مجله مهندسی مکانیک مدرس، مرداد 1396، دوره 17، شماره 5، ص‌ص 374-384

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل دینامیک غیرخطی میکروتیر تحت تحریک پارامتریک زیرهارمونیک

امیر راحلی[1]، صابر عزیزی[2*]، شیرکو فاروقی[3]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه
2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه
3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه
* ارومیه، صندوق پستی 57155419، s.azizi@mee.uut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 04 بهمن 1395
پذیرش: 12 اسفند1395
ارائه در سایت: 24 اردیبهشت 1396

کلید واژگان:
سیستم‌های میکروالکترومکانیکی
معادله متیو غیرخطی دمپ شده
روش پرتابه‌ای
میکروتیر دوسرگیردار
تشدید زیرهارمونیک

چکیده

در این مقاله به بررسی ناپایداری دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی یک میکروتیر دوسرگیردار ساندویچ شده با لایه‌های پیزوالکتریک تحت تحریک پارامتریک در ناحیه زیرهارمونیک پرداخته شده است. معادلات حرکت با استفاده از روش انرژی و اصل همیلتونین استخراج شده، سپس با استفاده از پارامترهای بی‌بعدسازی مناسب، جهت مقایسه بزرگی بین ترم‌های معادله، در فرم بی‌بعد نوشته شده است. اعمال ولتاژ هارمونیک به لایه‌های پیزوالکتریک باعث ایجاد ضریب سختی خطی و متغیر با زمان در میکروتیر می‌شود. معادله بی‌بعد بدست آمده با استفاده از روش گلرکین گسسته سازی شده و در نهایت با ساده‌سازی و ایجاد تغییر متغیر مناسب در فرم معادله متیو غیرخطی دمپ شده نوشته شده است. شرایط اولیه‌ای که منجر به حل پریودیک (حرکت پریودیک) می‌شوند، با استفاده از روش پرتابه‌ای محاسبه شده است. وجود شرایط تکیه‌گاهی دوسرگیردار باعث غیرخطینگی در هندسه و در نتیجه معادلات حاکم بر حرکت می‌شود. تاثیر پارامترهای مختلف نظیر میزان سختی غیرخطی، ضریب دمپینگ، فرکانس و دامنه تحریک هارمونیک بر روی صفحه ناپایداری معادله متیو بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش ضریب دمپینگ مساحت ناحیه رزونانسی کاهش پیدا می‌کند. همچنین مشاهده شد که افزایش ضریب غیرخطینگی بر روی مساحت ناحیه رزونانسی تاثیرگذار نیست و تاثیر آن در دامنه پاسخ زمانی سیستم مشاهده شد. نتایج نشان می‌دهند که افزایش غیرخطینگی موجب کاهش دامنه پاسخ زمانی می‌شود.

Dynamic analysis of a micro beam based on sub-harmonic parametric excitation

Amir Raheli, Saber Azizi*, Shirko Faroughi

Department of Mechanical Engineering, Urmia University of Technology, Urmia, Iran
* P.O.B. 57155419, Urmia, Iran, s.azizi@mee.uut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 23 January 2016
Accepted 02 June 2016
Available Online 14 May 2017

Keywords:
Micro Electro Mechanical Systems
Nonlinear damped Mathieu equations
Shooting method
Clamped-clamped microbeam
Subharmonic resonance

ABSTRACT

In this research dynamic instability and nonlinear vibration of a clamped-clamped micro-beam sandwiched with piezoelectric layers based on parametric excitation in sub-harmonic region is investigated. The equation of motion is derived based on Hamiltonian principle, and non-dimensionalized using appropriate non-dimensional parameters. Applying a harmonic AC voltage to the piezoelectric layers results in the time varying of the linear stiffness of the micro-beam. The resultant motion equation in non-dimensional form is discretized to single degree of freedom model using Galerkin technique. The governing equation is a nonlinear Mathieu type ODE, and the periodic attractors are captured based on the shooting technique. The nonlinearity of governing equation is due to the geometric nonlinearity which originates from the clamped-clamped boundary conditions. The effect of various parameters including magnitude of the nonlinear stiffness, damping coefficient, the frequency and the amplitude of the harmonic excitation on the parametric resonance region is investigated. The results depict that increased damping coefficient leads to the decreased aria of the parametric resonance region. It is concluded that the magnitude of the nonlinear stiffness, does not affect on the area of the resonance region, however it considerably influences on the amplitude of the parametric resonance.

1- مقدمه

ساده‌ترین راه برای تعریف سیستم‌های میکروالکترومکانیکی[1] رجوع کردن به سرنام‌های خود کلمه‌ی MEMS می‌باشد. کلمه‌ی "میکرو" به این واقعیت اشاره دارد که آن‌ها تجهیزاتی در مقیاس "میکرو[2]" هستند، بدین معنی که یک یا چند بعد از آن‌ها در رنج میکرومتر می‌باشند. بخش "الکترو[3]" مبین این است که آن‌ها از انرژی الکتریکی جهت تحریک، شناسایی، الکترونیک، تقویت و فیلتر کردن سیگنال‌ها و یا برای اهداف کنترلی و... استفاده می‌کنند. ترم "مکانیکی[4]" مبین این است که این تجهیزات تحت تاثیر برخی انواع حرکات مکانیکی، عکس‌العمل‌ها و مکانیسم‌های مکانیکی هستند. کلمه‌ی "سیستم[5]" به این واقعیت اشاره دارد که آن‌ها به‌عنوان یک سیستم مجتمع طراحی و ساخته می‌شوند، نه به‌عنوان یک عنصر تنها و مجزا. سیستم‌های

[1] Micro Electro Mechanical Systems(سیستم‌های میکروالکترومکانیکی)
[2] micro
[3] Electro
[4] Mechanical
[5] System

Please cite this article using: برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. Raheli, S. Azizi, Sh. Faroughi, Dynamic analysis of a micro beam based on sub-harmonic parametric excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 374-384, 2017 (in Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.5.11.9]

میکروالکترومکانیکی اجتماعی از المان‌های مکانیکی، سنسورها، تحریک کننده‌ها[1] و الکترونیک‌ها روی لایه‌ی متداولی از سیلکون هستند که با استفاده از تکنیک ساخت میکرو[2] ساخته می‌شوند [1].

سیستم‌های میکروالکترومکانیکی چند ویژگی مهم دارند، ویژگی اول این است که اکثر سیستم‌های میکروالکترومکانیکی اساسا سنسور یا محرک هستند[1]. ویژگی مهم دوم این است که سیلیکون به‌عنوان ماده اصلی این تجهیزات است. اخیرا مواد دیگری همچون پلیمرهای رسانا در حال گسترش برای استفاده در ساخت سیستم‌های میکروالکترومکانیکی هستند [3,2]. سیلیکون یک ماده ارجح به دلیل خواص مکانیکی و دمایی بسیار عالی، همچون انبساط دمایی کوچک، نقطه ذوب بالا، سختی بالا، تردی بالا، بدون رفتار پلاستیک و هیسترزیس می‌باشد. به‌جز سیلیکون برخی از مواد دیگر در ایجاد سازه‌ی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی کمک می‌کنند، که از آن جمله می‌توان به سیلیکون اکسید[3]، سیلیکون نیترید[4]، پلی سیلیکون[5]، گالیوم آرسنیک[6]، آلومینیوم، و طلا اشاره کرد [4]. سیستم‌های میکروالکترومکانیکی امروزه با هزینه کم و به‌صورت انبوه با استفاده از تکنولوژی پیشرفته و زیرساخت‌های صنعت نیمه‌هادی تولید می‌شوند. وزن کم، اندازه کوچک، مصرف انرژی کم و قابلیت دوام بالا آن‌ها را بسیار مقبول و محبوب کرده است [5].

سیستم‌های میکروالکترومکانیکی از لحاظ ساختاری به دو نوع پیوسته[7] و گسسته[8] قابل تفکیک هستند. برای مثال ژیروسکوپ‌های جرم متمرکز از نوع سیستم‌های گسسته می‌باشند و میکروتیرهای مرتعش یک‌سرگیردار و دوسرگیردار از جمله سیستم‌های پیوسته می‌باشند. استفاده از میکروتیرهای دوسرگیردار به چند دلیل نسبت به میکروتیرهای یک‌سرگیردار ارجحیت دارند. ساخت میکروتیرهای دوسرگیردار با استفاده از روش‌های میکرو ماشین‌کاری حجمی و سطحی، آسان است. آن‌ها در مقایسه با دیگر میکرو ساختارها، فرکانس‌های طبیعی نسبتا بالایی دارند. این پدیده در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی به دلیل افزایش حساسیت و محدوده عملکرد در طیف وسیعی از این ادوات، مانند حسگرهای تشدید شده، فیلترها و سوئیچ‌های فرکانس رادیویی، مطلوب است. مزیت مهم دیگر این است که، برخلاف تیرها و پل‌های بزرگ، میکروتیرهای دوسرگیردار متحمل تغییر شکل‌های بزرگ می‌شوند، که این امر، غیرخطی بودن هندسی کشش صفحه میانی را به یک عامل غالب و مهم در رفتار حاکم بر میکروتیرها، تبدیل می‌کند [6].

سیستم‌های میکروالکترومکانیکی سیستم‌های پویایی هستند که برای حرکت نیاز به تحریک دارند. انواع مختلفی از تحریکات برای این نوع سیستم‌ها پیشنهاد و به‌کار برده شده‌اند، که از آن جمله می‌توان به تحریک الکترو استاتیکی، تحریک پیزو الکتریکی، تحریک مغناطیسی، تحریک گرمایی، تحریک پارامتریک و انواع دیگر اشاره کرد.

برخلاف تحریک خارجی که در آن نیروها به‌صورت عبارت‌های غیرهمگن در معادله دیفرانسیل حاکم بر دینامیک سیستم ظاهر می‌شوند، در تحریک پارامتریک، نیروها به‌صورت ضرایب یا پارامترهای متغیر با زمان، در معادله دیفرانسیل ظاهر می‌شوند. به علاوه در مقایسه با تحریک‌های خارجی در هر کدام یک تحریک کوچک نمی‌تواند پاسخ بزرگ ایجاد نماید، مگر این که فرکانس تحریک نزدیک به یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم باشد (تشدید اولیه)، تحریک پارامتریک کوچک زمانی می‌تواند پاسخ بزرگ ایجاد کند که فرکانس تحریک دو برابر یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم باشد (تشدید پارامتریک اصلی) [7]. همان‌گونه که اشاره شد، در تحریکات خارجی برای ایجاد رزونانس نیاز به تطبیق فرکانس طبیعی با فرکانس تحریک می‌باشد، این در حالی است که در تحریک پارامتریک مشکل تطبیق دادن فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی وجود ندارد، چرا که در تحریک پارامتریک، به جای فرکانس رزونانسی، بازه فرکانسی برای رزونانس وجود دارد.

فارادی در 1831 به نظر می‌رسد اولین کسی بود که پدیده تشدید پارامتریک را مشاهده کرد [8]. در 1859 ملدی اولین آزمایش جدی را برای مطالعه تحریک پارامتریک انجام داد. در سال 1887 استرات یک پایه تئوری برای این مشاهدات تهیه کرد [9]. استفنسون در سال 1906 نتایج استرات را تقویت کرد و امکان وجود ارتعاش را زمانی که فرکانس محوری به‌کار برده شده مضربی صحیح از فرکانس اصلی ارتعاش جانبی باشد، بررسی کرد [10]. رامان در سال 1912 بررسی گسترده‌ای ارائه کرد که به‌صورت گسترده و زیبایی توسط تصاویری از نخ در حال ارتعاش شرح داده شده است [11]. تشدید پارامتریک در اکثر شاخه‌های فیزیک و مهندسی رخ می‌دهد. یکی از مهم‌ترین مشکلات، ناشی از ناپایداری دینامیکی پاسخ سیستم‌های مکانیکی و الاستیک به بارگذاری متغیر با زمان مخصوصا بارگذاری پریودیک است. مواردی وجود دارد که وارد کردن یک بارگذاری ارتعاشی کوچک می‌تواند سیستمی که به‌صورت استاتیکی ناپایدار است را پایدار کند و یا سیستمی که به‌صورت استاتیکی پایدار است را ناپادار کند.

در برخی موارد تشدید پارامتریک به‌عنوان مشکل و عامل مخرب در سیستم‌های ارتعاشی شناخته می‌شود و باید از وقوع آن جلوگیری گردد. ولی در برخی موارد همچون سیستم‌های میکروالکترومکانیکی به‌عنوان عامل موثر و خود خواسته شناخته می‌شود که در جهت بهبود عملکرد سیستم گام برمی‌دارد. رادولف و همکاران [12] در سال 2002 با استفاده از روش‌های اغتشاشات[9] به بررسی دینامیک معادله متیو غیرخطی در ناحیه زیرهارمونیک پرداختند. تحریک پارامتریک در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققان در زمینه سیستم‌های میکروالکترومکانیکی قرار گرفته است. استفاده از تحریک پارامتریک برای رفع مشکل عدم تطبیق رزونانسی در ژیروسکوپ‌ها، اولین بار در سال 2005 توسط اوروپزا-راموس و همکاران [13] مطرح شد. در آن سال تنها امکان پیاده‌سازی این ایده توسط شبیه‌سازی عددی به نمایش گذاشته شد. نویسندگان فوق‌الذکر در تحقیقات بعدی [15,14]، مشخصات عملکردی و آزمایشگاهی ژیروسکوپی که براساس این ایده کار می‌کرد، گزارش داده‌اند. عزیزی و همکاران در سال 2016 [16] پژوهشی تحت عنوان آشکارسازی جرم با استفاده از تحریک پارامتریک یک میکروتیر تحریک شده با لایه‌های پیزوالکتریک پرداختند. که طی آن نواحی ناپایداری حرکت میکروتیر برای مقادیر غیرخطینگی و دمپینگ مختلف در ناحیه رزونانسی اول ترسیم شده و تاثیر اضافه شدن جرم در نزدیکی مرز ناپایداری مورد بررسی قرار گرفته است.

در تحقیق حاضر تحریک پارامتریک در ناحیه زیرهارمونیک برای میکروتیر دوسرگیردار ساندویچ شده با لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از روش پرتابه‌ای بررسی می‌شود. تا جایی که مطالعات نگارنده نشان می‌دهد؛ در ترسیم زبانه‌های رزونانسی برای معادله متیو غیرخطی دمپ شده در ناحیه

[1] Actuators
[2] Micro-fabrication technology
[3] Silicon-oxide
[4] Silicon-nitride
[5] Polysilicon
[6] Gallium arsenide (GaAs)
[7] Continuous
[8] Discrete
[9] Perturbation

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.5.11.9]

زیرهارمونیک، تاکنون از روش پرتابه‌ای استفاده نشده است و عموما از روش‌های تحلیلی-تقریبی همچون روش‌های اغتشاشات و یا روش‌های عددی همچون روش تفاضل محدود استفاده شده است. روش تفاضل محدود به دلیل زمان‌بر بودن پروسه حل و روش‌های اغتشاشات به‌دلیل محدودیت در اعمال پارامتر اغتشاش، ضریب غیرخطینگی و دمپینگ، معمولا در حل معادلات غیرخطی مقرون به صرفه نمی‌باشند. بنابراین در پژوهش حاضر از روش پرتابه‌ای به‌عنوان روشی قدرتمند در شناسایی حرکت پریودیک، برای به‌دست آوردن حل‌های پریودیک استفاده شده است. با استفاده از این تکنیک، مرز بین ناحیه پایداری و ناپایداری از یکدیگر تفکیک و به ازای ضریب دمپینگ و مقادیر غیرخطینگی مختلف زبانه‌های ناپایداری ترسیم شده است. و رفتار دینامیکی میکروتیر در داخل و خارج نواحی ناپایداری با ترسیم منحنی‌های تاریخچه زمانی و فضای فاز نشان نشان داده شده است.

2- مدل‌سازی

مدل پیشنهادی یک میکرو تیر دوسرگیردار می‌باشد که از بالا و پایین توسط لایه‌های پیزوالکتریکی ساندویچ شده‌اند. دلیل استفاده از ساختار دوسرگیردار ایجاد قابلیت تغییر پارامترهای حاکم بر مساله با استفاده از تحریک پیزوالکتریک است. نحوه عمل این سیستم، به این صورت است که با اعمال ولتاژ پیزوالکتریک در لایه‌های پیزو به دلیل ایجاد کرنش در طول میکروتیر که ناشی از واکنش ماده پیزوالکتریک در مقابل دریافت ولتاژ است، سیستم در راستای جانبی z (راستای تحریک) شروع به ارتعاش می‌کند. نکته مهم اینجاست که در حالت واقعی ایجاد ارتعاش تنها به‌واسطه ولتاژ پیزو امکان-ناپذیر است، برای این که سیستم به نوسان واداشته شود ابتدا تحت تاثیر ولتاژ پران V_h به ارتعاش درمی‌آید و همزمان با آن ولتاژ پیزو اعمال می‌شود. هنگامی که میکروتیر شروع به حرکت کرد دیگر به ولتاژ پران نیازی نیست و از مدار خارج می‌گردد.

همان‌گونه که در "شکل 1" مشاهده می‌شود، سیستم مورد بررسی یک میکروتیر دوسرگیردار با طول l، با عرض a، چگالی ρ و مدول یانگ Eاست. یک الکترود در راستای قائم بر طول میکروتیر جاسازی شده است. در راستای z تحریک الکترواستاتیک با ولتاژ V_h به سیستم اعمال می‌گردد. فاصله اولیه بین میکروتیر و الکترود کناری با g_0 نشان داده شده است. سیستم مختصات همان‌گونه که در نشان داده شده است به مرکز صفحه انتهای گیردار سمت چپ میکرو تیر نصب شده است که z, y, x به ترتیب نمایانگر راستاهای افقی، جانبی و عمودی هستند. تغییر شکل میکروتیر در طول محور z با $w(x,t)$ نشان داده شده است.

3- معادلات حاکم

در این قسمت معادلات حرکت میکروتیر دوسرگیردار ساندویچ شده با لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از اصل همیلتون استخراج خواهد شد.

3-1- انرژی پتانسیل کرنشی

کار انجام شده توسط نیروهای سطحی و حجمی بر روی ماده جامد الاستیک در داخل جسم به‌صورت انرژی کرنشی ذخیره می‌شود. برای یک جسم الاستیک ایده‌آل، این انرژی کرنشی هنگامی که جسم جامد به وضعیت بدون کرنش اولیه‌اش بازگردد، کاملا قابل بازیافت است. انرژی کرنشی را با استفاده از میدان‌های تنش (σ_x) و کرنش (ε_x) ایجاد شده در داخل جامد الاستیک با مدول یانگ E می‌توان به‌صورت (1) به‌دست آورد [17]:

$$U = \int \frac{(E\varepsilon_x)\varepsilon_x}{2} dv \tag{1}$$

3-1-1- انرژی کرنشی ناشی از خمش

انرژی کرنشی ناشی از خمش با U_b نشان داده می‌شود، و به‌صورت رابطه (2) قابل بیان است:

$$U_b = \int \frac{(E\varepsilon_b)\varepsilon_b}{2} dv \tag{2}$$

که ε_b کرنش ناشی از خمش می‌باشد. و به‌صورت رابطه (3) قابل بیان است:

$$\varepsilon_b = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{3}$$

با جاگذاری (3) در (2) انرژی کرنشی ناشی از خمش به‌صورت (4) بدست می-آید:

$$U_b = \int \frac{E\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2}{2} dv = \frac{(EI_{zz})_{\text{eq}}}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx \tag{4}$$

که $(EI_{zz})_{\text{eq}}$ از رابطه (5) محاسبه می‌گردد [18]:

$$(EI_{zz})_{\text{eq}} = EI_{zz} + E_p hah_p\left(\frac{h}{2} + h_p\right) \tag{5}$$

که در آن I_{zz} ممان اینرسی حول محور y می‌باشد.

3-1-2- انرژی کرنشی ناشی از کشیدگی صفحه میانی

به دلیل لبه‌های ثابت و کشیدگی صفحه میانی[1]، طول گسترش یافته میکروتیر l' از طول اولیه آن بیش‌تر است، که این امر منجر به تولید کرنش محوری و همچنین نیروی محوری F_a می‌گردد، که به‌صورت انرژی کرنشی در میکروتیر ذخیره می‌شود.

انرژی کرنش به دلیل کشیدگی مرکز صفحه با U_a مشخص می‌شود و به‌صورت (6) محاسبه می‌شود:

$$U_a = \frac{1}{2}F_a(l' - l) \tag{6}$$

طول کشیده شده میکروتیر به‌شکل (7) قابل بیان است [19]:

$$l' = l + \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \tag{7}$$

که در آن w جابجایی در راستای z می‌باشد و نیروی محوری F_a ناشی از کشیدگی صفحه میانی به شکل (8) به‌دست می‌یابد:

$$F_a = \frac{(EA)_{\text{eq}}}{l}(l' - l) \approx \frac{(EA)_{\text{eq}}}{2l}\int_0^\ell \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \tag{8}$$

که در آن $(EA)_{\text{eq}}$ از رابطه (9) قابل محاسبه است [20]:

$$(EA)_{\text{eq}} = Eah + 2E_{\text{p}}ah_{\text{p}} \tag{9}$$

با جایگذاری (9) و (8) در (6) انرژی کرنش ناشی از کشیدگی صفحه میانی به-صورت (10) به‌دست می‌آید:

$$U_a = \frac{(EA)_{\text{eq}}}{8l}\left(\int_0^\ell \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\right)^2 \tag{10}$$

3-1-3- انرژی کرنش ناشی از لایه‌های پیزوالکتریک

انرژی کرنش ناشی از لایه‌های پیزوالکتریک از رابطه (11) به‌دست می‌آید[20]:

$$U_p = F_p(\acute{l} - l) \tag{11}$$

که در آن F_p نیروی ناشی از اعمال ولتاژ پیزوالکتریک است. با فرض راستای میدان الکتریکی اعمال شده به‌صورت E_3، تنش محوری ناشی از اعمال ولتاژ پیزوالکتریک به شکل رابطه (12) محاسبه می‌گردد:

[1] Mid-plane stretching

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.5.11.9]

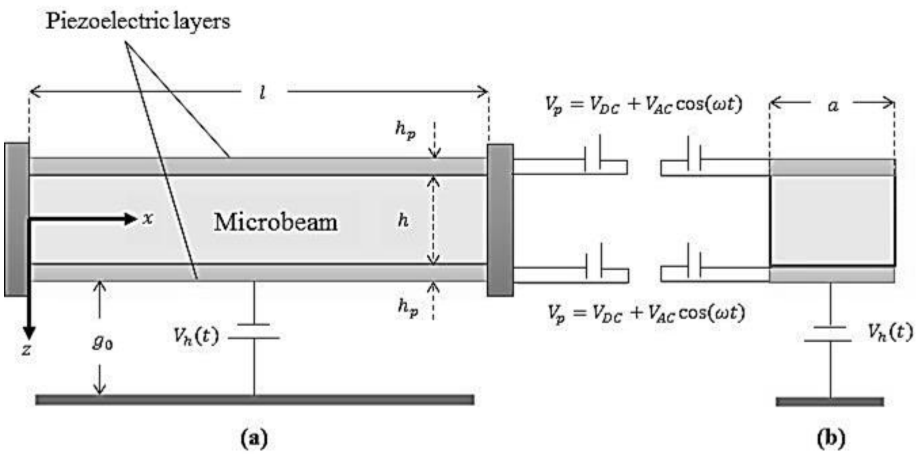

Fig. 1 Schematic view of the proposed model. a Front view. b side view. Z is excitation direction.

شکل 1 شماتیک کلی میکروتیر مورد مطالعه. a نمای جلو. b نمای کناری. راستای z راستای تحریک است.

$$\sigma_1 = -e_{31}E_3 \tag{12}$$

که در آن e_{31} ثابت ولتاژ پیزوالکتریک متناظر است. با فرض راستای میدان الکتریکی اعمال شده به‌صورت $E_3 = V_p/h_p$ نیروی محوری ناشی از تحریک پیزوالکتریک به‌صورت رابطه (13) کاهش می‌یابد [20]:

$$F_p = \int_{A_p} \sigma_1\, dA_p = 2\int_0^{h_p} (-e_{31}E_3)a\,dh = -2e_{31}V_p a h_p \tag{13}$$

و تغیر طول میکرو تیر از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$l' = \ell + \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \tag{14}$$

با جایگذاری معادله (14) در (11) انرژی کرنش ناشی از تحریک پیزوالکتریک به شکل (15) حاصل می‌شود:

$$U_p = \frac{1}{2}F_p\int_0^{\ell}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \tag{15}$$

در نهایت انرژی کرنش کل از رابطه (16) قابل محاسبه است:

$$U_T = U_a + U_b + U_p \tag{16}$$

با جایگذاری ترم‌های انرژی کرنشی در (16)، انرژی کرنش کل U_T، به‌صورت (17) به‌دست می‌آید

$$U_T = \frac{(EA)_{\mathrm{eq}}}{8l}\left(\int_0^{\ell}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\right)^2 + \frac{(EI_{zz})_{\mathrm{eq}}}{2}\int\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}F_p\int_0^{\ell}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \tag{17}$$

3-2- کار انجام شده توسط نیروی الکترواستاتیک

علاوه بر انرژی کرنشی ذخیره شده در میکروتیر، نیروی الکترواستاتیک اعمال شده از طرف الکترود، بر روی میکروتیر کار انجام می‌دهد. کار انجام شده توسط نیروی الکترواستاتیک از رابطه (18) قابل محاسبه است [20]:

$$W_e = \int_0^{\ell}\left(\int_0^{w}\frac{\varepsilon_0 a V_{\mathrm{h}}^2(t)}{2(g_0-\eta)^2}d\eta\right)dx \tag{18}$$

که در آن ε_0 ثابت دی الکتریک شکاف رسانا می‌باشد، g_0 شکاف اولیه بین الکترود و میکروتیر، a ضخامت میکروتیر، V_h ولتاژ پران که برای تحریک اولیه به‌کار می‌رود و بعد از مدار خارج می‌گردد، η پارامتر کاذب [1] می‌باشد.

[1] Dummy parameter

3-3- انرژی جنبشی

سیستم پیسنهاد شده یک سیستم پویا است، بنابراین انرژی جنبشی نیز از جمله انرژی‌های مبادله شده در طول حرکت میکروتیر می‌باشد.
انرژی جنبشی میکروتیر به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}(\rho a h)_{\mathrm{eq}}\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}\,dx \tag{19}$$

که $\dot{\vec{r}}$ بردار سرعت از یک نقطه مادی دلخواه برروی میکروتیر است. و $(\rho a h)_{\mathrm{eq}}$ از رابطه (20) قابل محاسبه است [20]:

$$(\rho a h)_{\mathrm{eq}} = \rho a h + 2\rho_p a h_p \tag{20}$$

بردار جابجایی $\vec{r}$ در یک نقطه دلخواه از میکروتیر را می‌توان به‌صورت (21) نوشت:

$$\vec{r} = u\hat{\imath} + v\hat{\jmath} + w\hat{k} \tag{21}$$

با فرض این که جابجایی فقط در راستای z وجود دارد، در نهایت $\dot{\vec{r}}$ به‌صورت (22) بیان می‌شود:

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{w})\hat{k} \tag{22}$$

برای محاسبه‌ی انرژی جنبشی معادله‌ی (22) در معادله‌ی (19) جایگذاری می‌شود:

$$T = \frac{(\rho a h)_{\mathrm{eq}}}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx \tag{23}$$

که البته لازم به ذکر است که در محاسبه انرژی جنبشی، از اثر اینرسی محوری به دلیل ناچیز بودن در مقابل انرژی جنبشی ناشی از حرکت جانبی میکروتیر، صرف‌نظر شده است [1].

3-4-تغییرات انرژی و اصل همیلتون

برای استخراج معادلات حرکت میکروتیر و شرایط مرزی حاکم، از اصل همیلتون توسعه یافته [2] استفاده خواهد شد، که به‌صورت (24) نوشته می‌شود [21]:

$$\delta\int_0^{t} H\,dt = \delta\int_0^{t}(T - U_T + W_e)\,dt \tag{24}$$

که در رابطه (24)، معادلات حاکم با صفر شدن تغییرات انتگرال زمانی

[2] Extended Hamilton’s Principle

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.5.11.9]

همیلتون که برابر است با تغییرات آنی انتگرال زمانی مجموع انرژی‌ها، به‌دست می‌آید. بنابراین با جایگذاری معادلات (23) و (18) و (17) در (24) و با انتگرال‌گیری و ساده‌سازی معادلات و با لحاظ کردن اثرات دمپینگ ویسکوز [6]، معادله مشتقات جزئی حاکم بر حرکت و شرایط مرزی متناظر با آن به شکل (25) حاصل می‌شود:

$$(EI_{zz})_{\mathrm{eq}}\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+(\rho A)_{\mathrm{eq}}\left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\right) -\left(F_p+\frac{(EA)_{\mathrm{eq}}}{2l}\int_0^l\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx\right)\times\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} +c\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\varepsilon_0 a V_{\mathrm{h}}^2(t)}{2(g_0-w)^2} \quad (25)$$

و شرایط مرزی حاکم متناظر با حرکت نیز برابر است با:

$$w(0,t)=w(l,t)=0\,,\frac{\partial w(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial w(l,t)}{\partial x}=0 \quad (26)$$

پارامترهای بی‌بعد زیر برای نوشتن معادله در فرم بی‌بعد به‌کار رفته است [22]:

$$\hat{w}=\frac{w}{g_0}\ ,\quad \hat{t}=\frac{t}{\tilde{t}}\ ,\quad \hat{x}=\frac{x}{l}\quad \hat{\omega}=\omega\tilde{t} \quad (27)$$

که در آن:

$$\tilde{t}=\sqrt{\frac{(\rho A)_{\mathrm{eq}}l^4}{(EI_{zz})_{\mathrm{eq}}}} \quad (28)$$

با جایگذاری معادلات (27) و (28) در معادله (25) و حذف کلاهک‌ها به‌منظور ساده‌سازی، معادله حاکم بر حرکت در فرم بی‌بعد به شکل (29) خواهد بود:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\left(a_1F_p+a_2\,\Gamma(w,w)\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a_3\frac{\partial w}{\partial t} =\frac{a_4V_h^2}{(1-w)^2} \quad (29)$$

که در آن:

$$\Gamma(w,w)=\int_0^1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx$$
$$a_1=\frac{l^2}{(EI_{zz})_{\mathrm{eq}}},\qquad a_2=\frac{(EA)_{\mathrm{eq}}g_0^2}{2(EI_{zz})_{\mathrm{eq}}}$$
$$a_3=\frac{cl^2}{\sqrt{(\rho A)_{\mathrm{eq}}(EI_{zz})_{\mathrm{eq}}}},\qquad a_4=\frac{\varepsilon_0 a l^4}{2g_0^3(EI_{zz})_{\mathrm{eq}}} \quad (30)$$

و شرایط مرزی حاکم متناظر با حرکت در حالت بی‌بعد به شکل معادله (31) بیان می‌شود:

$$w(0,t)=w(1,t)=0\,,\frac{\partial w(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial w(1,t)}{\partial x}=0 \quad (31)$$

4- حل عددی

حل تقریبی معادله (29) به شکل (32) در نظر گرفته می‌شود [23]:

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{m}\zeta_i(t)\varphi_i(x) \quad (32)$$

که در آن $\varphi_i(x)$ iامین تابع شکل مود خطی بی‌بعد میکروتیر دوسرگیردار، و $\zeta_i(t)$ دامنه متناظر با آن شکل مود می‌باشد. با جایگذاری معادله‌ی (32) در معادله حرکت بی‌بعد شده داریم:

$$\sum_{i=1}^{m}\zeta_i(t)\varphi_i''''(x)+\sum_{i=1}^{m}\ddot{\zeta}_i(t)\varphi_i(x) -a_1F_p\sum_{i=1}^{m}\zeta_i(t)\varphi_i''(x) -a_2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\zeta_i(t)\zeta_j(t)\zeta_k(t)\left(\int_0^1\varphi_i'^2(x)\right)\varphi_i''(x) \quad (33)$$
$$+a_3\sum_{i=1}^{m}\dot{\zeta}_i(t)\varphi_i(x)-\frac{a_4V_{\mathrm{h}}^2}{(1-\sum_{i=1}^{m}\zeta_i(t)\varphi_i(x))^2} =Re(x,t)$$

در رابطه (33)، $Re(x,t)$ تابع باقی‌مانده است که بر اساس روش گلرکین، باید در محدوده طول تیر عمود بر تابع شکل باشد، طبق رابطه (34):

$$\int_0^1 Re(x,t).\varphi_n(x)dx=0 \quad (34)$$

با ضرب طرفین معادله (33) در $\varphi_n(x)$ و انتگرال‌گیری در طول میکروتیر معادله حاکم بر حرکت به شکل (35) حاصل می‌گردد:

$$\sum_{i=1}^{m}\zeta_i(t)\int_0^1\varphi_i''''(x)\varphi_n(x)dx+\sum_{i=1}^{m}\ddot{\zeta}_i(t)\int_0^1\varphi_i(x)\varphi_n(x)dx -a_1F_p\sum_{i=1}^{m}\zeta_i(t)\int_0^1\varphi_i''(x)\varphi_n(x)\,dx -a_2\sum_{\substack{i=1\\j=1\\k=1}}^{m}\zeta_i(t)\zeta_j(t)\zeta_k(t)\left(\int_0^1\varphi_i'^2(x)\,dx\right)\int_0^1\varphi_i''(x)\varphi_n(x)\,dx +a_3\sum_{i=1}^{m}\dot{\zeta}_i(t)\int_0^1\varphi_i(x)\varphi_n(x)dx-\frac{a_4V_{\mathrm{h}}^2\int_0^1\varphi_n(x)dx}{(1-\sum_{i=1}^{m}\zeta_i(t)\varphi_i(x))^2} =0 \quad (35)$$

از آنجایی که نحوه بارگذاری به گونه‌ای است که سیستم مورد نظر مود اول را تجربه می‌کند؛ و با توجه به کار آقای یونس، برای میکروتیرهایی که کشش صفحه میانی دارند، نتایج برای شکل مود اول، همگرایی قابل قبولی با نتایج به‌دست‌آمده برای شکل مودهای بیش‌تر دارد. از طرفی در حالت استاتیکی، زمانی که نیروی الکترواستاتیک وجود ندارد و یا ولتاژ آن کم‌تر از ولتاژ پولین[1] است، پاسخ زمانی شکل مود اول نوسان همگرایی بسیار خوبی با پاسخ زمانی شکل مودهای بیش‌تر دارد [1]. بنابراین مود اول نوسان را به شکل $\varphi_n(x)=\varphi_1(x)=\varphi(x)$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که سیستم به ارتعاش درآمده و ولتاژ پران V_{h} از مدار خارج شده است، بنابراین در معادله (35) مقدار نیروی الکترواستاتیک را صفر در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن این فرضیات معادله حرکت گسسته شده به‌صورت معادله (36) خواهد بود:

$$A_1\ddot{\zeta}+A_2\dot{\zeta}+A_3\zeta-A_4F_{\mathrm{p}}\zeta-A_5\zeta^3=0 \quad (36)$$

که در آن ضرایب A_1 تا A_5 به شکل روابط (37) می‌باشند:

$$A_1=\int_0^1\varphi_i(x)\varphi_n(x)dx$$
$$A_2=a_3\int_0^1\varphi_i(x)\varphi_n(x)dx$$
$$A_3=\int_0^1\varphi_i''''(x)\varphi_n(x)dx$$
$$A_4=a_1\int_0^1\varphi_i''(x)\varphi_n(x)\,dx$$
$$A_5=a_2\left(\int_0^1\varphi_i'^2(x)\,dx\right)\int_0^1\varphi_i''(x)\varphi_n(x)\,dx \quad (37)$$

با اعمال ولتاژ پیزوالکتریک به‌صورت $V_{\mathrm{p}}=V_{\mathrm{DC}}+V_{\mathrm{AC}}\cos(2\omega t)$ جهت ایجاد ضریب پریودیک متغیر با زمان، و همچنین با ایجاد تغییر متغیر $\tau=\omega t$ و ساده‌سازی، در نهایت می‌توان معادله گسسته را در فرم معادله متیو مستهلک شده غیرخطی به‌صورت (38) نوشت:

[1] Pull-in voltage

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.5.11.9]

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}+C\frac{d\zeta}{d\tau}+(\delta+2\varepsilon\cos(2\tau))\zeta-\beta\zeta^3=0 \tag{38}$$

که در آن:

$$\delta=\frac{A_3}{A_1\omega^2}+2ae_{31}V_{\mathrm{DC}}\frac{A_4}{A_1\omega^2}$$
$$\varepsilon=ae_{31}V_{\mathrm{AC}}\frac{A_4}{A_1\omega^2}$$
$$\beta=-\frac{A_5}{A_1\omega^2}$$
$$C=\frac{A_2}{A_1\omega} \tag{39}$$

برای به‌دست آوردن حل‌های پریودیک روش‌های مختلفی وجود دارد، یکی از این روش‌ها انتگرال‌گیری در زمان طولانی[1] است، ایرادی که بر این روش وجود دارد، این است که نمی‌تواند بدرستی زمانی که دقیقا یک حل حالت پایدار از سیستم وجود دارد و یا زمانی که سیستم وابسته به دامنه جذب حل است، حل‌های پریودیک را پیش‌بینی کند. روش‌های دیگری همچون روش تفاضل محدود[2] و روش پرتابه‌ای برای محاسبه حل‌های پریودیک استفاده می‌شود [1]. در این مقاله از روش پرتابه‌ای برای تحلیل پایداری حل‌های پریودیک استفاده شده است. روش پرتابه‌ای روشی قدرتمند در محاسبه حرکت‌های پریودیک و آنالیز پایداری آن‌ها در سیستم‌های غیرخطی است. به این دلیل که این روش توانایی پیش‌بینی هر دو حل پایدار و ناپایدار را دارد. این روش بخاطر این که بر اساس گشتن (شوت کردن، پرتاب کردن) به دنبال دسته‌ای از شرایط اولیه است که منجر به حرکت پریودیک در سیستم می‌شوند، روش پرتابه‌ای نام‌گذاری شده است. در این روش حدس‌های اولیه از شرایط اولیه در برنامه اعمال می‌شود $\zeta(0)$ و $\dot{\zeta}(0)$، سپس با استفاده از روش نیوتن-رافسون[3] اصلاح می‌شوند. همگرایی زمانی اتفاق می‌افتد که اختلاف بین حدس‌های اولیه جدید محاسبه شده با حدس‌های قبل یک مقدار بسیار کوچک باشد. باید توجه کرد که در اصل شرایط اولیه به‌وسیله ولتاژ پران به میکروتیر اعمال می‌گردد و سپس از مدار خارج می‌گردد.

تحریک‌های خارجی منجر به ظهور یک ترم مستقل پریودیک وابسته به زمان در معادلات حاکم بر حرکت می‌شوند، که در این مورد به دلیل معین بودن پریود سیستم از روش پرتابه‌ای معادلات خودکنترل[4] به راحتی می‌توان شرایط اولیه منجر به حرکت پریودیک را شناسایی کرد. تحریک پارامتریک برخلاف تحریک خارجی منجربه ظهور ضرایب پریودیک متغیر با زمان در معادله حاکم بر حرکت می‌شود که نمی‌توان پریود سیستم را به آسانی شناسایی کرد، بنابراین یک مجهول دیگر به تعداد مجهولات حل اضافه می‌گردد و در روش پرتابه‌ای باید پریود سیستم را نیز شوت کرد. بدین دلیل در پژوهش حاضر از روش پرتابه‌ای مربوط به معادلات غیرخودکنترل[5] استفاده شده است.

معادله (38) را می‌توان در فضای فاز به فرم کلی معادله (40) بیان کرد:

$$\dot{\vec{S}}=\vec{F}(\vec{S},\vec{M}) \tag{40}$$

که در رابطه (40)، $\vec{S}$ بردار متغیرهای فضای فاز و $\vec{M}$ بردار پارامترهای فضای فاز و $\vec{F}$ بردار سمت راست معادلات فضای فاز است. با تغییر متغیر ($S_1=\zeta$ و $S_2=\dot{\zeta}$) معادله (38) در فضای فاز به‌صورت (41) بسط داده می‌شود:

$$\dot{S_1}=S_2=\vec{F_1}(\overrightarrow{S_1},\overrightarrow{S_2})$$
$$\dot{S_2}=-CS_2-(\delta+2\varepsilon\cos(2\tau))S_1-\beta S_1^3=\overrightarrow{F_2}(\overrightarrow{S_1},\overrightarrow{S_2}) \tag{41}$$

[1] Long-time integration technique
[2] Finite difference method
[3] Newton–Raphson method
[4] Autonomous
[5] Non autonomous

پس از این که معادلات در فضای فاز نوشته شد، برای یافتن حل‌های متناوب معادلات (41)، شرایط اولیه به‌صورت (42) بر روی یکی از مدارهای متناوب در نظر گرفته می‌شود:

$$\vec{S}(0)=\vec{\eta} \tag{42}$$

که در آن $\vec{\eta}$ بردار شرایط اولیه است. با توجه به این‌که فرض کردیم شرایط (42) بر روی یکی از مدارهای متناوب قرار دارند، بنابراین پس از گذشت زمان T داریم:

$$\vec{S}(T,\vec{\eta})=\vec{\eta} \tag{43}$$

حال هدف، حل معادلات (41) با شرایط اولیه (42) و با قید (43) است. روش پرتابه‌ای با شوت کردن شرط اولیه حدسی $\overrightarrow{\eta_0}$ و پریود اولیه حدسی T_0 که با شرط اولیه اصلی $\vec{\eta}$ و پریود اصلی T به‌ترتیب به اندازه $\overrightarrow{\delta\eta}$ و $\overrightarrow{\delta T}$ اختلاف دارند شروع می‌کند. بنابراین با استفاده از روش نیوتن-رافسون می‌توان نوشت:

$$\vec{\eta}=\delta\vec{\eta}+\vec{\eta}_0$$
$$\mathrm{T}=\delta T+\mathrm{T}_0 \tag{44}$$

که در آن مقادیر بردار تصحیح $\delta\eta$ و δT از حل معادله (45) حاصل می‌شوند [24]:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\eta}(T_0,\eta_0)-I & F(\eta_0;M)\\ \dfrac{\partial F_k}{\partial\eta}(\eta_0;M) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\eta\\ \delta T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_0-x(T_0,\eta_0)\\ 0\end{bmatrix} \tag{45}$$

که در آن $\delta\eta$ بردار تصحیح شرایط اولیه، δT بردار تصحیح پریود، η_0 و T_0 به ترتیب، حدس‌های اولیه شرایط اولیه و پریود، و F_k، kاُمین درایه بردار $\vec{F}$ می‌باشد. معادله (45) یک مجموعه معادله با دو معادله و سه مجهول می‌باشد و از طرفی روش پرتابه‌ای بسیار به حدس‌های اولیه حساس است برای از بین بردن این حساسیت و کم کردن تعداد مجهولات، یکی از درایه‌های بردار $\vec{F}$ برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود [24].

5- نتایج و بحث

در این بخش نتایج به‌دست‌آمده از حل پریودیک به ازای مقادیر مختلف ضرایب معادله متیو ارائه می‌گردد. همان‌طور که اشاره شد، وظیفه ولتاژ پران اعمال تحریک اولیه به میکروتیر می‌باشد. یکی از مباحث مهم که در اعمال نیروی الکترواستاتیک باید بدان توجه کرد موضوع بروز ناپایداری پولین[6] در میکروتیر هست. در این بخش جهت اعتبارسنجی معادلات حاکم، ولتاژ پولین استاتیکی[7] و دینامیکی[8] مورد بحث قرار می‌گیرد. در کار آقای رکنی[9] و همکاران [25] برای میکروتیری با ابعاد $a=3\mu\mathrm{m}$ و $l=250\mu\mathrm{m}$ و $h=50\mu\mathrm{m}$ و بدون لایه پیزوالکتریک ولتاژ پولین استاتیکی برابر با $V_{\mathrm{pull-in}}=39.40$ گزارش شده است. در "شکل 2" نقاط تعادل استاتیکی برای ولتاژهای الکترواستاتیک مختلف برای این میکروتیر ترسیم شده است. ولتاژ معادل با نقطه چندشاخگی استاتیکی[10]، مبین ولتاژ پولین استاتیکی می‌باشد، که برابر با $V_{\mathrm{pull-in}}=38.74$ است. اختلاف موجود بین ولتاژ محاسبه شده و مرجع ناشی از تعداد شکل مود به‌کار گرفته شده است. با توجه به کار آقای رضایی و همکاران [26] معمولا ولتاژ پولین استاتیکی بیش‌تر از ولتاژ پولین دینامیکی

[6] Pull-in instability
[7] Static pull-in voltage
[8] Dynamic pull-in voltage
[9] Hossein Rokni
[10] Static bifurcation point

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.5.11.9]

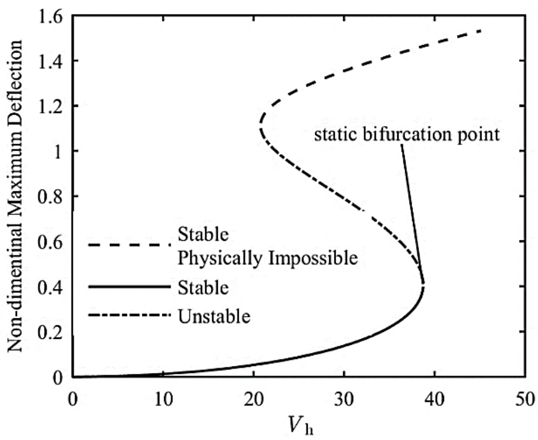

Fig. 2 maximum deflection of middle of micro-beam versus electrostatic loading

شکل 2 خیز بی‌بعد وسط میکروتیر برحسب مقادیر مختلف ولتاژ الکترواستاتیک

می‌باشد. ولتاژ پولین الکترواستاتیک برای میکروتیر بحث شده در پژوهش حاضر برابر با $V_{\text{static pull-in}} = 19.05$ و همچنین ولتاژ پولین دینامیکی برابر با $V_{\text{dynamic pull-in}} = 17.93$ محاسبه شده است که مشاهده می‌شود، نسبت پولین دینامیکی به پولین استاتیکی $V_{\text{dynamic pull-in}}/V_{\text{static pull-in}} = 0.94$ است.

همان‌گونه که قبلا اشاره شد، برای محاسبه حل‌های پریودیک از روش پرتابه‌ای استفاده شده است. در معادله متیو غیرخطی دمپ شده ترم غیرخطی معادله همچون نیروی خارجی عمل می‌کند و در داخل ناحیه رزونانسی باعث محدود شدن حل می‌شود. در ترسیم زبانه رزونانسی در ناحیه زیرهارمونیک، همان‌طور که در "شکل 3" مشاهده می‌شود، با افزایش ضریب دمپینگ در یک ضریب غیرخطینگی ثابت، مساحت ناحیه رزونانسی کم‌تر می‌شود. کاهش مساحت ناحیه رزونانسی از قبل هم قابل پیش‌بینی بود، چرا که با افزایش میزان دمپینگ، سیستم پایداری بیش‌تری را تجربه می‌کند. در "شکل 3 و 4" نقاط داخل زبانه‌ها نمایانگر ناحیه رزونانسی و نقاط بیرون زبانه‌ها مبین نقاط پایدار یا به عبارتی نقاطی است که بعد از گذر زمان به نقطه تعادل استاتیکی[1] میکروتیر یعنی $S_1 = S_2 = 0$ جذب می‌شوند. باید توجه کرد که تمام نقاط بیرون زبانه‌ها نقاط پایدار هستند و به ازای هر شرط اولیه به نقطه تعادل استاتیکی میکروتیر جذب می‌شوند، بر روی مرز ناحیه رزونانسی (روی زبانه‌ها) حرکت پریودیک وجود دارد که با استفاده از روش پرتابه‌ای قابل محاسبه است. در داخل ناحیه رزونانسی شرایط اولیه‌ای وجود دارد که به ازای آن‌ها سیستم دچار رزونانس می‌گردد.

نقاط A_1 و A_2 به‌عنوان دو نماینده از نقاط داخل و خارج نواحی رزونانسی و نقطه B به عنوان نقطه‌ای بر روی مرز ناحیه رزونانسی در $C = 0.3$، در "شکل 3" نشان داده شده‌اند. تاریخچه زمانی و منحنی‌های فضای فاز متناظر با این نقاط در "شکل‌های 5 تا 7" ترسیم شده است. همان‌طور که در "شکل 5" مشاهده می‌شود، سیستم در نقطه A_1 در داخل تمام زبانه‌های رزونانسی و به ازای ضریب غیرخطینگی $\beta = 1$ دچار رزونانس می‌گردد. با دقت در تاریخچه‌های زمانی ترسیم شده می‌توان به یک نکته قابل توجه پی برد، که در داخل ناحیه رزونانسی برخلاف سیستم‌های خطی، دامنه سیستم بعد از اغتشاش اولیه به سمت بی‌نهایت میل نمی‌کند، بلکه جذب یک چرخه حدی[2]

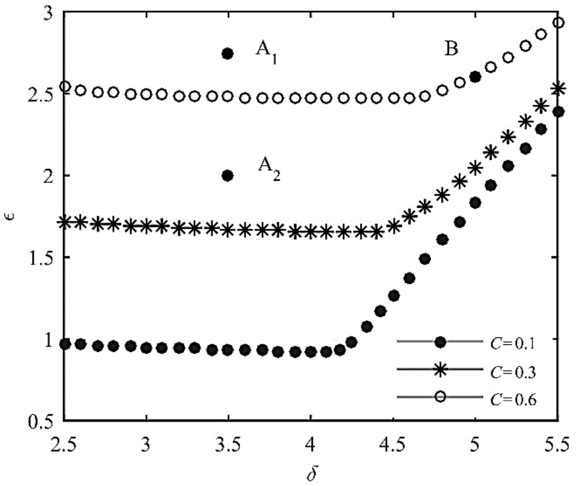

Fig. 3 The resonance tongue obtained by shooting method in subharmonic region for diverse damping coefficient in $\varepsilon - \delta$ plane for $\beta = 1$.

شکل 3 زبانه‌های رزونانسی به‌دست‌آمده از روش پرتابه‌ای در ناحیه زیرهارمونیک به ازای ضریب دمپینگ‌های مختلف در صفحه $\varepsilon - \delta$ و برای $\beta = 1$.

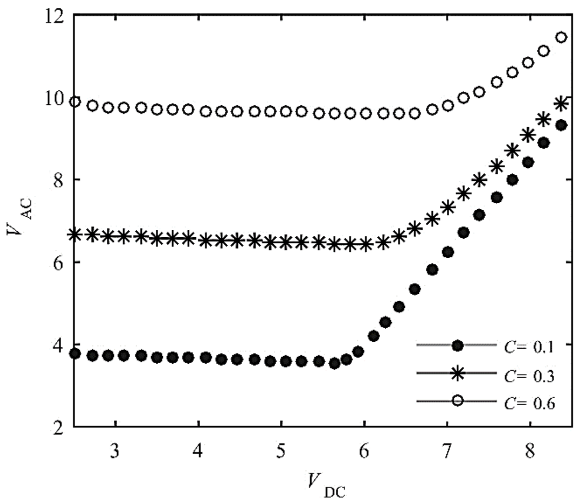

Fig. 4 The resonance tongue obtained by shooting method in subharmonic region for diverse damping coefficient in $V_{\text{DC}} - V_{\text{AC}}$ plane for $\beta = 1$ and $\omega = 20.38$.

شکل 4 زبانه‌های رزونانسی به‌دست‌آمده از روش پرتابه‌ای در ناحیه زیرهارمونیک به ازای ضریب دمپینگ‌های مختلف در صفحه $V_{\text{DC}} - V_{\text{AC}}$ و برای $\beta = 1$ و $\omega = 20.38$.

می‌شوند. این پدیده ناشی از وجود کشش صفحه میانی است که در معادلات حرکت به شکل ترم غیرخطی ظهور می‌کند و همانند نیروی خارجی عمل کرده و در نتیجه باعث محدود شدن حرکت میکروتیر می‌گردد. یکی از مزیت‌های تحریک پارامتریک این است که برای ایجاد رزونانس پارامترهای زیادتری نسبت به تحریک خارجی وجود دارد. همان‌گونه که در "شکل 4" مشاهده می‌شود، با ثابت نگه داشتن فرکانس تحریک پیزوالکتریک و تغییر دامنه ولتاژهای متناوب و ثابت می‌توان سیستم را وادار به رزونانس کرد.

"شکل 6" نشان می‌دهد که به ازای تمام شرایط اولیه در خارج از ناحیه رزونانسی، میکروتیر جذب نقطه تعادل استاتیکی می‌شود. "شکل 7" حل پریودیک به‌دست آمده از روش پرتابه‌ای را برای نقطه B بر روی زبانه رزونانسی متناظر با $\beta = 1$ و $C = 0.6$ نشان می‌دهد. این دقیقا اولین حل پریودیک قبل از ورود به ناحیه رزونانسی می‌باشد. تمام نقاط بر روی مرز دارای حل پریودیک یا به عبارت دیگر دارای حرکت پریودیک هستند.

[1] Fixed point
[2] Limit cycle

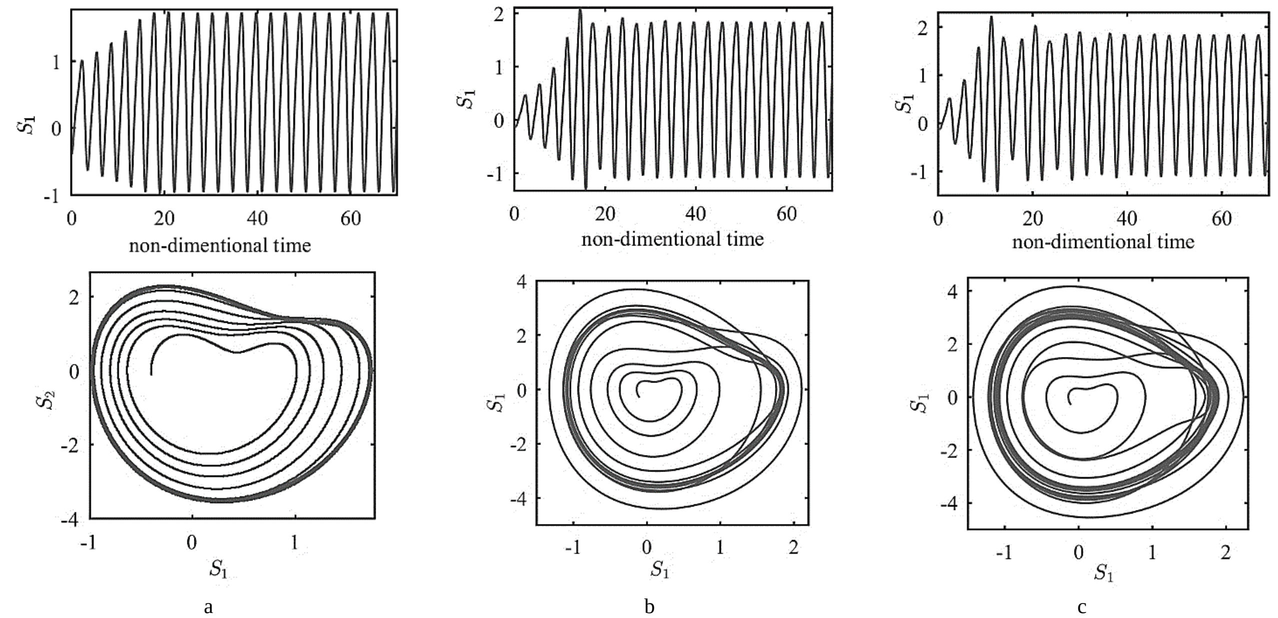

Fig. 5 The top diagrams are time history and the below side are phase diagram for point A_1 in $\beta = 1$. a corresponding tongue with $C = 0.6$ and b corresponding tongue with $C = 0.3$ and c corresponding tongue with $C = 0.1$.

شکل 5 نمودارهای بالا تاریخچه زمانی و پایین فضای فاز مربوط به نقطه A_1 در $\beta = 1$. نمودارهای a مربوط به ناحیه رزونانسی متناظر با $C = 0.6$ و b مربوط به ناحیه رزونانسی متناظر با $C = 0.3$ و c مربوط به ناحیه رزونانسی متناظر با $C = 0.1$.

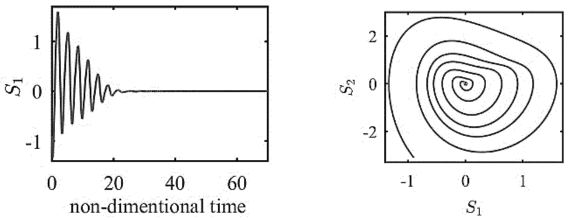

Fig. 6 The left side diagrams are time history and the right side are phase diagram for point A_2 in $\beta = 1$ and $C = 0.6$.

شکل 6 نمودار سمت چپ تاریخچه زمانی و سمت راست فضای فاز مربوط به نقطه A_2 در $\beta = 1$ و $C = 0.6$.

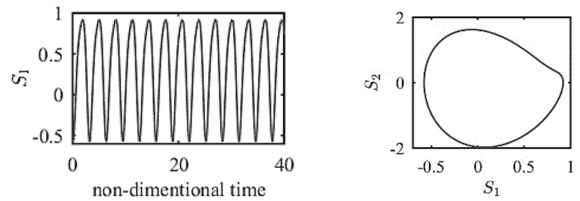

Fig. 7 The left side diagram is time history and the right side is phase diagram obtained by shooting method for point B in corresponding tongue with $\beta = 1$ and $C = 0.3$

شکل 7 نمودار سمت چپ تاریخچه زمانی و سمت راست فضای فاز مربوط به حل پریودیک به‌دست آمده از روش پرتابه‌ای برای نقطه B در ناحیه رزونانسی متناظر با $\beta = 1$ و $C = 0.6$.

برای مطالعه بهتر تغییرات دامنه در نقاط مختلف صفحه رزونانسی نیاز به بررسی پاسخ زمانی در هر نقطه از مختصات صفحه $\varepsilon - \delta$ می‌باشد، بدین منظور "شکل‌های 8 تا 10" ترسیم شده است. با فرض یک مقدار ε ثابت و با تغییر در ضابطه δ به تدریج از سمت چپ به سمت ناحیه رزونانسی حرکت می‌کنیم و زمان کافی به سیستم می‌دهیم که جذب حالت پایدار شود.

همان‌طور که در "شکل‌های 8 تا 10" مشاهده می‌شود، تا لحظه ورود به ناحیه رزونانسی تمامی حل‌ها صفر هستند و این بدین معنی است که بعد از گذر زمان نسبتا طولانی سیستم جذب نقطه تعادل استاتیکی می‌شود. به محض ورود به ناحیه رزونانسی یک پرش[1] بزرگ در دامنه‌ها مشاهده می‌شود. این بدین معنی است که سیستم بعد از گذشت زمان کافی جذب جاذب پریودیک[2] می‌شود که این نشان از ورود به ناحیه رزونانسی است. در حالی که به حرکت در داخل ناحیه رزونانسی ادامه بدهیم، به تدریج از میزان دامنه‌ها کاسته شده و جایی که دوباره از ناحیه رزونانسی خارج شویم بار دیگر به حل-های صفر می‌رسیم. و اگر برعکس این حرکت را با همان بارگذاری از سمت راست به سوی ناحیه رزونانسی حرکت کنیم دیگر پدیده پرش را ملاقات نخواهیم کرد و مشاهده می‌کنیم که به هنگام ورود به ناحیه رزونانسی دامنه به تدریج افزایش پیدا می‌کند تا جایی که دوباره از ناحیه رزونانسی خارج شویم، به محض خروج از ناحیه رزونانسی دامنه به شدت افت پیدا می‌کند و حل‌های صفر دوباره متولد می‌شوند که این مشاهدات وجود پدیده هیسترزیس[3] را تایید می‌کنند.

مشخصات فیزیکی و هندسی میکروتیر و لایه‌های پیزوالکتریک در جدول 1 آورده شده است.

همان‌طور که قبلا اشاره شد، افزایش دمپینگ در یک ضریب غیرخطینگی ثابت باعث کاهش تعداد نقاط رزونانسی می‌گردد. این در حالی است که با افزایش ضریب غیرخطینگی در یک ضریب دمپینگ ثابت هیچ تغییری در مساحت ناحیه رزونانسی ایجاد نمی‌کند. ولی با توجه به "شکل‌های 8 تا 10" مشاهده می‌شود که با افزایش ضریب ترم غیرخطی در یک دمپینگ ثابت، کاهش قابل توجهی در دامنه پاسخ زمانی ایجاد می‌گردد که ناشی از وجود کشش صفحه میانی است.

[1] Jump
[2] Periodic attractors
[3] Hysteresis

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.5.11.9]

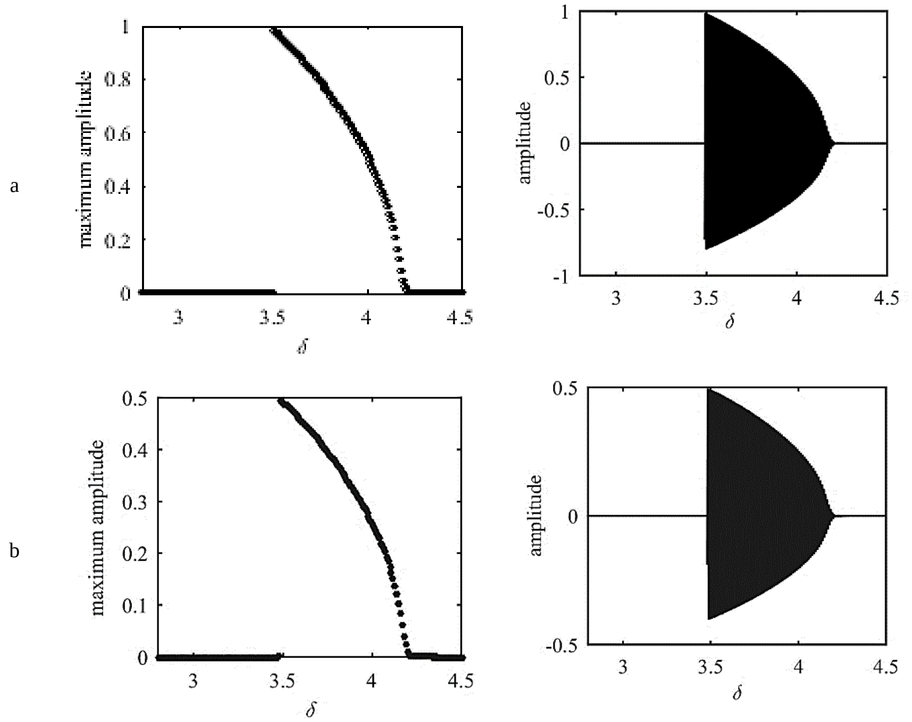

Fig. 8 The left side diagram is maximum non-dimentional amplitude and the right side is time history for each loading of δ and constant value of $\varepsilon = 0.933$ after long time elapse in corresponding tongue with $C = 0.1$. a for $\beta = 1$ and b for $\beta = 4$.

شکل 8 سمت راست پاسخ زمانی، سمت چپ ماکزیمم دامنه بی‌بعد، بعد از گذر زمان نسبتا طولانی به ازای هر بارگذاری از δ و مقدار ثابت $\varepsilon = 0.933$ در ناحیه رزونانسی متناظر با $C = 0.1$. a برای $\beta = 1$ و b برای $\beta = 4$.

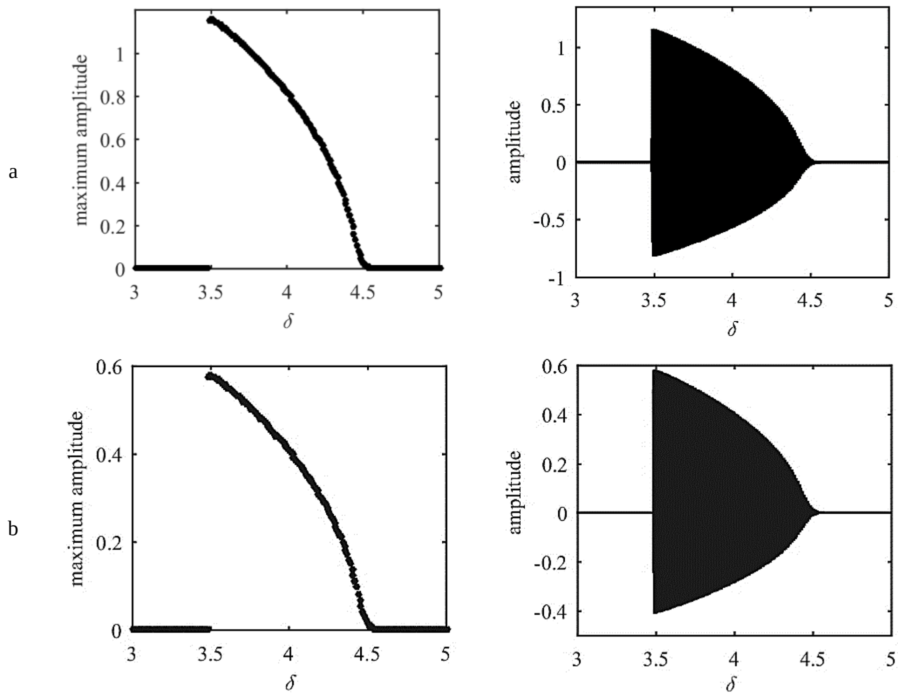

Fig. 9 The left side diagram is maximum non-dimentional amplitude and the right side is time history for each loading of δ and constant value of $\varepsilon = 1.672$after long time elapse in corresponding tongue with $C = 0.3$. a for $\beta = 1$ and b for $\beta = 4$.

شکل 9 سمت راست پاسخ زمانی، سمت چپ ماکزیمم دامنه بی‌بعد، بعد از گذر زمان نسبتا طولانی به ازای هر بارگذاری از δ و مقدار ثابت $\varepsilon = 1.672$ در ناحیه رزونانسی متناظر با $C = 0.3$. a برای $\beta = 1$ و b برای $\beta = 4$.

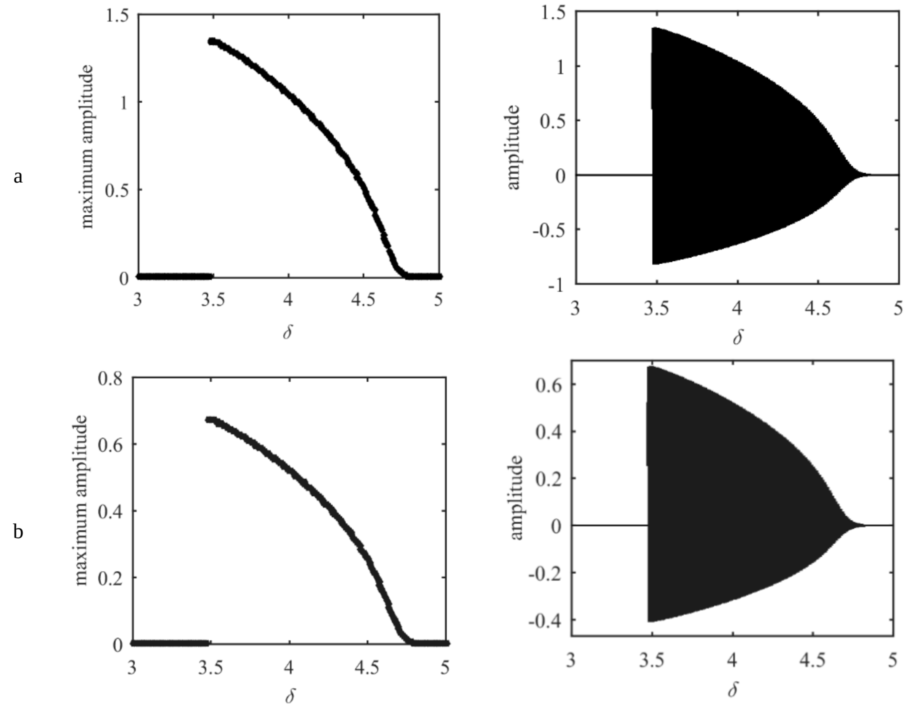

Fig. 10 The left side diagram is maximum non-dimentional amplitude and the right side is time history for each loading of δ and constant value of $\varepsilon = 2.48$ after long time elapse in corresponding tongue with $C = 0.6$. a for $\beta = 1$ and b for $\beta = 4$.

شکل 10 سمت راست پاسخ زمانی، سمت چپ ماکزیمم دامنه بی‌بعد، بعد از گذر زمان نسبتا طولانی به ازای هر بارگذاری از δ و مقدار ثابت $\varepsilon = 2.48$ در ناحیه رزونانسی متناظر با $C = 0.6$. a برای $\beta = 1$ و b برای $\beta = 4$.

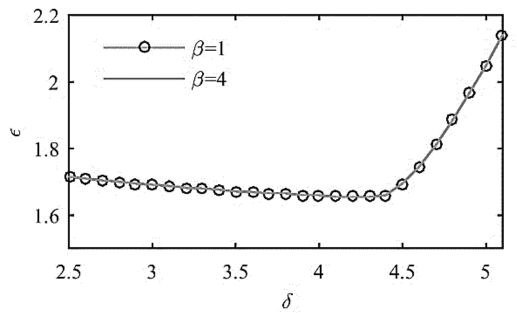

Fig. 11 The resonance tongue obtained by shooting method in subharmonic region for diverse nonlinearity coefficient in $\varepsilon - \delta$ plane for $C = 0.3$.

شکل 11 زبانه‌های رزونانسی به‌دست‌آمده از روش پرتابه‌ای در ناحیه زیرهارمونیک به ازای ضریب غیرخطینگی‌های مختلف در صفحه $\varepsilon - \delta$ و برای $C = 0.3$.

غیرخطینگی همان‌گونه که در "شکل 11" مشاهده می‌شود، دریافتیم که مساحت ناحیه رزونانسی ثابت می‌ماند؛ ولی در ترسیم پاسخ زمانی مشاهده شد که افزایش ضریب غیرخطینگی دامنه سیستم را کاهش می‌دهد. در ترسیم ماکزیمم دامنه در مقادیر مختلف δ و در یک ضریب ε ثابت، مشاهده شد که به محض ورود به داخل ناحیه رزونانسی با افزایش شدید دامنه روبه‌رو می‌شویم که این اتفاق وجود پدیده پرش را تصدیق کرد.

7- مراجع

[1] M. I. Younis, *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics, pp.*1-372, NewYork, Springer Science & Business Media, 2011.

جدول 1 مشخصات فیزیکی و هندسی میکروتیر و لایه‌های پیزوالکتریک

Table 1 Geometrical and material properties of the micro-beam and piezoelectric layers

مشخصات فیزیکی و هندسی	میکروتیر	لایه‌های پیزوالکتریک
طول (l)	600μm	600μm
عرض (a)	30μm	30μm
ارتفاع (h)	3μm	0.01μm
فاصله اولیه (g_0)	2μm	-
مدول یانگ (E)	169.61 GPa	76.6 GPa
چگالی (ρ)	2331 kg/m^3	7500 kg/m^3
ثابت پیزوالکتریک (e_{31})	-	−9.29
ثابت دی‌الکتریک (ε_0)	8.845×10^{-12} F/m	-

6-نتیجه‌گیری

در این پژوهش ناپایداری دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی یک میکروتیر ساندویچ شده با لایه‌های پیزوالکتریک تحت تحریک پارامتریک در ناحیه زیرهارمونیک بررسی شد. با استفاده از روش پرتابه‌ای زبانه‌های رزونانسی برای ضریب دمپینگ و ضریب غیرخطینگی‌های مختلف ترسیم شد. پاسخ زمانی و منحنی‌های فضای فاز برای چند نمونه‌ی گرفته شده از داخل، خارج و روی مرز ناحیه رزونانسی ترسیم شد و مشاهده شد که در خارج از ناحیه رزونانسی بعد از گذر زمان سیستم جذب نقطه تعادل استاتیکی می‌شود و بر روی مرز نواحی رزونانسی شاهد حرکت پریودیک بودیم و در داخل نواحی پدیده رزونانس قابل مشاهده بود. نتایج نشان داد که با افزایش ضریب دمپینگ مساحت ناحیه رزونانسی کاهش پیدا می‌کند. همچنین با افزایش ضریب

[2] T. R. Hsu, *MEMS & microsystems: Design, manufacture, and nanoscale engineering*, pp. 1-27, New Jersey, John Wiley & Sons, 2008.

[3] C. Liu, Recent developments in polymer MEMS, *Journal of Advanced Materials,* Vol. 19, No. 22, pp. 3783-3790, 2007.

[4] M. J. Madou, *Fundamentals of microfabrication the science of miniaturization*, pp. 1-60, United States of America, CRC press, 2002.

[5] V. K. Varadan, K. J. Vinoy, K. A. Jose, *RF MEMS and their applications*, pp. 1-120, USA, John Wiley & Sons, 2003.

[6] M. I. Younis, F. Alsaleem, D. Jordy, The response of clamped–clamped microbeams under mechanical shock, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 42, No. 4, pp. 643-657, 2007.

[7] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*, pp. 1-305, United States of America, John Wiley & Sons, 2008.

[8] M. Faraday, On a peculiar class of acoustical figures, and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces, *Philosophical transactions of the Royal Society of London,* Vol. 121, No.121, pp. 299-340, 1831.

[9] L. Rayleigh, XVII. On the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science,* Vol. 24, No. 147, pp. 145-159, 1887.

[10] A. Stephenson, On a class of forced oscillations, *The Quarterly Journal of Mathematics ath,* Vol. 37, pp. 353-360, 1906.

[11] C. V. Raman, Experimental investigations on the maintenance of vibrations, *Bulletin of the Indian Association for the Cultivation of Science,* Vol. 6, pp. 1-40, 1912.

[12] R. S. Zounes, R. H. Rand, Subharmonic resonance in the non-linear Mathieu equation, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 37, No. 1, pp. 43-73, 2002.

[13] L. A. Oropeza-Ramos, K. L. Turner, Parametric resonance amplification in a MEMGyroscope, *Proceeding of Sensors IEEE,* Irvine, CA, USA, Oct-Nov 30-3, 2005.

[14] L. A. Oropeza-Ramos, C. B. Burgner, K. L. Turner, Inherently robust micro gyroscope actuated by parametric resonance, *Proceeding of IEEE,* Wuhan, China, Jan 13-17, 2008.

[15] L. A. Oropeza-Ramos, C. B. Burgner, K. L. Turner, Robust micro-rate sensor actuated by parametric resonance, *Sensors and Actuators A: Physical,* Vol. 152, No. 1, pp. 80-87, 2009.

[16] S. Azizi, A. R. Kivi, J. Marzbanrad, Mass detection based on pure parametric excitation of a micro beam actuated by piezoelectric layers, *Microsystem Technologies,* Vol. 23, No. 4, pp. 991-998, 2017.

[17] M. H. Sadd, *Elasticity theory, applications, and numerics*, pp. 112-118, USA, Academic Press, 2009.

[18] A. S. Vahdat, G. Rezazadeh, G. Ahmadi, Thermoelastic damping in a micro-beam resonator tunable with piezoelectric layers, *Acta Mechanica Solida Sinica,* Vol. 25, No. 1, pp. 73-81, 2012.

[19] A. H. Nayfeh, P. F. Pai, *Linear and nonlinear structural mechanics*, pp. 95-300, USA, John Wiley & Sons, 2008.

[20] S. Azizi, M. R. Ghazavi, G. Rezazadeh, I. Ahmadian, C. Cetinkaya, Tuning the primary resonances of a micro resonator, using piezoelectric actuation, *Nonlinear dynamics,* Vol. 76, No. 1, pp. 839-852, 2014.

[21] A. F. D'Souza, V. K. Garg, *Advanced dynamics, modeling and analysis*, pp. 30-250, United States of America, Prentice Hall, 1984.

[22] V. Marefat Khalilabad, Control of a clamped-clamped micro-beam under mechanical shock effects using feedback linearization technique, *Modares Mechanical Engineerin*g, Vol. 16, No. 10, pp. 69-76, 2016. (in Persian فارسی)

[23] M. Sadeghi, M. Fathalilou, G. Rezazadeh, Study on the size dependent behavior of a micro-beam subjected to a nonlinear electrostatic pressure, *Modares Mechanical Engineerin*g, Vol. 16, No. 10, pp. 69-76, 2015. (in Persian فارسی)

[24] A. H. Nayfeh, B. Balachandran, *Applied nonlinear dynamics: analytical, computational and experimental methods*, pp. 84-360, USA, John Wiley & Sons, 2008.

[25] H. Rokni, R. J. Seethaler, A. S. Milani, S. Hosseini-Hashemi, X. F. Li, Analytical closed-form solutions for size-dependent static pull-in behavior in electrostatic micro-actuators via Fredholm integral equation, *Sensors and Actuators A: Physical,* Vol. 190, No. 1, pp. 32-43, 2013.

[26] A. R. Kivi, S. Azizi, J. Marzbanrad, Investigation of static and dynamic pull-in instability in a FGP micro-beam, *Sensing and Imaging,* Vol. 16, No. 1, pp. 1-16, 2015.