



## بررسی روش تابع اولیه‌گیری نیمه‌ضمنی بر پایه نگاشت نمایی برای موسمانی وان - مایسز با سخت‌شوندگی در هم خطی

نادر حاجی‌آقاجان‌پور<sup>۱</sup>، مهرزاد شریفیان<sup>۲\*</sup>

۱- کارشناس ارشد، مهندسی عمران، فارغ‌التحصیل دانشگاه مهندسی فناوری‌های نوین قوچان، قوچان

۲- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه مهندسی فناوری‌های نوین قوچان، قوچان

\* قوچان، صندوق پستی ۹۴۷۷۱-۶۷۳۳۵

### چکیده

در تحلیل کشسان - موسمان ناخطی اجزای محدود سازه‌ها، تنش‌ها در هر نقطه گوس از هر جزو در هر تکرار از هر نمو بارگذاری به‌هفتگام می‌گردد. این به‌هنجام‌سازی به کمک تابع اولیه‌گیری از معادله‌های بنیادی در موسمانی انجام می‌شود. یا بد دانست، دقت تابع اولیه‌گیری از معادله‌های بنیادی موسمانی اثر چشم‌گیری بر دقت پاسخ نهایی تحلیل سازه دارد. در این پژوهش، سطح تسليم وان - مایسز با قانون‌های سخت‌شوندگی همگن و پویا در محدوده تغییرشکل‌های کوچک در نظر گرفته می‌شود. معادله‌های دیفرانسیل موسمانی به فضای تنش افزوده برده می‌شود و یک دستگاه معادله دیفرانسیل ناخطی تشکیل می‌شود. دستگاه معادله دیفرانسیل بدست آمده با یک روش نیمه‌ضمنی قابل حل است. دقت حل در این روش بستگی به شاعع سطح تسليم استفاده شده در فرآیند حل دارد؛ بنابراین رابطه‌سازی‌ها به‌گونه‌ای می‌شود که بتوان شاعع سطح تسليم را از هر قسمت دلخواه از گام موسمانی برداشت کرد. در پایان با انجام آزمون‌های عددی گسترد دقت پاسخ‌ها برای یافتن بهترین لحظه از گام بارگذاری برای محاسبه شاعع سطح تسليم بررسی می‌شود.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۰۶ بهمن ۱۳۹۴

پذیرش: ۰۳ خداد ۱۳۹۵

ارائه در سایت: ۲۹ تیر ۱۳۹۵

کلید واژگان:

تابع اولیه‌گیری

نگاشت نمایی

موسمانی وان - مایسز

سخت‌شوندگی خطی

## Investigation on semi-implicit integration method based on exponential map for von-Mises plasticity model with linear mixed hardening

Nader Haji Aghajanpour, Mehrzad Sharifian\*

Department of Civil Eng., Quchan University of Advanced Technology, Quchan, Iran

\* P.O.B. 94771-67335 Quchan, Iran, m.sharifian@qiet.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 26 January 2016

Accepted 23 May 2016

Available Online 20 July 2016

Keywords:

Integration

exponential map

von-Mises plasticity

linear hardening

### ABSTRACT

In the nonlinear elastoplastic finite element analysis, the stresses must be updated at each Gauss point of the elements in each iteration of each load increment by a stress-updating process. The stress-updating process is performed by integration of the constitutive equations in plasticity. It should be noted that the accuracy of integrating the constitutive equations significantly affects the accuracy of the final results of the structural analysis. In this study, the von-Mises plasticity model along with the isotropic and kinematic hardening mechanisms is considered in the small strain realm. The constitutive equations are converted to a nonlinear equation system in an augmented stress space. The aforementioned nonlinear equation system is solved by a semi implicit technique. The precision of the solution is dependent on the radius of the yield surface which is used in the process of the solution. Therefore, the relations are derived so that the yield surface radius can be picked up from each arbitrary part of plasticity step. Finally, to determine the best time of loading step for calculating the radius of the yield surface, a wide range of numerical tests is performed.

ارائه کردند [۲]. از برتری‌های روش‌های بر پایه نگاشت نمایی می‌توان به دقت بالا نسبت به سایر روش‌های عددی و سازگاری موسمانی در بیشتر آن‌ها اشاره کرد. سازگاری آن است که در انتهاهی هر گام بارگذاری، تنش‌ها به طور خودکار بر سطح تسليم قرار گیرد و نیازی به برگرداندن تنش‌ها بر سطح تسليم نباشد. ماهیت صریح این روش‌ها سبب شده استفاده از آن‌ها در حل مسئله‌های اجزای محدود ناخطی از کارایی بالایی برخوردار باشند. بدیهی است که کارایی بالاتر، محبوبیت بیشتری را برای روش‌های بر پایه نگاشت نمایی به همراه داشته است.

**۱- پیش‌گفتار**  
روش‌های تابع اولیه‌گیری بر پایه نگاشت نمایی در فضای تنش افزوده از روش‌های نو تابع اولیه‌گیری از معادله‌های دیفرانسیلی موسمانی است. هانگ و لیو در سال ۱۹۹۹ فضای تنش افزوده را معرفی کردند [۱]. پس از آن پژوهش‌گران معادلات مربوط به موسمانی وان - مایسز با سخت‌شوندگی در هم خطی را به دستگاه معادله دیفرانسیل ناخطی تبدیل کردند. نخستین بار آوریکیو و برائو در سال ۲۰۰۳ روش تابع اولیه‌گیری نمایی از معادله دیفرانسیل یاد شده را بر پایه یک رویکرد صریح به صورت یک روش ناسازگار

Please cite this article using:

N. Haji Aghajanpour, M. Sharifian, Investigation on semi-implicit integration method based on exponential map for von-Mises plasticity model with linear mixed hardening, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 7, pp. 163-169, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

انحرافی و  $\theta$  کرنش حجمی است. بخش حجمی به صورت کشسان در رابطه عمل می‌کند.

$$p = K\theta \quad (4)$$

که در رابطه بالا،  $K$  مدول بالک است. کرنش انحرافی به دو بخش کشسان و موسمان به صورت روابط (6,5) تقسیم می‌شود.

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^p + \mathbf{e}^e \quad (5)$$

$$\mathbf{s} = 2G\mathbf{e}^e = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) \quad (6)$$

اکنون، بردار تنش انتقالی (جایه‌جا شده) به صورت رابطه (7) تعریف می‌شود.

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha} \quad (7)$$

در رابطه بالا،  $\boldsymbol{\alpha}$  بخش انحرافی تنش بازگشتی است و در صفحه تنش انحرافی مرکز سطح تسلیم را نشان می‌دهد. سطح تسلیم وان - مایسز با رابطه (8) معروف می‌شود.

$$F = \|\boldsymbol{\Sigma}\| - R = 0 \quad (8)$$

$R$  ساعع سطح تسلیم است و با قانون سخت‌شوندگی همگن خطی به صورت (9) بیان می‌شود.

$$R = R_0 + H_{\text{iso}}\gamma \quad (9)$$

در این رابطه  $R_0$  ساعع نخستین سطح تسلیم،  $H_{\text{iso}}$  ثابت ماده (ثابت سخت‌شوندگی همگن) و  $\gamma$  کمیت عددی است که ضریب موسمانی را تعریف می‌کند. رشد کرنش موسمان انحرافی به صورت رابطه (10) بیان می‌شود.

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\gamma}\mathbf{n} \quad (10)$$

در رابطه کنونی،  $\mathbf{n}$  بردار عمود بر سطح تسلیم در نقطه تماس است که جهت کرنش موسمان انحرافی را به صورت رابطه (11) نشان می‌دهد.

$$\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \Sigma} = \frac{\Sigma}{\|\Sigma\|} = \frac{\Sigma}{R} \quad (11)$$

همچنین، قانون سخت‌شوندگی پویای خطی پراگر با رابطه (12) نشان داده می‌شود.

$$\dot{\alpha} = H_{\text{kin}}\dot{\mathbf{e}}^p \quad (12)$$

این رابطه بیان می‌کند که مرکز سطح تسلیم در جهت نرخ کرنش موسمان انحرافی جایه‌جا می‌شود و  $H_{\text{kin}}$  ثابت ماده (ثابت سخت‌شوندگی پویای است).

سرانجام، شرط‌های بارگذاری - باربرداری کان - تاکر با رابطه‌های (13) را به می‌شود [2].

$$\dot{\gamma}F = 0 \quad (13)$$

که  $= 0$  رفتار کشسان و  $> 0$  رفتار موسمان را نشان می‌دهد.

### 3- معادله‌های بنیادی در فضای تنش افزوده

آریکیو و برائو در سال 2003 معادله‌های مربوط به موسمانی وان - مایسز با سخت‌شوندگی درهم خطی را به دستگاه معادله دیفرانسیل ناخطی رابطه (14) تبدیل کردند.

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} \quad (14)$$

در رابطه بالا  $\mathbf{X}$  بردار تنش افزوده با  $n+1$  بعد به صورت رابطه (15) است.

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X^0 \bar{\Sigma} \\ X^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}^s \\ X^0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

برای دستیابی به دستگاه رابطه (14) به ترتیبی که در ادامه می‌آید می‌توان عمل کرد. از ترکیب دو رابطه (6) و (7) و مشتق‌گیری نسبت به زمان رابطه (16) به دست می‌آید.

$$\dot{\Sigma} + \dot{\alpha} + 2G\dot{\mathbf{e}}^p = 2G\dot{\mathbf{e}} \quad (16)$$

سپس، رابطه (12) در (16) قرار داده می‌شود و رابطه (17) به دست

پس از آریکیو و برائو، لیو در سال 2004 دو روش تابع اولیه‌گیری نمایی صریح برای میکارانش در سال 2005. شیوه نمایی برای موسمانی وان - مایسز را به حالت سارگار بهبود دادند [4]. آریکیو و همکارانش در سال 2006، یک شیوه نمایی صریح مرتبه دوم برای الگوی سخت‌شوندگی درهم خطی وان - مایسز پیشنهاد دادند [5]. در ادامه رضایی پژند و نصیرایی در سال 2007 شیوه نمایی برای موسمانی وان - مایسز را به یک شیوه تابع اولیه‌گیری نمایی نیمه‌ضمنی با دقت مرتبه دو بهبود دادند [6]. آریکیو و همکارانش در سال 2007 شیوه به‌هنگام‌سازی نمایی تنش را برای موسمانی وان - مایسز با سخت‌شوندگی همگن خطی و پویای ناخطی آرمسترانگ و فردریک به دست آوردهند [7]. سپس رضایی پژند و نصیرایی در سال 2008 دو شیوه تابع اولیه‌گیری نمایی نیمه‌ضمنی مرتبه دو برای الگوی موسمان مطلوب دراکر - پراگر پیشنهاد دادند [8]. رضایی پژند و همکارانش در سال 2010 روش تابع اولیه‌گیری نمایی را برای موسمانی وان - مایسز با سخت‌شوندگی پویای ناخطی گسترش دادند [9] و در سال 2011 یک روش تابع اولیه‌گیری نمایی برای مدل موسمانی چرخ‌های ارائه کردند [10]. رضایی پژند و شریفیان در سال 2011 یک روش تابع اولیه‌گیری با قابلیت کنترل خودکار خط پیشنهاد کردند. در پژوهش آن‌ها تابع اولیه‌گیری برای زاویه بین نرخ کرنش و تنش جایه‌جا شده و نیز زاویه میان تنش جایه‌جا شده و تنش بازگشتی پیشنهاد شده است [11]. افزون بر آن رضایی پژند و همکاران در سال 2011 دو روش تابع اولیه‌گیری صریح برای نگاشت نمایی با سخت‌شوندگی همگن خطی و پویای پراگر ارائه دادند [12]. سرانجام در سال 2013، دو روش تابع اولیه‌گیری نمایی برای نگاشت نمایی و شیوه‌های اولر پیشرو و پسرو برای موسمانی دراکر - پراگر با سخت‌شوندگی درهم ناخطی رابطه‌سازی کردند [13].

پس از مطالعه پیشینه پژوهش‌ها نیاز به بررسی این موضوع احساس شد که در روش نمایی نیمه‌ضمنی برداشت ساعع موسمانی از کدام قسمت از گام موسمانی منجر به دقیق‌ترین پاسخ‌ها می‌شود. برای این منظور روش نگاشت نمایی برای موسمانی وان - مایسز با سخت‌شوندگی همگن و پویای خطی به گونه‌ای رابطه‌سازی خواهد شد که بتوان ساعع سطح تسلیم را از هر قسمت دلخواه یک گام موسمانی برداشت کرد.

در روابطی که در این مقاله ارائه می‌شود تانسورهای مرتبه دو با برداری 9 مؤلفه‌ای به صورت رابطه (1) جایگزین شده‌اند.

$$\sigma = [\sigma_x \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz} \ \sigma_y \ \tau_{yx} \ \tau_{zx} \ \tau_{zy} \ \sigma_z]^T \quad (1)$$

البته با توجه به تقارن تانسورهای مرتبه دو، شمار مؤلفه‌های مستقل به شش کاهش می‌یابد. چنان‌چه استفاده از بردارهای شش مؤلفه‌ای مورد نظر باشد، باید عملگر اثر و نرم اقلیدسی اصلاح شوند.

### 2- معادله‌های بنیادی

یک الگوی موسمانی وان - مایسز با سخت‌شوندگی درهم خطی در محدوده تغییرشکل‌های کوچک در نظر گرفته می‌شود. تنش کل و کرنش کل هر یک به دو بخش انحرافی و حجمی به صورت روابط (3,2) جداسازی می‌شوند.

$$\sigma = \mathbf{s} + p\mathbf{i}, \quad p = \frac{1}{3}\text{tr}(\sigma) \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{e} + \frac{1}{3}\theta\mathbf{i}, \quad \theta = \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (3)$$

که (2)، عملگر اثر است ( $\text{tr}(\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ )،  $\mathbf{i}$  بردار

معادل با تانسور همانی مرتبه 2،  $\mathbf{s}$  تنش انحرافی،  $p$  تنش حجمی،  $\mathbf{e}$  کرنش

$$\mathbf{A}_e = \frac{2G}{R} \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{9 \times 9} & \dot{\mathbf{e}}_{9 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 9} & 0 \end{bmatrix}_{10 \times 10} \quad (30)$$

$$\mathbf{A}_p = \frac{2G}{R} \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{9 \times 9} & \dot{\mathbf{e}}_{9 \times 1} \\ \dot{\mathbf{e}}^T_{1 \times 9} & 0 \end{bmatrix}_{10 \times 10} \quad (31)$$

در سخت‌شوندگی پویا  $R$  ثابت است؛ بنابراین  $\mathbf{A}$  تنها به  $\dot{\mathbf{e}}$  وابسته است، اما در سخت‌شوندگی ترکیبی  $R$  ثابت نیست؛ بنابراین  $\mathbf{A}$  به  $\mathbf{X}$  وابسته می‌شود که معادله  $\mathbf{AX} = \dot{\mathbf{X}}$  را ناخطي می‌کند.

چنان‌چه دو شرط زیر که از شرط‌های کان- تاکر (13) نتیجه گرفته شده، بهصورت هم‌زمان برقرار شود، نمو در محدوده موسمان واقع است [4].

1- تنش جابه‌جا شده باید روی سطح تسليم بهصورت رابطه (32) باشد.

$$\|\Sigma\| = R \quad (32)$$

که با استفاده از رابطه‌های (15) و (19) این شرط بهصورت رابطه (33) در می‌آید.

$$\|\mathbf{X}^s\| = X^0 \quad (33)$$

2- جهت رشد کرنش باید به سوی بیرون از سطح تسليم بهصورت رابطه (34) باشد.

$$\Sigma^T \dot{\mathbf{e}} > 0 \quad (34)$$

که رابطه کنونی را می‌توان بهصورت رابطه (35) بازنویسی کرد.

$$(\mathbf{X}^s)^T \dot{\mathbf{e}} > 0 \quad (35)$$

#### 4- الگوریتم بههنگام‌سازی تنش

جهت بههنگام‌سازی تنش، در مسیرهای کرنش انتخابی، نرخ کرنش ثابت فرض می‌شود ( $\dot{\mathbf{e}} = cte$ ). بهصورت معمول، در زمان  $t = t_n$  مقادیر متغیرها معلوم ( $\gamma_n, \alpha_n, e_n, s_n$ ) همچنین کرنش در زمان  $t = t_{n+1}$  نیز معلوم است ( $e_{n+1}$ )؛ بنابراین الگوریتم پیشنهادی باید ضمن حل معادلات موسمانی، تنش بههنگام‌شده و سایر متغیرها را بهدست آورد. برای حل معادله دیفرانسیل (14) شرط نخستین رابطه (36) درنظر گرفته می‌شود.

$$\mathbf{X}(0) = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_0^s \\ \dot{\mathbf{X}}_0^0 \\ R_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Sigma_0 \\ \dot{\Sigma}_0^0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

پاسخ معادله (14) به صورت رابطه (37) است.

$$\mathbf{X}_{n+1} = \exp(\mathbf{A}_n \Delta t) \mathbf{X}_n \quad (37)$$

با داشتن سخت‌شوندگی همگن ( $H_{iso} \neq 0$ ) ماتریس  $\mathbf{A}$  در فاز موسمانی ثابت نیست که در این صورت می‌توان  $\mathbf{A}$  را در طول هر گام زمانی ثابت پنداشت؛ یعنی پس از یافتن مقدار  $\mathbf{A}$  در آغاز گام ( $A_n$ )، آن را در تمام طول گام زمانی بهصورت روابط (39-38) استفاده کرد.

$$\mathbf{X}_{n+1} = \exp(A_n \Delta t) \mathbf{X}_n = \bar{\mathbf{G}}_n \mathbf{X}_n \quad (38)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_n = \begin{cases} \bar{\mathbf{G}}_e = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{9 \times 9} & \frac{2G}{R_n} \Delta \mathbf{e} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{G}}_p = \begin{bmatrix} \mathbb{I} + (a_0 - 1) \Delta \hat{\mathbf{e}} \Delta \hat{\mathbf{e}}^T & b_0 \Delta \hat{\mathbf{e}} \\ b_0 \Delta \hat{\mathbf{e}}^T & a_0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (39)$$

که ماتریس  $\bar{\mathbf{G}}_n$  ماتریس نمایی است و برای هر مقدار حقیقی  $A_n, \Delta t$  قابل دست‌یابی است، همچنین عامل‌های  $\Delta \mathbf{e}, \Delta \hat{\mathbf{e}}, a_0, b_0$  بهصورت روابط (41-40) است.

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n, \quad \Delta \hat{\mathbf{e}} = \frac{\Delta \mathbf{e}}{\|\Delta \mathbf{e}\|} \quad (40)$$

$$a_0 = \cosh\left(\frac{2G}{R_n} \|\Delta \mathbf{e}\|\right), \quad b_0 = \sinh\left(\frac{2G}{R_n} \|\Delta \mathbf{e}\|\right) \quad (41)$$

همچون بسیاری از الگوریتم‌های تابع اولیه‌گیری، هر گام باید با یافتن یک مقدار نخستین آزمونی برای بردار تنش افزوده (با فرض رفتار الاستیک) بهصورت رابطه (42) آغاز شود.

می‌آید.

$$(17)$$

و رابطه‌های (10) و (11) در رابطه بالا جای‌گذاری می‌شود و رابطه (18) بهدست می‌آید.

$$\dot{\Sigma} + (2G + H_{kin}) \dot{\mathbf{e}}^p = 2G \dot{\mathbf{e}} \quad (18)$$

در ادامه، بردار تنش جابه‌جا شده بدون بعد ( $\dot{\Sigma}$ ) بهصورت رابطه (19) تعریف می‌شود.

$$\bar{\Sigma} = \frac{\Sigma}{R} \quad (19)$$

رابطه (18) بهصورت رابطه (20) بازنویسی می‌گردد.

$$\dot{\bar{\Sigma}} = 2G \dot{\mathbf{e}} - (2G + H_{kin}) \bar{\Sigma} \dot{\gamma} \quad (20)$$

از رابطه (19) نسبت به زمان مشتق گرفته می‌شود، با جای‌گذاری رابطه (9) در آن می‌توان به رابطه (21) رسید.

$$\dot{\bar{\Sigma}} + \frac{2G + H_{iso} + H_{kin}}{R} \dot{\gamma} \bar{\Sigma} = \frac{2G}{R} \dot{\mathbf{e}} \quad (21)$$

فاکتور تابع اولیه‌گیری  $X^0$  بهصورت رابطه (22) تعریف می‌شود.

$$\frac{d}{dt} (X^0 \bar{\Sigma}) = \frac{2G}{R} X^0 \dot{\mathbf{e}} \quad (22)$$

در این رابطه، مشتق گیری نسبت به زمان انجام می‌شود و رابطه بهدست

آمده بر  $X^0$  به صورت رابطه (23) تقسیم می‌گردد.

$$\dot{\bar{\Sigma}} + \frac{\dot{X}^0}{X^0} \bar{\Sigma} = \frac{2G}{R} \dot{\mathbf{e}} \quad (23)$$

مقایسه (21) و (23) و جایگذاری (9)، رابطه (24) را در بردارد.

$$\dot{X}^0 = \frac{2G + H_{iso} + H_{kin}}{R_0 + H_{iso} \gamma} \dot{\gamma} \quad (24)$$

برای حل معادله (24)،  $X^0$  تابعی از  $\gamma$  درنظر گرفته می‌شود؛ افزون بر

آن چون  $\dot{\gamma} = \frac{dy}{dt}$  است، معادله بالا در ضرب شده و تابع اولیه گرفته می‌شود؛ بنابراین پاسخ معادله (24) به صورت رابطه (25) خواهد بود.

$$X^0(\gamma) = \begin{cases} \left(1 + \frac{H_{iso}}{R_0} \gamma\right)^{\frac{(2G + H_{kin} + H_{iso})}{H_{iso}}} H_{iso} \neq 0 \\ \exp\left(\frac{2G + H_{kin}}{R_0} \gamma\right) H_{iso} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

با توجه به تعریف بردار تنش افزوده در رابطه (15) و (22) رابطه (26) بهدست می‌آید.

$$\dot{X}^s = \frac{2G}{R} X^0 \dot{\mathbf{e}} \quad (26)$$

چون در محدوده کشسانی  $\dot{\gamma} = 0$  است، با نگاهی به رابطه (24)، رابطه (27) بهدست می‌آید.

$$\dot{X}^0 = 0 \quad (27)$$

در محدوده موسمانی که  $X^0$  ثابت نیست، رابطه (23) را در  $\bar{\Sigma}^T$  ضرب کرده و رابطه (28) بهدست می‌آید.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{\Sigma}\|^2 + \frac{\dot{X}^0}{X^0} \|\bar{\Sigma}\|^2 = \frac{2G}{R} \dot{\mathbf{e}}^T \bar{\Sigma} \quad (28)$$

از آن جا که  $\bar{\Sigma} = 1$  است، پس از ضرب  $X^0$  در رابطه (28)، این رابطه به شکل رابطه (29) در می‌آید.

$$\dot{X}^0 = \frac{2G}{R} \dot{\mathbf{e}}^T X^s \quad (29)$$

چنان‌چه شکل فشرده  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$  در نظر گرفته شود، با نگاهی به رابطه‌های (28-26) ماتریس  $\mathbf{A}$  به راحتی به صورت روابط (30) و (31) محاسبه می‌شود.

لازم به توضیح است که  $X^0$  یک متغیر تاریخچه‌ای نیست و نیازی به هنگام کردن آن نیست، بنابراین می‌توان آن را در آغاز هر گام، مقدار یک پنداشت؛ این کار از سرریزش‌دگی عددی جلوگیری می‌کند.

### 5- سازگاری الگوریتم عددی

برای نشان دادن آن که روش عددی ارائه شده با سطح تسليم سازگار است، با دریافت این که در زمان  $t_n$  بردار تنش روی سطح تسليم قرار داشته باشد، باید ثابت شود پس از به‌هنگام‌سازی تنش به کمک الگوریتم ارائه شده، در زمان  $t_{n+1}$  نیز، بردار تنش روی سطح تسليم قرار دارد [6].

در زمان  $t = t_n$  تنش روی سطح تسليم قرار دارد، پس بر پایه رابطه (33) می‌توان رابطه (59) را نوشت.

$$\|\mathbf{X}_n^s\|^2 = (X_n^0)^2 \quad (59)$$

با رابطه‌های (38) و (39) مقادیر  $X^s$  و  $X^0$  در زمان  $t_{n+1}$  به صورت روابط (61,60) بدست می‌آید.

$$\mathbf{X}_{n+1}^s = \mathbf{X}_n^s + (a_1 - 1)\Delta\hat{\mathbf{e}}\Delta\hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{X}_n^s + b_1\Delta\hat{\mathbf{e}}X_n^0 \quad (60)$$

$$X_{n+1}^0 = b_1\Delta\hat{\mathbf{e}}\mathbf{X}_n^s + a_1X_n^0 \quad (61)$$

در اینجا  $\|\mathbf{X}_{n+1}^s\|^2$  به صورت رابطه (62) محاسبه می‌شود.

$$\|\mathbf{X}_{n+1}^s\|^2 = (\mathbf{X}_{n+1}^s)^T \mathbf{X}_{n+1}^s \quad (62)$$

از رابطه (60) استفاده می‌شود، از طرفی چون  $\|\Delta\hat{\mathbf{e}}\| = 1$  است، بنابراین رابطه (63) را به صورت زیر داریم.

$$\|\mathbf{X}_{n+1}^s\|^2 = a_1^2\|\mathbf{X}_n^s\|^2 + b_1^2(X_n^0)^2 + 2a_1b_1X_n^0\mathbf{X}_n^s\Delta\hat{\mathbf{e}} \quad (63)$$

از سوی دیگر با استفاده از رابطه (61) عبارت  $(X_{n+1}^0)^2$  به صورت رابطه (64) محاسبه می‌شود.

$$(X_{n+1}^0)^2 = a_1^2(X_n^0)^2 + b_1^2\|\mathbf{X}_n^s\|^2 + 2a_1b_1X_n^0\mathbf{X}_n^s\Delta\hat{\mathbf{e}} \quad (64)$$

از مقایسه رابطه‌های (63) و (64) رابطه (65) به آسانی بدست می‌آید.

$$\|\mathbf{X}_{n+1}^s\|^2 = (X_{n+1}^0)^2 \quad (65)$$

و آن یعنی بردار تنش در زمان  $t = t_{n+1}$  روی سطح تسليم قرار گرفته است.

### 6- رابطه‌سازی نو در الگوریتم عددی

رابطه (38) یک روش صریح را نشان می‌دهد، چرا که  $\mathbb{A}_n$  با استفاده از شاعر سطح تسليم در زمان  $t_n$ ، بدست آمده است. در طول هر گام زمانی ثابت  $R$  است، اما  $\mathbb{G}_p$  در صورتی که سخت‌شوندگی همگن موجود باشد با تغییر  $R$  تغییر خواهد کرد. جهت افزایش دقت و کارایی روش عددی، رابطه‌سازی به گونه‌ای انجام می‌شود که بتوان شاعر را از هر قسمت از گام مومسانی برداشت کرد. پس از آن این شاعر در تمام طول گام زمانی ثابت پنداشت شده و در محاسبات به صورت ربطه (66) استفاده می‌شود.

$$R = R_{n+\alpha+\eta(1-\alpha)} \quad (66)$$

$\eta$  کمیتی عددی در بازه  $[0,1]$  پنداشت شده است و روابط (68,67) را نتیجه می‌شود.

$$\mathbf{X}_{n+\alpha}^s = \mathbf{X}_n^s + \alpha \frac{2G}{R_n} X_n^0 \Delta\mathbf{e} \quad (67)$$

$$X_{n+\alpha+\eta(1-\alpha)}^0 = \bar{b}\Delta\hat{\mathbf{e}}^T \left( \mathbf{X}_n^s + \alpha \frac{2G}{R_n} X_n^0 \Delta\mathbf{e} \right) + \bar{a}X_n^0 \quad (68)$$

و  $\bar{b}$  همان تعریف‌های (50) است با این تفاوت که در اینجا باید روابط (70,69) را نوشت.

$$\bar{a} = \cosh(\eta g) \quad (69)$$

$$\bar{b} = \sinh(\eta g) \quad (70)$$

بنابراین شاعر در نقطه دلخواه از گام کشسان- مومسان به صورت رابطه (71) بدست می‌آید

$$\mathbf{X}_{n+1}^{\text{TR}} = \bar{\mathbb{G}}_e \mathbf{X}_n \quad (42)$$

در این صورت چنان‌چه شرط (43) برقرار باشد، حل آزمونی پذیرفته می‌شود و مقدارهای متغیرها از روی حل آزمونی بالا برآورد می‌شود.

$$\|\mathbf{X}_{n+1}^{\text{S,TR}}\| \leq X_{n+1}^{0,\text{TR}} \quad (43)$$

اگر شرط (43) برقرار نباشد، حل آزمونی پذیرفته نمی‌شود و بخشی از گام مومسان است. این گام می‌تواند به دو قسمت تقسیم شود: یک بخش کشسان که با یک بخش کشسان- مومسان ادامه می‌یابد. ثابت  $0 \leq \alpha \leq 1$  که میان ناحیه کشسان کامل و ناحیه کشسان- مومسان را مشخص می‌کند به صورت روابط (45-44) تعریف می‌شود.

$$\alpha = \frac{\sqrt{C^2 - DM} - C}{D} \quad (44)$$

$$C = \frac{2GX_n^0}{R_n} \mathbf{X}_n^s \Delta\mathbf{e}, \quad D = \left( \frac{2GX_n^0 \|\Delta\mathbf{e}\|}{R_n} \right)^2 \quad (45)$$

$$M = \|\mathbf{X}_n^s\|^2 - (X_n^0)^2 \quad (45)$$

$\alpha\Delta\mathbf{e}$  بیانگر یک بخش کشسان کامل و  $(1-\alpha)\Delta\mathbf{e}$  بخش کشسان- مومسان کامل است؛ بنابراین بردار تنش افزوده به هنگام شده  $(X_{n+1})$  به صورت روابط (48-46) به دست خواهد آمد.

$$\mathbf{X}_{n+\alpha} = \mathbb{G}_e \mathbf{X}_n \quad (46)$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbb{G}_p \mathbf{X}_{n+\alpha} \quad (47)$$

و یا:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbb{G}_e \mathbb{G}_p \mathbf{X}_n \quad (48)$$

در اینجا،  $\mathbb{G}_e$  و  $\mathbb{G}_p$  با رابطه (39) مشخص می‌شوند، با این تفاوت که  $\Delta\mathbf{e}$  در ناحیه کشسان با  $\alpha\Delta\mathbf{e}$  و در ناحیه کشسان- مومسان با  $(1-\alpha)\Delta\mathbf{e}$  جایگزین می‌شود؛ بنابراین، رابطه‌های (39) و (41) به صورت روابط (51-49) بازنویسی می‌شوند.

$$\mathbb{G}_n = \begin{cases} \mathbb{G}_e = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{9 \times 9} & \alpha \frac{2G}{R_n} \Delta\mathbf{e} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbb{G}_p = \begin{bmatrix} \mathbb{I} + (a_1 - 1)\Delta\hat{\mathbf{e}}\Delta\hat{\mathbf{e}}^T & b_1\Delta\hat{\mathbf{e}} \\ b_1\Delta\hat{\mathbf{e}}^T & a_1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (49)$$

$$a_1 = \cosh(g), \quad b_1 = \sinh(g) \quad (50)$$

$$g = \frac{2G}{R_n} (1-\alpha) \|\Delta\mathbf{e}\| \quad (51)$$

آشکار است که  $\alpha = 0$  یک گام کشسان- مومسان را نشان می‌دهد،  $\mathbb{G}_p = \bar{\mathbb{G}}_p$  و  $\mathbb{G}_e = \mathbb{G}_e$

در پایان هر گام شاعر سطح تسليم باید به هنگام شود که به کمک رابطه‌های (9) و (25) می‌توان به روابط (53,52) رسید.

$$R_{n+1} = R_0 (X_{n+1}^0)^\beta \quad (52)$$

$$\beta = \frac{H_{\text{iso}}}{2G + H_{\text{iso}} + H_{\text{kin}}} \quad (53)$$

اما باید شاعر در گام  $n+1$  بر حسب شاعر در گام  $n$  محاسبه شود؛

بنابراین رابطه بالا در  $(X_n^0)^\beta$  به صورت رابطه (54) ضرب و تقسیم می‌شود.

$$R_{n+1} = R_0 (X_n^0)^\beta \left( \frac{X_{n+1}^0}{X_n^0} \right)^\beta = R_n \left( \frac{X_{n+1}^0}{X_n^0} \right)^\beta \quad (54)$$

در پایان تنش به هنگام شده و مرکز سطح تسليم به صورت روابط (58-55) محاسبه می‌شود.

$$\Sigma_{n+1} = \frac{R_{n+1}}{X_{n+1}^0} X_{n+1}^s \quad (55)$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{H_{\text{kin}}}{2G + H_{\text{kin}}} (2G\mathbf{e}_{n+1} - \Sigma_{n+1}) \quad (56)$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \Sigma_{n+1} + \alpha_{n+1} \quad (57)$$

$$\sigma_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + K \cdot \theta_{n+1} \quad (58)$$

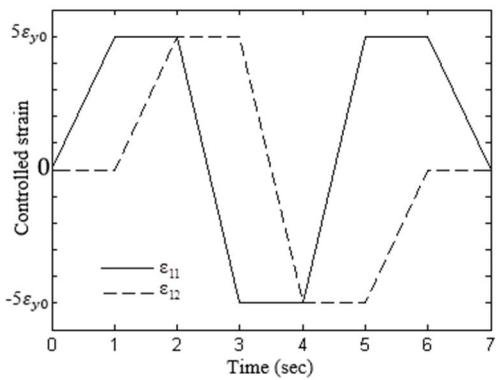
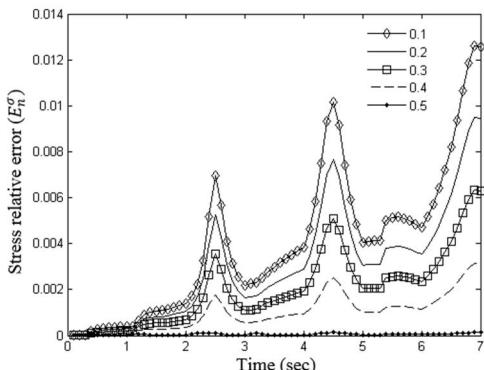
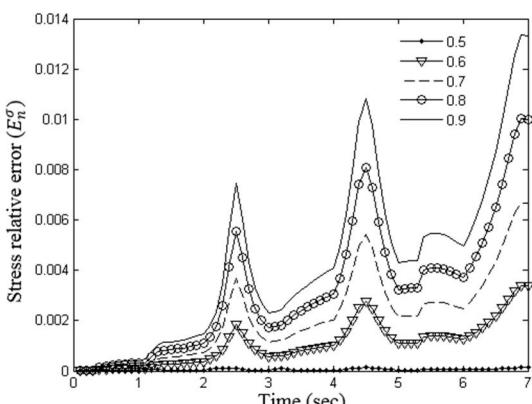


Fig.1 Strain history

شکل ۱ پیشینه بارگذاری کرنش

۰.۸ و ۰.۹ در نموداری دیگر برای هر یک از ماده‌ها رسم می‌شود. این نمودارها در شکل‌های ۲ تا ۵ آورده شده است. همان‌گونه که از شکل‌های ۲ تا ۵ برمی‌آید کمترین خطای نسبی در  $\eta = 0.5$  است. این بدان معناست که در  $\eta = 0.5$  دقیق‌ترین پاسخ‌ها به دست می‌آید. حال نیاز به بررسی دقیق‌تر در همسایگی  $\eta = 0.5$  است؛ بنابراین برای بررسی بهتر دقت تنش‌های به‌هنگامشده، خطای نسبی تنش برای مقدارهای  $\eta$  برابر ۰.۴۵، ۰.۴۸ و ۰.۵ در یک نمودار و برای  $\eta = 0.5$  و ۰.۵۵ و ۰.۵۲ در نموداری دیگر برای هر ماده رسم می‌شود که در شکل‌های ۶ تا ۹ این نمودارها آورده شده است.

Fig.2 Stress relative error for material 1 with  $\eta = 0.1$  to 0.5شکل ۲ خطای نسبی برای ماده ۱ با  $\eta$  برابر ۰.۱ تا ۰.۵Fig.3 Stress relative error for material 1 with  $\eta = 0.5$  to 0.9شکل ۳ خطای نسبی برای ماده ۱ با  $\eta$  برابر ۰.۵ تا ۰.۹

$$R_{n+\alpha+\eta(1-\alpha)} = R_n \left( \frac{X_{n+\alpha+\eta(1-\alpha)}^0}{X_n^0} \right)^{\beta} \quad (71)$$

و می‌توان این رابطه را به صورت رابطه (72) درآورد.

$$R_{n+\alpha+\eta(1-\alpha)} = R_n H^{\beta} \quad (72)$$

که  $H$  از قراردادن (68) در (71) به صورت رابطه (73) به دست آمده است.

$$H = \sinh(\eta g) \left( \frac{\Delta \hat{e}^T X_n^s}{X_n^0} + \alpha \frac{2G}{R_n} \|\Delta e\| \right) + \cosh(\eta g) \quad (73)$$

که در این رابطه‌ها  $g$  به صورت رابطه (74) تعریف می‌شود.

$$g = \frac{2G}{R_n} (1 - \alpha) \|\Delta e\| \quad (74)$$

## ۷- عملگر مماسی سازگار

در تحلیل‌های اجزای محدود ناخطي که در آن‌ها از شیوه نیوتون-رافسون استفاده می‌شود، برای برپایی ماتریس سختی مماسی سازه به عملگر مماسی سازگار کشسان-موسمان نیاز است [5]. عملگر مماسی سازگار در ناحیه کشسان-موسمان با رابطه (75) محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{2G}{2G + H_{\text{kin}}} \left( \frac{\partial \Sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} + H_{\text{kin}} \right) \mathbb{I}_{\text{dev}} + K \cdot \mathbf{i} \mathbf{i}^T \quad (75)$$

و برای فاز کشسانی با روابط (76) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = 2G \mathbb{I}_{\text{dev}} + K \cdot \mathbf{i} \mathbf{i}^T \quad (76)$$

$$\mathbb{I}_{\text{dev}} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} (\mathbf{i} \mathbf{i}^T) \quad (77)$$

$$\mathbb{I} = 9 \times 9$$

$$\mathbf{i}^T = \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1\} \quad (78)$$

## ۸- آزمون‌های عددی

در این بخش بررسی می‌شود که در فرآیند به‌هنگام‌سازی تنش، ساعت سطح تسلیم از کدام قسمت گام موسمانی برداشت شود تا دقیق‌ترین پاسخ‌ها به دست آید. برای رسیدن به این منظور یک پیشینه بارگذاری کرنش معمول در نظر گرفته می‌شود (شکل ۱)، سپس تنش‌هایی وابسته برای دو نوع ماده متفاوت به‌هنگام می‌شوند [4].

در پیشینه کرنش شکل ۱ سایر مؤلفه‌های کرنش صفر است. عامل  $\gamma_{y0}$

$$\text{کرنش نخستین تسلیم را نشان می‌دهد} \quad (\varepsilon_{y0} = \sqrt{\frac{3 R_0}{2 E}}) \quad \text{ماده ۱}$$

$$R_0 = 15 \text{ MPa} \quad \text{ماده ۲}$$

$$E = 100 \text{ MPa}; v = 0.3; H_{\text{kin}} = 10 \text{ MPa}; H_{\text{iso}} = 10 \text{ MPa}; \quad \text{ماده ۲}$$

$$R_0 = 24.3 \text{ MPa}$$

$$E = 7000 \text{ MPa}; v = 0.3; H_{\text{kin}} = 0; H_{\text{iso}} = 225 \text{ MPa};$$

با توجه به این‌که حل دقیق برای این مسئله‌ها موجود نیست پاسخ‌های به دست آمده از گام زمانی بسیار کوچک ( $\Delta t = 1 \times 10^{-5} \text{ sec}$ )، به عنوان پاسخ‌های دقیق در نظر گرفته می‌شود. برای بررسی مناسب دقت نتایج‌های به دست آمده، خطای نسبی تنش‌های به‌هنگامشده با رابطه (79) محاسبه می‌شود.

$$E_n^{\sigma} = \frac{\|\sigma_n - \bar{\sigma}_n\|}{\|\bar{\sigma}_n\|} \quad (79)$$

در رابطه بالا،  $\bar{\sigma}_n$  بردار تنش دقیق و  $\sigma_n$  بردار تنش به‌هنگامشده در لحظه  $t = t_n$  است.

با درنظر گرفتن  $\Delta t = 0.1 \text{ sec}$  خطای نسبی برای مقدارهای  $\eta$  برابر ۰.۷، ۰.۶، ۰.۵، ۰.۴، ۰.۳، ۰.۲، ۰.۱

بیان کرد که چنان‌چه شعاع از وسط گام کشسان-موسمان برداشت شود و در محاسبات به‌هنگام‌سازی تنش استفاده شود، دقیق‌ترین پاسخ‌ها به‌دست می‌آید. در پایان باید یادآور شد این نتیجه به دلیل ماهیت بسیار پیچیده معادله‌های بنیادی و الگوریتم به‌هنگام‌سازی تنش تاکنون با یک روش تحلیلی به‌دست نیامده است.

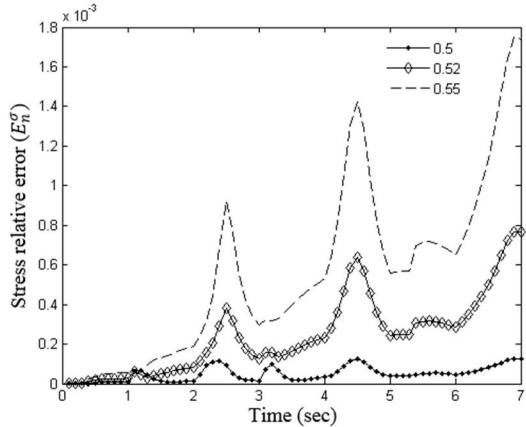


Fig.7 Stress relative error for material 1 with  $\eta = 0.5$  to 0.55  
شكل 7 خطای نسبی برای ماده ۱ با  $\eta$  برابر ۰.۵ تا ۰.۵۵

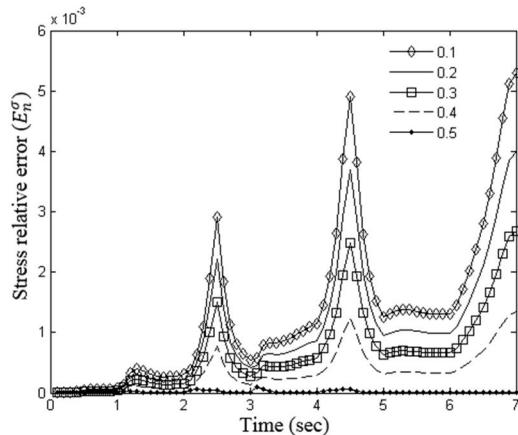


Fig.4 Stress relative error for material 2 with  $\eta = 0.1$  to 0.5

شكل 4 خطای نسبی برای ماده ۲ با  $\eta$  برابر ۰.۱ تا ۰.۵

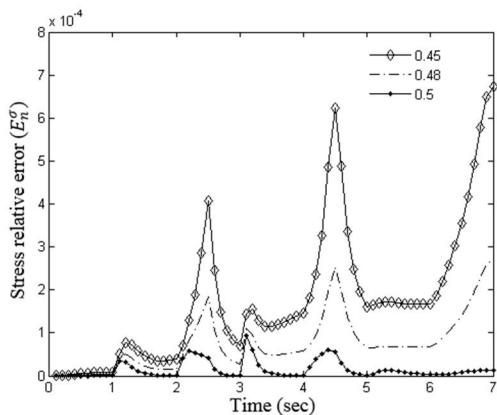


Fig.8 Stress relative error for material 2 with  $\eta = 0.45$  to 0.5  
شكل 8 خطای نسبی برای ماده ۲ با  $\eta$  برابر ۰.۵ تا ۰.۴۵

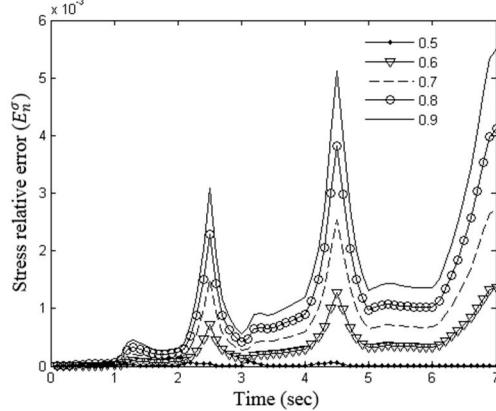


Fig.5 Stress relative error for material 2 with  $\eta = 0.5$  to 0.9

شكل 5 خطای نسبی برای ماده ۲ با  $\eta$  برابر ۰.۵ تا ۰.۹

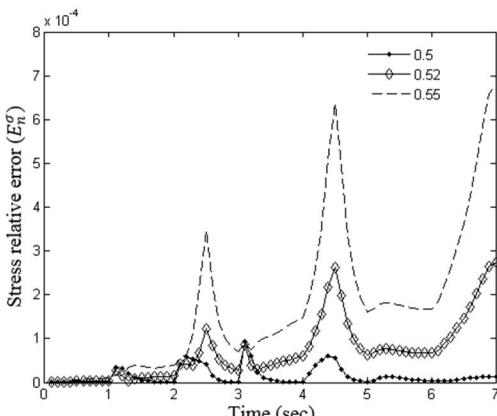


Fig.6 Stress relative error for material 1 with  $\eta = 0.45$  to 0.5

شكل 6 خطای نسبی برای ماده ۱ با  $\eta$  برابر ۰.۴۵ تا ۰.۵

همان‌گونه که در شکل‌های 6 تا 9 دیده می‌شود، کمترین خطای نسبی در  $\eta = 0.5$  است؛ یعنی دقیق‌ترین پاسخ‌ها با  $\eta = 0.5$  به‌دست می‌آید. آخرین و ریزترین بررسی برای مقدارهای  $\eta$  برابر ۰.۴۹، ۰.۴۸، ۰.۴۷ و ۰.۴۶ صورت گرفته است و در شکل‌های 10 و 11 نشان داده شده است.

شکل‌های 10 و 11 به روشنی نمایان می‌سازد که  $\eta = 0.5$  کمترین خطای نسبی را به‌دست می‌دهد. با توجه به تعریف  $\eta$  این نتیجه را می‌توان

Fig.9 Stress relative error for material 2 with  $\eta = 0.5$  to 0.55  
شكل 9 خطای نسبی برای ماده ۲ با  $\eta$  برابر ۰.۵ تا ۰.۵۵

خاص از گام موسمانی برداشت شد. در هر مرحله تنش‌های بهنگامشده با پاسخ‌های دقیق مقایسه و دقت هر یک از مرحله‌های یادشده بهصورت جداگانه محاسبه و در نمودارهایی ترسیم شد. بر پایه تحلیل‌های صورت گرفته می‌توان دریافت که در روش نیمه‌ضمنی بر پایه نگاشتنمایی، استفاده از شاعر سطح تسلیمی که از میانه گام موسمانی برداشت می‌شود. دقیق‌ترین پاسخ در بهنگام سازی تنش‌ها را به دست می‌دهد. از آن جا که در تابع اولیه‌گیری از معادله‌های بنیادی موسمانی، هر چه دقت روش مورد استفاده افزایش یابد می‌توان در تحلیل گام‌های زمانی بزرگتری را لحاظ کرد؛ بنابراین در عین حال که دقت مورد نیاز تأمین می‌شود، زمان تحلیل کاهش می‌یابد که یکی از عامل‌های بسیار مهم در تحلیل و طراحی سازه‌هاست.

#### 10- مراجع

- [1] H.-K. Hong, C.-S. Liu, Internal symmetry in bilinear elastoplasticity, *Non-Linear Mechanics*, Vol. 34, No. 2, pp. 279-288, 1999.
- [2] F. Auricchio, L. Beirao da Veiga, on a new integration scheme for Von-Mises plasticity with linear hardening, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 56, No. 10, pp. 1375-1396, 2003.
- [3] C.-S. Liu, International symmetry groups for the Drucker-Prager material model of plasticity and numerical integrating methods, *Solids and Structures*, Vol. 41, No. 14, pp. 3771-3791, 2004.
- [4] E. Artioli, F. Auricchio, L. Beirao da Veiga, Integration scheme for Von-Mises plasticity models based on exponential maps: Numerical investigations and theoretical considerations, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 64, No. 9, pp. 1133-1165, 2005.
- [5] E. Artioli, F. Auricchio, L. Beirao da Veiga, A novel ‘optimal’ exponential-based integration algorithm for Von-Mises plasticity with linear hardening: Theoretical analysis on yield consistency, accuracy, convergence and numerical investigations, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 67, No. 4, pp. 449-498, 2006.
- [6] M. Rezaiee-Pajand, C. Nasirai, Accurate integration scheme for Von-Mises plasticity with mixed-hardening based on exponential maps, *Engineering Computations*, Vol. 24, No. 6, pp. 608-635, 2007.
- [7] E. Artioli, F. Auricchio, L. Beirao da Veiga, Second-order accurate integration algorithms for Von-Mises plasticity with a nonlinear kinematic hardening mechanism, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, No. 9, pp. 1827-1846, 2007.
- [8] M. Rezaiee-Pajand, C. Nasirai, On the integration scheme for Drucker-Prager's elastoplastic models based on exponential maps, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, No. 10, pp. 799-826, 2008.
- [9] M. Rezaiee-Pajand, C. Nasirai, M. Sharifian, Application of exponential-based methods in integrating the constitutive equations with multi-component nonlinear kinematic hardening, *ASCE Engineering Mechanics*, Vol. 136, No. 12, pp. 1502-1518, 2010.
- [10] M. Rezaiee-Pajand, C. Nasirai, M. Sharifian, Integration of nonlinear mixed hardening models, *Multidiscipline Modeling in Materials and structures*, Vol. 7, No. 3, pp. 266-305, 2011.
- [11] M. Rezaiee-Pajand, M. Sharifian, A novel formulation for integrating nonlinear kinematic hardening Drucker-Prager's yield condition, *Mechanics A/Solids*, Vol. 31, No. 1, pp. 163-178, 2011.
- [12] M. Rezaiee-Pajand, M. Sharifian, M. Sharifian, Accurate and approximate integrations of Drucker-Prager plasticity with linear isotropic and kinematic hardening, *Mechanics A/Solids*, Vol. 30, No. 3, pp. 345-361, 2011.
- [13] M. Rezaiee-Pajand, F. Auricchio, M. Sharifian, M. Sharifian, Computational plasticity of mixed hardening pressure-dependency constitutive equations, *Acta Mechanica*, Vol. 225, No. 6, pp. 1699-1733, 2014.

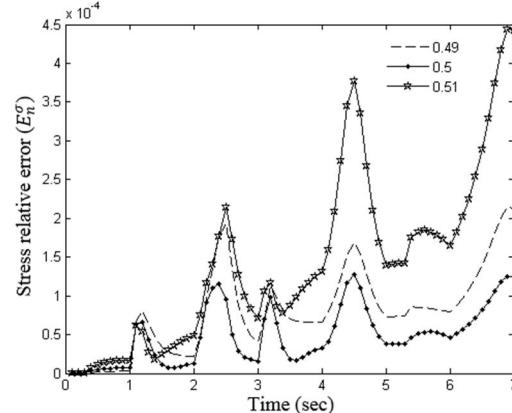


Fig.10 Stress relative error for material 1 with  $\eta = 0.49$  to 0.51

شکل 10 خطای نسبی برای ماده 1 با  $\eta$  برابر 0.49 تا 0.51

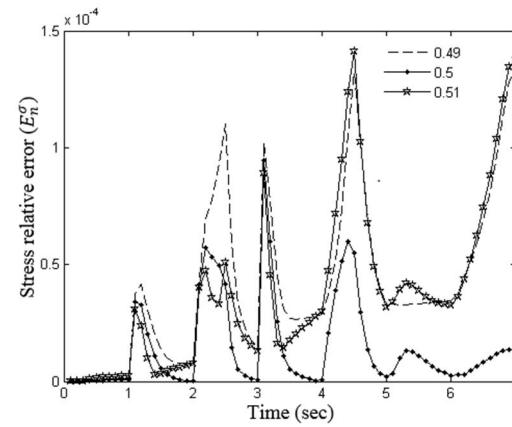


Fig.11 Stress relative error for material 2 with  $\eta = 0.49$  to 0.51

شکل 11 خطای نسبی برای ماده 2 با  $\eta$  برابر 0.49 تا 0.51

#### 9- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی روش نیمه‌ضمنی بر پایه نگاشتنمایی برای سخت‌شوندگی‌های درهم همگن و پویای خطی پرداخته شد. برای آن که بتوان شاعر را از هر نقطه دلخواه از گام موسمانی برداشت کرد، رابطه‌سازی لازم صورت گرفت. آزمون عددی به این صورت طرح شد که یک مسیر بارگذاری کرنش معلوم درنظر گرفته شد، سپس برای دو نوع ماده متفاوت تنش‌ها بهنگام شدند.

بهنگامسازی تنش در آزمون عددی در مرحله‌های مختلف صورت پذیرفت. در حقیقت در هر مرحله شاعر و متغیرهای موسمانی از یک قسمت