



تحلیل استاتیکی صفحات مستطیلی با ضخامت متغیر با استفاده از روش میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای

رضا پیل افکن^{1*}، سوده بخشی²

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل

2- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل

* اردبیل، صندوق پستی 179، rezapilafkan@uma.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 14 بهمن 1394

پذیرش: 17 اسفند 1394

ارائه در سایت: 28 فروردین 1395

کلید واژگان:

تحلیل استاتیکی

ضخامت متغیر

روش بدون المان

در کار حاضر تحلیل استاتیکی صفحات مستطیلی ایزوتروپیک با ضخامت متغیر با استفاده از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته و برای اولین بار با استفاده از روش حل عددی بدون المان با میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای، ارائه شده است. در این روش عددی، متغیر میدان تنها با استفاده از گرهای که به‌طور دلخواه در ناحیه مساله توزیع شده‌اند میان‌یابی می‌شود و به دلیل اینکه هیچ ارتباطی بین دو گر دلخواه تعریف نشده است، این امکان وجود دارد که در هر ناحیه و جهت برای حصول دقت بالاتر تعداد آن‌ها افزایش یابد. توابع شکل در این روش، دارای خاصیت تابع دلتای کرونگر هستند و شرایط مرزی مختلف به‌راحتی با استفاده از رهیافت حذف اعمال می‌شود. در کار حاضر، صفحه دارای ضخامت متغیر خطی و یا سهمی در جهت y بوده و وجه بالایی صفحه افقی بوده و تحت بار استاتیکی یکنواخت در جهت z قرار دارد. همگرایی نتایج مربوط به صفحه مستطیلی ایزوتروپیک با ضخامت متغیر خطی و با شرط مرزی تکیه‌گاهی ساده، برای نسبت‌های ضخامت مختلف بررسی و با نتایج موجود مقایسه شده - است. توزیع خیز و تنش‌ها برای صفحات با ضخامت متغیر سهمی شکل، و تحت شرایط مرزی مختلف در قالب نمودارهایی ارائه شده‌است. مشاهده شد که روش حاضر، روشی بسیار مناسب در تحلیل این قبیل صفحات بوده و نتایج حاصل از آن همگرایی سریع و دقت بالایی دارند.

Static analysis of rectangular plates with variable thickness using radial point interpolation method

Reza Pilafkan*, Soudeh Bakhshi

Department of Mechanical Engineering, Mohaghegh Ardabili University, Ardabil, Iran.

* P.O.B. 179, Ardabil, Iran, rezapilafkan@uma.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 03 February 2016
Accepted 07 March 2016
Available Online 16 April 2016

Keywords:
Static analysis
Variable thickness
Meshless method

ABSTRACT

In this work static analysis of isotropic rectangular plates with variable thickness are presented using three dimensional elasticity theory and for the first time by using radial point interpolation method. Applying this numerical method, the field variables are interpolated using nodes scattered arbitrarily in the plate domain. Since there is no connection between two arbitrary nodes, their numbers can be increased in any area and direction to obtain better accuracy. It is assumed that, the plate thickness varies linearly in y direction or it has parabolic convex/concave lower surface in the y direction. The horizontal upper surface of the plate is subjected to the transverse uniform load in the z direction. Shape functions in this method have Kronecker delta function property and different boundary conditions can be applied easily using elimination approach. Convergence of results for simply supported isotropic rectangular plates with linearly variable thickness is presented for different thickness ratios and compared with those in the literature. Distributions of the deflections and stresses for plates with parabolic convex/concave lower surface in the y direction and under different boundary conditions are presented in graphs. It is revealed that the present numerical method with its fast convergence and great accuracy is a reliable method to analyze such plates.

1- مقدمه

به دلیل کاربرد گسترده صفحات به عنوان المان‌های تشکیل‌دهنده سازه‌ها، طراحی صحیح و بهینه آن‌ها بسیار حائز اهمیت است. در بسیاری از کارهایی که پیش از این ارائه شده است، از تئوری‌های ساده شده صفحات مانند تئوری کلاسیک صفحات¹ [1]، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول² [2] و تئوری

تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر³ استفاده شده است. در این تئوری‌ها فرضیات مشخصی در رابطه با تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها در جهت ضخامت اتخاذ می‌گردد و بنابراین دقت نتایج حاصل خصوصاً برای صفحات ضخیم و حتی نسبتاً ضخیم، در مقایسه با زمانی که تئوری سه‌بعدی الاستیسیته⁴ مورد استفاده قرار

2- First Order Shear Deformation Theory
3- Higher Order Shear Deformation Theory
4- Three Dimensional Elasticity Theory

1- Classical Plate Theory

Please cite this article using:

R. Pilafkan, S. Bakhshi, Static analysis of rectangular plates with variable thickness using radial point interpolation method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 230-238, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

R. Pilafkan, S. Bakhshi, Static analysis of rectangular plates with variable thickness using radial point interpolation method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 230-238, 2016 (in Persian)

ویژگی، روشی مناسب برای تحلیل صفحات ضخامت متغیر با شرایط مرزی مختلف است. شیا و همکارانش [8] خمش و ارتعاش آزاد صفحات نسبتاً ضخیم غیر همگن را با استفاده از روش بدون المان با میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای محلی¹⁴ تحلیل کردند. پیل افکن و همکارانش [9] با استفاده از تئوری سه-بعدی الاستیسیته و روش بدون المان با میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای، تحلیل فرکانسی سه‌بعدی را برای صفحات مستطیلی سوراخ‌دار با تابع هدفمند ارائه کردند.

صفحات با ضخامت متغیر نقش مهمی در کاربردهای واقعی مهندسی دارند. این گونه صفحات به عنوان یک المان در سازه‌ها، از طریق کاهش وزن و بهبود توزیع تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها، رفتار دینامیکی سازه‌ها را بهبود می‌دهند. طراحی بهینه این صفحات خصوصاً در کاربردهایی که سازه‌ها در سرعت‌های بالا کار می‌کنند و کاهش وزن سازه اهمیت خاصی دارد، مانند سفینه‌های فضایی سرعت بالا، بسیار حیاتی است. تحلیل تنش-کرنش صفحات مستطیلی با ضخامت متغیر و وزن ثابت توسط گریگورنکو و روزوک [10] انجام شد. آن‌ها برای حل مساله از سری فوریه گسسته¹⁵ که امکان کاهش بعد مساله را از دو به یک ایجاد می‌کند استفاده کردند. حلی دقیق برای خمش صفحات مستطیلی نازک با ضخامت ثابت، متغیر خطی و متغیر درجه دوم، بر اساس تئوری کلاسیک صفحه نازک توسط زنکور [11] ارائه شده است. صفحه مستطیلی نازک در کار او در دو وجه مقابل دارای شرط مرزی با تکیه‌گاه ساده است. دو وجه دیگر دارای شرایط مرزی مختلف بوده و ضخامت بین این دو وجه تغییر میکند. حل عددی آن‌ها با استفاده از روش پارامتر کوچک¹⁶ و رهیافت نوع لوی¹⁷ انجام شد. ملک‌زاده و کرمی [12] روند همگرایی و دقت روش تربیع دیفرانسیلی تابع پایه چندجمله‌ای و روش تربیع دیفرانسیلی تابع پایه هارمونیک را برای تحلیل ارتعاش آزاد صفحات اربب ضخامت متغیر آزمایش کردند. در کار آنها معادلات حاکم بر صفحه بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بدست آمد و تاثیر شرایط مرزی، زوایای اربب و نسبت‌های ضخامت به طول ضلع مختلف بر نتایج حاصل بررسی شد. آن‌ها مشاهده کردند که هر دو روش نتایج دقیقی برای فرکانس‌های طبیعی در مودهای مختلف ارتعاشی ارائه می‌کنند. تحلیل سه‌بعدی صفحات مستطیلی ایزوتروپیک با ضخامت متغیر و شرط مرزی تکیه‌گاهی ساده توسط خو و ژو [13] انجام شده است. در کار آن‌ها بر اساس تئوری سه‌بعدی الاستیسیته، عبارات عمومی برای جابه‌جایی‌ها و تنش‌های صفحه تحت بار استاتیکی یکنواخت، که دقیقاً معادلات دیفرانسیلی حاکم و شرایط مرزی صفحه را ارضا می‌کند، به طور تحلیلی استخراج و ضرایب نامعلوم با استفاده از بسط سری‌های فوریه سینوسی به‌طور تقریبی تعیین شدند. دای و همکارانش [14] تحلیل ترموالاستیک صفحات استیل دایره‌ای با ضخامت متغیر را که در یک میدان دمایی قرار داده شده‌اند و تحت یک بار مکانیکی قرار دارند با استفاده از روش تفاضل محدود¹⁸ انجام دادند. آن‌ها معادلات مربوط به جابه‌جایی‌های صفحه میانی را با استفاده از اصل همپلتون¹⁹ و بر اساس معادله ون کارمن²⁰ و تئوری کلاسیک صفحه بدست آوردند. بر اساس مطالعات نویسند-گان، تاکنون تحلیل سه‌بعدی صفحات ایزوتروپیک با ضخامت متغیر با کمک روش‌های بدون المان انجام نشده است.

می‌گیرد کاهش می‌یابد. تحلیل خمش و ارتعاش آزاد صفحات و پوسته‌های چندلایه و ایزوتروپیک با استفاده از یک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر جدید و دقیق توسط منتاری و همکارانش [3] انجام شد. معادلات حاکم و شرایط مرزی، با بکارگیری اصل کار مجازی¹ استخراج و به‌کمک راه‌حل‌های فرم صریح ناویر² حل شدند. تلاشی برای تحلیل خمش و کمانش صفحات مستطیلی با بهره‌گیری از حل‌های سه‌بعدی الاستیسیته، از طریق روش تربیع دیفرانسیلی³ و روش تربیع دیفرانسیلی هارمونیک⁴ توسط لیو و همکارانش [4] صورت پذیرفت. برخی روش‌های تحلیلی برای حل مسائل مربوط به صفحات ارائه شده‌اند. فرمولاسیون و حل تحلیلی برای تحلیل استاتیکی صفحات ساندویچی و کامپوزیتی با تکیه‌گاه ساده بر اساس یک تئوری مرتبه بالاتر اصلاح‌شده توسط کنت و سوامیناتان [5] ارائه شد. آن‌ها معادلات تعادل را با استفاده از اصل انرژی پتانسیل کمینه⁵ به‌دست آوردند. در کار آن‌ها حل دقیق با استفاده از تکنیک ناویر و با حل مساله مقدار مرزی به‌صورت فرم صریح به‌دست آمد. ول و بتر⁶ حل دقیقی برای تغییر شکل سه‌بعدی صفحات مستطیلی از جنس ماده با تابع هدفمند⁶ ارائه کردند. صفحات مورد بررسی آن‌ها دارای شرط مرزی با تکیه‌گاه ساده بوده و وجه بالا یا پایینی آن-ها تحت بارهای مکانیکی و گرمایی قرار داشت. آن‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مساله از روش سری‌های توانی⁷ استفاده کردند.

با این حال کارایی حل‌های تحلیلی، به هندسه‌های ساده و شرایط مرزی و بارگذاری خاص محدود می‌شود. روش‌های عددی با طرح‌های گسسته‌سازی متفاوت از جمله روش المان محدود⁸ به‌طور گسترده در حل مسائل استاتیکی صفحات مورد استفاده قرار گرفته است. اخیراً روش‌های بدون المان⁹ با توجه به مزیت‌های چشم‌گیری که نسبت به روش المان محدود دارند بسیار مورد توجه محققین قرار گرفته‌اند. مدل‌سازی و تحلیل مسائل با هندسه و شرایط مرزی و بارگذاری خاص و پیچیده، به‌راحتی به کمک روش‌های بدون المان امکان‌پذیر است. در روش‌های بدون المان، مدل محاسباتی¹⁰ به کمک گره-هایی که در درون و مرزهای ناحیه مساله به‌طور دلخواه پراکنده می‌شوند، مشخص می‌شود. به دلیل نبود ارتباط بین هیچ دو گرهی، برای رسیدن به دقت بالاتر امکان افزایش، کاهش و یا حذف گره‌ها در هر ناحیه یا جهت دلخواهی وجود دارد. رضایی مؤدهی و همکارانش [7] تحلیل سه‌بعدی استاتیکی و دینامیکی صفحات مستطیلی ضخیم با تابع هدفمند را بر مبنای روش بدون المان پتروگالرکین محلی¹¹ انجام دادند. در برخی از روش‌های بدون المان نظیر روش بدون المان گالرکین و روش بدون المان پتروگالرکین محلی، توابع شکل فاقد خاصیت تابع دلتای کرونکر¹² هستند و به تکنیک‌های خاصی جهت ارضای شرایط مرزی اساسی نیاز است که زمان محاسبات را افزایش می‌دهد. اخیراً در روش‌های بدون المان، از توابع پایه شعاعی استفاده می‌شود. توابع شکل حاصل دارای خاصیت تابع دلتای کرونکر هستند و بنابراین شرایط مرزی اساسی به راحتی با به‌کارگیری رهیافت حذف¹³ اعمال می‌شود. روش بدون المان مورد استفاده در کار حاضر به‌دلیل داشتن همین

1- Principle of Virtual Work

2- Navier-Type

3- Differential Quadrature (DQ)

4- Harmonic Differential Quadrature (HDQ)

5- Principle of Minimum Potential Energy (PMPE)

6- Functionally Graded Material

7- Power Series Method

8- Finite Element Method

9- Meshless Methods

10- Computational Model

11- Meshless Local Petrove Galerkin Method (MLPG)

12- Kronecker delta function property

13- Elimination approach

14- Local Radial Point Interpolation Method

15- Discrete Fourier Series

16- Small Parameter Method

17- Levy-Type Approach

18- Finite Difference Method

19- Hamilton Principle

20- Von Karman Equation

توابع پایه شعاعی متعددی وجود دارد که از بین آنها دو نوع تربیعی چند مرتبه-ای² و گوسی³ به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در کار حاضر از نوع تربیعی چند مرتبه‌ای (رابطه 6) استفاده شده است [15]:

$$R_i(\bar{x}) = R_i(x, y, z) = [r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2]^q \quad (6)$$

به طوری که α_c و $\bar{q}$ پارامترهای تابع پایه شعاعی و d_c میانگین فاصله گرهی⁴ است. تابع پایه شعاعی، تابعی از r_i ، فاصله بین نقطه $\bar{x}_Q$ و گره $\bar{x}_i$ است.

در رابطه 7 بردار توابع پایه چندجمله‌ای برای حالت سه بعدی و $m = 4$ نشان داده شده است.

$$\bar{P}^T(\bar{x}) = [1 \ x \ y \ z] \quad (7)$$

برای محاسبه ضرایب a_i و b_j ، رابطه 1 در تمام گره‌های واقع در دامنه کمکی اعمال خواهد شد (رابطه 8) [15,9].

$$\sum_{i=1}^n R_i(\bar{x}_k) a_i + \sum_{j=1}^m P_j(\bar{x}_k) b_j = u_k \quad (8)$$

$$= u(\bar{x}_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

دستگاه معادله در رابطه 8 شامل n معادله و $n + m$ مجهول است. که برای حل آن m معادله مکمل به صورت رابطه 9 استفاده می‌شود [15,9].

$$\sum_{i=1}^n P_j(\bar{x}_i) a_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (9)$$

روابط 8 و 9 به صورت ماتریسی در معادلات 10 و 11 نوشته می‌شوند:

$$R_Q \bar{a} + P_m \bar{b} = q \quad (10)$$

$$P_m^T \bar{a} = 0 \quad (11)$$

q برداری شامل جابه‌جایی تمام گره‌های درون دامنه کمکی است (رابطه 12):

$$q = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_n]^T \quad (12)$$

R_Q و P_m به ترتیب ماتریس ممان شعاعی⁵ و ماتریس ممان چندجمله‌ای⁶ هستند و با روابط 13 و 14 بیان شده‌اند.

$$R_Q = \begin{bmatrix} R_1(x_1, y_1, z_1) & R_2(x_1, y_1, z_1) & \dots & R_n(x_1, y_1, z_1) \\ R_1(x_2, y_2, z_2) & R_2(x_2, y_2, z_2) & \dots & R_n(x_2, y_2, z_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(x_n, y_n, z_n) & R_2(x_n, y_n, z_n) & \dots & R_n(x_n, y_n, z_n) \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (13)$$

$$P_m = \begin{bmatrix} P_1(x_1, y_1, z_1) & P_2(x_1, y_1, z_1) & \dots & P_m(x_1, y_1, z_1) \\ P_1(x_2, y_2, z_2) & P_2(x_2, y_2, z_2) & \dots & P_m(x_2, y_2, z_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(x_n, y_n, z_n) & P_2(x_n, y_n, z_n) & \dots & P_m(x_n, y_n, z_n) \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (14)$$

با استفاده از رابطه 8 و 9 ضرایب $\bar{a}$ و $\bar{b}$ به صورت رابطه 15 بدست می‌آیند [16].

$$\bar{a} = S_a u, \quad \bar{b} = S_b u \quad (15)$$

S_a و S_b با روابط 16 و 17 تعریف می‌شوند.

$$S_a = R_Q^{-1} [I - P_m S_b] \quad (16)$$

$$S_b = [P_m^T R_Q^{-1} P_m]^{-1} P_m^T R_Q^{-1} \quad (17)$$

جاگذاری $\bar{a}$ و $\bar{b}$ در معادله 1 بردار توابع شکل⁷ را به صورت رابطه 18 نتیجه می‌دهد [15,16].

$$\Psi(\bar{x}) = \bar{R}^T(\bar{x}) S_a + \bar{P}^T(\bar{x}) S_b = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n] \quad (18)$$

مشتق بردار توابع شکل نسبت به متغیرهای مستقل $l = x, y, z$ بصورت رابطه

در کار حاضر تحلیل استاتیکی صفحات مستطیلی ایزوتروپیک با ضخامت متغیر با استفاده از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته و روش حل عددی بدون المان با میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای ارائه شده است. با استفاده از این روش عددی، صفحات با ضخامت متغیر با شکل و اندازه‌های دلخواه به راحتی به کمک گره‌های واقع در درون و مرزهای صفحه مدل‌سازی می‌شود. معادلات حاکم بر حرکت صفحه با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده‌اند. همگرایی نتایج مربوط به صفحه مستطیلی ایزوتروپیک با ضخامت متغیر خطی در جهت y و با شرط مرزی با تکیه‌گاه ساده ارائه شده است. نتایج مربوط به صفحه مستطیلی ایزوتروپیک با ضخامت متغیر سهمی شکل در جهت y برای نسبت‌های ضخامت متفاوت و شرایط مرزی مختلف ارائه و با نتایج مقالات موجود مقایسه و دقت بالای روش حاضر نشان داده شده است.

2- روش میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای

در شکل 1 صفحه‌ای با ضخامت متغیر نشان داده شده است. مرز و درون صفحه با توزیع دلخواه N گره به صورت $\bar{x}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ مدل‌سازی شده است. برای میان‌یابی هر یک از مولفه‌های تابع میدان جابه‌جایی، در یک نقطه دلخواه $\bar{x}_Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ از صفحه، ناحیه‌ای به مرکز این نقطه و با شکل و اندازه دلخواه در نظر گرفته می‌شود. این ناحیه که دامنه کمکی¹ نامیده می‌شود، تعداد مشخصی از گره‌ها را در خود جای می‌دهد و میان‌یابی تابع میدان در این نقطه، تنها با استفاده از گره‌های واقع در دامنه کمکی این نقطه صورت می‌گیرد (رابطه 1) [15].

$$u(\bar{x}, \bar{x}_Q) = \sum_{i=1}^n R_i(\bar{x}) a_i + \sum_{j=1}^m P_j(\bar{x}) b_j \quad (1)$$

$$= \bar{R}^T(\bar{x}) \bar{a} + \bar{P}^T(\bar{x}) \bar{b}$$

$R_i(\bar{x})$ و $P_j(\bar{x})$ به ترتیب معرف توابع پایه شعاعی و چند جمله‌ای هستند. n تعداد گره‌های واقع در دامنه کمکی و m تعداد جملات تابع پایه چندجمله‌ای است و a_i و b_j ضرایبی هستند که محاسبه خواهند شد. بردارهای $\bar{a}$ ، $\bar{P}^T$ ، $\bar{R}^T$ و $\bar{b}$ با روابط 2 تا 5 تعریف شده‌اند.

$$\bar{R}^T(\bar{x}) = [R_1(\bar{x}), R_2(\bar{x}), \dots, R_n(\bar{x})] \quad (2)$$

$$\bar{P}^T = [P_1(\bar{x}), P_2(\bar{x}), P_3(\bar{x}), \dots, P_m(\bar{x})] \quad (3)$$

$$\bar{a} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]^T \quad (4)$$

$$\bar{b} = [b_1, b_2, b_3, \dots, b_m]^T \quad (5)$$

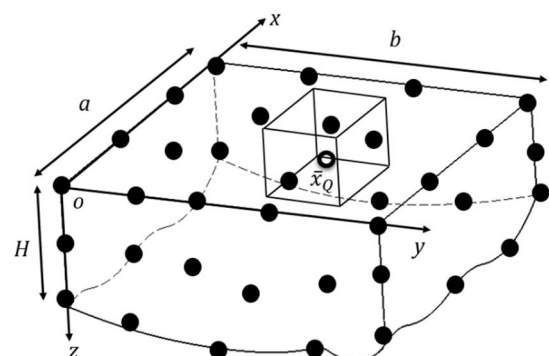


Fig. 1 Plate with variable thickness that is modeled using scattered nodes; and the support domain of point $\bar{x}_Q$

شکل 1 صفحه با ضخامت متغیر که به کمک توزیع گره‌ها مدل‌سازی شده است؛ و دامنه کمکی نقطه $\bar{x}_Q$

2- Multiquadrics Functions
3- Gaussian Functions
4- Average Nodal Spacing
5- Radial Moment Matrix
6- Polynomial Moment Matrix
7- Shape Functions

19 بیان میشود:

$$\Psi_{,l} = \bar{R}_{,l}^T(\bar{x})S_a + \bar{P}_{,l}^T(\bar{x})S_b \quad (19)$$

که اندیس l ، نشان دهنده مشتق نسبت به l است.

3-معادلات حاکم

صفحه مستطیلی با طول a ، عرض b و ضخامت متغیر $H(y)$ در نظر گرفته شده است. از دستگاه مختصات کارترین (x, y, z) برای توصیف هندسه و ابعاد صفحه و نیز جابه‌جایی‌های کوچک صفحه الاستیک استفاده شده است.

میدان جابه‌جایی در این سیستم مختصات به صورت رابطه 20 است:

$$\hat{u} = [u \ v \ w]^T \quad (20)$$

u و v و w به ترتیب نشان‌دهنده جابه‌جایی در جهات x ، y و z است.

طبق تئوری سه‌بعدی الاستیسیته مولفه‌های تنش و کرنش با روابط 21 و

22 بیان می‌شود [6,9].

$$\sigma = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{yz} \ \tau_{xz} \ \tau_{xy}]^T \quad (21)$$

$$\epsilon = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{xy}]^T \quad (22)$$

رابطه بین تنش‌ها و کرنش‌ها و همچنین کرنش‌ها و جابه‌جایی‌ها به صورت روابط 23 و 24 بیان می‌شود.

$$\sigma = D\epsilon \quad (23)$$

$$\epsilon = L\hat{u} \quad (24)$$

D ، ماتریس الاستیک ماده، برای مواد همگن به صورت رابطه 25 است [17,9].

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix} \quad (25)$$

ماتریس عملگر L به صورت رابطه 26 تعریف می‌شود.

$$L^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

طبق اصل همیلتون در یک بازه زمانی دلخواه از t_1 تا t_2 رابطه 27 برقرار است:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \bar{L} dt = 0 \quad (27)$$

فانکشنال $\bar{L}$ به صورت رابطه 28 تعریف می‌شود.

$$\bar{L} = \Pi + T - \bar{F} \quad (28)$$

به‌طوریکه Π ، T و $\bar{F}$ به ترتیب انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار انجام شده توسط نیروهای خارجی شامل نیروی حجمی P_b ، نیروی سطحی P_s و نیروی متمرکز نقطه‌ای P_l است و به کمک روابط 29 تا 31 بیان شده‌اند:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \hat{u}^T \hat{u} dV \quad (29)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T \sigma dV \quad (30)$$

$$\bar{F} = \sum_i \hat{u}_i^T P_i + \int_V \hat{u}^T P_b dV + \int_S \hat{u}^T P_s dS \quad (31)$$

ρ ، V و S به ترتیب چگالی، حجم و مساحت صفحه است. میدان جابه‌جایی $\hat{u}$

در نقطه $\bar{x}_q$ به صورت ترکیبی از توابع شکل ϕ_i و جابه‌جایی‌های گرهی در تمام n گره واقع در دامنه کمکی این نقطه بیان می‌شود (رابطه 32).

$$\hat{u} = [u \ v \ w]^T = N_u q \quad (32)$$

همان‌طور که پیش از این ذکر شد q برداری شامل مولفه‌های جابه‌جایی تمام گره‌های واقع در دامنه کمکی است و N_u ماتریس توابع شکل است (رابطه 33).

$$N_u = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \dots & \phi_n & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & \phi_n & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \quad (33)$$

با تعریف اپراتور ماتریسی کرنش جابه‌جایی $B = LN_u$ ، کرنش‌ها و تنش‌ها به صورت روابط 34 و 35 بازنویسی می‌شوند [17]:

$$\epsilon = B_u q \quad (34)$$

$$\sigma = DB_u q \quad (35)$$

با جایگزینی روابط 32، 34 و 35 در رابطه 27، مجموعه معادلات محلی حاصل خواهد شد (رابطه 36).

$$m_{uu} \ddot{q} + k_{uu} q = \bar{f} \quad (36)$$

ماتریس جرم محلی m_{uu} ، ماتریس سفتی محلی k_{uu} و بردار بار محلی $\bar{f}$ به ترتیب با روابط 37 تا 39 بیان می‌شوند.

$$m_{uu} = \int_{\Omega} \rho N_u^T N_u d\Omega \quad (37)$$

$$k_{uu} = \int_{\Omega} B_u^T D B_u d\Omega \quad (38)$$

$$\bar{f} = \sum_i P_i + \int_{\Omega} N_u^T P_b d\Omega + \int_{\Gamma} N_u^T P_s d\Gamma \quad (39)$$

Ω و Γ به ترتیب حجم و مساحت دامنه کمکی است.

معادلات محلی، توابعی از مختصات نقطه $\bar{x}_q$ هستند و لازم است در کل ناحیه مساله هم‌گذاری شوند. مجموعه معادلات کلی صفحه به صورت رابطه 40 است:

$$M_{uu} \ddot{Q} + K_{uu} Q = \bar{F} \quad (40)$$

رابطه 41 برای تحلیل استاتیکی صفحه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$K_{uu} Q = \bar{F} \quad (41)$$

4-بارگذاری و شرایط مرزی

هر شرط مرزی با چهار حرف لاتین که هر حرف نشان دهنده شرط مرزی یکی از وجوه جانبی صفحه است، نشان داده شده است. S و C به ترتیب نشان‌دهنده شرط مرزی گیردار و ساده هستند و حرف F نشان‌دهنده وجه آزاد است. در شکل 2a وجوهی از صفحه که تحت شرایط مرزی مختلف قرار می‌گیرند نشان داده شده است. مثلاً در شرط مرزی SCSC وجوه 1 و 3 دارای تکیه‌گاه ساده و وجوه 2 و 4 گیردار هستند. در کار حاضر پنج شرط مرزی SCSC، CCCC، SSFS، SSFS و SSFS برای صفحه در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی با استفاده از رهیافت حذف⁴ اعمال شده است.

شرط مرزی برای وجوه با تکیه‌گاه ساده به صورت روابط 42 و 43 و برای وجوه گیردار به صورت رابطه 44 بیان شده است:

$$v(x, y, z, t) = w(x, y, z, t) = 0, \quad x = 0, a \quad (42)$$

$$u(x, y, z, t) = w(x, y, z, t) = 0, \quad y = 0, b \quad (43)$$

1- Local Mass Matrix
2- Local stiffness Matrix
3- Local load Vector
4- Elimination Approach

هر بخش به طور جداگانه محاسبه شده و در نهایت برای محاسبه انتگرال کل ناحیه، باهم جمع می‌شوند. در کار حاضر برای محاسبه انتگرال‌های روش میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای از مش‌های زمینه استفاده شده است. صفحه به مش‌های زمینه شش‌وجهی تقسیم شده و برای هر مش زمینه، نقاط گوسی در هر سه جهت x ، y و z تعیین شده است (شکل 3) و انتگرال‌ها با انتگرال‌گیری گوسی محاسبه شده‌اند.

در کار حاضر از دامنه کمکی مکعبی⁷ استفاده شده است. ابعاد دامنه کمکی در سه جهت با روابط (a-c) 45 محاسبه می‌شود [15]:

$$r_{sx} = \alpha_{sx} d_{cx} \quad (45a)$$

$$r_{sy} = \alpha_{sy} d_{cy} \quad (45b)$$

$$r_{sz} = \alpha_{sz} d_{cz} \quad (45c)$$

که در آن α_{si} ($i = x, y, z$) اندازه بی‌بعد دامنه کمکی در جهت x ، y و z است. d_{ci} ($i = x, y, z$) میانگین فاصله گرهی در جهت x ، y و z است. در کار حاضر در هر سه جهت، $\alpha_s = 2$ در نظر گرفته شده است.

بعد از امتحان کردن چند ترکیب متفاوت از α_c و $\bar{q}$ و مقایسه نتایج حاصل با نتایج مقالات موجود، پارامترهای تابع پایه شعاعی $\alpha_c = 0.5$ و $\bar{q} = 1.03$ در نظر گرفته شده‌اند.

2-5- مطالعه همگرایی

در این بخش همگرایی روش میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای در تحلیل صفحه با ضخامت متغیر نشان داده شده است. در شکل 4 صفحه گوه شکلی که وجه پایینی آن به صورت خطی در جهت y تغییر می‌کند، نشان داده شده است. کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین ضخامت صفحه به ترتیب برابر H_1 و H است. وجه بالایی صفحه افقی بوده و تحت بار گسترده و یکنواخت P در جهت z قرار دارد. ابعاد صفحه $a = b = 10$ (m) و $H = 1$ (m) است. صفحه دارای شرط مرزی SSSS است. در جدول 1 همگرایی تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها در نقطه $x = 3$ ، $y = 4$ و $z = 0.1$ و برای دو نسبت ضخامت 2، $H_1/H = 1.5$ ارائه شده است.

نتایج حاصل از روش درونیابی شعاعی نقطه‌ای با نتایج موجود در مقاله خو و ژو [13] مقایسه شده است. همان طور که از جدول 1 برمی‌آید، نتایج حاصل از روش حاضر همگرایی بالا و دقت مناسبی را ارائه کرده است.

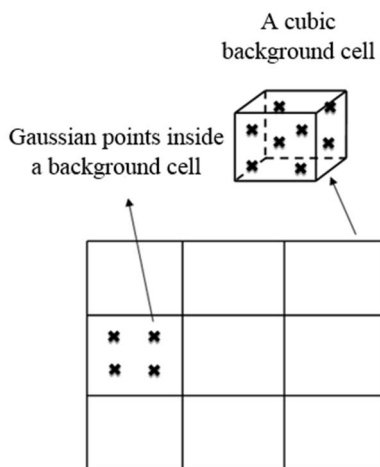


Fig. 3 hexagonal background cells from top view

شکل 3 مش‌های زمینه شش‌وجهی از نمای بالا

7- Cubic Support Domain

$$u(x, y, z, t) = v(x, y, z, t) = w(x, y, z, t) = 0, \quad \{x = 0, a, y = 0, b\} \quad (44)$$

وجه بالایی صفحه افقی بوده و تحت بار گسترده و یکنواخت P در جهت z قرار دارد (2b).

برای صفحه مستطیلی ایزوتروپیک در کار حاضر، مدول الاستیسیته و نسبت پواسون¹ به ترتیب برابر 54 و 0.3 در نظر گرفته شده است.

5- نتایج

5-1- محاسبات عددی

اخیرا روش‌های جدیدی برای انتگرال‌گیری دامنه‌ای² ارائه شده و مورد استفاده قرار گرفته است [18-21]. بیسل و بلیسکو [18] برای محاسبه انتگرال‌های فضایی در روش بدون المان گالرکین، از محاسبه انتگرال‌های فرم ضعیف³ در گره‌ها استفاده کردند. برخلاف فرمولاسیون قدیمی روش بدون المان گالرکین که در آن برای محاسبه انتگرال‌های ناحیه‌ای از مش‌های زمینه⁴ استفاده می‌شد، در این روش نبود مش‌های زمینه روشی کاملاً بدون المان را ارائه می‌دهد. خسروی فرد و هم‌تین [20] روشی برای محاسبه انتگرال‌های دامنه‌ای، بدون گسسته‌سازی دامنه انتگرال‌گیری ارائه کردند. در این روش که روش تبدیل کارترین⁵ نامیده می‌شود، ناحیه انتگرال‌گیری به یک انتگرال مرزی و یک انتگرال یک‌بعدی تبدیل می‌شود و برای محاسبه انتگرال‌ها در روش‌های بدون المان بر مبنای فرم ضعیف از قبیل روش بدون المان گالرکین یا روش میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای به کار می‌رود. هم‌تین و همکارانش [21] برای محاسبه انتگرال‌های دامنه‌ای در مسائلی که تراکم گره‌ها در نواحی مختلف مساله بسیار متفاوت است، روشی بسیار کارآمد ارائه کرده‌اند. در این روش که تجزیه پس‌زمینه⁶ نام دارد، نحوه توزیع نقاط انتگرال‌گیری متناسب با نحوه توزیع گره‌ها انتخاب می‌شود. ناحیه مساله به بخش‌های متعدد با درجات تراکم گرهی متفاوت تقسیم شده و انتگرال روی

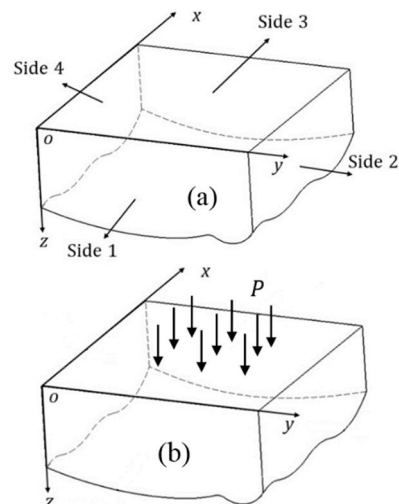


Fig. 2 (a) The sides of the plate under different BCs (b) uniform distributed load on the top surface of the plate

شکل 2 (a) وجوه جانبی صفحه که تحت شرایط مرزی مختلف قرار می‌گیرد (b) بار گسترده یکنواخت P روی وجه بالایی صفحه

- 1- Poisson's Ratio
- 2- Domain Integration
- 3- Weak Form
- 4- Background Cells
- 5- Cartesian transformation method (CTM)
- 6- Background Decomposition

جدول 1 همگرایی تنش‌ها و جابه‌جایی‌های صفحه مستطیلی ایزوتروپیک ($a = b = 10 \text{ m}$, $H = 1 \text{ m}$) با ضخامت متغیر خطی در جهت y

Table 1 The convergence of stresses and displacements of the isotropic rectangular plate ($a = b = 10 \text{ m}$, $H = 1 \text{ m}$) with linearly varying lower surface in the y direction

σ_y/P	σ_x/P	$u(E/PH)$	$w(E/PH)$	تعداد گره‌ها در سه جهت $x \ y \ z$	روش	H_1/H
-13.37	-13.75	19.90	185.45	5 5 8	RPIM	1.5
-15.66	-15.16	19.99	197.16	6 6 6		
-12.06	-11.48	19.47	202.36	7 7 8		
-13.57	-13.42	19.68	202.99	7 7 9		
-12.53	-14.50	19.37	202.03	7 7 10		
-	-14.40	20.20	202	-	Xu & Zhou [13]	
-11.03	-8.01	16.20	125.98	5 5 8	RPIM	2
-11.55	-11.18	15.38	129.77	6 6 8		
-11.29	-11.60	16.58	131.23	7 7 8		
-12.07	-12.03	16.49	131.91	7 7 9		
-11.30	-11.81	16.92	133.17	7 7 10		
-12.02	-12.25	16.88	134.15	7 7 11		
-11.31	-12.14	17.08	133.68	7 7 12		
-	-11.60	16.30	133	-	Xu & Zhou [13]	

z قرار دارد. ابعاد صفحه به صورت $a = 12 \text{ m}$ ، $b = 10 \text{ m}$ و $H = 1 \text{ m}$ بوده و نسبت ضخامت $H_1/H = 1.5$ است.

در شکل 6 (a و b) توزیع جابه‌جایی در جهت z (w) و تنش برای صفحه با شرط مرزی SSSS در راستای خط $x = a/2$ و $z = H/5$ ارائه شده است. مشاهده می‌شود که نتایج حاصل توافق خوبی با نتایج موجود در مقاله خو و ژو [13] دارد.

در شکل 7 توزیع جابه‌جایی در جهت z در راستای خط $x = a/2$ و $z = H/5$ برای پنج شرط مرزی مختلف نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که خیز صفحه در هر نقطه در راستای خط $x = a/2$ و $z = H/5$ با تغییر شرط مرزی از FSFS به SSFS، SSSS، SCSC و CCCC کاهش می‌یابد.

به عبارتی در شرایط مرزی که صفحه در آن‌ها مقیدتر است، سفتی صفحه بزرگ‌تر بوده و در نتیجه خیز کاهش می‌یابد.

در شکل 5b صفحه مستطیلی که وجه پایینی آن در جهت y به صورت سهمی مقعر است، نشان داده شده است. وجه بالایی صفحه افقی بوده و تحت بار گسترده یکنواخت P در جهت z قرار دارد. ابعاد صفحه مستطیلی با ضخامت متغیر به صورت $a = 10 \text{ (m)}$ ، $b = 10 \text{ (m)}$ و $H = 2 \text{ (m)}$ است.

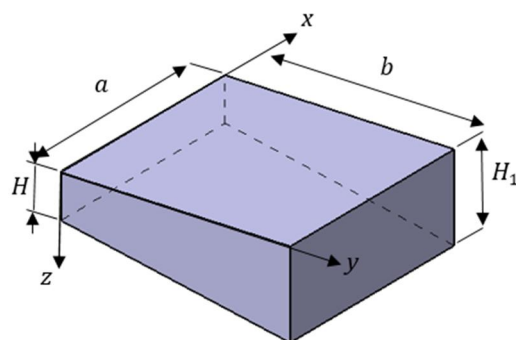


Fig. 4 Rectangular plate with linearly varying lower surface in y direction

شکل 4 صفحه مستطیلی با ضخامت متغیر خطی در جهت y

3-5- صفحه مستطیلی با ضخامت متغیر به‌فرم سهمی در جهت y

در این قسمت نتایج مربوط به صفحه مستطیلی که وجه پایینی آن در جهت y به صورت سهمی محدب است (شکل 5a)، برای شرایط مرزی مختلف ارائه شده است.

وجه بالایی صفحه افقی بوده و تحت بار گسترده و یکنواخت P در جهت

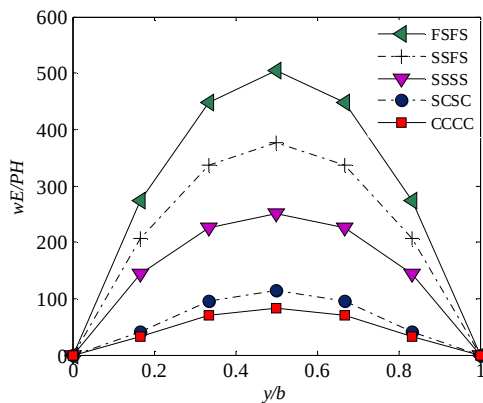


Fig. 7 The distributions of w on the line $x = a/2, z = H/5$ for the plate with parabolic convex lower surface in the y direction and different BCs

شکل 7 توزیع w در راستای خط $x = a/2$ و $z = H/5$ برای صفحه با وجه پایینی به‌فرم سهمی محدب و با شرایط مرزی مختلف

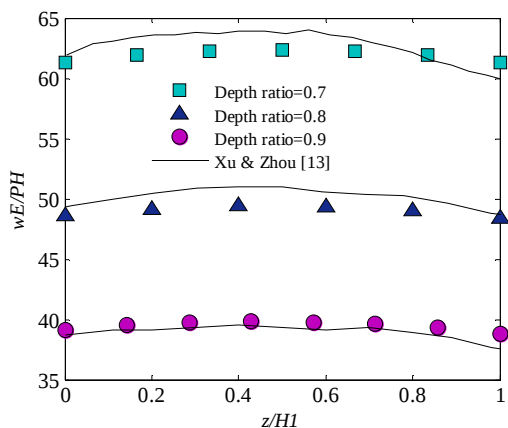


Fig. 8 The displacement distributions (w) for the plate with parabolic concave lower surface in the y direction with different depth ratios on the line $x = a/2, y = b/2$. BC:SSSS

شکل 8 توزیع جابه‌جایی w برای صفحه با وجه پایینی به‌فرم سهمی مقعر در جهت y با نسبت ضخامت‌های متفاوت در راستای خط $x = a/2$ و $y = b/2$. شرط مرزی: SSSS

خیز صفحه با شرط مرزی SSSS برای سه نسبت ضخامت مختلف ($H_1/H = 0.7, 0.8, 0.9$) در راستای خط $x = a/2$ و $y = b/2$ محاسبه شده است (شکل 8). مشاهده می‌شود که با کاهش نسبت ضخامت، خیز ماکزیمم صفحه در تمام نقاط واقع بر خط $x = a/2$ و $y = b/2$ به‌طور چشم‌گیری افزایش می‌یابد. چرا که در نتیجه کاهش نسبت ضخامت صفحه، سفتی صفحه کاهش می‌یابد و از این رو خیز افزایش خواهد یافت.

توزیع مولفه تنش σ_y در راستای خط $x = a/2$ و $y = b/2$ برای نسبت ضخامت 0.9 و شرط مرزی SSSS در شکل 9 ارائه شده است. نتایج ارائه شده در شکل‌های 8 و 9 با نتایج موجود در مقاله خو و ژو [13] مقایسه شده است. نتایج مربوط به صفحه با ضخامت متغیر به‌فرم سهمی در توافق خوبی با نتایج این مقاله است.

در شکل 10 توزیع خیز صفحه در راستای خط $x = a/2$ و $y = b/2$ برای شرایط مرزی مختلف و نسبت ضخامت $H_1/H = 0.9$ نشان داده شده است. همانند شکل 7، در اینجا نیز با تغییر شرط مرزی صفحه از شرایط مرزی که صفحه در آن‌ها آزادی کم‌تری دارد به شرایط مرزی که صفحه در آن‌ها مقیدتر است، به دلیل افزایش سفتی صفحه، خیز کاهش می‌یابد.

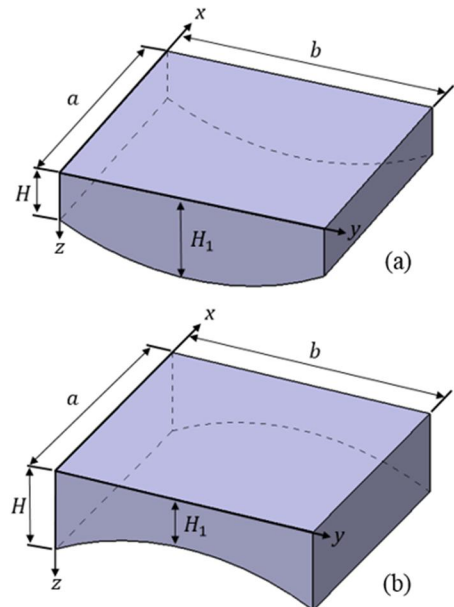


Fig. 5 Isotropic rectangular plate with parabolic (a) convex (b) concave lower surface in the y direction

شکل 5 صفحه مستطیلی ایزوتروپیک با وجه پایینی به‌صورت (a) سهمی محدب (b) سهمی مقعر

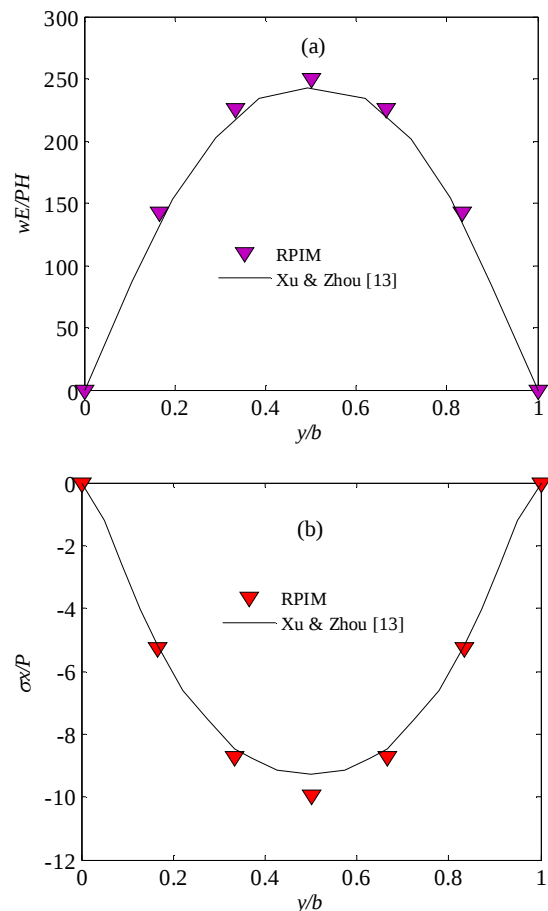


Fig. 6 The distributions of (a) w (b) σ_x along the line $x = a/2, z = H/5$ for the plate with parabolic convex lower surface in the y direction. BC: SSSS

شکل 6 توزیع (a) w (b) σ_x در راستای خط $x = a/2$ و $z = H/5$ برای صفحه با وجه پایینی به‌فرم سهمی محدب. شرط مرزی: SSSS

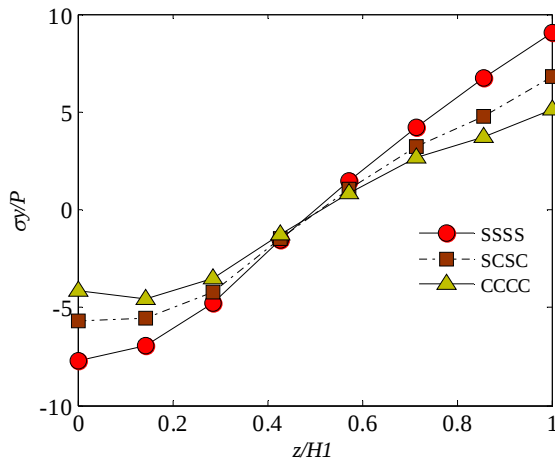


Fig. 11 The stress distributions (σ_y) for the plate with parabolic concave lower surface in the y direction on the line $x = a/2$, $y = b/2$ and for different BCs. $H_1/H = 0.9$

شکل 11 توزیع تنش (σ_y) برای صفحه با وجه پایینی به‌فرم سهمی مقعر در جهت y در راستای خط $x = a/2$ و $y = b/2$ برای شرایط مرزی مختلف. ($H_1/H = 0.9$)

عددی بدون المان با میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای ارائه شده است. روش‌های بدون المان برای تحلیل صفحاتی که ضخامت آن‌ها طبق هر پروفیل دلخواه $H(x,y)$ تغییر می‌کند بسیار مناسب هستند. چرا که برای هر شکل و ابعادی و نیز هر پروفیل ضخامتی، می‌توان به راحتی صفحه را توسط گره‌هایی که روی مرزها و درون آن توزیع شده‌اند مدل‌سازی کرد. به راحتی تعداد گره‌ها را افزایش یا کاهش داد و نیز از هر چینش متفاوت و دلخواه برای آن‌ها استفاده کرد. در کار حاضر روش بدون المان با میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای برای صفحات با ضخامت متغیر، نتایجی با دقت مطلوب و همگرایی بالا ارائه کرده است. مشاهده شد با تغییر پروفیل ضخامت و نسبت ضخامت در هر پروفیل، می‌توان نتایج را در شرایط مرزی مختلف تغییر داد و در نتیجه می‌توان با توجه به نیازهای متفاوت در کاربردهای خاص، توزیع جابه‌جایی و تنش را کنترل نمود.

7- مراجع

- [1] F. Ebrahimi, A. Rastgo, An analytical study on the free vibration of smart circular thin FGM plate based on classical plate theory, *Thin-Walled Structures*, Vol. 46, No. 12, pp. 1402-1408, 2008.
- [2] E. Efraim, M. Eisenberger, Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 299, No. 4-5, pp. 720-738, 2007.
- [3] J.L. Mantari, A.S. Oktem, C. G. Soares, Bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a new accurate higher-order shear deformation theory, *Composites: Part B*, Vol. 43, No. 8, pp. 3348-3360, 2012.
- [4] K.M. Liew, T.M. Teo, J.-B. Han, Three-dimensional static solutions of rectangular plates by variant differential quadrature method, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 43, No. 7, pp. 1611-1628, 2001.
- [5] T. Kant, K. Swaminathan, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 56, No. 4, pp. 329-344, 2002.
- [6] S. S. Vel, R. C. Batra, Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 272, No. 3-5, pp. 703-730, 2004.
- [7] A. Rezaei Mojddehi, A. Darvizeh, A. Basti, H. Rajabi, Three dimensional static and dynamic analysis of thick functionally graded plates by the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 35,

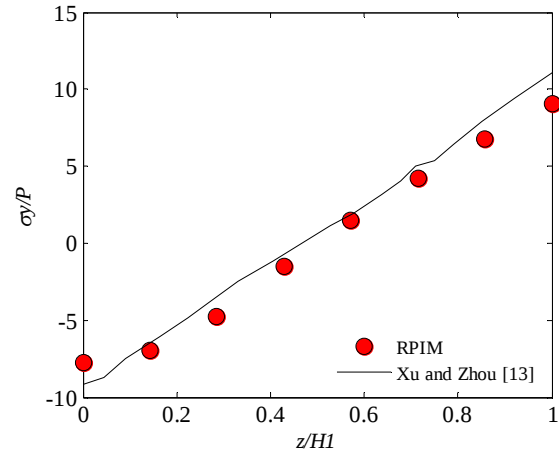


Fig. 9 The stress distributions (σ_y) for the plate with parabolic concave lower surface in the y direction on the line $x = a/2$, $y = b/2$. BC:SSSS and depth ratio $H_1/H = 0.9$

شکل 9 توزیع تنش (σ_y) برای صفحه با وجه پایینی به‌فرم سهمی مقعر در راستای خط $x = a/2$ و $y = b/2$. شرط مرزی: SSSS و نسبت ضخامت $H_1/H = 0.9$

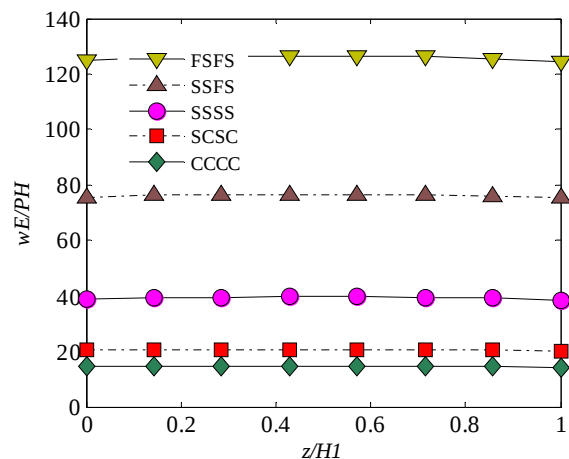


Fig. 10 The displacement distributions (w) for the plate with parabolic concave lower surface in the y direction on the line $x = a/2$, $y = b/2$ and for different BCs. $H_1/H = 0.9$

شکل 10 توزیع جابه‌جایی (w) برای صفحه با وجه پایینی به‌فرم سهمی مقعر در جهت y در راستای خط $x = a/2$ و $y = b/2$ برای شرایط مرزی مختلف. ($H_1/H = 0.9$)

در شکل 11 توزیع تنش σ_y صفحه با نسبت ضخامت $H_1/H = 0.9$ در راستای خط $x = a/2$ و $y = b/2$ برای سه شرط مرزی مختلف نشان داده شده است. در هر نقطه در راستای این خط، تنش σ_y در شرط مرزی SCSC بیشتر از شرط مرزی CCCC، و در شرط مرزی SSSS بیشتر از دو شرط مرزی SCSC و CCCC است. یعنی همان‌طور که انتظار می‌رفت، با تغییر شرط مرزی از حالتی که صفحه در آن بیشتر مقید است به حالتی که صفحه در آن آزادی بیشتری دارد و در واقع با کاهش سفتی صفحه، تنش σ_y افزایش خواهد یافت.

6- نتیجه‌گیری

در کار حاضر تحلیل استاتیکی صفحه مستطیلی ایزوتروپیک با ضخامت متغیر، با استفاده از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته و برای اولین بار با روش حل

- 2015.
- [15] G. R. Liu, Y. T. Gu, *An introduction to Meshfree methods and their programming*, First Edition, pp. 145-171, Berlin: Springer, 2005.
- [16] G. R. Liu, K. Y. Dia, K. M. Lim, Y. T. Gu, A radial point interpolation method for simulation of two-dimensional piezoelectric structures, *Smart Materials and Structures*, Vol. 12, No. 2, pp. 171-180, 2003.
- [17] R. Pilafkan, P. D. Folkow, M. Darvizeh, A. Darvizeh, , Three dimensional frequency analysis of bidirectional functionally graded thick cylindrical shells using a radial point interpolation method (RPIM), *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 39, No. 1, pp. 26-34, 2013.
- [18] S. Beissel, T. Belytschko, Nodal integration of the element-free Galerkin method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, No. 1, pp. 49-74, 1996.
- [19] J. S. Chen, C. T. Wu, S. Yoon, Y. You, A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, No. 1, pp. 435-466, 2001.
- [20] A. Khosravifard, M. R. Hematiyan, A new method for meshless integration in 2D and 3D Galerkin meshfree methods integration of the element-free Galerkin method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 34, No. 1, pp. 30-40, 2010.
- [21] M.R. Hematiyan, A. Khosravifard, G. R. Liu, A background decomposition method for domain integration in weak-form meshfree methods, *Computers and Structures* (2014), Vol. 142, No. 1, pp. 64-78, 2014.
- No. 11, pp. 1168-1180, 2011.
- [8] P. Xia, S. Y. Long, H. X. Cui, G. Y. Li, The static and free vibration analysis of a nonhomogeneous moderately thick plate using the meshless local radial point interpolation method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 33, No. 6, pp. 770-777, 2009.
- [9] R. Pilafkan, S. J. Zakavi, S. Bakhshi, Frequency analysis of rectangular holed FG plates using three dimensional elasticity theory and meshless method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 16, pp. 134-142, 2015 (in Persian فارسی).
- [10] Ya. M. Grigorenko, L. S. Rozhok, Stress- Strain analysis of rectangular plates with a variable thickness and constant weight, *International Applied Mechanics*, Vol. 38, No. 2, pp. 173-167, 2002.
- [11] A. M. Zenkour, An exact solution for the bending of thin rectangular plates with uniform, linear, and quadratic thickness variations, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 45, No. 2, pp. 295-315, 2003.
- [12] P. Malekzadeh, G. Karami, Polynomial and harmonic differential quadrature methods for free vibration of variable thickness thick skew plates, *Engineering Structures*, Vol. 27, No. 10, pp. 1563-1574, 2005.
- [13] Y. P. Xu, D. Zhou, Three dimensional elasticity solution of transversely isotropic rectangular plates with variable thickness, *Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B: Engineering*, Vol. 34, No. B4, pp. 353-369, 2010.
- [14] H. L. Dai, T. Dai, X. Yan, Thermoelastic analysis for rotating circular HSLA steel plates with variable thickness, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 268, No. 1, pp. 1095-1109,