



تحلیل رزونانسی و ارتعاشات غیر خطی آزاد یک تیر نانوکامپوزیتی با میرایی داخلی

رضا قاضی¹، غلامحسن پایگانه²، مجید شاهقلی^{3*}

1- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

*تهران، صندوق پستی 136-16785، majid.shahgholi@srttu.edu

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 20 مرداد 1396

پذیرش: 06 آبان 1396

ارائه در سایت: 10 آذر 1396

کلید واژگان:

ارتعاشات آزاد

پایداری

تیر ویسکوالاستیک

نانولوله‌های کربنی

تئوری اغتشاشات

چکیده

در این پژوهش ارتعاشات آزاد و رزونانس اولیه یک تیر نانوکامپوزیتی با میرایی داخلی بررسی شده است. فرض شده که نانولوله‌ها با آرایش و میانگین کسر حجمی‌های مختلف در طول تیر توزیع شده‌اند. سیستم شامل غیرخطی‌های هندسی و اینرسی می‌باشد. با اصل هامیلتون معادلات دیفرانسیل جزئی حرکت سیستم استخراج شده و این معادلات توسط روش گلرکین به معادلات دیفرانسیل عادی تقلیل پیدا کرده‌اند. برای تحلیل سیستم از تئوری اغتشاشات استفاده شده است. در تحلیل آزاد، عباراتی تحلیلی برای دامنه و فاز و فرکانس طبیعی غیرخطی به‌دست آورده شده است و اثرات مربوط به پارامترهای سیستم نظیر ضرایب میرایی، نوع آرایش نانولوله‌ها، میانگین کسر حجمی و ... بر روی این پارامترها بررسی شده است. در تحلیل آزاد مشاهده می‌شود با افزایش میرایی خارجی دامنه کاهش یافته و با افزایش میانگین کسر حجمی، فرکانس طبیعی غیرخطی سیستم بزرگ‌تر خواهد شد. در تحلیل رزونانسی مشاهده شده است که با افزایش ضریب میرایی داخلی دامنه‌ی سیستم کاهش خواهد یافت و محل نقاط انشعابی سیستم تغییر می‌کند. همچنین نوع آرایش نانولوله‌ها و میانگین کسر حجمی آن‌ها بر پاسخ اجباری سیستم و نقاط انشعابی تأثیر مهمی می‌گذارند. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش دامنه‌ی تحریک خارجی، دامنه‌ی سیستم افزایش یافته و انشعابات در ضرایب میرایی داخلی بزرگ‌تری به‌وقوع می‌پیوندد. یک تیر ایزوتروپیک در بیش‌ترین میرایی داخلی و تیر نانوکامپوزیتی در کم‌ترین میرایی داخلی به حالت کاملاً پایدار خواهند رسید.

Resonance analysis and free nonlinear vibrations of a nanocomposite with internal damping

Reza Ghazi, Gholam Hasan Payganeh, Majid Shahgholi*

Department of Mechanical Engineering, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran

* P.O.B. 16785-136, Tehran, Iran, majid.shahgholi@srttu.edu

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 11 August 2017

Accepted 28 October 2017

Available Online 01 December 2017

Keywords:

Free vibrations

Stability

Viscoelastic beam

Carbon nano tubes

Perturbations theory

ABSTRACT

In this study, free vibrations and resonances analysis of a nanocomposite beam with internal damping is investigated. For this purpose the various distributions of carbon nanotubes with arbitrary average volume fractions are considered. System includes the geometry and inertia nonlinearities. With the aid of Hamilton principle the equations of motion are derived and using the Galerkin method are reduced to ordinary ones. To analyze the system the multiple scales method is utilized. In free analysis the analytical expressions for amplitude, phase and nonlinear natural frequency are obtained. Also, the effect of system parameters such as damping coefficients, kind of the carbon nanotube distribution, average volume fraction of nanotubes in them are probed. In free analysis, it is observed that by increasing the external damping the amplitude is decreased. Also, by increasing the average volume fraction, the nonlinear natural frequency is increased. In resonance analysis, by depicting the frequency response curves, it is observed that by increasing internal damping coefficient the amplitude is decreased and the loci of the bifurcations is changed. Also carbon nanotube distribution and average volume fractions of them on the solution and bifurcations have an important effect. Also, it is seen that by decreasing the external force, the amplitude of the system is decreased and bifurcations occur in higher internal damping coefficients. An isotropic beam in the highest and a nano-composite beam in the lowest values of internal damping coefficients become completely stable.

1- مقدمه

ویژگی‌های برتر این تیرها نسبت به تیرهای ایزوتروپیک از جمله نسبت استحکام به وزن بالا، مدول یانگ‌های بسیار بالا، خواص شیمیایی و مغناطیسی مناسب و... باعث استفاده‌ی فراوان این تیرها در صنایع گوناگون شده است. به‌عنوان مثال صنعت خودروسازی، صنعت هوافضا، کشتی‌رانی،

تیرها، صفحات، پوسته‌ها پرکاربردترین المان‌ها در مهندسی مکانیک، هوافضا، و ... می‌باشند. تیرهای تقویت شده با الیاف‌های نانوکامپوزیتی در سال‌های اخیر زمینه‌ی تحقیقاتی فراوانی برای پژوهشگران ایجاد کرده است. با توجه به

Please cite this article using:

R. Ghazi, Gh. H. Payganeh, M. Shahgholi, Resonance analysis and free nonlinear vibrations of a nanocomposite with internal damping, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 12, pp. 207-216, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

R. Ghazi, Gh. H. Payganeh, M. Shahgholi, Resonance analysis and free nonlinear vibrations of a nanocomposite with internal damping, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 12, pp. 207-216, 2018 (in Persian)

صنعت سیمان، سیستم‌های میکرو و نانوالکترومکانیکی، صنایع انرژی و ... در این‌جا المان مورد بررسی یک تیر تقویت شده‌ی نانوکامپوزیتی که الیاف‌ها با درصد حجمی و نوع آرایش دلخواه درون آن پخش شده‌اند، می‌باشد. تیرها در معرض ارتعاشات طولی و عرضی هستند که در این‌جا این دو نوع از ارتعاشات با فرض غیرخطی‌های ناشی از کرنش‌ها و اینرسی بررسی خواهد شد. در زمینه‌ی تیرها محمودی و همکاران [1] ارتعاشات غیرخطی آزاد تیرهای ایزوتروپیک را مطالعه و بررسی کردند. اثر میرایی داخلی را در نظر گرفتند. ابتدا با روش گلرکین¹ معادلات را گسسته کردند سپس با روش مقیاس‌های چندگانه² فرکانس‌های طبیعی سیستم را به‌دست آوردند. حسینی و همکاران [2] به تحلیل پاسخ فرکانسی یک تیر ایزوتروپیک قرار گرفته در بستر الاستیک پرداختند. تاثیر ضریب میرایی داخلی بر پاسخ آزاد و اجباری سیستم مطالعه و بررسی شد. محمودی و همکاران [3] ارتعاشات غیرخطی یک تیر یک‌سر گیردار را با ساختن مدل واقعی مطالعه و بررسی کردند. میرایی داخلی را نیز در نظر گرفتند. پاسخ فرکانسی سیستم را برای مدل واقعی و آنچه از تحلیل به‌دست آمده بود مقایسه و بررسی کردند. یعقوبی و ترابی [4] پساگمانش³ تیرهای اویلر برنولی تابعی هدفمند که در بستر الاستیک قرار داشت را بررسی کردند. با روش‌های گلرکین و تکرار تغییرات به‌حل مساله مبادرت ورزیدند. الیاف‌های نانوکامپوزیتی باعث تقویت و بهبود خواص مکانیکی تیرها خواهد شد. در این زمینه، کی و همکاران [5] ارتعاشات غیرخطی آزاد تیرهای نانوکامپوزیتی تابعی هدفمند تیموشنکو را تحلیل و بررسی کردند. با روش‌های ریتز⁴ و تکرار مستقیم⁵ معادلات حرکت را حل کردند. تاثیر درصد کسر حجمی، نسبت لاغری⁶ و ... بر پاسخ سیستم مطالعه و بررسی شد. هی و همکاران [6] ارتعاشات تیرهای پلیمری تقویت شده با الیاف‌های نانوکامپوزیتی را مطالعه و بررسی کردند. مدل تیر را اویلر برنولی در نظر گرفتند. با روش گلرکین متغیرهای زمانی و مکانی حرکت از یک‌دیگر جدا و با روش اغتشاشات به استخراج روابطی برای فرکانس غیرخطی آزاد و دامنه‌ی سیستم مبادرت ورزیدند. اثر نیروی کشیدگی در صفحه‌ی خنثی موسوم به غیرخطی کشیدگی⁷ را در نظر گرفتند ولی اثر ویسکوالاستیک ماده در نظر گرفته نشد. انصاری و همکاران [7] ارتعاشات اجباری تیرهای نانوکامپوزیتی تیموشنکو که الیاف‌ها به‌صورت یکنواخت توزیع شده بودند را بررسی کردند. با اصل هامیلتون معادلات حرکت استخراج و با رهیافت مربعات دیفرانسیلی گسسته شدند. با روش گلرکین معادلات را به معادلات دافینگ تبدیل کردند. اثر کشیدگی منظور و اثر میرایی داخلی صرف‌نظر شد. تاثیر درصد حجمی الیاف، شرایط مرزی و ... بر فرکانس طبیعی و پاسخ فرکانسی سیستم مطالعه و بررسی شد. محمدی‌مهر و همکاران [8] به تحلیل ارتعاشات مگنتومکانیکی تیر تیموشنکوی ساندویچی که با الیاف‌های نانوکامپوزیتی تقویت شده بود پرداختند. از تئوری تنش کوپل اصلاح شده برای مدل کردن اثرات نانوکامپوزیتی استفاده کردند و فرض کردند که تیر در معرض میدان مغناطیسی خارجی قرار دارد. شن و همکاران [9] ارتعاشات و پساگمانش حرارتی تیرهای نانوکامپوزیتی تقویت شده با الیاف‌های نانوکربنی را مطالعه و بررسی کردند. فرض کردند که تیر در بستر الاستیک قرار دارد. دو نوع توزیع از الیاف‌ها یعنی توزیع یکنواخت و تابعی هدفمند را در نظر گرفتند. تئوری تیر مرتبه‌ی اول برشی و تاثیر اختلاف درجه حرارت، به‌منظور استخراج

2- استخراج معادلات حرکت

"شکل 1" یک تیر دو سر ساده با وجود الیاف‌های نانوکامپوزیتی در طول تیر را نشان می‌دهد. XYZ محورهای مختصات مرجع می‌باشند که در سمت چپ تیر ثابت شده است و xyz مختصات محلی است که بر تار خنثی قرار گرفته است و با جسم حرکت می‌کند. فرض شده است که تیر در راستای طولی و عرضی در معرض ارتعاشات قرار دارد و جابه‌جایی طولی u و جابه‌جایی عرضی w است. انرژی پتانسیل کرنشی سیستم از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید [12]:

$$V_{\text{strain}} = \frac{1}{2} \int_0^l \sigma_{xx} \theta' z dx dA \quad (1)$$

درجایی که θ زاویه‌ی اویلر مربوط به خمش تیر است و از رابطه‌ی زیر به‌دست خواهد آمد [13]:

$$\tan \theta = \frac{w'}{(1+u')} \quad (2)$$

همچنین تنش عمودی تیر است که برای یک ماده‌ی ویسکوالاستیک با میرایی داخلی μ_i که از قانون کلوبین ویت پیروی می‌کند، از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید [14]:

$$\sigma_{xx} = Q_{xx}(z)(\varepsilon_{xx} + \mu_i \dot{\varepsilon}_{xx}) \quad (3)$$

که $Q_{xx}(z)$ سفتی سیستم است و از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید [15]:

$$Q_{xx}(z) = \frac{E_1(z)}{1 - \nu_{12}(z)\nu_{21}(z)} \quad (4)$$

درجایی که خواص فیزیکی یک نانوکامپوزیت براساس قانون اختلاط⁹ به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد [15]:

$$E_1(z) = \eta_1(\nu \text{ bar}_{\text{CNT}})f(z)E_1^{\text{CNT}} + [1 - (\nu \text{ bar}_{\text{CNT}})f(z)]E_m \quad (5)$$

و

$$\nu_{12}(z) = (\nu \text{ bar}_{\text{CNT}})\nu_{12}^{\text{CNT}} + [1 - (\nu \text{ bar}_{\text{CNT}})f(z)]\nu_m \quad (6)$$

درجایی که E_1^{CNT} و ν_{12}^{CNT} مدول الاستیسیته و نسبت پواسن نانولوله‌های کربنی هستند. همچنین E_m و ν_m مدول الاستیسیته و نسبت پواسن ماده‌ی زمینه هستند. ν_{CNT} و ν_m کسرهای حجمی نانولوله‌های کربنی و ماده‌ی زمینه هستند که از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\nu_{\text{CNT}} = (\nu \text{ bar}_{\text{CNT}})f(z), \nu_m = (\nu \text{ bar}_m)f(z) \quad (7)$$

که $\nu \text{ bar}_{\text{CNT}}$ و $\nu \text{ bar}_m$ میانگین کسرهای حجمی نانولوله‌های کربنی

¹ Galerkin

² Multiple Time Scales Method

³ Post Buckling

⁴ Ritz method

⁵ Direct iterative

⁶ Slenderness ratio

⁷ Stretching

⁸ Mori - Tanaka

⁹ The rule of mixture

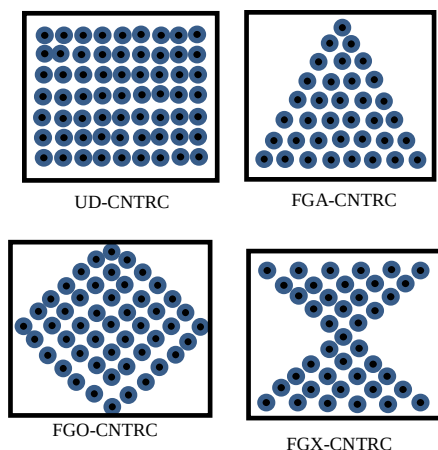


Fig.2 the several distribution of the carbon nano tubes on the beam [7]

شکل 2 چندین توزیع از نانولوله‌های کربنی در درون تیر

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta V_{\text{kinetic}} - \delta V_{\text{strain}} + \delta W_{\text{nc}}) dt = 0 \quad (15)$$

با تعریف پارامترهای زیر:

$$\theta = \int \mu_i Q_{xx}(z) z^2 dA, D = \int Q_{xx}(z) z^2 dA \quad (16)$$

و پارامترهای بی بعد زیر:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\int \rho(z) z^2 dA}{\ell^2 \left(\int \rho(z) dA \right)}, \theta_2 = \frac{\theta}{\ell^2 \sqrt{\left(\int \rho(z) dA \right) D}}, \\ \theta_3 &= \frac{\mu_e \ell^2}{\sqrt{\left(\int \rho(z) dA \right) D}}, \theta_4 = \frac{\int \rho(z) z^2 dA}{\sqrt{\left(\int \rho(z) dA \right) D}}, \\ \tilde{x} &= \frac{x}{\ell}, \tilde{w} = \frac{w}{\ell} \\ \tilde{t} &= \frac{t}{\ell^2} \sqrt{\frac{D}{\int \rho(z) dA}}, \tilde{F}(x, t) = \frac{F(x, t) \ell^3}{D} \end{aligned} \quad (17)$$

معادلات حرکت بی بعد به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \ddot{w} - \theta_1 \ddot{w}'' + \theta_2 \dot{w}^{(4)} + w^{(4)} + \theta_3 \dot{w} \\ + \left[w' \int_0^x (\dot{w}'^2 + \dot{w}' w') dx \right. \\ \left. + w'' \int_1^x \int_0^x (\dot{w}'^2 + \dot{w}' w') dx dx \right] \\ - \theta_4 (\dot{w}' w'^2)' + \theta_1 (w' \dot{w}'^2)' w^{(4)} \\ + [w' (w' w'')'] + \theta_2 (\dot{w}'' w'^2 + w'' w' \dot{w}')'' \\ - \theta_2 (w' w'' \dot{w}'')' = F(x, t) \end{aligned} \quad (18)$$

در رابطه‌ی (18) نیروی تحریک خارجی بی‌بعد شده‌ی سیستم است. همچنین علامت $\sim$ حذف شده است. به‌منظور گسسته‌سازی ترم‌های زمانی و مکانی معادله حرکت از یکدیگر با استفاده از روش گلرکین می‌توان نوشت:

$$w(x, t) = W(t) \varphi(x) \quad (19)$$

درجایی که $\varphi(x)$ شکل مود تیر است و برای شرایط مرزی دو سر ساده از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\varphi(x) = 2\sqrt{2} \sin r\pi x \quad (20)$$

و r شماره‌ی مود است. پس از اعمال روش گلرکین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 \ddot{W}(t) - \theta_1 \mathcal{E}_2 \ddot{W}(t) + \theta_2 \mathcal{E}_3 \dot{W}(t) \\ + \mathcal{E}_3 W(t) + \theta_3 \mathcal{E}_1 \dot{W}(t) \\ + \mathcal{E}_4 [W(t) (\dot{W}(t)^2 + W(t) \ddot{W}(t))] \\ - \theta_4 \mathcal{E}_5 W(t)^2 \dot{W}(t) + \theta_1 \mathcal{E}_5 W(t) \dot{W}(t)^2 \\ + \mathcal{E}_6 W(t)^3 + 2\theta_2 \mathcal{E}_7 W(t)^2 \dot{W}(t) - \theta_2 \mathcal{E}_8 W(t)^2 \dot{W}(t) \end{aligned}$$

و ماده‌ی زمینه می‌باشند. $f(z)$ تابع توزیع نانولوله‌های کربنی در درون تیر است که برای چند حالت خاص از روابط زیر به‌دست خواهند آمد و در "شکل 2" آورده شده است [8].

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 \quad \text{برای UD} \\ f(z) &= 1 - \frac{2z}{h} \quad \text{برای FG - A} \\ f(z) &= \frac{4|z|}{h} \quad \text{برای FG - X} \\ f(z) &= 2 \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad \text{برای FG - O} \end{aligned} \quad (8)$$

ε_{xx} کرنش عمودی هر ذره از تیر تغییرشکل داده است و از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید [13]:

$$\varepsilon_{xx} = \alpha - yk_z \quad (9)$$

باید توجه شود که علامت $()'$ مشتق نسبت به مکان x و $()\dot{}$ مشتق نسبت به زمان t است. α کرنش محوری تار خنثی است و با توجه به فرض کوتاه‌شدگی برای شرایط مرزی مفصل- غلtek برابر با صفر است [16]. بنابراین خواهیم داشت:

$$\alpha = u' + \frac{1}{2} w'^2 + \dots \Rightarrow u' = -\frac{1}{2} w'^2 \quad (10)$$

در رابطه‌ی (9) k_y شعاع انحنا در راستای محور y است و از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$k_y = \theta' = w'' + \frac{1}{2} w'' w'^2 \quad (11)$$

با جایگذاری روابط (3) و (11) در رابطه‌ی (1) انرژی پتانسیل محاسبه خواهد شد. انرژی جنبشی سیستم از رابطه‌ی زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} V_{\text{kinetic}} &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \int \rho(z) (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx dA \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\ell \int \rho(z) z^2 \dot{\theta}^2 dx dA \end{aligned} \quad (12)$$

درجایی که بخش نخست، انرژی جنبشی انتقالی و بخش دوم انرژی جنبشی ناشی از اینرسی دورانی است. همچنین $\rho(z)$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید [7]:

$$\rho(z) = (v \text{ bar}_{\text{CNT}}) f(z) \rho_{\text{CNT}} + [1 - (v \text{ bar}_{\text{CNT}}) f(z)] \rho_m \quad (13)$$

در جایی که ρ_m و ρ_{CNT} به‌ترتیب چگالی نانولوله‌های کربنی و ماده‌ی زمینه می‌باشند. تغییرات کار حاصل از میرایی خارجی با ضریب μ_e از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\delta W_{\text{nc}} = \int_0^\ell \mu_e \dot{w} \delta w dx \quad (14)$$

به‌کمک اصل هامیلتون توسعه یافته، معادلات حرکت به‌صورت زیر استخراج خواهد شد:

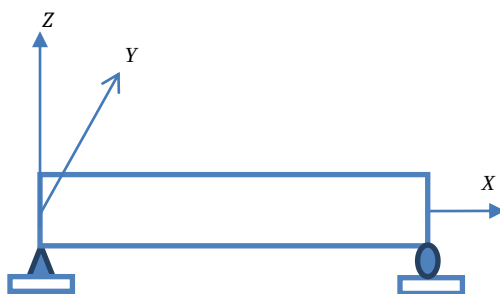


Fig.1 A schematic of undeformed nanocomposite beam

شکل 1 شماتیکی از تیر نانوکامپوزیتی قبل از تغییر شکل

(32) و پس از ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\int d\beta = \int (3K_2 + K_3\omega_r^2 - 3K_4\omega_r^2) \frac{a^2}{8\omega_r} dT_2 \quad (35)$$

و نیز به‌صورت تابعی از T_2 معلوم خواهد شد. K_1 و K_5 در پیوست آورده شده است.

$$A_{\text{total}} = A(T_2)e^{i\omega_r T_0} + c.c \quad (36)$$

که پس از ساده‌سازی فرکانس طبیعی غیرخطی $\omega_{\text{nonlinear}}$ به‌صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\omega_{\text{nonlinear}} = \frac{d\phi}{dT_0} \quad (37)$$

که ϕ برابر است با:

$$\phi = \beta + \omega_r T_0 \quad (38)$$

پس از ساده‌سازی، دامنه و فرکانس طبیعی غیرخطی از روابط زیر به‌دست خواهند آمد:

$$a = \pm \left(\frac{8K_1}{8\alpha K_1 e^{-2\epsilon K_1 t} + 8K_5} \right)^{0.5} \quad (39)$$

و

$$\omega_{\text{nonlinear}} = \omega_r + \frac{d}{dt} \left[\frac{3K_2 + K_3\omega_r^2 - 3K_4\omega_r^2}{16K_5\omega_r} \ln(-8\alpha K_1 - 8K_5 e^{-2\epsilon K_1 t}) \right] \quad (40)$$

که α نیز از رابطه‌ی زیر محاسبه خواهد شد:

$$4\omega_r^2 \left(\alpha + \frac{K_5}{K_1} \right)^3 - \alpha^2 4K_1^2 = 0 \quad (41)$$

4- تحلیل پایداری و پاسخ حالت ماندگار سیستم

در معادله‌ی (29) در حضور نیروی تحریک اجباری، پاسخ معادله به‌صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$A(T_2) = \frac{1}{2} b(T_2) e^{i\gamma(T_2)} e^{i\sigma T_2} \quad (42)$$

از آن‌جایی‌که تیر در فرکانس‌های نزدیک به فرکانس طبیعی معمولاً دچار تخریب و شکست خواهد شد، به بررسی رفتار سیستم در اطراف فرکانس طبیعی می‌پردازیم. بدین منظور پارامتر نامیزانی σ به‌صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$\omega = \omega_r + \epsilon^2 \sigma \quad (43)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (42) و (43) در رابطه‌ی (29) و جداکردن قسمت‌های حقیقی و موهومی می‌توان نوشت:

$$2\epsilon_1 \omega_r b \gamma' + 2\epsilon_1 \omega_r b \sigma - 2\theta_1 \epsilon_2 \omega_r b \gamma' - 2\theta_1 \epsilon_2 \omega_r b \sigma + \frac{1}{2} \epsilon_4 \omega_r^2 b^3 - \frac{1}{4} \theta_1 \epsilon_5 \omega_r^2 b^3 - \frac{3}{4} \epsilon_6 b^3 + F \cos \gamma = 0 \quad (44)$$

و

$$-2\epsilon_1 \omega_r b' + 2\theta_1 \epsilon_2 \omega_r b' + \frac{1}{4} \theta_4 \epsilon_5 \omega_r b^3 - \theta_3 \epsilon_1 b \omega_r - \theta_2 \epsilon_3 b \omega_r - F \sin \gamma = 0 \quad (45)$$

در پاسخ حالت ماندگار، تغییرات نسبت به زمان برابر با صفر است و با صفر قرار دادن b' و γ' پاسخ حالت ماندگار سیستم به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$-2\theta_1 \epsilon_2 \omega_r b \sigma + \frac{1}{2} \epsilon_4 \omega_r^2 b^3 - \frac{1}{4} \theta_1 \epsilon_5 \omega_r^2 b^3 - \frac{3}{4} \epsilon_6 b^3 + F \cos \gamma = 0 \quad (46)$$

$$= \frac{1}{2} F \text{Re}[e^{i\omega t}] \quad (21)$$

درجایی‌که ω فرکانس تحریک است و ضرایب $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_8$ در پیوست آورده شده است. پاسخ معادله‌ی (21) به‌کمک تئوری اغتشاشات و روش مقیاس‌های چندگانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود [17]:

$$W(T_0, T_2) = \epsilon W_1(T_0, T_2) + \epsilon^3 W_3(T_0, T_2) \quad (22)$$

و همچنین مشتقات زمانی به‌صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\frac{\partial}{\partial t} = D_0 + \epsilon^2 D_2, \quad \frac{\partial}{\partial t^2} = D_0^2 + 2\epsilon^2 D_0 D_2 \quad (23)$$

درجایی‌که:

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial T_2} \quad (24)$$

همچنین T_0 و T_2 مقیاس‌های زمانی تند و خیلی کند می‌باشند که به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$T_0 = \epsilon^0 t, T_2 = \epsilon^2 t \quad (25)$$

با جایگذاری روابط (22) تا (24) در رابطه‌ی (21) و جداسازی مراتب مشابه ϵ داریم:

$$o(\epsilon): (\epsilon_1 - \theta_1 \epsilon_2) D_0^2 W_1 + \epsilon_3 W_1 = 0 \quad (26)$$

و

$$o(\epsilon^3): (\epsilon_1 - \theta_1 \epsilon_2) D_0^2 W_3 + \epsilon_3 W_3 = (-2\epsilon_1 + 2\theta_1 \epsilon_2) D_2 D_0 W_1 - \epsilon_4 W_1^2 D_0^2 W_1 - (\epsilon_4 + \theta_1 \epsilon_5) W_1 (D_0 W_1)^2 - \epsilon_6 W_1^3 + (\theta_4 \epsilon_5 W_1^2 - \theta_3 \epsilon_1 - \theta_2 \epsilon_3) D_0 W_1 + \frac{1}{2} F e^{i\omega T_0} \quad (27)$$

پاسخ معادله‌ی (26) را می‌توان به‌صورت نوشت:

$$W_1(T_0, T_2) = A(T_2) e^{i\omega_r T_0} + c.c \quad (28)$$

در جایی‌که $c.c$ مزدوج مختلط است. با جایگذاری رابطه‌ی (28) در معادلات (26) و (27) و حذف ترم‌های سکولار، معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$(-2\epsilon_1 + 2\theta_1 \epsilon_2) A' i \omega_r - (\theta_3 \epsilon_1 + \theta_2 \epsilon_3) A i \omega_r + (2\epsilon_4 \omega_r^2 + \theta_4 \epsilon_5 i \omega_r - \theta_1 \epsilon_5 \omega_r^2 - 3\epsilon_6) A^2 \bar{A} + \frac{1}{2} F e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (29)$$

همچنین فرکانس طبیعی خطی سیستم به‌صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\omega_r = \left(\frac{\epsilon_3}{\epsilon_1 - \theta_1 \epsilon_2} \right)^{0.5} \quad (30)$$

3- تحلیل ارتعاشات غیرخطی آزاد

پاسخ معادله‌ی (29) در غیاب نیروی خارجی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$A(T_2) = \frac{1}{2} a(T_2) e^{i\beta(T_2)} \quad (31)$$

پس از جایگذاری در رابطه‌ی (29) و جداسازی ترم‌های حقیقی و موهومی خواهیم داشت:

$$-\frac{1}{2} (-2\epsilon_1 + 2\theta_1 \epsilon_2) \omega_r a \beta' + \frac{1}{8} (2\epsilon_4 \omega_r^2 - \theta_1 \epsilon_5 \omega_r^2 - 3\epsilon_6) a^3 = 0 \quad (32)$$

و

$$\frac{1}{2} (-2\epsilon_1 + 2\theta_1 \epsilon_2) \omega_r a' + \frac{1}{2} (-\theta_3 \epsilon_1 - \theta_2 \epsilon_3) \omega_r a + \frac{1}{8} \theta_4 \epsilon_5 \omega_r a^3 = 0 \quad (33)$$

معادله‌ی (33) پس از ساده‌سازی به‌صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\int \frac{da}{K_1 a - K_5 a^3} = \int dT_2 \quad (34)$$

و به‌صورت تابعی از T_2 معلوم خواهد شد. با جایگذاری a در رابطه‌ی

9

$$+\frac{1}{4}\theta_4\varepsilon_5\omega_r b^3-\theta_3\varepsilon_1 b\omega_r-\theta_2\varepsilon_3 b\omega_r-F\sin\gamma=0 \quad (47)$$

5- نتایج عددی

در این بخش یک تیر نانوکامپوزیتی با مشخصات $b = 2\text{cm}$, $\ell = 1\text{m}$ در نظر می‌گیریم. در "شکل 3" نمودار فرکانس غیرخطی برای آرایش FG-X در مود اول برای $\text{v bar}_{\text{CNT}} = 0.12$ و $\mu_i = 0.0000001$ ، $\omega_r = 1$ ، $\varepsilon = 1$ ، $h = 1\text{cm}$ را مشاهده می‌شود. فرکانس غیرخطی سیستم به صورت لگاریتمی کاهش می‌یابد و سرانجام به فرکانس خطی خواهد رسید. همچنین با افزایش نانولوله‌های کربنی فرکانس غیرخطی افزایش می‌یابد. همچنین همان‌طور که در "شکل 1" دیده می‌شود فرکانس غیرخطی یک تیر ایزوتروپیک با تیر نانوکامپوزیتی با $\text{v bar}_{\text{CNT}}$ های داده شده اختلاف زیادی دارد و اختلاف بین فرکانس خطی و غیرخطی در آن، برخلاف تیرهای نانوکامپوزیتی، کم است. در "شکل 4" نمودار دامنه برحسب زمان برای آرایش‌های مختلف و $\text{v bar}_{\text{CNT}} = 0.12$ در مود اول ترسیم شده است. برای آرایش FG-O کم‌ترین دامنه و برای دامنه و برای آرایش FG-X بیش‌ترین دامنه مشاهده می‌شود. برای سایر آرایش‌ها دامنه وابستگی به نوع آرایش نانولوله‌ها ندارد.

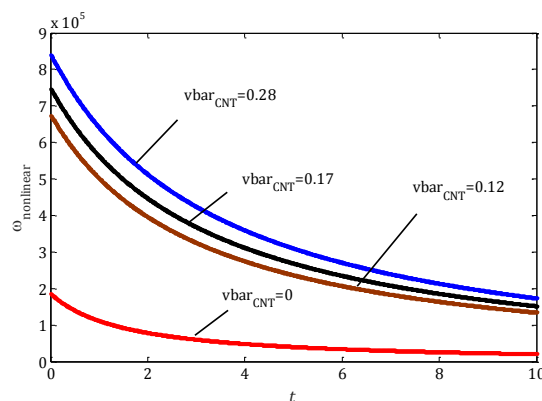


Fig.3 the nonlinear frequency curve versus time for the different values of $\text{v bar}_{\text{CNT}}$ for FG-X in the first mode

شکل 3 نمودار فرکانس غیرخطی برحسب زمان برای $\text{v bar}_{\text{CNT}}$ های مختلف از نانولوله کربنی برای آرایش FG-X در مود اول

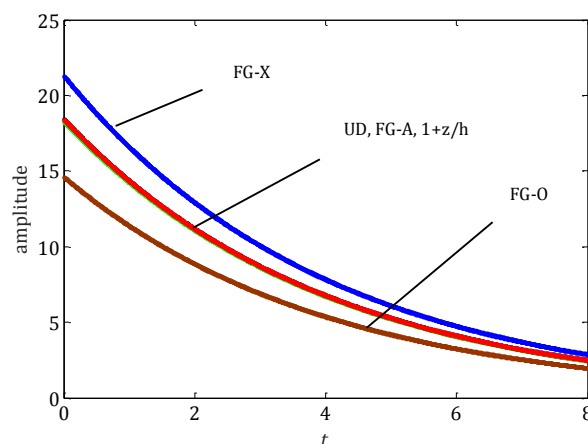


Fig.4 the amplitude curve versus time for various distributions of carbon nanotubes for $\text{v bar}_{\text{CNT}} = 0.12$ in the first mode

شکل 4 نمودار دامنه برحسب زمان برای آرایش‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی برای $\text{v bar}_{\text{CNT}} = 0.12$ در مود اول

در "شکل 5 و 6" K_1 نمایان‌گر میرایی خارجی سیستم است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش میرایی خارجی دامنه‌ی سیستم کاهش می‌یابد. به‌ازای یک میرایی خاص هرچه $\text{v bar}_{\text{CNT}}$ بیش‌تر باشد دامنه بیش‌تر است و FG-O کم‌ترین و FG-X بیش‌ترین دامنه را دارا می‌باشند.

در "شکل 7" برای یک تیر با خواص $h = b = 5\text{cm}$ ، $\ell = 10\text{m}$ در "شکل 8" دامنه برحسب پارامتر $F = 3$ و $\mu_e = 0.0001$ ، $\mu_i = 0.001$ نامیزانی برای $\text{v bar}_{\text{CNT}}$ های مختلف و آرایش FG-X در مود اول ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود سیستم دارای پاسخ‌های پایدار و ناپایدار می‌باشد. دو نقطه‌ی انشعاب در پارامترهای نامیزانی مثبت در سیستم اتفاق خواهد افتاد. نانولوله‌ها باعث تقویت رفتار سفت‌شوندگی و استحکام سیستم می‌شود. همچنین افزایش $\text{v bar}_{\text{CNT}}$ نانولوله‌ها، باعث نزدیک‌تر شدن نقطه‌ی انشعاب به فرکانس طبیعی سیستم می‌شود.

در "شکل 8" دامنه برحسب پارامتر نامیزانی سیستم برای مود اول، ماده‌ی ایزوتروپیک و برای ضرایب میرایی داخلی مختلف ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش ضریب میرایی داخلی، سیستم به سمت یک سیستم کاملاً پایدار، سوق پیدا خواهد کرد. میرایی داخلی باعث بروز انشعاب در فرکانس‌های کوچک‌تر نیز می‌شوند.

در "شکل 9" نمودار پاسخ فرکانسی سیستم برای تیر نانوکامپوزیتی با $\text{v bar}_{\text{CNT}} = 0.17$ در آرایش FG-X برای مود اول ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود ضریب میرایی داخلی باعث کاهش دامنه‌ی سیستم می‌شود. بنابراین در تیر ایزوتروپیک برای ضریب میرایی داخلی

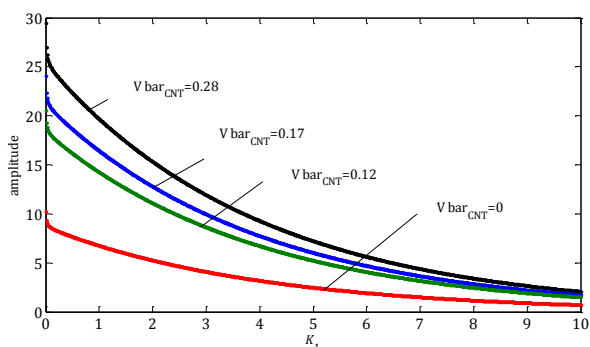


Fig. 5 the amplitude curve versus K_1 for various values $\text{v bar}_{\text{CNT}}$ for FG-A in the first mode

شکل 5 نمودار دامنه برحسب K_1 برای $\text{v bar}_{\text{CNT}}$ های مختلف برای آرایش FG-A در مود اول

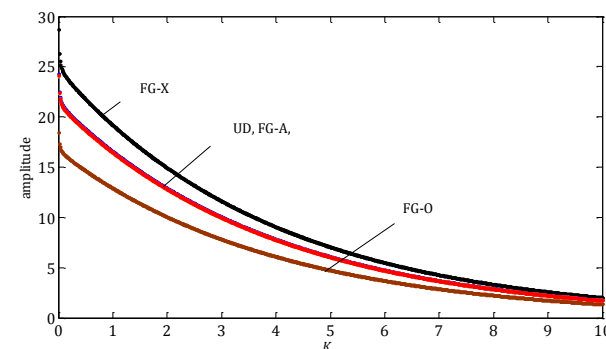


Fig.6 the amplitude curve versus K_1 for various distributions of carbon nano tubes for $\text{v bar}_{\text{CNT}} = 0.17$ in the first mode

شکل 6 نمودار دامنه برحسب K_1 برای آرایش‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی برای $\text{v bar}_{\text{CNT}} = 0.17$ در مود اول

است. پس نانولوله‌های کربنی تاثیر بسزایی بر پایداری سیستم می‌گذارند. در "شکل 10" نمودار دامنه برحسب ضریب میرایی داخلی برای $\sigma = 0.7$ ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تیر در عدم وجود نانولوله کربنی، در بیش‌ترین ضریب میرایی داخلی به حالت کاملاً پایدار می‌رسد درحالی‌که تیر با وجود نانولوله‌ها در کم‌ترین مقدار از ضریب میرایی داخلی به حالت کاملاً پایدار خواهد رسید. در واقع هرچه $v \text{ bar}_{\text{CNT}}$ بیش‌تر باشد نقطه‌ی انشعاب در ضرایب میرایی داخلی کوچک‌تری اتفاق خواهد افتاد. در "شکل 11" نمودار دامنه برحسب میرایی داخلی برای پارامترهای نامیزانی مختلف در یک تیر نانوکامپوزیتی با توزیع UD با $v \text{ bar}_{\text{CNT}} = 0.17$ ترسیم شده است. هرچه پارامتر نامیزانی بزرگ‌تر می‌شود انشعاب در ضرایب میرایی کوچک‌تری اتفاق می‌افتد. نکته‌ی مهم دیگر این است که پاسخ پایدار با دامنه‌ی کوچک‌تر با افزایش پارامتر نامیزانی کاهش می‌یابد ولی دو پاسخ دیگر (که یکی ناپایدار است) با افزایش این پارامتر، افزایش خواهند یافت.

در "شکل 12" نمودار دامنه برحسب ضریب میرایی داخلی برای نیروهای تحریک خارجی گوناگون در $\sigma = 0.7$ ، توزیع UD و $v \text{ bar}_{\text{CNT}} = 0.17$ ترسیم شده است. هرچه نیروی تحریک خارجی افزایش می‌یابد سیستم در ضرایب میرایی بزرگ‌تری به حالت کاملاً پایدار می‌رسد.

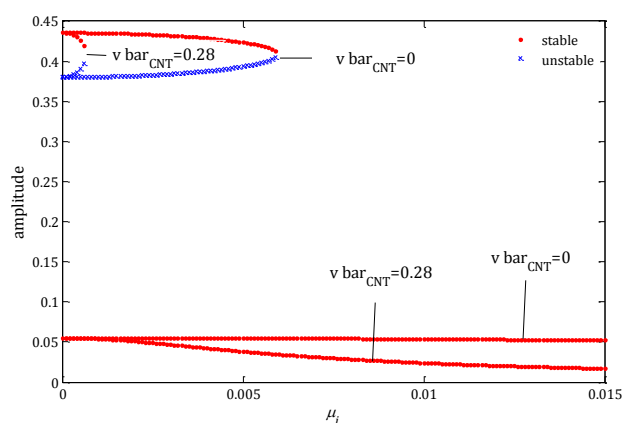


Fig. 10 the amplitude versus internal damping coefficient for the different values of $v \text{ bar}_{\text{CNT}}$; UD; the first mode

شکل 10 نمودار دامنه برحسب ضریب میرایی داخلی برای $v \text{ bar}_{\text{CNT}}$ های مختلف برای آرایش UD در مود اول

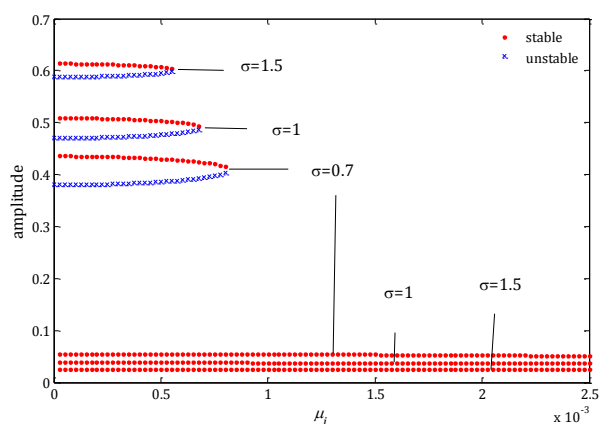


Fig. 11 the amplitude versus internal damping coefficient for the different values of detuning parameter

شکل 11 نمودار دامنه برحسب ضریب میرایی داخلی برای پارامترهای نامیزانی مختلف

$\mu_i = 0.002$ همانند شکل قبل سیستم پاسخ ناپایدار نیز دارد ولی برای تیر نانو کامپوزیت به‌ازای ضریب میرایی داخلی $\mu_i = 0.002$ سیستم کاملاً پایدار

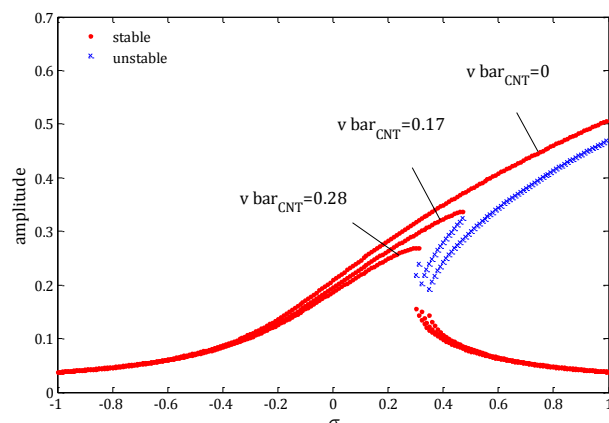


Fig.7 the frequency response curve for various values $v \text{ bar}_{\text{CNT}}$ for UD in the first mode

شکل 7 نمودار پاسخ فرکانسی برای $v \text{ bar}_{\text{CNT}}$ های مختلف برای آرایش FG-X در مود اول

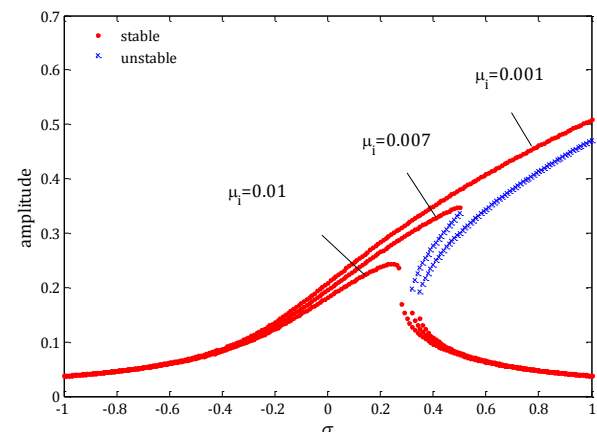


Fig.8 the frequency response curve for an isotropic beam in the first mode for various values of internal damping coefficients

شکل 8 نمودار پاسخ فرکانسی برای یک تیر ایزوتروپیک در مود اول برای مقادیر متفاوتی از ضرایب میرایی داخلی

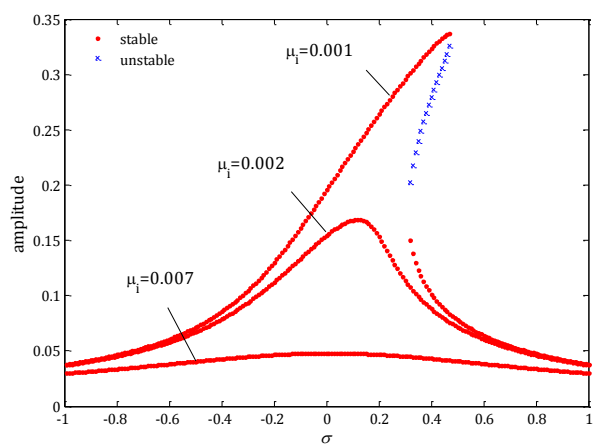


Fig.9 the frequency response curve for $v \text{ bar}_{\text{CNT}} = 0.17$ in the first mode for various values of internal damping coefficients

شکل 9 نمودار پاسخ فرکانسی برای $v \text{ bar}_{\text{CNT}} = 0.17$ در مود اول برای مقادیر مختلف از ضریب میرایی داخلی

زاویه‌ی اویلر مربوط به خمش	θ
فرکانس تحریک	ω
ضرایب میرایی داخلی و خارجی	μ_i, μ_e
چگالی‌های ماده‌ی زمینه و نانو لوله	ρ_m, ρ_{CNT}
نسبت‌های پواسون ماده‌ی زمینه و نانولوله	ν_m, ν_{12}^{CNT}

8- پیوست

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= 4, \mathcal{E}_2 = -4r^2\pi^2, \mathcal{E}_3 = 4r^4\pi^4, \mathcal{E}_4 = -6r^2\pi^2 + \frac{16}{3}r^4\pi^4 \\ \mathcal{E}_5 &= -24r^4\pi^4, \mathcal{E}_6 = 16r^6\pi^6, \mathcal{E}_7 = 8r^6\pi^6, \mathcal{E}_8 = -8r^6\pi^6 \\ K_1 &= \frac{\mathcal{E}_1\theta_3 + \mathcal{E}_3\theta_2}{-2\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2\theta_1}, K_2 = \frac{-\mathcal{E}_6}{-\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2\theta_1} \\ K_3 &= \frac{2\mathcal{E}_4}{-\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2\theta_1}, K_4 = \frac{\mathcal{E}_5\theta_1}{3(-\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2\theta_1)} \\ K_5 &= \frac{\mathcal{E}_5\theta_4}{8(-\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2\theta_1)} \end{aligned}$$

9- مراجع

- [1] S. N. Mahmoody, S. E. Khadem, M. Kokabi, Non-linear free vibrations of Kelvin-Voigt visco-elastic beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 49, No. 6, pp. 722-732, 2007.
- [2] S. M. Hosseini, H. Kalhori, A. Shooshtari, S. N. Mahmoody, Analytical solution for nonlinear forced response of a viscoelastic piezoelectric cantilever beam resting on a nonlinear elastic foundation to an external harmonic excitation, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 67, pp. 464-471, 2014.
- [3] S. N. Mahmoody, N. Jalili, S. E. Khadem, An experimental investigation of nonlinear vibration and frequency response analysis of cantilever viscoelastic beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 311, No. 3-5, pp. 1409-1419, 2008.
- [4] H. Yaghoobi, M. Torabi, Post-buckling and nonlinear free vibration analysis of geometrically imperfect functionally graded beams resting on nonlinear elastic foundation, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 18-19, pp. 8324-8340, 2013.
- [5] L.-L. Ke, J. Yang, S. Kitipornchai, Nonlinear free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 3, pp. 676-683, 2010.
- [6] X. Q. He, M. Rafiee, S. Mareishi, K. M. Liew, Large amplitude vibration of fractionally damped viscoelastic CNTs/fiber/polymer multiscale composite beams, *Composite Structures*, Vol. 131, pp. 1111-1123, 2015.
- [7] R. Ansari, M. Faghieh Shojaei, V. Mohammadi, R. Gholami, F. Sadeghi, Nonlinear forced vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams, *Composite Structures*, Vol. 113, pp. 316-327, 2014.
- [8] M. Mohammadimehr, S. Shahedi, B. Roustavi, Nonlinear vibration analysis of FG-CNTRC sandwich Timoshenko beam based on modified couple stress theory subjected to longitudinal magnetic field using generalized differential quadrature method, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 231, pp. 3866-3885, 2016.
- [9] H.-S. Shen, Y. Xiang, Nonlinear analysis of nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundations in thermal environments, *Engineering Structures*, Vol. 56, pp. 698-708, 2013.
- [10] M. M. Shokrieh, R. Ghajar, A. R. Shajari, The effect of time-dependent slightly weakened interface on the viscoelastic properties of CNT/polymer nanocomposites, *Composite Structures*, Vol. 146, pp. 122-131, 2016.
- [11] M. H. Yas, A. Pourasghar, S. Kamarian, M. Heshmati, Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded nanocomposite cylindrical panels reinforced by carbon nanotube, *Materials & Design*, Vol. 49, pp. 583-590, 2013.
- [12] L. Meirovitch, Analytical methods in vibrations, *Macmillan*, pp. 127-147, 1967.
- [13] A. H. Nayfeh, P. F. Pai, *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*, Wiley-Interscience, pp. 171-234, 2004.
- [14] M. Shahgholi, S. E. Khadem, Hopf bifurcation analysis of asymmetrical rotating shafts, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 77, No. 4, pp. 1141-1155, 2014.
- [15] M. Rafiee, X. Q. He, K. M. Liew, Nonlinear analysis of piezoelectric nanocomposite energy harvesting plates, *Smart Materials and Structures*, Vol. 23, No. 6, pp. 065001, 2014.
- [16] S. A. A. Hosseini, S. E. Khadem, Free vibrations analysis of a rotating shaft with nonlinearities in curvature and inertia, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 44, No. 1, pp. 272-288, 2009.
- [17] A. H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Methods*, Wiley-Interscience, pp. 120-130, 1981.

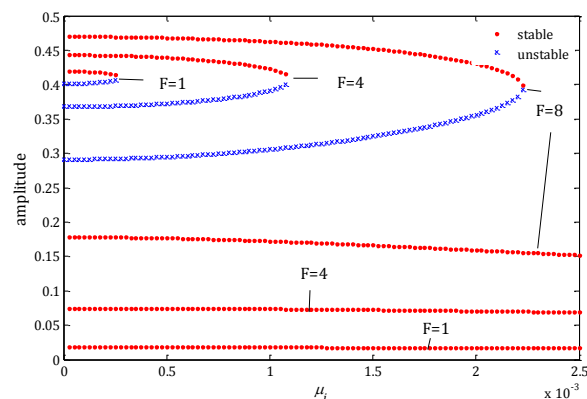


Fig. 12 the amplitude versus internal damping coefficient for the different values of excitation force

شکل 12 نمودار دامنه برحسب ضریب میرایی داخلی برای نیروهای تحریک گوناگون

همچنین با افزایش نیروی تحریک دامنه‌ی هر سه پاسخ افزایش خواهند یافت.

6- نتیجه گیری

در این پژوهش به تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری تیرهای نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی با در نظر گرفتن غیرخطی‌های هندسی و اینرسی برای توزیع‌های مختلف نانولوله‌ها پرداخته شد. اثر میرایی داخلی نیز به کمک مدل کلونین-ویت منظور شده است. نمودارهای دامنه و فرکانس غیرخطی آزاد برحسب زمان، در ارتعاشات آزاد ترسیم شد و مشاهده شد در مود اول با افزایش $v \text{ bar}_{CNT}$ فرکانس طبیعی غیرخطی افزایش خواهد یافت. آرایش FG-O کم‌ترین و FG-X بیش‌ترین مقدار دامنه و فرکانس را دارا هستند. در تحلیل اجباری سیستم مشاهده شد افزایش $v \text{ bar}_{CNT}$ باعث کاهش سطح زیر منحنی دامنه فرکانس می‌شود و سیستم رفتار سفت از خود نشان خواهد داد. افزایش دامنه‌ی تحریک خارجی باعث افزایش دامنه‌ی سیستم می‌شود و انشعابات در ضرایب میرایی داخلی بزرگ‌تری اتفاق خواهند افتاد. افزایش پارامتر نامیزانی باعث می‌شود انشعابات در ضرایب میرایی داخلی کوچک‌تری اتفاق افتد. یک تیر ایزوتروپیک در بیش‌ترین مقدار از ضریب میرایی داخلی به حالت کاملاً پایدار می‌رسد درحالی‌که تیر نانوکامپوزیت در کم‌ترین مقدار از ضریب میرایی داخلی کاملاً پایدار می‌شود. بنابراین در نظر گرفتن اثرات میرایی داخلی در رفتار سیستم بسیار تاثیرگذار خواهد بود.

7- فهرست علائم

b	طول سطح مقطع تیر
E_m	مدول الاستیسیته‌ی ماده‌ی زمینه
E_1^{CNT}	مدول الاستیسیته‌ی نانولوله‌ی کربنی
F	دامنه نیروی تحریک خارجی
h	عرض سطح مقطع تیر
$Q_{xx}(z)$	سفتی سیستم
u	جابجایی طولی
w	جابجایی عرضی
$v \text{ bar}_{CNT}$	میانگین کسر حجمی نانولوله
α	کرنش محوری تار خنثی