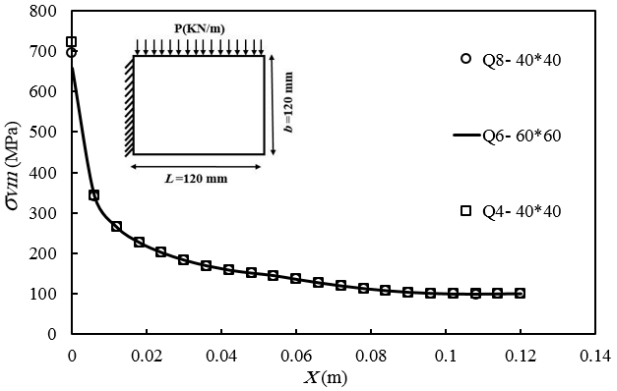


Fig. 11 Von-Mises stress through the plate length for Q4, Q6 and Q8 elements at y=120mm and $0 < x < 120$ mm

شکل 11 نمودار تنش ون-میزز در رستای طول صفحه برای المان‌های Q4، Q6 و Q8 در y= 120mm و $0 < x < 120$ mm

تکیه‌گاه نسبت به المان‌های Q4 و Q8 مقدار تنش ون-میزز و کرنش پلاستیک معادل را کمتر تخمین زده است که با دور شدن از تیکه‌گاه نتایج حاصل از سه المان همخوانی خوبی با همدیگر دارند.

در "شکل 13" منحنی همگرایی الاستوپلاستیک جابجایی سر آزاد تیر یکسرگیردار تحت بارگذاری یکنواخت محوری به شدت 300 MPa برای المان‌های سه‌بعدی استاندارد و ناسازگار نشان داده شده است. می‌توان مشاهده کرد که نرخ همگرایی منحنی تغییرمکان برای المان‌های C20 و

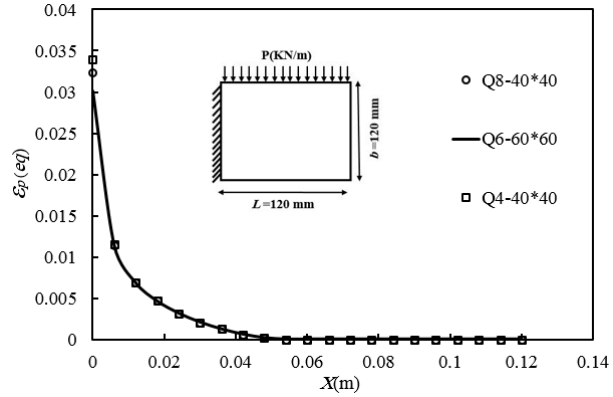


Fig. 12 Equivalent plastic strain through the plate length for Q4, Q6 and Q8 elements at y=120mm and $0 < x < 120$ mm

شکل 12 نمودار کرنش معادل پلاستیک در راستای طول صفحه برای المان‌های Q4، Q6 و Q8 در y=120mm و $0 < x < 120$ mm

C11 در مقایسه با المان C8 سریع‌تر و در تعداد درجه آزادی کمتری حاصل شده است. همچنین در "شکل 14" تغییرمکان سر آزاد تیر تحت بارگذاری خمشی یکنواخت به شدت 4 MPa ترسیم شده است. همانطورکه در این شکل نیز نشان داده شده است، همانند بارگذاری کششی محوری، نرخ همگرایی تغییرمکان عرضی تیر تحت بارگذاری خمشی با استفاده از

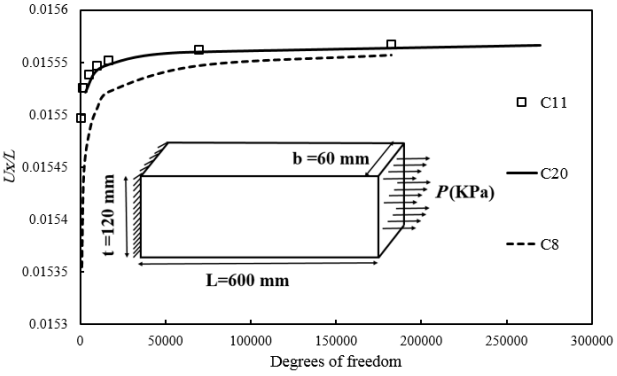


Fig. 13 Dimensionless in-plane displacement at the beam tip due to degrees of freedom for C8, C11 and C20 elements

شکل 13 نمودار جابجایی بی‌بعد شده سر آزاد تیر در راستای محور تیر بر حسب تعداد درجات آزادی برای المان‌های C8، C11 و C20

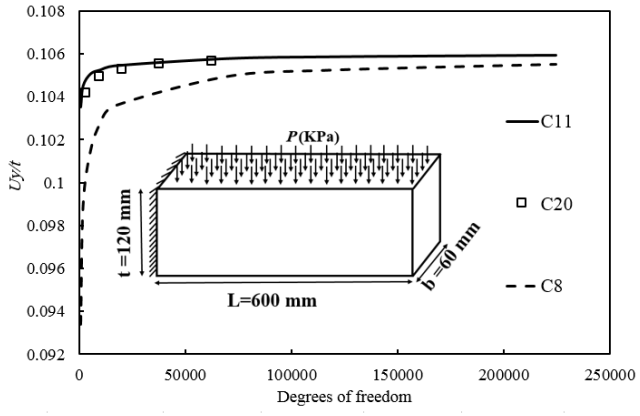


Fig. 14 Dimensionless lateral displacement in Y direction due to degrees of freedom for C8, C11 and C20 elements

شکل 14 نمودار جابجایی عرضی بی‌بعد شده سر آزاد تیر در راستای Y بر حسب تعداد درجات آزادی برای المان‌های C8، C11 و C20

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-29]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.2.13.5]

المان‌های C20 و C11 سریع‌تر از المان C8 می‌باشد. با مقایسه نتایج بدست آمده برای تغییرمکان‌های مدل‌های دو و سه بعدی، می‌توان مشاهده کرد که روند همگرایی برای المان‌های دوبعدی در حالت‌های بارگذاری کششی و خمشی یکنواخت برای المان‌های Q6 و Q8 سریع‌تر از المان Q4 می‌باشد. لازم به توضیح است که برای المان‌های سه‌بعدی نیز منحنی‌های همگرایی تغییرمکان برای المان‌های C20 و C11 نسبت به المان C8 سریع‌تر اتفاق افتاده است.

در جدول 3 مقایسه زمان محاسباتی برای تیر یکسرگیردار تحت بارگذاری خمشی با استفاده از المان‌های سه‌بعدی استاندارد و ناسازگار بر حسب تعداد المان و درجات آزادی نشان داده شده است. با توجه به جدول 3 می‌توان مشاهده کرد که اختلاف جواب‌های بدست آمده نسبت به المان بیست گرهی استاندارد با 62679 درجه آزادی برای المان‌های ناسازگار کمتر

جدول 3 مقایسه زمان محاسباتی برای المان‌های سه‌بعدی مختلف

Table 3 Comparison of the run times using different elements

نوع و تعداد المان	تعداد درجات آزادی	زمان محاسباتی (sec)	جابجایی (mm)	اختلاف جواب با المانC20 60 × 12 × 6
C8 30 × 6 × 3	2058	t	11.87	%6.38
C11 30 × 6 × 3	2058	t	12.542	%1.083
C20 30 × 6 × 3	9309	4 t	12.591	%0.7018
C8 60 × 12 × 6	16653	6.4 t	12.427	%1.995
C11 60 × 12 × 6	16653	6.8 t	12.655	%0.1971
C20 60 × 12 × 6	62679	41 t	12.68	-

جدول 4 مقایسه تنش پلاستیک ون-میزز و کرنش پلاستیک معادل در نقاط مختلف تیر برای المان‌های C8، C11 و C20 با تعداد المان 4 × 8 × 40

Table 4 Comparison of Von-Mises plastic stress and equivalent plastic strain in various coordinate of beam for C8, C11 and C20 elements with 40 × 8 × 4 elements

مختصات	نوع المان	درجه آزادی	σ_{vm}(MPa)	ε_{eq}
$X_1 = 0.01$	C8	5535	267.70	0.0077730
$X_1 = 0.01$	C11	5535	292.50	0.0090928
$X_1 = 0.01$	C20	20283	259.44	0.0065867
$X_2 = 0.03$	C8	5535	275.72	0.0075629
$X_2 = 0.03$	C11	5535	260.61	0.0066566
$X_2 = 0.03$	C20	20283	255.94	0.0063783
$X_3 = 0.3$	C8	5535	299.99	0.0089795
$X_3 = 0.3$	C11	5535	299.99	0.0089795
$X_3 = 0.3$	C20	20283	299.99	0.0089795

جدول 5 مقایسه تنش پلاستیک ون-میزز و کرنش پلاستیک معادل در نقاط مختلف تیر برای المان‌های C8، C11 و C20 با تعداد المان 5 × 10 × 50

Table 5 Comparison the Von-Mises plastic stress and equivalent plastic strain in various coordinate of beam for C8, C11 and C20 elements with 50 × 10 × 5 elements

مختصات	نوع المان	درجه آزادی	σ_{vm}(MPa)	ε_{eq}
$X_1 = 0.01$	C8	10098	281.20	0.0086357
$X_1 = 0.01$	C11	10098	319.75	0.010740
$X_1 = 0.01$	C20	37593	308.09	0.010920
$X_2 = 0.03$	C8	10098	273.89	0.0074549
$X_2 = 0.03$	C11	10098	262.59	0.0067754
$X_2 = 0.03$	C20	37593	259.44	0.0065866
$X_3 = 0.3$	C8	10098	299.99	0.0089795
$X_3 = 0.3$	C11	10098	299.99	0.0089795
$X_3 = 0.3$	C20	37593	299.99	0.0089795

جدول 6 مقایسه تنش پلاستیک ون-میزز و کرنش پلاستیک معادل در نقاط مختلف تیر برای المان‌های C8، C11 و C20 با تعداد المان 10 × 20 × 100

Table 6 Comparison the Von-Mises plastic stress and equivalent plastic strain in various coordinate of beam for C8, C11 and C20 elements with 100 × 20 × 10 elements

مختصات	نوع المان	درجه آزادی	σ_{vm}(MPa)	ε_{eq}
$X_1 = 0.01$	C8	69993	305.00	0.0098412
$X_1 = 0.01$	C11	69993	311.53	0.010015
$X_1 = 0.01$	C20	269583	303.42	0.00919
$X_2 = 0.03$	C8	69993	263.28	0.0068129
$X_2 = 0.03$	C11	69993	260.36	0.0066386
$X_2 = 0.03$	C20	269583	258.60	0.0065366
$X_3 = 0.3$	C8	69993	299.99	0.089795
$X_3 = 0.3$	C11	69993	299.99	0.089795
$X_3 = 0.3$	C20	269583	299.99	0.089795

از المان‌های استاندار هشت گرهی می‌باشد. همچنین زمان محاسباتی المان‌های ناسازگار در مقایسه با المان‌های بیست گرهی بسیار پایین‌تر می‌باشد.

در جدول 4 مقادیر تنش پلاستیک ون-میزز و کرنش پلاستیک معادل برای صفحه تحت بارگذاری محوری کششی با استفاده از المان‌های سه‌بعدی برای نقاط مختلف صفحه با تعداد درجات آزادی متفاوت آورده شده است. نقاط X_1 و X_2 نزدیک تکیه‌گاه و نقطه X_3 وسط صفحه با مختصات $Y = 0.12$ و $Z = 0$ یکسان انتخاب شده‌اند. با مقایسه نتایج بدست آمده در نقاط مختلف، برای هر سه المان رفتار یکسانی مشاهده می‌شود، بطوریکه در نزدیکی تکیه‌گاه بدلیل وجود اثرات تکیه‌گاهی مقادیر تنش و کرنش محاسبه شده از هر سه المان متفاوت می‌باشد. در حالیکه با دور شدن از تکیه‌گاه این مقادیر همگرا شده و نتایج المان‌ها بر هم منطبق می‌شود. با بررسی نتایج المان‌های استاندارد و ناسازگار در نزدیکی تیکه‌گاه می‌توان مشاهده کرد که در تعداد درجات آزادی کم، رفتار غیریکنواخت برای تنش و کرنش مشاهده می‌شود ولی با افزایش درجات آزادی رفتار تنش‌ها و کرنش‌ها یکنواخت می‌گردد.

"شکل 15" رفتار همگرایی تنش ون-میزز با بکارگیری المان‌های سازگار و ناسازگار با تعداد 4×8×40 المان را نشان می‌دهد. با مقایسه نتایج سه المان می‌توان مشاهده کرد که در نزدیکی تکیه‌گاه، گردایان تنش برای المان‌های C8 و C20 در مقایسه با المان C11 یکنواخت و ملایم‌تر می‌باشد. همچنین با افزایش تعداد المان‌ها در نزدیکی تکیه‌گاه به منظور مشاهده اثرات تکیه‌گاهی وگرادیان‌های تنش و کرنش مطابق "شکل 16" می‌توان اذعان

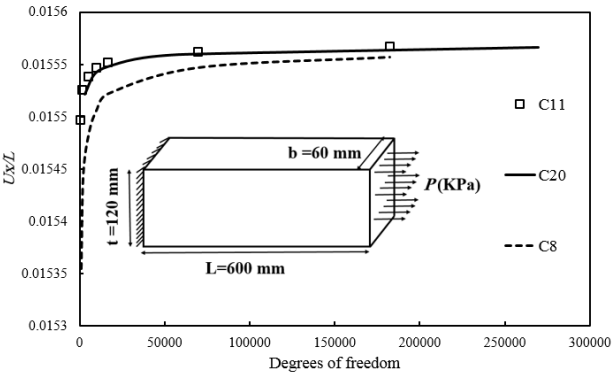


Fig. 15 Von-Mises stress behavior for C8, C11 and C20 elements with various Degrees of freedom

شکل 15 رفتار تنش ون-میزز برای المان‌های C8، C11 و C20 با تعداد درجات آزادی مختلف

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-29]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.2.13.5]

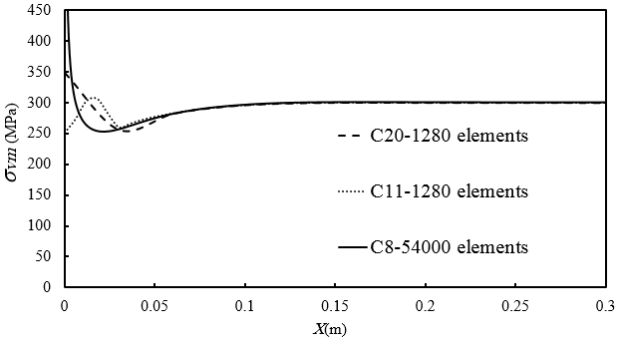


Fig. 16 Von-Mises stress behavior for C8, C11 and C20 elements with various elements

شکل 16 رفتار تنش ون-میزز برای المان‌های C8، C11 و C20 با تعداد المان‌های مختلف

داشت که المان C20 در 1280 المان رفتار نزدیک به رفتار المان C8 با 54000 المان دارد در حالیکه المان C11 رفتار کاملاً متفاوتی در نزدیکی تکیه‌گاه را دارد.

5-جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله تاثیر المان‌های سازگار و ناسازگار دو و سه بعدی بر روی رفتار الاستیک و پلاستیک تیرها و صفحات ایزوتروپیک تحت بارگذاری کششی و خمشی یکنواخت مطالعه شده است. معادلات تعادل حاکم بر مساله با در نظر گرفتن مدل پلاستیسیته ون-میزز و استفاده از روش گام به گام تکراری نیوتن-رافسون و الگوریتم تصحیح نگاشت بازگشتی با در نظر گرفتن شرایط مرزی یکسر گیردار حل شده و در نهایت تغییرمکان‌ها، کرنش‌ها و تنش‌ها محاسبه شده‌اند. به منظور بررسی دقت و صحت نتایج بدست آمده از المان‌های سازگار و ناسازگار، رفتار همگرایی تغییرمکان تیر یکسرگیردار تحت بارگذاری خمشی یکنواخت در محدوده الاستیک با جواب تحلیلی مقایسه و صحت سنجی شده است. نتایج بدست آمده از این مطالعه برای المان‌های دو و سه بعدی سازگار و ناسازگار را می‌توان به شرح زیر بیان نمود:

1- برای صفحه مربعی مدلسازی شده، منحنی همگرایی تغییرمکان سر آزاد صفحه تحت بارگذاری کششی و خمشی یکنواخت برای المان‌های سازگار چهار و هشت گرهی و المان ناسازگار شش گرهی مشابه و در تعداد درجات آزادی یکسانی همگرا می‌شوند. همچنین رفتار مشابهی برای تنش پلاستیک ون-میزز و کرنش پلاستیک معادل در المان‌های دو بعدی مشاهده می‌شود.

2- برای مدل سه بعدی، همگرایی تغییرمکان‌ها برای المان‌های استاندارد بیست گرهی و ناسازگار یازده گرهی سریع‌تر و در تعداد درجه آزادی کمتر نسبت به المان‌های هشت گرهی اتفاق می‌افتد.

3- رفتار تنش پلاستیک ون-میزز و کرنش پلاستیک معادل در مسئله مدلسازی شده با استفاده از المان‌های سه بعدی، برخلاف المان‌های دو بعدی رفتار غیریکنواخت و نوسانی دارد. در نقاطی که اثرات تکیه‌گاهی و گرادیان‌های شدید تنش و کرنش وجود دارد، تفاوت میان نتایج سه المان در تعداد درجات آزادی کم به صورت محسوس مشاهده می‌شود.

4- رفتار همگرایی تغییر مکان‌ها برای المان ناسازگار سه بعدی در مقایسه با المان ناسازگار دو بعدی محسوس‌تر و دارای تفاوت‌های بارزتری می‌باشد، در حالیکه در مسائل با هندسه پیچیده و دارای گرادیان‌های تنش و کرنش شدید استفاده از المان‌های ناسازگار می‌بایستی با احتیاط بیشتری انجام گیرد.

5- برای المان استاندارد بیست گرهی، توصیف گرادیان‌های تنش و کرنش در مقایسه با دو المان دیگر دقیق‌تر و بهتر می‌باشد.

6- مطابق نتایج بدست آمده برحسب زمان محاسباتی المان‌های استاندارد و ناسازگار سه‌بعدی، می‌توان مشاهده کرد که زمان محاسباتی المان‌های C8 و C11 تقریبا یکسان می‌باشند، در حالیکه زمان محاسباتی برای المان C20 بیشتر از دو المان مذکور می‌باشد. این در حالیست که از نقطه نظر محاسبه تغییرمکان‌ها پاسخ بدست آمده از المان‌های ناسازگار C11 به پاسخ المان‌های C20 نزدیک‌تر می‌باشد.

6-مراجع

[1] I. C. Taig, *Structural analysis by the matrix displacement method*, United kingdom: English Electric Aviation Limited, 1962

[2] B. M. Irons, *Numerical integration applied to finite element methods*, Swansea: Department of Civil Engineering, University College of Swansea, 1971.

[3] E. Wilson, R.L. Taylor, W. P .Doherty, J. Ghaboussi, *Incompatible displacement models*, Undited kingdom: Academid press Inc , 1973.

[4] G. P. Bazeley, Yo. K. Cheung, Bo. M. Irons, O. C. Zienkiewicz, Triangular elements in plate bending conforming and nonconforming solutions, *Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Ohio: Wright Patterson Air Force Base, pp. 547-576, 1965.

[5] C. K. Choi, and S.H. Kim, Coupled use of reduced integration and non-conforming modes in quadratic Mindlin plate element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, No. 8, pp. 1909-1928, 1989.

[6] E. L. Wilson, and A. Ibrahimbegovic, Use of incompatible displacement modes for the calculation of element stiffnesses or stresses, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 7, No. 3, pp. 229-241, 1990.

[7] R. Cerioni, R. Brighenti, and G. Donida, Use of incompatible displacement modes in a finite element model to analyze the dynamic behavior of unreinforced masonry panels, *Computers & structures*, Vol. 57, No. 1, pp. 47-57, 1995.

[8] S. B. Ju, H. C. Sin, New incompatible four-noded axisymmetric elements with assumed strains, *Computers & Structures*,Vol. 60, No. 2, pp. 269-278, 1996

[9] H. H. Taiebat, J. Carter, Three-Dimensional Non-Conforming Elements, *Centre for Geotechnical Research, The University* of Sydney, Sydney, Australia, Report, 2001.

[10] B. Hassani, S.M. Tavakkoli, Derivation of incompatible modes in nonconforming finite elements using hierarchical shape functions, *Asian Journal of Civil Engineering (Build and Housing)*, Vol. 6, No. 3, pp. 153-16, 2005.

[11] T. Sussman, K. J. Bathe, Spurious modes in geometrically nonlinear small displacement finite elements with incompatible modes, *Computers & Structures*,Vol. 140, pp. 14-22, 2014.

[12] D. L. Logan, *A finite course in the finite element* method, Fourth Edittion, pp. 755-758, Canada: Thomson, 2007.

[13] K. J. Bathe, M. Kojic, *Inelastic analysis of solids and structures*, pp. 141-146, Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2005. (Translated by K. Abedi), Sahand University of Technology Publication Center; 2007. (in Persian فارسی)

[14] T. Dence, M. Kojic, Cubics, Chaos and Newton's method, *Mathematical Gazette*, Vol. 81, No. 492, pp. 403-408, 1997.

[15] A. Burton, Newton's method and fractals. *Citeseer*, 2009.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-29]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.2.13.5]