



بررسی تحلیلی دوشاخگی پوسته‌ی نازک استوانه‌ای تحت نیروی تصادفی عرضی

علیرضا اسنافی*

استادیار، پژوهشکده علوم و فنون هوا-دریا، دانشگاه شیراز، شیراز
* کدپستی: ۷۱۳۴۸-۵۱۱۵۴، asnafi@shirazu.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۰۴ دی ۱۳۹۲

پذیرش: ۱۹ بهمن ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۱۰ مرداد ۱۳۹۳

کلید واژگان:

پوسته‌ی استوانه‌ای

محیط ویسکوالاستیک غیر زمانمند

دوشاخگی شدن

نویز سفید

معادله‌ی FPK

در مقاله‌ی حاضر رفتار غیرخطی، ناپایداری، شرایط وقوع و نوع دوشاخگی شدن برای یک پوسته‌ی نازک استوانه‌ای تحت نیروی تصادفی عرضی بصورت کاملاً تحلیلی مطالعه شده است. نیروی تصادفی از جنس نویز سفید بوده و سازه در یک محیط ویسکوالاستیک عمومی واقع شده است. یافتن یک حل دقیق برای یک سیستم غیرخطی ویسکوالاستیک که تحت نیروهای تصادفی قرار دارد با دشواری‌هایی همراه است که این امر با به‌کارگیری معادله‌ی توانمند فوکر پلانک کولموگوروف (FPK) و لحاظ کردن ساده‌سازی‌هایی منطبق بر واقعیات کاربردی و عملی، تامین شده است. از آن‌جا که کلیه‌ی خواص آماری پاسخ یک سیستم دینامیکی تصادفی از چگالی احتمالی آن قابل استحصال است، این تابع به صورت کاملاً تحلیلی محاسبه و رفتار آن بوسیله‌ی محاسبه‌ی تعداد ریشه‌ها و اثر تغییر علامت آن‌ها بر پایداری، دوشاخگی شدن، گونه دوشاخگی شدن و رفتار غیر خطی سیستم بررسی و مطالعه شد. به جهت آن‌که نتایج برای طیف وسیعی از پوسته‌های استوانه‌ای قابل استفاده باشد، معادلات حاکمه‌ی سیستم با به‌کارگیری طیفی از اعداد بدون بعد بازنویسی و نتایج بر اساس آن‌ها بیان شد. در انتها با ذکر چند مثال، حالات مختلف اثر تغییر پارامترهای بی‌بعد در نظر گرفته شده بر رفتار، پایداری، وقوع و نوع دوشاخگی در پاسخ سیستم مورد مطالعه قرار گرفت.

Analytic bifurcation investigation of cylindrical shallow shells under lateral stochastic excitation

Alireza Asnafi*

Hydro-Aeronautical Research Center, Shiraz University, Shiraz, Iran.

* Postal code: 71348-51154, asnafi@shirazu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 25 December 2013
Accepted 08 February 2014
Available Online 01 August 2014

Keywords:
Shallow Shell
Non Aging Viscoelastic Medium
Bifurcation
White Noise Excitation
FPK Equation

ABSTRACT

In this paper, the nonlinear behavior, instability and bifurcation phenomena in the response of a cylindrical shallow shell under lateral white noise excitation are studied. The structure interacts with a general non aging viscous medium that can be modeled by relaxation or creep kernels. Using the powerful FPK equation and some practical and logical simplifications, an exact solution for such complex system including nonlinearity, viscoelasticity and randomness is obtained. Since all statistical properties of response such as mean, variance, statistical moments, central moments, etc. can be obtained from the probability density function, the behavior of this function including the number and sign of its roots and their effects on the stability, bifurcation phenomenon and the type of bifurcation is investigated and studied. In this process, using some non dimensional quantities, the governing equation and the probability density function are rearranged such that the results of simulations can be used for a broad band of cylindrical shallow shells. Finally, using some examples, the variations of the non dimensional quantities on the whole behavior, stability and bifurcation type of response are studied.

۱- مقدمه

نیروهای وارده که وجود هر کدام سبب پیچیدگی در معادلات حاکمه خواهند بود جهت مدل‌سازی دقیق‌تر سیستم و مطالعه‌ی رفتار آن مورد بررسی قرار گرفته است. باید توجه داشت که کاربرد موادی که دارای رفتار ویسکوالاستیک هستند، در بعضی صنایع، در سالهای اخیر افزایش یافته است که این موضوع به دو دلیل عمده‌ی زیر بوده است: اولاً آنکه بسیاری از صنایع دارای عملکردی در دماهای بالا هستند که سبب رفتارهای ویسکوالاستیک در مواد (حتی فلزات) میشوند و طبیعتاً در این‌گونه موارد مدل الاستیک قادر به جوابگوئی نمی‌باشد؛ ثانیاً بسیاری از مواد نظیر پلیمرها، چوب، خاک‌های مرطوب، بسیاری از فیبرهای طبیعی و مصنوعی و بافت‌ها

مدلسازی دقیق سیستمهای دینامیکی کاربردی و صنعتی عمدتاً به دلیل مشکلاتی که برای تحلیل این‌گونه مدل‌ها وجود دارد با ساده‌سازی‌هایی همراه است. هرچند در سال‌های اخیر با گسترش رایانه‌ها و فرایندهای حل عددی، احتیاج به ساده‌سازی مدل‌ها کمتر شده لکن درمباحث مربوط به یافتن پاسخ دقیق و تحلیلی برای سیستمهای دینامیکی، هنوز انتخاب مدل مناسب گامی بزرگ است.

در سیستم مورد بررسی در تحقیق حاضر که یک پوسته‌ی نازک استوانه‌ای است، سه عامل غیرخطی بودن، ویسکوالاستیسیته و تصادفی بودن

Please cite this article using:

A.R. Asnafi, Analytic bifurcation investigation of cylindrical shallow shells under lateral stochastic excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 5, pp. 77-84, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A.R. Asnafi, Analytic bifurcation investigation of cylindrical shallow shells under lateral stochastic excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 5, pp. 77-84, 2014 (In Persian)

دارای رفتاری هستند که با مدل ویسکوالاستیک توجیه آنها دقیق‌تر است. همچنین هرچند مدل‌سازی بسیاری از مسائل مربوط به ارتعاشات تصادفی به وسیله مدل کردن نیروها با توابع پریودیک انجام می‌شود و می‌شود اما در مدل‌های دقیق‌تر برای آنالیز این‌گونه مسائل، روشی غیر از روش‌های معمول به کار گرفته می‌شود که همان روش‌های آماری است. در این روش به جای استفاده از توابع ریاضی، از یک فضای آماری که متکی بر پارامترهای احتمالی نظیر تابع چگالی احتمالی^۱، میانگین، واریانس یا دیگر مشخصات آماری استفاده می‌شود. به کارگیری این روش در تحقیقات جدیدتر، باعث بهبود زیادی در مسائل خصوصاً در حوزه هوا و فضا شد. از اولین کارها در به-کارگیری این روش می‌توان به مرجع [۱] اشاره کرد که ارتباط تحریک گوسی (نرمال) یک سیستم خطی با پاسخ گوسی آن مورد مطالعه قرار گرفته بود.

از دهه ۸۰ میلادی به بعد به دلیل توسعه روش‌های عددی و خصوصاً با استفاده از الگوریتم تابع تبدیل فوریه، گام‌های زیادی در زمینه حل‌های آماری برداشته شد که عمدتاً به دلیل گسترش رایانه‌ها بود. مسائل مربوط به تیرها و میله‌ها به عنوان سیستم‌های الاستیک یا ویسکوالاستیک یک بعدی توسط افراد مختلفی مورد مطالعه بوده است که به عنوان نمونه از تحقیقات در سال‌های اخیر، می‌توان به تحقیقات درودوف [۲] که در آن‌ها پایداری میله‌های ویسکوالاستیک غیرپایستار در شرایط مختلف، تحت نیروهای تصادفی از نوع نویز سفید را مورد مطالعه قرار داده و شرایط پایداری را بیان نموده است، اشاره کرد.

در مورد مسائل دو بعدی نظیر ورق‌ها و پوسته‌ها، اولین تحقیقات در این زمینه مربوط به مطالعه ارتعاشات این‌گونه سیستم‌ها حین عبور جریان سیال در اطراف آن‌هاست. عمده‌ی مدل‌سازی‌ها ابتدا با نیروهای معین پریودیک انجام شده است مثل پژوهش داول [۳] که رفتار ورق الاستیک خطی را تحت نیروی آیرودینامیک بررسی کرده است. استفاده از تئوری‌های فرایندهای تصادفی در این‌گونه مسائل بیشتر به بررسی پدیده‌ی فلاتر پل ختم می‌شود که البته طیف وسیعی از تحقیقات را شامل می‌شود [۴].

در مورد مسائل دو بعدی نظیر ورق‌ها و پوسته‌ها، اولین تحقیقات در این زمینه مربوط به مطالعه ارتعاشات این‌گونه سیستم‌ها حین عبور جریان سیال در اطراف آن‌هاست. عمده‌ی مدل‌سازی‌ها ابتدا با نیروهای معین پریودیک انجام شده است مثل پژوهش داول [۳] که رفتار ورق الاستیک خطی را تحت نیروی آیرودینامیک بررسی کرده است. استفاده از تئوری‌های فرایندهای تصادفی در این‌گونه مسائل بیشتر به بررسی پدیده‌ی فلاتر پل ختم می‌شود که البته طیف وسیعی از تحقیقات را شامل می‌شود [۴].

در مورد پایداری و رفتار نوسانگرهای غیرخطی تحت بارهای تصادفی و یافتن شرایطی برای پایداری یا طبقه بندی رفتاری آنها بصورت عددی و تحلیلی تحقیقات فراوانی انجام شد است که عموماً در حوزه‌ی مسائل تحلیلی بر استفاده از معادله FPK2 و یافتن حل‌های دقیق یا تقریبی برای این معادله استوار است. معروف‌ترین محققین در این زمینه به همراه بعضی از مقاله هایشان که از انتهای دهه ۸۰ میلادی تاکنون در تحقیقات دیده می‌شود عبارتند از لین و کای [۵] و [۶]. از دیگر تحقیقات در زمینه حل این معادله به صورت دقیق و تقریبی که جزء تحقیقات روز هستند می‌توان به پژوهش‌های رانگ و همکاران [۷]، ژو و همکاران [۸] و کراوفورد و همکاران [۹] اشاره کرد.

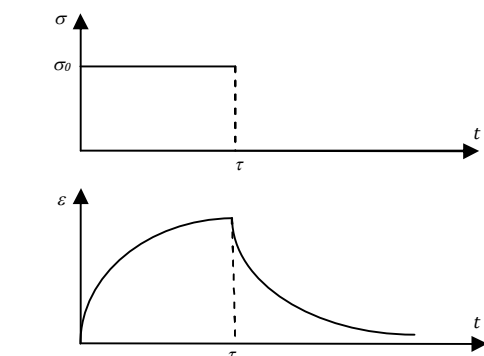
به کارگیری روش‌های ذکر شده در پاراگراف قبل برای مسائل کاربردی‌تر همچون ورقه‌ها و پوسته‌ها کمتر دیده شده اما بتدریج در حال گسترش است بعنوان نمونه می‌توان به مرجع [۱۰] که به بررسی پایداری ورق در حال حرکت محوری و تحت اثر مولفه‌های تصادفی پرداخته است اشاره نمود. از آنجا که حل معادلات تصادفی مستلزم یافتن پارامترهای آماری آن بوده و کلیه خواص آماری از تابع چگالی احتمالی یک متغیر تصادفی قابل استحصال است [۱۱، ۱۲]، کلیه‌ی فعالیتها در حوزه مسائل ارتعاشات تصادفی مبتنی بر یافتن چگالی احتمالی پاسخ است. در مقاله حاضر از معادله توانمند

برای محاسبه‌ی تابع چگالی احتمالی ارتعاشات غیر خطی پوسته نازک استوانه‌ای در تماس با محیط ویسکوالاستیک با ویژگی‌های غیرزمانمند استفاده شده است. مدل‌های مختلفی در تحقیقات جهت مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک پیشنهاد شده است که عمدتاً بر پایه‌ی استفاده از عناصر فنر و میراکننده‌ی خطی هستند [۱۳، ۱۴]. در سال‌های اخیر با گسترش تحقیقات در این زمینه و به کارگیری هسته‌ی حافظه^۲ برای ماده ویسکوالاستیک [۱۵، ۱۶]، جامعیتی در تدوین این نوع مدل‌سازی‌ها مشاهده می‌شود که بر پایه‌ی تعریف درست هسته‌ی حافظه و چگونگی تابعیت آن از زمان است [۱۷، ۱۸]. شرح بیشتر چگونگی مدل‌سازی این مواد در بخش ۲-۲ ارائه شده است.

۲- تئوری مساله

۲-۱- مروری بر روابط تنش و کرنش در مواد ویسکوالاستیک غیرزمانمند
به غیر از رفتار الاستیک و پلاستیک مواد که در اولی کل تغییر فرم پس از برداشتن تنش از روی سیستم به وضعیت نخست می‌رسد و در دومی مقداری از آن همیشه باقی می‌ماند، در بعضی از مواد با اعمال تنش ثابت، کرنش با آهنگ رشد نزولی افزایش یافته و در صورتیکه بار از روی قطعه برداشته شود، کرنش نیز بتدریج و با آهنگی مشخص (معمولاً بصورت تابع نمایی) کاهش می‌یابد (شکل ۱). این رفتار عموماً با مدل ویسکوالاستیک شناخته و شبیه-سازی می‌شود.

واضح است که هر چه زمان اعمال بار در یک ماده ویسکوالاستیک بیشتر شود، کرنش افزایش یافته اما نرخ افزایش آن با گذشت زمان کاهش می‌یابد. بنابراین عامل زمان نیز در معادلات متشکله این‌گونه مواد نقش خواهد داشت. مدل‌های مختلفی جهت مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک در تحقیقات قابل رویتند که عمدتاً با به کارگیری توابع فنر و دمپر خطی و ترکیبات سری و موازی آن‌ها بدست آمده‌اند. از آن جمله می‌توان به مدل‌های معروف کلوین، ماکسول برگرز، کلوین و ماکسول تعمیم یافته اشاره کرد [۱۴]. با توجه به گستردگی مدل‌ها، بعضی محققین [۱۳، ۲۱] با استفاده از اصل برهم نهی بولتزمان تلاش کرده‌اند یک رابطه‌ی کلی بین تنش و کرنش با استفاده از دو ویژگی اساسی هسته‌ی واریدگی^۴ و هسته‌ی خز^۵ بیان نمایند که در تحقیق حاضر نیز از این شیوه جهت مدل‌سازی مساله استفاده شده است.



شکل ۱ نمودار تنش و کرنش بر حسب زمان برای یک گونه‌ی کلی از ماده ویسکوالاستیک

3- Memory Kernel
4- Relaxation Kernel
5- Creep Kernel

1- Probability density function
2- Fokker Planck Kolmogorov

۲-۲- اصل برهم نهی بولتزمن

در این قسمت چگونگی ارتباط بین تنش، کرنش و هسته‌های وارهیدگی و خزش برای یک نمونه که تحت بار محوری در حالت یک بعدی قرار دارد بررسی شده است [۱۴، ۲۲]. بر اساس این اصل چنانچه یک نمونه را (یک میله با مقطع مستطیلی شکل) که در حالت آزاد (تنش صفر) قرار دارد در لحظه $t_0=0$ تحت بار کششی محوری قرار دهیم در بازه $[0, t]$ ، مقدار تنش در هر لحظه تابعی از تاریخچه کرنش بوجود آمده می‌باشد مطابق رابطه (۱):

$$\sigma(t) = \int_0^t x^*(t, \tau) d\varepsilon(\tau) \quad (1)$$

که تابع $x^*(t, \tau)$ تابعی انتگرال‌پذیر نسبت به متغیر τ برای هر t ثابتی می‌باشد؛ رابطه ۱ یک رابطه کلی بین تنش و کرنش در مواد ویسکوالاستیک خطی را بیان می‌نماید. اگر تنش و کرنش توابعی به حد کافی هموار بوده و در زمان صفر برابر صفر باشند، با انتگرال‌گیری جزء به جزء از رابطه (۱) می‌توان به رابطه (۲) رسید:

$$\sigma(t) = x^*(t, t)\varepsilon(t) - \int_0^t \frac{\partial x^*(t, \tau)}{\partial \tau} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (2)$$

تابع $x^*(t, \tau)$ به صورت رابطه (۳) بیان می‌شود:

$$x^*(t, \tau) = E(\tau) + Q(t, \tau) \quad (3)$$

و $E(\tau)$ و $Q(t, \tau)$ به ترتیب مدول یانگ فعلی^۱ و سنجش وارهیدگی^۲ نامیده شده و دارای روابط (۴) هستند:

$$E(\tau) = x^*(\tau, \tau) \quad (4)$$

$$Q(t, \tau) = x^*(t, \tau) - x^*(\tau, \tau)$$

همچنین هسته وارهیدگی با رابطه (۵) تعریف می‌شود:

$$R^*(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} \frac{\partial x^*(t, \tau)}{\partial \tau} \quad (5)$$

با استفاده از روابط (۲) تا (۵) رابطه مهم (۶) که معادله‌ی متشکله برای مواد ویسکوالاستیک خطی می‌باشد قابل استحصال است:

$$\sigma(t) = E(t) \left[\varepsilon(t) - \int_0^t R^*(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right] \quad (6)$$

همانطور که از رابطه (۶) مشخص است هسته وارهیدگی به دو عامل t و τ وابستگی دارد که این مسأله از خواص مواد با ویژگی زمانمند^۳ می‌باشد؛ در صورتیکه انتخاب مبدأ زمانی بر خواص ماده موردنظر در آزمایش تأثیر نگذارد یا به عبارت بهتر ویژگی ماده مورد بحث از نوع غیر زمانمند^۴ باشد می‌توان گفت که x^* تابعیت از $(t-\tau)$ دارد [۲۲]، لذا رابطه‌ی (۶) به فرم رابطه‌ی (۷) بازنویسی می‌شود:

$$\sigma(t) = E \left[\varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right] \quad (7)$$

رابطه‌ی (۷) رابطه‌ای مهم برای ارتباط دادن تنش و کرنش در مواد غیر زمانمند با داشتن هسته وارهیدگی است. مهمترین دلیل استفاده از رابطه‌ی (۷) جامعیت آن است. بعبارت دیگر تمامی حالات ویسکوالاستیسیته خطی مثل وارهیدگی تنش، خزش کرنش و پسماند^۵ و مدل‌های مشهور مواد ویسکوالاستیک خطی با این رابطه قابل مدل‌سازی هستند [۲۲] و توسعه مدل‌سازی برای مواد غیرخطی [۲۵-۲۳] و شبه خطی [۲۶] نیز بر اساس این اصل انجام شده است. البته نحوه دیگری از نگرش با به کارگیری هسته‌ی خزش بجای هسته‌ی وارهیدگی وجود دارد که در آن فرض بر آنست که

کرنش لحظه‌ای تابعی از تاریخچه‌ی تنش موجود در نمونه باشد [۲۲، ۲۷]. بر این اساس رابطه‌ی (۸) تعریف می‌شود:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E(t)} \left[\sigma(t) + \int_0^t K(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau \right] \quad (8)$$

که رابطه‌ی تنش و کرنش برای مواد ویسکوالاستیک با ویژگی زمانمند در حالت کلی بوده و رابطه (۹) همین رابطه برای مواد با ویژگی غیرزمانمند است.

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right] \quad (9)$$

که K هسته‌ی خزش می‌باشد.

۲-۳- معادله‌ی حاکمه‌ی پوسته‌ی نازک استوانه‌ای

مطابق شکل ۲، یک پوسته‌ی الاستیک استوانه‌ای که در امتداد دو لبه طولانی خود دارای تکیه‌گاه ساده بوده و بر بستری ویسکوالاستیک و تحت بار جانبی تصادفی q قرار دارد را در نظر بگیرید. با فرض آنکه بار گسترده‌ی جانبی کاملاً یکنواخت توزیع شده است می‌توان خیز را به عنوان تابعی فقط از x دانست. در این صورت معادله‌ی حاکمه برای ارتعاشات جانبی مطابق رابطه‌ی (۱۰) عبارتست از [۲۷]:

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{N}{r} + cO\{W\} = q \quad (10)$$

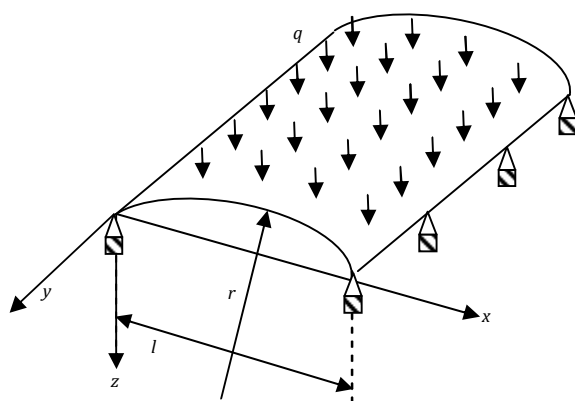
که W خیز، ρ دانسیته، h ضخامت، D سختی خمشی استوانه‌ای، r شعاع انحنای سطح میانی پوسته، N نیروی عمود بر سطح میانی پوسته و توزیع شده بر واحد طول پوسته، C ثابت بستر^۶ و $O\{\bullet\}$ عملگر ارتباط تغییر فرم و نیرو برای ماده ویسکوالاستیک می‌باشد.

با توجه به شرایط تکیه‌گاه ساده که امکان حرکت در جهت x و همچنین z را در طول هر دو لبه‌ی بلند پوسته غیر ممکن می‌کند و با فرض ثابت بودن N رابطه‌ی (۱۱) نتیجه می‌شود [۲۷]:

$$N = \frac{Eh}{(1-\nu^2)l} \left(\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{r} \int_0^l W dx \right) \quad (11)$$

که E مدول الاستیسیته یانگ، l وتر استوانه در جهت x (شکل ۲ را ببینید) و ν ضریب پواسون است. با جای‌گزینی رابطه (۱۱) در (۱۰) یک معادله‌ی انتگرالی دیفراسیلی پاره‌ای حاصل می‌شود که بایستی با روش‌هایی مناسب که مختص تقریب این‌گونه سیستمها است مسأله ساده‌تر گردد. مثلاً با استفاده از روش گلرکین و بسط خیز با مود غالب اول بصورت رابطه‌ی (۱۲)،

$$W(x, t) = \bar{w}(t) \sin \frac{\pi x}{l} \quad (12)$$



شکل ۲ پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بار گسترده‌ی تصادفی جانبی

- 1- Current Young Modulus
- 2- Relaxation Measure
- 3- Aging Material
- 4- Nonaging Material
- 5- Hysteresis

ویسکوالاستیک [۲۷،۲۸] نسبت به عدد ۱، ساده‌سازی زیر در نوشتن معادله (۲۰) لحاظ شده است:

$$(1 + \tilde{K})(\bullet) \equiv \tilde{K}(\bullet) = \int_0^t C_k \times \bullet(\tau) d\tau \quad (21)$$

با مشتق‌گیری ساده از معادله‌ی انتگرالی (۲۰) معادله‌ی (۲۲) حاصل می‌شود:

$$w' + \left(\frac{96s^2}{\pi^6} + 1\right)w - \frac{48s}{\pi^3}w^2 + 3w^3 = F \quad (22)$$

که باز به جهت سهولت به کارگیری معادله برای حالات کلی تر، روابط بی‌بعد (۲۳) در نگارش آن لحاظ شده است:

$$(\bullet)' = \frac{\partial}{\partial t^*} t^*, t^* = \frac{C_k}{\beta} t \quad (23)$$

معادله‌ی (۲۲) یک معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی تصادفی است که بررسی رفتار غیرخطی آن با روشهای دقیق غیرعددی هدف مقاله حاضر است. باید توجه داشت که با بی‌بعد کردن پارامترهای مساله (روابط ۱۶، ۱۸ و ۲۳) نتایج حاصل از این تحقیق برای طیف وسیعی از پوسته‌های استوانه‌ای قابل استفاده است که می‌تواند در آینده مورد بررسی قرار گیرد.

۲-۴- چگالی احتمالی پاسخ یک معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی با ورودی نویز سفید

همان‌طور که اشاره شد کلیه‌ی خواص آماری یک متغیر تصادفی با چگالی احتمال آن تعیین می‌شود، یافتن این چگالی از اهمیت ویژه‌ای برای تعیین نحوه‌ی رفتار سیستم برخوردار است. روش‌های مختلفی برای محاسبه‌ی چگالی احتمال وجود دارد که از بهترین آن‌ها در هر دو حوزه مسائل تحلیلی و عددی روش FPK و در حوزه‌ی مسائل صرفاً عددی شبیه‌سازی مونت کارلو است [۲۹]. اساس روش FPK بر جای‌گزین کردن یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای غیرتصادفی بر حسب چگالی احتمال متغیر مطلوب به‌جای معادله دیفرانسیل معمولی تصادفی بر حسب متغیر مطلوب است. مهم‌ترین مشکل در طی این تبدیل، امکان سخت‌تر شدن حل معادله‌ی جدید است هر چند تحقیقات مفصلی از اواخر دهه ۸۰ میلادی تاکنون برای حل این معادله ارائه شده است که در قسمت مقدمه به بعضی از آن‌ها اشاره شده است. حال فرض کنید معادله دیفرانسیل یک سیستم دینامیکی که محرک‌های خارجی آن از جنس نویز سفید^۱ هستند، به فرم معادله (۲۴) باشد:

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t) + g(X, t)\xi(t) \quad (24)$$

که X بردار فضا‌های حالت سیستم با بعد n و g ماتریسی با n سطر و m ستون است و ξ برداری با بعد m می‌باشد که مولفه‌های آن فرایندهایی مستقل از جنس نویز سفید نرمال ایستا با شدت ۱ می‌باشند. می‌توان نشان داد که چگالی احتمالی متناظر با پاسخ معادله (۲۴) از رابطه‌ی (۲۵) که مشهور به معادله‌ی FPK است قابل استحصال است [۱۲، ۲۷]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial X_i} (f_i P) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial X_i^2} (g_{ij} P) \quad (25)$$

که P چگالی احتمالی پاسخ است لذا با توجه به معادلات (۲۵) و (۲۲)، معادله‌ی FPK برای سیستم مورد نظر در این مقاله (معادله (۲۲)) به فرم معادله‌ی (۲۶) قابل نگارش است:

$$\frac{\partial P}{\partial t^*} = -\frac{\partial}{\partial w} \left(\left(-\frac{96s^2}{\pi^6} + 1 \right) w + \frac{48s}{\pi^3} w^2 - 3w^3 + F_0 \right) P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} (k^2 P) \quad (26)$$

و اعمال رابطه (۱۲) در (۱۱) و انتگرال‌گیری بر روی دامنه می‌توان به رابطه (۱۳) برای N رسید:

$$N = \frac{Eh\pi^2}{4(1-\nu^2)l^2} \left(\tilde{w}^2 - \frac{8l^2}{\pi^3 r} \tilde{w} \right) \quad (13)$$

با جای‌گذاری روابط (۱۳) و (۱۲) در (۱۰) و ضرب کل معادله در $\sin(\pi x/l)$ و انتگرال‌گیری بر روی دامنه، می‌توان به رابطه‌ی (۱۴) رسید:

$$\ddot{\tilde{w}} + \frac{\pi^4 D}{l^4 \rho h} \tilde{w} + \frac{3\pi^4 D}{l^4 \rho h} \left(\tilde{w}^3 - \frac{12l^2}{\pi^3 r} \tilde{w}^2 + \frac{32l^4}{\pi^6 r^2} \tilde{w} \right) + \frac{c}{\rho h} O\{\tilde{w}\} = \frac{4}{\pi \rho h} q \quad (14)$$

عملگر O برای ماده ویسکوالاستیک کلی با ویژگی غیر زمانمند مطابق رابطه‌ی (۷) به شکل رابطه‌ی (۱۵) بیان می‌گردد:

$$O\{\bullet\} = (1 - \tilde{R})(\bullet) \quad (15)$$

$$\tilde{R}(\bullet) = \int_0^t R(t - \tau) \times \bullet(\tau) d\tau$$

که $\tilde{R}$ عملگر هسته‌ی وارهدگی نامیده می‌شود [۱۲، ۱۳]. لذا با اعمال معادله‌ی (۱۵) در (۱۴) یک معادله‌ی غیرخطی تصادفی انتگرالی دیفرانسیلی حاصل می‌شود. با توجه به وجود عامل تصادفی q در معادله، حل معادله به روشهای معین امکان‌پذیر نبوده و بایستی به طرق دیگر به دنبال یافتن مشخصات پاسخ همچون میانگین، واریانس و غیره بود. همان‌طور که ذکر شد کلیه‌ی مشخصات آماری یک متغیر تصادفی از روی چگالی احتمالی آن قابل محاسبه است، لذا در صورت یافتن رابطه‌ای برای چگالی احتمالی پاسخ، هدف مورد نظر تامین شده است.

همچنین با به کارگیری پارامترهای بی‌بعد، نتایج تحقیق برای طیف بزرگی از پوسته‌های استوانه‌ای قابل استفاده خواهد شد. لذا در صورتی که خیز بدون بعد و نسبتی از مربع طول به سطح مقطع پوسته به شکل روابط (۱۶) تعریف شوند:

$$w = \frac{\tilde{w}}{h}, S = \frac{l^2}{rh} \quad (16)$$

می‌توان معادله‌ی (۱۴) را به شکل رابطه‌ی (۱۷) بازنویسی کرد:

$$\frac{1}{\omega^2} \ddot{w} + w + 3\left(w^3 - \frac{12s}{\pi^3} w^2 + \frac{32s^2}{\pi^6} w\right) + \beta(1 - \tilde{R})w = F \quad (17)$$

که

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^4 D}{l^4 \rho h}}, \beta = \frac{c}{\rho h \omega^2}, F = \frac{4}{\pi \rho h^2 \omega^2} q \quad (18)$$

در رابطه‌ی (۱۸) درواقع، ω فرکانس طبیعی نوسانات نوسانگر خطی متناظر می‌باشد. با توجه به ضرائب معادله (۱۷) و تقسیم نیروی اینرسی بر ω^2 ، که عموماً عدد بزرگی است و در تماس بودن پوسته با بستر ویسکوالاستیک که امکان تغییرات سریع را برای سرعت خیز از بین می‌برد می‌توان جهت حل مساله از جمله‌ی اینرسی صرف‌نظر کرده و شرایط را شبه استاتیک فرض کرد. واضح است که با توجه به وجود عملگر ماده ویسکوالاستیک، معادله‌ی حاکمه زمانمند است.

همچنین باید توجه داشت که با مقایسه‌ی روابط (۷) و (۹) می‌توان نشان داد:

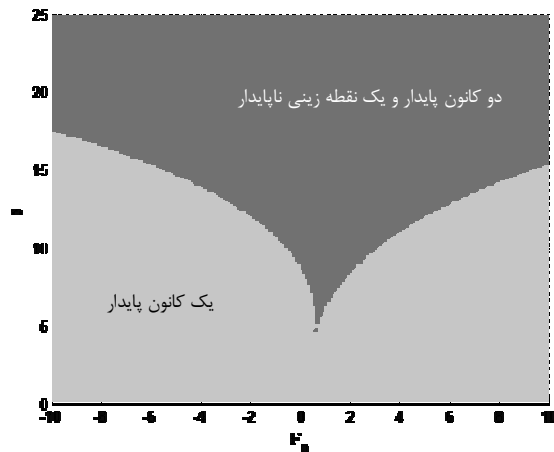
$$(1 - \tilde{R})^{-1} = (1 + \tilde{K}) \quad (19)$$

که $\tilde{K}$ عملگر هسته‌ی خزش است. لذا رابطه‌ی (۱۷) به فرم رابطه‌ی (۲۰) بازنویسی می‌شود:

$$w = \frac{1}{\beta} \tilde{K} \left(F - w - 3\left(w^3 - \frac{12s}{\pi^3} w^2 + \frac{32s^2}{\pi^6} w\right) \right) \quad (20)$$

لازم به ذکر است که با توجه به بزرگی جمله عملگر هسته‌ی خزش در مواد

1- White-Noise



شکل ۳ تعداد و گونه‌ی اکسترممهای تابع چگالی احتمالی

شکل ۳ بخوبی بیان می‌دارد که رفتار سیستم برای پارامترهای بی بعد s و F_0 چگونه تغییر می‌کند؛ بعنوان مثال با بزرگتر شدن پارامتر بی بعد s (رابطه (۱۶)) که نمادی از نسبت مربع طول به حاصل ضرب شعاع انحنا و ضخامت پوسته است و می‌توان آن را شبیه ضریب رعنایی^۲ در کماتش معمولی ستون-ها دانست، امکان وجود ارتعاشات پایدار مجانبی حول یک نقطه‌ی تعادل کم شده و بدلیل غالب شدن دو نقطه‌ی تعادل پایدار و یک نقطه‌ی زینی ناپایدار، وجود پرش بین دو حوزه‌ی تعادلی قابل تصور است. این امر البته با فیزیک مساله نیز قابل توجیه است.

در بخش بعد با در نظر گرفتن شکل کلیدی ۳ به بررسی چند وضعیت خاص و بحث در نتایج رفتار سیستم پرداخته شده است.

۴- مثالهای حل شده و بحث در نتایج

در این قسمت، از آن‌جا که شکل کلیدی ۳ مبنای تشخیص رفتار غیرخطی سیستم است تلاش شده است تا تابع چگالی احتمالی در حالات پایداری مجانبی حول یک نقطه تعادل، شروع ناپایداری و رفتار پس از دوشاخه‌ای شدن که شامل پرش بین حوزه‌های تعادلی است بررسی گردد.

۴-۱- پایداری مجانبی حول مبدا یا نزدیک‌ترین نقطه به آن

کلیه‌ی مناطق کم‌رنگ در شکل ۳، شامل مواردی است که در آن چگالی احتمال دارای یک ریشه می‌باشد. این امر به معنای وجود یک نقطه‌ی تعادل پایدار حول مبدا یا اطراف آن (با توجه به مقدار F_0) است. در صورتی که مقدار F_0 (میانگین نیروی جانبی) دقیقاً صفر باشد این نقطه در مبدا و در غیر این‌صورت در نزدیکی آن رخ می‌دهد.

شکل ۴، چگالی احتمالی پاسخ برای وضعیت $s = 8$ و $F_0 = -2$ و مقادیر مختلف k را نشان می‌دهد. مطابق این شکل، بیش‌ترین مقدار چگالی احتمال که منحصربفرد هم می‌باشد در نزدیکی مبدا رخ داده و با دور شدن از نقطه‌ی تعادل چگالی شدت افت می‌کند که نشان از کانون پایدار مجانبی است. هم-چنین افزایش مقدار k که نشان‌دهنده‌ی شدت بار اغتشاش خالص است تأثیری بر نوع و کیفیت رفتار ندارد اما در کمیت آن اثر می‌گذارد.

۴-۲- وجود پرش بین دو حوزه‌ی تعادلی

در صورتی که شرایط مساله بگونه‌ای باشد که پارامترهای مساله در مناطق پررنگ شکل ۳ واقع شود، آن‌گاه نقطه‌ی تعادل پایدار نزدیک مبدا ناپایدار شده و دو نقطه‌ی تعادل پایدار جدید با فاصله متقارن نسبت به مبدا تشکیل خواهد شد.

که بار تصادفی بصورت رابطه‌ی (۲۷) فرض شده است:

$$F = F_0 + k\xi(t) \quad (27)$$

در واقع F_0 مقدار میانگین و ξ همان مقدار اغتشاش خالص است که با شدت k به سیستم وارد می‌شود (به رابطه (۱۸) نیز توجه شود).

حل معادله‌ی (۲۶) بفرم تحلیلی در حالت کلی وجود ندارد [۵،۶] اما چنانچه رفتار مانای سیستم مد نظر باشد می‌توان حل ایستای سیستم را با صفر قرار دادن جمله سمت چپ معادله‌ی (۲۶) بدست آورد. در این‌حالت، معادله‌ی (۲۶) به یک معادله‌ی دیفرانسیل عادی رسته یک تقلیل پیدا کرده و حل عمومی آن به فرم معادله‌ی (۲۸) خواهد شد:

$$P = \bar{C} \exp \left[-\frac{2}{k^2} \left(\left(\frac{96s^2}{\pi^6} + 1 \right) \frac{w^2}{2} - \frac{48s}{\pi^3} \frac{w^3}{3} + 3 \frac{w^4}{4} - F_0 w \right) \right] \quad (28)$$

با توجه تعریف چگالی احتمالی [۱۱] که بایستی در روابط (۲۹) صدق کند $P \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(X) dX = 1 \quad (29)$$

$$X \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial X} = 0, P(X) \rightarrow 0$$

ضریب تابع نمایی در معادله‌ی (۲۸) به فرم رابطه‌ی (۲۹) در نظر گرفته می‌شود:

$$\bar{C} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{2}{k^2} \left(\left(\frac{96s^2}{\pi^6} + 1 \right) \frac{w^2}{2} - \frac{48s}{\pi^3} \frac{w^3}{3} + 3 \frac{w^4}{4} - F_0 w \right) \right] dw \right)^{-1} \quad (30)$$

درواقع ضریب معرفی شده در رابطه‌ی (۳۰)، ضریب نرمالیزه کردن است. معادله‌ی (۲۸)، نشان‌دهنده‌ی چگالی احتمال پاسخ در حالت ایستا برای پارامترهای بی‌بعد موجود است. در بخش بعد با مطالعه‌ی دقیق این معادله، وضعیت پایداری، دوشاخه‌ای شدن، چگونگی آن و رفتار غیرخطی سیستم بررسی می‌گردد.

۳- آنالیز پایداری و دوشاخه‌ای شدن پاسخ

مطابق تعریف ارائه شده در رابطه‌ی (۲۹)، چگالی احتمالی، کمیتی همواره مثبت با می‌نیمم مطلق صفر است. اکسترممهای این تابع که از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شوند نقش کلیدی در مطالعه پایداری و رفتارهای غیرخطی سیستم دارند. به عبارت بهتر مطابق رابطه‌ی (۳۱)،

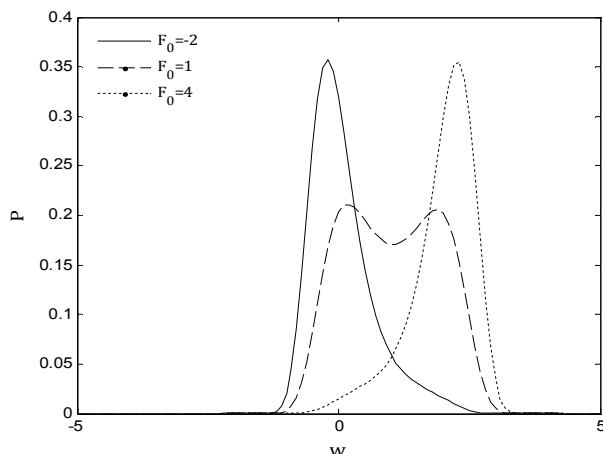
$$\frac{\partial P}{\partial w} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial w} \left(\left(\frac{96s^2}{\pi^6} + 1 \right) \frac{w^2}{2} - \frac{48s}{\pi^3} \frac{w^3}{3} + 3 \frac{w^4}{4} - F_0 w \right) = 0 \quad (31)$$

اکسترممهای تابع چگالی احتمالی از رابطه‌ی (۳۲)

$$3w^3 - \frac{48s}{\pi^3} w^2 + \left(\frac{96s^2}{\pi^6} + 1 \right) w - F_0 = 0 \quad (32)$$

حساب می‌شوند که دقیقاً منطبق بر نقاط تعادل سیستم اصلی هستند (کافیست در معادله‌ی (۲۲) جملات دینامیکی را صفر قرار دهیم). لذا مطالعه‌ی رابطه‌ی (۳۲) از لحاظ تعداد ریشه‌ها نقش کلیدی در تشخیص رفتار و پایداری سیستم دارد.

شکل ۳، تعداد ریشه‌ها و نوع نقطه تعادل متناظر با آن را برای رابطه‌ی (۳۲) بر حسب پارامترهای بدون بعد s و F_0 نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، مرز بین منطقه‌ی کم‌رنگ و پررنگ، به عنوان لحظه‌ی دوشاخه‌ای شدن پاسخ که از گونه چگالی^۱ است در نظر گرفته می‌شود (شکلهای بخش بعد را هم ببینید).



شکل ۷ چگالی احتمالی پاسخ برای وضعیت $s = 8$ و $k = 2$ و مقادیر مختلف F_0 برابر با منفی ۲ تا ۴ طی شده از مسیر افقی شکل ۶

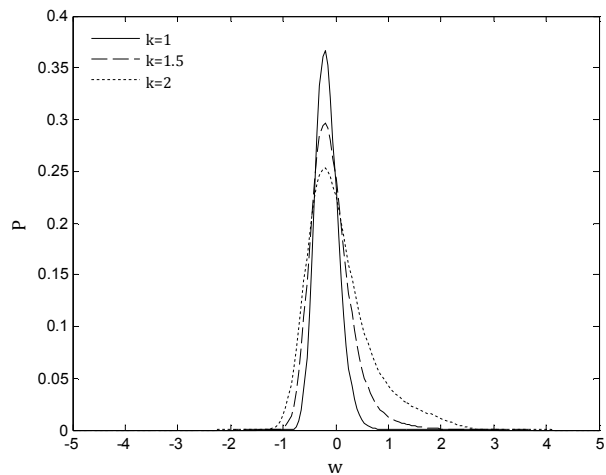
پر واضح است که به دلیل وجود میانگین مثبت برای نیروی جانبی، وزن حوزه‌ی تعادلی در سمت مثبت محور پاسخ بزرگ‌تر است.

۴-۳- نحوه‌ی دوشاخه شدن پاسخ با تغییر در میانگین نیروی جانبی
 مطابق شکل ۶، در صورتی که مقدار میانگین نیروی جانبی بر روی پیکان افقی تغییر کند، مطابق آنچه انتظار می‌رود ابتدا رفتاری پایدار حول نقطه‌ی تعادل نزدیک به مبدا از سمت چپ محور پاسخ مشاهده شده که با عبور از مرز دوشاخه‌ای شدن، به رفتاری نوسانی حول دو حوزه‌ی تعادلی پایدار در حضور یک نقطه‌ی تعادل ناپایدار خواهد انجامید. با افزایش مقدار میانگین و عبور از مرز، مجدداً رفتار سیستم به یک نقطه‌ی تعادل پایدار نزدیک مبدا از طرف سمت راست پاسخ میل خواهد کرد. در شکل ۷، چگالی احتمال پاسخ برای این تغییر در ابتدا، میان و انتهای مسیر طی شده رسم شده است. همچنین در شکل ۸، چگونگی تغییرات چگالی احتمالی برای این وضعیت به صورت پیوسته نشان داده شده است.

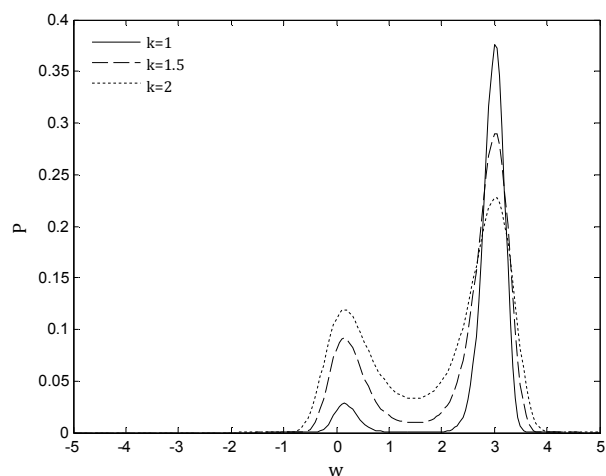
۴-۴- نحوه‌ی دوشاخه‌ای شدن پاسخ با تغییر در مقدار پارامتر بی بعد S
 اگر مطابق شکل ۶، مقدار پارامتر بی بعد s با ثابت بودن بقیه‌ی پارامترها در جهت پیکان عمودی تغییر کند، انتظار می‌رود با گذر از مرز دوشاخه‌ای شدن، دوشاخگی چنگالی مشاهده شود. در شکل‌های ۹ و ۱۰ همانند آنچه در بخش ۴-۳، انجام شد، چگالی احتمال و نحوه تغییر آن هنگام تغییر پارامتر بی بعد s ترسیم شده است.

۵- نتیجه گیری

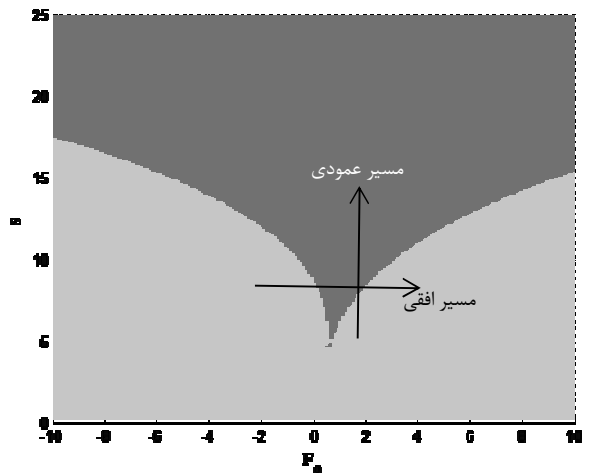
در این تحقیق با استفاده از اصل برهم‌نهی بولتزمن، قانونی عمومی برای محیط ویسکوالاستیک در نظر گرفته و رفتار تحلیلی غیر خطی یک پوسته‌ی نازک استوانه‌ای در تماس با این محیط و تحت بار تصادفی جانبی از نوع نویز سفید مطالعه شد. از آن‌جا که رفتارشناسی سیستم‌های تصادفی با چگالی احتمالی پاسخ آنها انجام می‌شود، با استفاده از معادله‌ی FPK تابعی برای مطالعه‌ی رفتار شبه استاتیک پوسته محاسبه شد. در ادامه، ضمن برقراری ارتباط بین ریشه‌های معادله‌ی چگالی احتمالی و نقاط تعادل سیستم، شرایط تابعیت و نوع دو شاخه‌ای شدن تعیین و منجر به ترسیم یک شکل کلیدی بر حسب متغیرهای بی بعد شده‌ی سیستم گردید. بر مبنای این شکل زمان وقوع ناپایداری و دوشاخه‌ای شدن بر حسب دو عدد بدون بعد که یکی به میانگین نیرو و دیگری به نسبت رعنائی سیستم ارتباط دارد قابل تعیین است.



شکل ۴ چگالی احتمالی پاسخ برای وضعیت $s = 8$ و $F_0 = -2$ و مقادیر مختلف k



شکل ۵ چگالی احتمالی پاسخ برای وضعیت $s = 12$ و $F_0 = 2$ و مقادیر مختلف k



شکل ۶ مسیرهای تغییرات انجام شده برای بررسی رفتار در حین دوشاخه‌ای شدن وزن دو حوزه‌ی جدید در صورتی که متوسط نیروی جانبی صفر باشد با هم برابر است اما در حضور نیروی جانبی با متوسط غیر صفر، وزن حوزه‌ها متفاوت خواهد شد.

در شکل ۵ چگالی احتمالی پاسخ برای وضعیت $s = 12$ و $F_0 = 2$ و مقادیر مختلف k رسم شده است. مطابق این شکل، نقطه‌ی تعادل نزدیک مبدا ناپایدار شده و پاسخ سیستم بین دو حوزه‌ی تعادلی پایدار بیش‌ترین احتمال حضور را دارد که نشان‌دهنده‌ی پرش بین این دو حوزه است.

نخواهد داد اما صفر بودن میانگین نیرو تضمینی برای پایداری همیشگی نخواهد بود.

۶- فهرست علائم

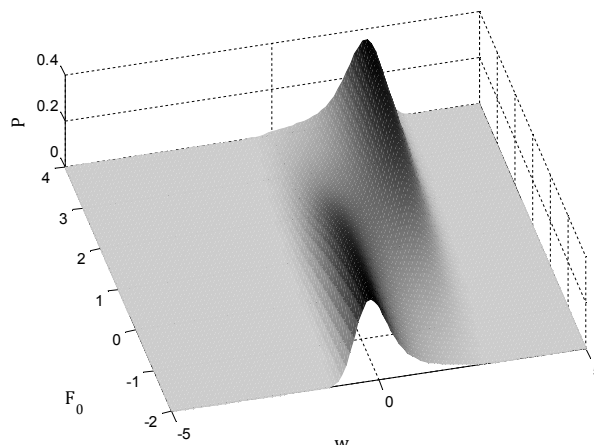
C	ثابت بستر
D	سختی خمشی استوانه‌ای ($\text{Pa} \times \text{m}^3$)
F_0	میانگین نیروی تصادفی بی‌بعد
K	هسته خزش (عملگر)
k	شدت نیروی نویز سفید (بی‌بعد شده)
l	وتر پوسته‌ی استوانه‌ای (m)
N	نیروی عمود بر سطح میانی پوسته (N)
O	عملگر ماده و اسکوالاستیک
P	چگالی احتمالی
R	هسته وارهدگی (عملگر)
q	نیروی عرضی وارده به پوسته (N)
s	پارامتر بی بعد وابسته به ضریب رعنایی پوسته
W	خیز پوسته (m)
w	خیز بدون بعد

علائم یونانی

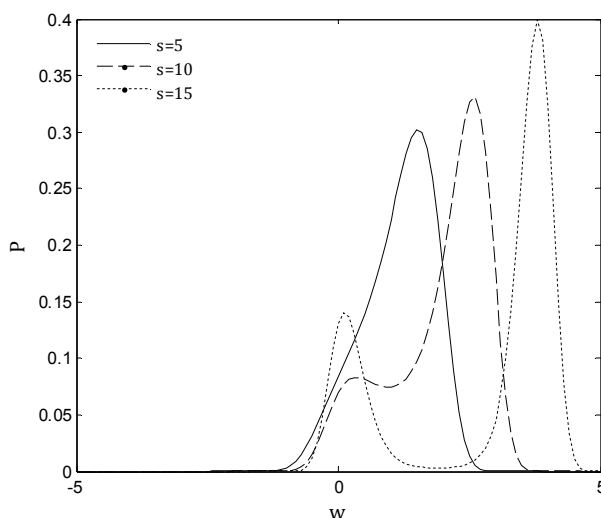
ε	گرش پوسته
ν	ضریب پواسون پوسته
ρ	دانسیته‌ی پوسته (kg/m^3)
σ	تنش محوری پوسته (Pa)
ξ	نویز سفید واحد (N)

۷- مراجع

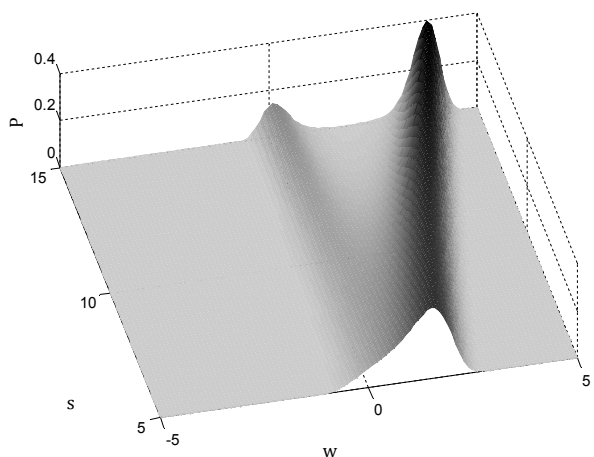
- [1] J.B. Roberts, P.D. Spannos, *Random Vibration and Statistical Linearization*, New York, John Wiley and sons, 1990.
- [2] A.D. Drozdov, *Mechanics of Viscoelastic solids*, New York, John Wiley and sons, 1998.
- [3] E.H. Dowel, Panel Flutter: A Review of the Aeroelastic Stability of Plates and Shells, *AIAA Journal*, Vol. 8, No. 3, pp. 386-400, 1970.
- [4] S. Choi, N. Sri Namachchivaya, Stochastic Dynamics of a Nonlinear Aeroelastic System, *AIAA Journal*, Vol.44, No. 9, pp. 1921-1931, 2006.
- [5] G.Q. Cai, Y.K. Lin, On Exact Stationary Solutions of Equivalent Nonlinear Stochastic System, *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, Vol. 23, No. 4, pp.315-325, 1988.
- [6] G.Q. Cai, Y.K. Lin, Exact and Approximate Solutions for Randomly Excited MDOF Nonlinear System, *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, Vol. 31, No. 5, pp.649-655, 1996.
- [7] H. Rong, X. Wang, G. Meng, w. Xu, T. Fang, Approximation closure of FPK equation, *Journal of sound and vibration*, Vol.266, N0.4, pp.919-925, 2003.
- [8] H.T. Zhu, G.K. Er, V.P. lu, K.P. Kou, Probabilistic solution of nonlinear oscillators excited by combined Guassian and Poisson white noises, *Journal of sound and vibration*, Vol.330, No.12, pp.2900-2909, 2011.
- [9] J.H. Crawford, E.I. Verriest, T.C. Lieuwen, Exact statistics for linear time delayed oscillators subjected to Guassian excitation, *Journal of sound and vibration*, Vol.332, No.22, pp5929-5938, 2013.
- [10] A. Asnafi, Analytic Instability Recognition of a Lightly Viscoelastic Plate with Large Deformations and Stochastic Axial Motion, in 20th ISME conference, Shiraz, Iran, 2012.
- [11] A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Process*, International Student Edition, 1965.
- [12] V.V. Bolotin, *Random Vibrations of Elastic Systems*, Martinus Nijhoff Publishers, 1984.
- [13] W.N. Finley, J.S. Lai, *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Material*, Netherland, North Holland Publishing Company, 1976.
- [14] Y. M. Haddad, *Viscoelasticity of engineering Materials*, London, Chapman & Hall, 1995.



شکل ۸ چگونگی تغییر چگالی احتمالی پاسخ زمان طی مسیر افقی شکل ۶



شکل ۹ چگالی احتمالی پاسخ برای وضعیت $k=2$, $F_0=2.5$ و مقادیر مختلف s برابر ۵ تا ۱۵ طی شده از مسیر عمودی شکل ۶



شکل ۱۰ چگونگی تغییر چگالی احتمالی پاسخ زمان طی مسیر عمودی شکل ۶

در ادامه با ذکر چند مثال، شکل تابع چگالی احتمالی در حالات پایداری مجانبی، ناپایداری و پرش بین دو حوزه تعادلی و چگونگی تغییرات این تابع در حین دوشاخه‌ای شدن بررسی شد. براین اساس پایداری با کوچک شدن عدد وابسته به ضریب رعنایی و نزدیک شدن عدد وابسته به میانگین نیرو به مقدار صفر، زیاد می‌شود. همچنین در صورتی که عدد وابسته به ضریب رعنایی از یک مقدار مشخص کوچک‌تر شود، هیچ‌گاه در سیستم ناپایداری رخ

- [22] H. T. Banks, S. Hu, Z. R. Kenz, *A Brief Review of Elasticity and Viscoelasticity for Solids*, Advances in Applied Mathematics and Mechanics, Vol.3, No.1, pp.1-51, 2011.
- [23] Y. C. FUNG, *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissue*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [24] W. N. FINDLEY AND J. S. Y. LAI, *A modified superposition principle applied to creep of nonlinear viscoelastic materials under abrupt changes in state of combined stress*, Trans. Soc. Rheol., 11, pp. 361-380, 1967.
- [25] R. A. SCHAPERY, *Nonlinear viscoelastic and viscoplastic constitutive equations based on thermodynamics*, Mech. Time-Depend. Mat., 1, pp. 209-240, 1997.
- [26] H. T. BANKS, G. A. PINTER, L. K. POTTER, M. J. GAITENS, L. C. YANYO, *Modeling of quasistatic and dynamic load responses of filled viscoelastic materials*, Chapter 11 in Mathematical Modeling: Case Studies from Industry, Cambridge University Press, pp. 229-252, 2001.
- [27] V. P. Potapov, *Stability of Stochastic Elastic and Viscoelastic Systems*, New York, John Wiley and sons, 1999.
- [28] V. P. Potapov, *Stability of Viscoelastic plate in Supersonic Flow Under Random Loading*, *ALAA Journal*, Vol. 33, pp. 712-715, 1995.
- [29] J.B. Roberts, P.D. Spannos, *Random Vibration and Statistical Linearization*, New York, John Wiley and sons, 1990.
- [15] J. Janno, L. W. Von, Identification of Weakly Singular Memory Kernels in Viscoelasticity, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol.78, No.6, pp.391-403, 1998.
- [16] C. Cavaatera, M. Grasselli, Identifying Memory Kernels in Linear Viscoelasticity of Boltzmann Type, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol.4, No.6, pp.807-842, 1994.
- [17] K.R. Rajagopal, A Note on Viscoelastic Materials that can Age, *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol.39, No.10, pp. 1547-1554, 2004.
- [18] A. D. Drozdov, *Viscoelastic structures: Mechanics of Growth and Aging*, San Diego, USA, Academic Press, 1998.
- [19] A. Dey, P. K. Basudhar, A. M. ASCE, Applicability of Burger Model in Predicting the Response of Viscoelastic Soil Beds, *GeoFlorida 2010: Advances in Analysis, Modeling & Design*, pp. 2611-2620, 2010.
- [20] K. Hadjov, Nonlinear Elastoviscosity of robbers by Cyclic Loading, *Journal of Chemical Technology and Metallurgy*, Vol. 48, No. 6, pp. 607-610, 2013.
- [21] J. Janno, Determination of degenerate relaxation functions in three-dimensional viscoelasticity, *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, Vol. 52, No.2, pp.171-185, 2003.