http://mme.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

فوق‌العاده اسفند ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۱۳ ص‌ص ۱۳۲-۱۴۲

مقاله پژوهشی کامل

تاریخ دریافت ۹۱/۱۱/۲٤

تاریخ پذیرش ۹۲/۳/۱۲

ارائه در سایت ۹۲/۱۰/۳۰

تحلیل کمانش خزشی ورق چهارگوش ضخیم ویسکوالاستیک با روش شبه‌گذرای المان محدود

سید رضا فلاحتگر

استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

رشت، صندوق پستی ۳۷۵۶، Falahatgar@guilan.ac.ir

چکیده- در تحقیق حاضر تحلیل کمانش خزشی ورق ویسکوالاستیک خطی انجام شده است. روش شبه گذرا یا رهایی پویا با جداسازی المان محدود برای حل معادلات ورق مورد استفاده قرار گرفته است. میدان جابجایی ورق بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول در نظر گرفته شده و کرنش‌های فون‌کارمن با اثر نقص اولیه در معادلات ورق اعمال می‌شود. نتایج مربوط به خیز وسط و کاهش طول ورق مربعی از جنس پلیمر پلی‌متیل متاکریلیت در طول زمان بارگذاری با شرایط تکیه‌گاهی ساده و گیردار تعیین شده است. نتایج با پاسخ‌های کد تجاری انسیس مقایسه شده و تطابق خوبی بدست آمده است.

کلیدواژگان: کمانش خزشی، رهایی پویا، روش المان محدود، تئوری میندلین، ورق ویسکوالاستیک.

Creep buckling analysis of rectangular viscoelastic thick plate by pseudo-transient finite element method

S.R. Falahatgar

Assist. Prof., Mech. Eng., Univ. of Guilan, Rasht, Iran
P.O.B. 3756 Rasht, Iran. Falahatgar@guilan.ac.ir

Abstract- In the present work, creep buckling of linear viscoelastic plate was studied. Pseudo-transient or Dynamic Relaxation method with finite element discritization was used for solving the nonlinear governing equations of the plate. The displacements were based on first order shear deformation theory. Von Karman assumptions were considered for strains, including initial imperfection of the plate. Central deflections of the rectangular PMMA plate as well as end-shortenings were obtained during the loading of the plates with simply supported and clamped edges. The results compared well with commercial finite element code ANSYS.

Keywords: Creep Buckling, Dynamic Relaxation, Finite Element Method, Mindlin Theory, Viscoelastic Plate.

۱- مقدمه

رفتار وابسته به زمان ماده در یک سازه از جمله مواردی است که در طراحی باید در نظر گرفته شود. نمونه آن فرایند کمانش خزشی است که سازه تحت باری کمتر از بار بحرانی قرار می‌گیرد اما با گذشت زمان و تغییر خواص ماده این بار منجر به ناپایداری و ایجاد تغییر شکل‌های زیاد در سازه می‌شود. در تحقیقات انجام شده می‌توان به کار دلیو [۱] اشاره کرد که ورق گرد و قطاع کلاسیک با لبه گیردار و ساده با ماده ویسکوالاستیک خطی تحت بارهای داخل صفحه را تحلیل کرده است. میناهن و کنوس [۲] کمانش خزشی ستون پلیمری تحت بار فشاری ثابت با نقص اولیه را با روش تحلیلی برای جابجایی‌های کوچک بررسی کرده‌اند. مطالعه سدربوم و توآتی [۳] مربوط به رفتار پس‌کمانش پانل‌های استوانه‌ای ماده ویسکوالاستیک غیرخطی با نقص و مدل ماده ویسکوالاستیسیته غیرخطی بوده که معادلات تعادل دونل برای پانل‌های غیرخطی هندسی در زمان حل شده است. مالیانا و حاجعلی [۴] از مدل‌سازی ویسکوالاستیک غیرخطی برای تحلیل رفتار خزشی و تعیین زمان بحرانی فروپاشی سازه‌های

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.13.4.0]

مرکب ضخیم و لایه‌ای استفاده کرده‌اند. از مدل میکرومکانیکی در کد المان محدود آباکوس برای تحلیل‌های خزشی تحت فشار محوری روی ستون‌های مرکب I شکل ضخیم و استوانه چندلایه‌ای استفاده شده است. در تحقیقات مربوط به حل معادلات حاکم پس‌کمانش با روش رهایی پویا[1] می‌توان به کار راشتون [۵] با جداسازی تفاضل محدود و رامش و کریشنامورتی [۶] و لی و همکارانش [۷] با استفاده از المان محدود اشاره کرد. نویسنده [۹،۸] حل خمش ورق مرکب ویسکوالاستیک غیرخطی را با DR انجام داده است. در مطالعه حاضر نیز برای تحلیل کمانش و رفتار در گذر زمان ورق غیرخطی میندلین مربعی از جنس پلی‌متیل متاکریلیت[2] از روش حل صریح DR با گسسته‌سازی المان محدود استفاده می‌شود.

۲- ماده ویسکوالاستیک خطی

مدل ویسکوالاستیک بولتزمن برای رفتار ویسکوالاستیک تحت شرایط هم‌دما و بارگذاری تک محوری σ بصورت رابطه (۱) برای کرنش کل ε است [۱۰].

$$\varepsilon(t)=D_0\sigma(t)+\int_0^t \Delta D(t-\tau)\frac{\partial\sigma(\tau)}{\partial\tau}d\tau \qquad (۱)$$

که D_0 مقدار نرمی آنی الاستیک تک محوری در زمان $t=0$ و $\Delta D(t)$ مولفه گذرای نرمی خزشی ویسکوالاستیک خطی است. از سری نمایی پرونی [۱۱] N جمله‌ای برای توصیف تابع نرمی خزشی گذرای $\Delta D(\psi)$ بصورت رابطه (۲) استفاده می‌شود.

$$\Delta D(t)=\sum_{n=1}^{N} D_n(1-e^{-\lambda_n t}) \qquad (۲)$$

که متغیر D_n ضرایب سری پرونی و λ_n زمان تاخیر مستقل از تنش هستند. اگر رابطه (۲) در رابطه (۱) قرار داده شود یک شکل بازگشتی [۱۲] برای بخش انتگرالی معادله بدست می‌آید. در نتیجه کرنش کل در زمان حاضر بصورت معادله (۳) خواهد شد.

$$\begin{aligned}\varepsilon(t)&=(D_0+\sum_{n=1}^{N}D_n\left[1-\frac{1-e^{-\lambda_n\Delta t}}{\lambda_n\Delta t}\right])\sigma(t)\\&-\sum_{n=1}^{N}D_n(e^{-\lambda_n\Delta t}q_n^{t-\Delta t}-\frac{1-e^{-\lambda_n\Delta t}}{\lambda_n\Delta t}\sigma(t-\Delta t))\\&=S_c(t)\sigma(t)-R(t)\end{aligned} \qquad (۳)$$

$S_c(t)$ نرمی خزشی و $R(t)$ کرنش هردیتاری است. انتگرال هردیتاری برای هر جمله سری پرونی در انتهای زمان حاضر t، یعنی q_n^t [۱۲]، بصورت رابطه (۴) تعریف می‌شود.

$$q_n^t=e^{-\lambda_n\Delta t}q_n^{t-\Delta t}-\frac{1-e^{-\lambda_n\Delta t}}{\lambda_n\Delta t}\big(\sigma(t)-\sigma(t-\Delta t)\big) \qquad (۴)$$

برای بدست آوردن روابط تنش-کرنش برای حالت تنش چند محوری، معادله تنش-کرنش برای ماده ویسکوالاستیک مطابق الاستیسیته سه بعدی [۸] بصورت معادلات (۵) می‌شود:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}(t)&=(1+\nu)S_c(t)\sigma_{ij}(t)-\nu S_c(t)\sigma_{kk}(t)\\&+(1+\nu)R_{ij}(t)-\nu_{ij}R_{kk}(t)\qquad i,j=1,2,3\end{aligned} \qquad (۵)$$

که ε_{ij} و σ_{ij} کرنش‌ها و تنش‌ها در زمان حاضر t است. نسبت پواسون ν مستقل از زمان فرض می‌شود. کرنش خزشی هردیتاری R_{ij} که در حالت برداری R نشان داده می‌شود، با استفاده از بخش دوم معادله (۳) بصورت معادلات (۶) تعریف می‌شود.

$$R_{ij}(t)=-\sum_{n=1}^{N}D_n(e^{-\lambda_n\Delta t}q_{n,ij}^{t-\Delta t}-\frac{1-e^{-\lambda_n\Delta t}}{\lambda_n\Delta t}\sigma_{ij}(t-\Delta t)) \qquad (۶)$$

که انتگرال‌های هردیتاری سه بعدی $q_{n,ij}^t$ بسط معادله (۴) برای حالت سه بعدی خواهد بود.

۳- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ورق

در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول [۱۳] جابجایی‌ها بصورت روابط (۷) فرض می‌شود.

$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=u_0(x,y)+z\varphi_x(x,y)\\v(x,y,z)&=v_0(x,y)+z\varphi_y(x,y)\\w(x,y,z)&=w_0(x,y)\end{aligned} \qquad (۷)$$

u، v و w به ترتیب جابجایی‌ها در جهت x، y و z است. u_0، v_0 و w_0 جابجایی‌های صفحه میانی و φ_x و φ_y چرخش‌های عمود بر صفحه میانی ورق و در جهت x و y هستند. روابط غیرخطی کرنش-تغییر مکان [۱۳] با در نظر گرفتن نقص[3] اولیه w^0، با فرضیات فون‌کارمن به شکل معادلات (۸) بدست آمده است.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}(\frac{\partial w_0}{\partial x})^2-\frac{1}{2}(\frac{\partial w^0}{\partial x})^2\\&+z\,\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}=\varepsilon_x^0+z\,\kappa_x\end{aligned}$$

1. Dynamic Relaxation (DR)
2. PMMA
3. Imperfection

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}(\frac{\partial w_0}{\partial y})^2 - \frac{1}{2}(\frac{\partial w^0}{\partial y})^2 + z\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = \varepsilon_y^0 + z\,\kappa_y$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial w^0}{\partial x}\frac{\partial w^0}{\partial y} + z\,(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}) = \gamma_{xy}^0 + z\,\kappa_{xy}$$
$$\gamma_{xz} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial w^0}{\partial x}$$
$$\gamma_{yz} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial w^0}{\partial y} \tag{۸}$$

معادلات مشخصه در حالت کلی [۸] بصورت معادلات (۹) خواهد بود.

$$\left(N_\alpha, M_\alpha\right) = \int_{-h/2}^{h/2}\left(1,z\right)\sigma_\alpha dz \quad Q_\beta = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_\beta dz \tag{۹}$$

که $\sigma_\alpha \cdot \alpha = x, y, xy$, $\beta = xz, yz$ تنش‌های عمودی و تنش برشی داخل صفحه و σ_β تنش برشی خارج صفحه است. N_α نیروی‌های داخل صفحه، M_α ممان‌ها و Q_β نیروهای برشی بر واحد طول هستند. ماتریس نرمی ماده در رابطه (۱۰) آمده است.

$$\mathrm{S} = S_c(t)\begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \tag{۱۰}$$

کرنش خزشی هردیتاری R_{ij} در حالت برداری R نشان داده می‌شود:

$$\mathrm{R} = \left[R_{11} \quad R_{22} \quad 0 \quad 2(1+\nu)R_{23} \quad 2(1+\nu)R_{13} \quad 2(1+\nu)R_{12}\right]^{\mathrm{T}} \tag{۱۱}$$

با در نظر گرفتن خواص ویسکوالاستیک، بسط معادلات (۹) به شکل معادلات (۱۲) در می‌آید که در آنها $\nu' = 1-\nu/2$، $A = h/S_c(t)(1-\nu^2)$ و $B = h^3/12S_c(t)(1-\nu^2)$ است.

نیروها و ممان‌های هردیتاری داخل صفحه $\mathcal{N}$ و $\mathcal{M}$ و خارج صفحه Q ناشی از خواص ویسکوالاستیک نیز با جاگذاری مؤلفه‌های هردیتاری به شکل معادلات (۱۳) تعریف می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \nu A & 0 \\ \nu A & A & 0 \\ 0 & 0 & \nu' A \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_\theta^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathcal{N}_x \\ \mathcal{N}_y \\ \mathcal{N}_{xy} \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B & \nu B & 0 \\ \nu B & B & 0 \\ 0 & 0 & \nu' B \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathcal{M}_x \\ \mathcal{M}_y \\ \mathcal{M}_{x\theta} \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{5}{6}\nu'\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathrm{Q}_{yz} \\ \mathrm{Q}_{xz} \end{Bmatrix} \tag{۱۲}$$

$$\mathcal{N}_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2}\overline{R}_{ij}\,dz = -\sum_{n=1}^{N}Q_{n,ij}(e^{-\lambda_{n,ij}\Delta t}q_{n,ij}^{t-\Delta t} - \frac{1-e^{-\lambda_{n,ij}\Delta t}}{\lambda_{n,ij}\Delta t}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}(t-\Delta t)dz),\ \ ij = 11,22,12$$
$$\mathcal{M}_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2}\overline{R}_{ij}\,zdz = -\sum_{n=1}^{N}Q_{n,ij}(e^{-\lambda_{n,ij}\Delta t}q_{n,ij}^{t-\Delta t} - \frac{1-e^{-\lambda_{n,ij}\Delta t}}{\lambda_{n,ij}\Delta t}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}(t-\Delta t)zdz),\ \ ij = 11,22,12$$
$$Q_\beta = \int_{-h/2}^{h/2}\overline{R}_{ij}\,dz = -2(1+\nu)\sum_{n=1}^{N}Q_{n,ij}(e^{-\lambda_{n,ij}\Delta t}q_{n,ij}^{t-\Delta t} - \frac{1-e^{-\lambda_{n,ij}\Delta t}}{\lambda_{n,ij}\Delta t}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}(t-\Delta t)dz),\ \ ij = 13,23 \tag{۱۳}$$

که $\overline{\mathrm{R}} = \mathrm{QR}$ ،$\mathrm{Q} = \mathrm{S}^{-1}$ و α و β قبلاً تعریف شده است. توجه شود که برای نیروهای برشی اثر نسبت پواسون از رابطه (۱۱) در نظر گرفته شده است. در روابط (۱۳) انتگرال تنش می‌تواند به عنوان مقدار معلوم از مرحله قبل ($t-\Delta t$) با انتگرال‌گیری ساده مشابه سفتی‌های الاستیک (معادلات (۱۲)) محاسبه و ذخیره شود.

۴- فرمولاسیون حل ورق

در فرمولاسیون کارحاضر، معادله کار مجازی [۱۴] در مختصات لاگرانژین کلی با فرض کرنش‌های کوچک و بارگذاری پایستار بدون اثر نیروهای جسمی و اینرسی مطابق معادله (۱۴) است.

$$\int_V d\varepsilon^{T}\sigma dv = \int_a du^{T} p dA \tag{۱۴}$$

که V حجم بدون تغییر شکل، σ بردار تنش پیولا-کیرشهف، $d\varepsilon$ بردار کرنش گرین مجازی ناشی از جابجایی مجازی du و p تنش سطحی روی سطح تغییر شکل نیافته a است. کار مجازی داخلی dW_{int} می‌تواند بصورت انتگرالی روی سطح میانی ورق Γ و ضخامت h با جاگذاری عبارت کرنش در معادله (۱۴) و انتگرال‌گیری در ضخامت داده شود:

$$dW_{\mathrm{int}} = \int_\Gamma d\bar{\varepsilon}^{T}\bar{\sigma} dA \tag{۱۵}$$

بردار منتجه تنش $\bar{\sigma} = [\bar{\sigma}_{\mathrm{p}} \quad \bar{\sigma}_{\mathrm{b}} \quad \bar{\sigma}_{\mathrm{s}}]^{T}$ شامل منتجه تنش داخل صفحه، خمش و برش از معادلات (۱۲) بشکل معادلات (۱۶) در می‌آید:

$$\bar{\sigma}_{\mathrm{p}} = [N_x, N_y, N_{xy}]^{T},\ \bar{\sigma}_{\mathrm{b}} = [M_x, M_y, M_{xy}]^{T}$$
$$\bar{\sigma}_{\mathrm{s}} = [Q_{xz}, Q_{yz}]^{T} \tag{۱۶}$$

کرنش تعمیم‌یافته $\bar{\varepsilon} = [\bar{\varepsilon}_{\mathrm{p}} \quad \bar{\varepsilon}_{\mathrm{b}} \quad \bar{\varepsilon}_{\mathrm{s}}]^{T}$ مطابق تنش‌های $\bar{\sigma}$ به ترتیب بصورت معادلات (۱۷) است:

$$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{p}} = [\varepsilon_x^0 \quad \varepsilon_y^0 \quad \gamma_{xy}^0]^{T},\ \bar{\varepsilon}_{\mathrm{b}} = [\kappa_x \quad \kappa_y \quad \kappa_{xy}]^{T}$$
$$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{s}} = [\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^{T} \tag{۱۷}$$

انتگرال دوم معادله (۱۴) کار مجازی خارجی ناشی از تنش‌های سطحی است که این تنش‌ها در پس کمانش روی لبه‌های ورق A_s اعمال می‌شود. بردار جابجایی نیز $\bar{u} = [u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \varphi_x \quad \varphi_y]^{T}$ است. با استفاده از میدان جابجایی و انتگرال‌گیری روی سطح لبه‌ای در ضخامت، یک انتگرال خط روی طول لبه S حاصل می‌شود:

$$dW'_{\mathrm{ext}} = \int_S d\bar{u}^{T}\bar{P} ds \tag{۱۸}$$

پس رابطه (۱۴) بر حسب مقادیر داخل صفحه با معادله (۱۹) برابر است.

$$\int_A d\bar{\varepsilon}^{T}\bar{\sigma} da = \int_S d\bar{u}^{T}\bar{P} ds \tag{۱۹}$$

۴-۱- مدل‌سازی المان محدود

جابجایی $\bar{u}$ در یک المان تابعی از n متغیر گرهی بصورت معادله (۲۰) است.

$$\bar{u} = L\delta = \sum_{i=1}^{n} L_i \delta_i \tag{۲۰}$$

که در این رابطه $\delta = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \dots \quad \delta_n]^{T}$ و $\delta_i = [u_{0i} \quad v_{0i} \quad w_{0i} \quad \varphi_{xi} \quad \varphi_{yi}]^{T}$ است. L_i توابع شکل برای یک المان چهار گرهی است [۱۴]. جابجایی‌های مجازی $d\bar{u}$ بر حسب جابجایی‌های مجازی گرهی $d\delta$ هم برابر $d\bar{u} = L d\delta$ است. بردار کرنش گرین تعمیم یافته $\bar{\varepsilon}$ از معادله (۸) بر حسب جابجایی‌های گرهی δ است [۱۵]:

$$\bar{\varepsilon} = \left[B_0 + \frac{1}{2}B_{\mathrm{NL}}(\delta)\right]\delta \tag{۲۱}$$

که B_0 ماتریس کرنش است و کرنش های خطی را می‌دهد. B_{NL} که بصورت خطی به δ وابسته است کرنش‌های غیرخطی را شامل می‌شود. ماتریس ثابت $B_0 = [B_{01}\ B_{02}\ \dots\ B_{0n}]$ بر حسب زیرماتریس‌های گرهی بصورت معادله (۲۲) است.

$$B_{0i} = \begin{bmatrix} B_{0i}^{\mathrm{p}} & 0 \\ 0 & B_{0i}^{\mathrm{b}} \\ 0 & B_{0i}^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|ccc} B_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{2i} & 0 & 0 & 0 \\ B_{2i} & B_{1i} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -B_{1i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B_{2i} \\ 0 & 0 & 0 & -B_{2i} & -B_{1i} \\ \hline 0 & 0 & B_{1i} & -L_i & 0 \\ 0 & 0 & B_{2i} & 0 & -L_i \end{array}\right] \tag{۲۲}$$

که $B_{1i} = \partial L_i / \partial x$ و $B_{2i} = \partial L_i / \partial y$. ماتریس کرنش B_{NL} شامل زیرماتریس‌های گرهی در حضور نقص w^0 و ماتریس غیرخطی با بخش داخل صفحه بصورت معادله (۲۳) است.

$$B_{\mathrm{NL}} = B_{\mathrm{NL}}^{\mathrm{p}} + B_{\mathrm{NL}}^{\mathrm{I}} = [B_{\mathrm{NL}1}\ B_{\mathrm{NL}2}\ \dots\ B_{\mathrm{NL}n}] \tag{۲۳}$$

پس:

$$B_{\mathrm{NL}i} = B_{\mathrm{NL}i}^{\mathrm{p}} + B_{\mathrm{NL}i}^{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} B_{1i}\dfrac{\partial w_0}{\partial x} & 0 & 0 \\ B_{2i}\dfrac{\partial w_0}{\partial y} & 0 & 0 \\ B_{1i}\dfrac{\partial w_0}{\partial y} + B_{2i}\dfrac{\partial w_0}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1i}\dfrac{\partial w^0}{\partial x} & 0 & 0 \\ B_{2i}\dfrac{\partial w^0}{\partial y} & 0 & 0 \\ B_{1i}\dfrac{\partial w^0}{\partial y} + B_{2i}\dfrac{\partial w^0}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۲۴}$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.13.4.0]

تغییرات کرنش از معادله (۲۱) بر حسب جابجایی‌های گرهی مجازی $d\delta$ بصورت رابطه (۲۵) است:

$$d\bar{\varepsilon} = \mathrm{B}d\delta = \left(\mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_{\mathrm{NL}}(\delta)\right)d\delta \qquad (۲۵)$$

کار مجازی معادله (۱۹) برای یک المان با جایگذاری معادله (۲۵) و $d\bar{\mathrm{u}} = \mathrm{L}d\delta$ به صورت معادله (۲۶) جدا می‌شود:

$$d\delta^{\mathrm{T}}\left[\int_A \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\bar{\sigma}da - \int_S \mathrm{L}^{\mathrm{T}}\bar{\mathrm{P}}ds\right] = 0 \qquad (۲۶)$$

از آنجا که $d\delta$ دلخواه است معادلات غیرخطی تعادل المان، عبارت داخل کروشه است. از این معادله بردار نیروی داخلی ناشی از منتجه‌های تنش $\bar{\sigma}$ بصورت $\mathrm{F}'_{\mathrm{int}} = \int_\Gamma \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\bar{\sigma}dA$ است که برای نمونه در گره i معادله (۲۷) وجود دارد [۱۵]:

$$\mathrm{F}'_{\mathrm{int}\ i} = \int_\Gamma \left\{ \begin{array}{c} (\mathrm{B}^{\mathrm{p}}_{0i})^{\mathrm{T}}\bar{\sigma}_{\mathrm{p}} \\ (\mathrm{B}_{\mathrm{NL}i})^{\mathrm{T}}\bar{\sigma}_{\mathrm{p}} + (\mathrm{B}^{\mathrm{b}}_{0i})^{\mathrm{T}}\bar{\sigma}_{\mathrm{b}} + (\mathrm{B}^{\mathrm{s}}_{0i})^{\mathrm{T}}\bar{\sigma}_{\mathrm{s}} \end{array} \right\} dA \qquad (۲۷)$$

در کار حاضر ماتریس سفتی کل $\mathrm{K} = \mathrm{K}_0 + \mathrm{K}_{\mathrm{NL}}$ استفاده می‌شود. ماتریس سفتی الاستیک خطی K_0 از معادله (۲۸) بدست می‌آید:

$$\mathrm{K}_0 = \int_\Gamma \mathrm{B}_0^{\mathrm{T}}\mathrm{D}\mathrm{B}_0 dA \qquad (۲۸)$$

و ماتریس جابجایی اولیه K_{NL} [۱۵] مطابق رابطه (۲۹) است:

$$\mathrm{K}_{\mathrm{NL}} = \int_\Gamma \mathrm{B}_0^{\mathrm{T}}\mathrm{D}\mathrm{B}_{\mathrm{NL}}dA + \int_\Gamma \mathrm{B}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}\mathrm{B}_0 dA + \int_\Gamma \mathrm{B}_{\mathrm{NL}}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}\mathrm{B}_{\mathrm{NL}}dA \qquad (۲۹)$$

در این ماتریس‌ها، ماتریس خواص با توجه به منتجه‌ها با استفاده از بخش الاستیک رابطه (۱۲) بشکل رابطه (۳۰) است:

$$\mathrm{D}(t) = \begin{bmatrix} A & \nu A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu A & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu' A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & \nu B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu B & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu' B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6}\nu' A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6}\nu' A \end{bmatrix} \qquad (۳۰)$$

پاسخ انتگرال‌ها در معادلات بالا با استفاده از انتگرال‌گیری عددی بدست می‌آید. برای جلوگیری از نتایج خیلی کوچک (قفل‌شوندگی)، درجات گوس بصورت انتخابی در نظر گرفته می‌شود [۱۴]. در مطالعه حاضر نیز بشکل انتخابی در خمش از چهار نقطه و در برش از یک نقطه گوس استفاده می‌شود.

۴-۲- شرایط مرزی

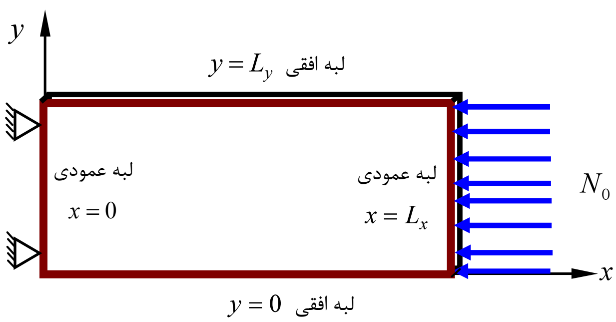
در کار حاضر شرایط مرزی پس‌کمانش شامل تکیه‌گاه ساده (SSSS) و گیردار (CCCC) با حرکت صفحه میانی در نظر گرفته شده است. این شرایط مرزی در جدول ۱ آمده است. با توجه به شرایط مرزی تنها نیروی اعمالی به ورق بار داخل صفحه N_0 است که در لبه عمودی ورق در $x = L_x$ اعمال می‌شود. از این‌رو نیروهای لبه‌ای تعمیم یافته در روابط المان محدود برابر $\bar{\mathrm{P}} = [N_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ است. لبه عمودی $x = 0$ نیز در راستای عمود به خود ثابت است. هندسه و بارگذاری ورق در شکل ۱ نشان داده شده است.

۴-۳- روش رهایی پویا

رهایی پویا (DR) روشی است که در آن حل استاتیکی از پاسخ حالت پایای تحلیل دینامیکی گذرای مستهلک شونده بدست می‌آید. در اینجا بخش گذرای حل مهم نیست و تنها پاسخ حالت پایا مورد نظر است.

جدول ۱ شرایط مرزی ورق با حرکت داخل صفحه تحت فشار صفحه‌ای

	لبه‌های عمودی $x = L_x$	لبه‌های عمودی $x = 0$	لبه های افقی $y = 0, L_y$
تکیه‌گاه ساده	$w = 0$, $\varphi_y = 0$, $N_x = N_0$	$u = w = 0$, $\varphi_y = 0$	$w = 0$, $\varphi_x = 0$
تکیه‌گاه گیردار	$w = 0$, $\varphi_x = \varphi_y = 0$, $N_x = N_0$	$u = w = 0$, $\varphi_x = \varphi_y = 0$	$w = 0$, $\varphi_x = \varphi_y = 0$



شکل ۱ ورق تحت فشار داخل صفحه

رهایی پویا با عنوان روش شبه گذرا نیز نامیده می‌شود [۱۶]. از آنجا که حل گذرا مورد نظر نیست ماتریس جرم و استهلاک مجازی بوده و مربوط به سیستم فیزیکی نیستند. معادلات حرکت دینامیک متناظر یک سیستم استاتیکی یعنی $\mathrm{K}(\delta^t)\delta^t = \mathrm{F}^t_{\mathrm{ext}}$ برای زمان t در حالت دینامیکی بصورت معادله (۳۱) در نظر گرفته می‌شود [۱۷]:

$$\mathrm{M}\ddot{\delta}^t + \mathrm{C}\dot{\delta}^t + \mathrm{K}(\delta^t)\delta^t = \mathrm{F}^t_{\mathrm{ext}} \qquad (۳۱)$$

که M ماتریس جرم، C ماتریس استهلاک و $\mathrm{F}^t_{\mathrm{ext}}$ بردار نیروهای خارجی است. این معادله یک فرایند دینامیکی مجازی را توصیف می کند. مسائل غیرخطی می‌تواند به جای تشکیل سفتی مماسی $\mathrm{K}(\delta^t)$ در هر گام زمانی، مستقیماً با استفاده از بردار نیروی داخلی غیرخطی $\mathrm{F}^t_{\mathrm{int}}$ حل شود [۱۷]. از این‌رو $\mathrm{K}(\delta^t)\delta^t$ با $\mathrm{F}^t_{\mathrm{int}}$ جایگزین می‌شود. از روش اختلاف محدود مرکزی برای مشتقات زمانی شتاب و سرعت استفاده شده که معادله حرکت مطابق معادله (۳۲) می‌شود:

$$\dot{\delta}^{t+\Delta t/2} = (\frac{\mathrm{M}}{\Delta t} + \frac{\mathrm{C}}{2})^{-1}[\mathrm{F}^t_{\mathrm{ext}} - \mathrm{F}^t_{\mathrm{int}} + (\frac{\mathrm{M}}{\Delta t} + \frac{\mathrm{C}}{2})\dot{\delta}^{t-\Delta t/2}] \qquad (۳۲)$$

زمان t در اینجا به شمارنده تعداد تکرار حل بر می‌گردد. با فرض استهلاک C بصورت ضریبی از جرم، یعنی $\mathrm{C} = \alpha_c \mathrm{M}$ [۱۸]، سرعت جدید در هر مرحله زمانی از معادله (۳۳) حاصل خواهد شد:

$$\dot{\delta}^{t+\Delta t/2} = \frac{1}{1+C^*}\left(\left(1-C^*\right)\dot{\delta}^{t-\Delta t/2} + \frac{\Delta t}{\mathrm{M}}\left(\mathrm{F}^t_{\mathrm{ext}} - \mathrm{F}^t_{\mathrm{int}}\right)\right) \qquad (۳۳)$$

که $C^* = \alpha_c \Delta t/2$. از آنجا که ماتریس استهلاک و جرم قطری هستند معادلات از هم جدا شده و جابجایی‌ها در هرگام زمانی جدید با انتگرال‌گیری ساده بصورت $\delta^{t+\Delta t} = \Delta t\dot{\delta}^{t+\Delta t/2} + \delta^t$ بدست می‌آید. جرم مجازی بر اساس قضیه گرشگورین[1] [۱۹] از ماتریس سفتی المان محدود و با فرض $\Delta t = 1$ بدست آمده است. در تعیین ضریب استهلاک از روش استهلاک جنبشی، از تغییرات انرژی جنبشی برابر با مجموع مربعات مؤلفه‌های سرعت مربوط به هر درجه آزادی استفاده می‌شود. سازه بدون استهلاک به ارتعاش در آمده و اگر انرژی جنبشی بعد از m مرحله تکرار به حداکثر برسد ضریب استهلاک بحرانی α_c بصورت رابطه (۳۴) در نظر گرفته می‌شود:

$$\alpha_c = \frac{\pi}{m\Delta t} \qquad (۳۴)$$

که این ضریب تا زمانی که ارتعاش سازه کاملاً میرا شود در سیستم اعمال خواهد شد. توجه شود برای هر درجه آزادی یک ضریب استهلاک مجزا بدست می‌آید که بعد از ارتعاش آزاد برای آن درجه آزادی تا پایان حل اعمال می‌شود [۸].

۵- نتایج حل ورق

در مطالعه حاضر یک ورق از جنس ماده ویسکوالاستیک تحت بار ثابت در گذر زمان قرار گرفته است. از آنجا که بار وارده نزدیک بار بحرانی ورق است پس از مدتی ورق دچار ناپایداری شده و خیز آن افزایش می‌یابد که مشابه رفتار پس‌کمانش است. این فرایند همان کمانش خزشی است. تعیین زمان بحرانی کمانش و تغییر شکل ورق شامل افزایش خیز و کاهش طول پس از کمانش در طی زمان ۱ ساعت از جمله نتایج مورد بررسی است.

ورق با نسبت ابعاد $L_x/L_y = 1$ و نسبت ضخامت $h/L_x = 0.1$ [۲۰] از جنس پلیمر پلی متیل متاکریلیت با خواص مطابق جدول ۲ در نظر گرفته شده است. خواص الاستیک شامل $E = ۳۷۰۳/۲$ MPa و $\nu = ۰/۲۷۳$ است [۲۱]. همان طور که در بالا اشاره شد در کار حاضر هر المان چهار گره با ۵ متغیر در هر گره دارد. برای آنالیز حساسیت مش تعداد المان‌های متفاوت برای تعیین نتایج مورد بررسی قرار گرفت که با توجه به همگرایی مساله و نزدیکی مناسب جواب‌ها، ۸×۸ المان برای ورق با تکیه‌گاه ساده و ۶×۶ المان برای ورق با تکیه‌گاه گیردار در نظر گرفته شد. پاسخ‌های بدست آمده با جواب‌های انسیس (FE) حاصل از المان SHELL181 و همان تعداد المان مقایسه شده که در اغلب موارد جواب‌ها مطابق هم است. المان SHELL181 چهار گره دارد که هر گره ۶ درجه آزادی جابجایی و چرخش در جهت و حول محورهای مختصات را شامل می‌شود. معادلات آن نیز بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول است [۲۲]. تابع نقص در کار حاضر مشابه با مود اول کمانش ورق با تکیه‌گاه ساده بصورت $w^0 = \mathrm{imp}\cdot h\cdot \sin(\pi x/L_x)\sin(\pi y/L_y)$ فرض شده است. از این‌رو ضریب imp مطابق با حداکثر مقدار خیز در مرکز ورق خواهد بود.

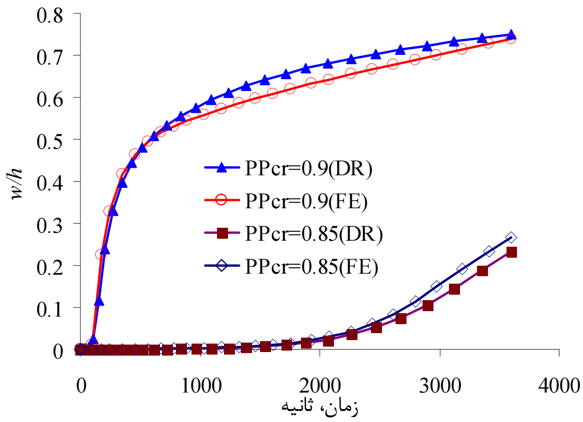
با دو مقدار نقص اولیه $۱۰^{-۴}$ و $\mathrm{imp} = ۱۰^{-۵}$ (نزدیک به

1. Gerschgorin's theorem

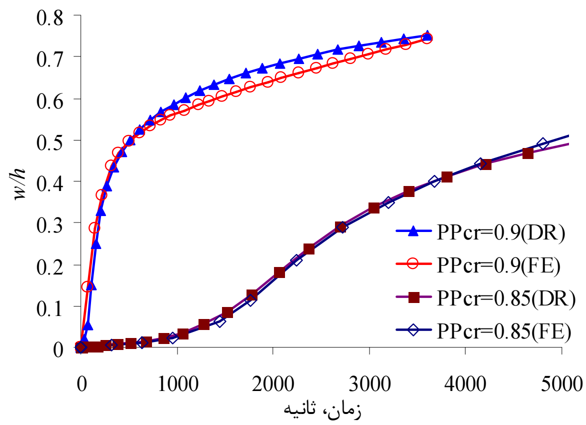
هندسه ورق تخت) شکل های ۲ و ۳ منحنی تغییر خیز ورق به ترتیب برای ورق با تکیه‌گاه ساده و گیردار را نشان می‌دهد.

جدول ۲ ضرایب پرونی پلیمر پلی متیل متاکریلیت [۲۱]

$D_n\times10^{6}$, MPa^{-1} نرمی های خزشی	λ_n , min^{-1} زمان تاخیر
۲۳/۶۲۵۸	۱
۵/۶۶۰۲	10^{-1}
۱۴/۸۴۰۵	10^{-2}
۱۸/۸۸۴۸	10^{-3}
۲۸/۵۸۴۸	10^{-4}
۴۰/۰۵۶۹	10^{-5}
۶۰/۴۲۳۵	10^{-6}
۷۹/۶۴۷۷	10^{-7}
۱۶۲/۱۷۹۰	10^{-8}



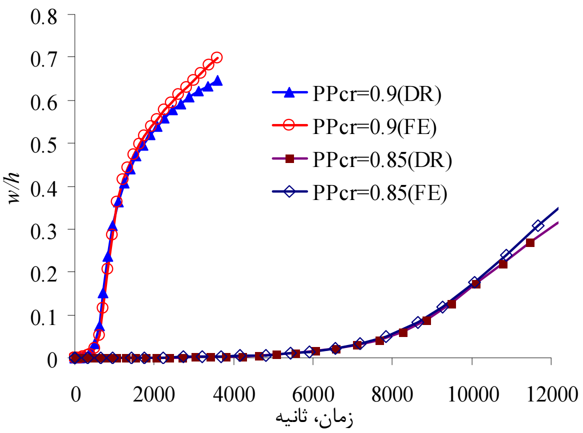
الف- نقص اولیه $imp = 10^{-5}$



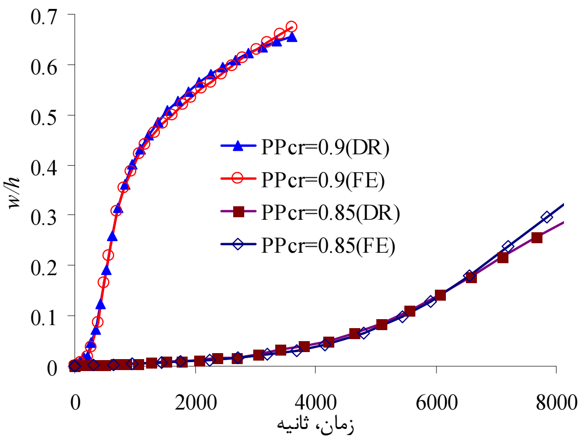
ب- نقص اولیه $imp = 10^{-4}$

شکل ۲ منحنی خیز ورق با تکیه‌گاه ساده

این تغییرات به ازای اعمال بار PPcr (نسبت بار اعمالی به بار کمانش الاستیک) با مقادیر مختلف یعنی ۸۵ و ۹۰ درصد بار کمانش حاصل شده است. در این شکل‌ها زمان بحرانی کمانش با توجه به نقطه جداشدن منحنی خیز از محور زمان در نظر گرفته شده و در جدول ۳ آورده شده است. مطابق این جدول کاهش نقص اولیه در ورق تا ۱۰ برابر (از 10^{-4} تا 10^{-5}) باعث افزایش زمان بحرانی حدوداً ۲/۵ برابر در ورق با تکیه‌گاه ساده شده است. در صورتی که این کاهش نقص برای ورق با لبه‌های گیردار به ترتیب برای نسبت بار ۰/۹ و ۰/۸۵ زمان بحرانی را حدود ۲/۶ و ۳/۴ برابر افزایش داده است. در مقایسه ورق ساده و گیردار نیز مشخص می‌شود که شرایط تکیه‌گاهی گیردار ۳ تا ۴ برابر زمان بحرانی بیشتری دارد. در این شکل‌ها پاسخ‌های حاصل از مطالعه حاضر (DR) تطابق خوبی با نتایج FE (حاصل از کد انسیس) دارد.



الف- نقص اولیه $imp = 10^{-5}$



ب- نقص اولیه $imp = 10^{-4}$

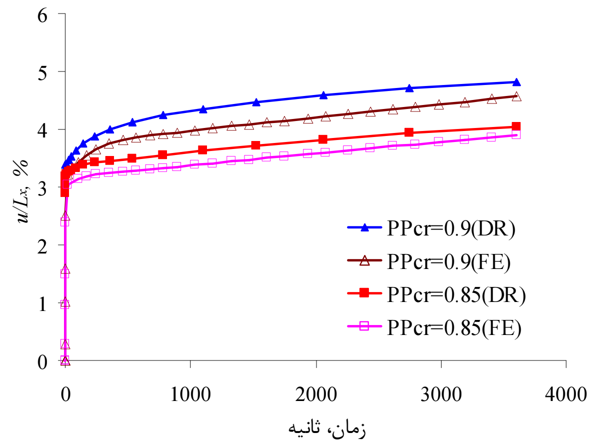
شکل ۳ منحنی خیز ورق با تکیه‌گاه گیردار

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.13.4.0]

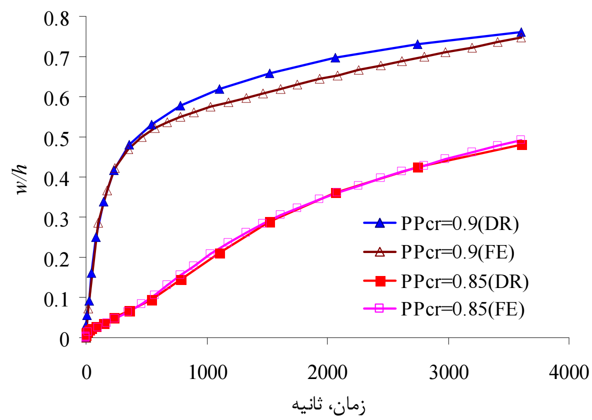
جدول ۳ زمان بحرانی کمانش برای ورق با تکیه‌گاه متفاوت

imp	PPcr	زمان بحرانی، ثانیه SSSS(۸×۸)	CCCC (۶×۶)
$۱۰^{-۵}$	۰/۹	۱۰۰	۴۰۰
	۰/۸۵	۱۴۰۰	۵۰۰۰
$۱۰^{-۴}$	۰/۹	۴۰	۱۵۰
	۰/۸۵	۵۰۰	۱۵۰۰

شکل های ۴ تا ۶ مربوط به تغییر درصد کاهش طول و افزایش خیز بدون بعد وسط ورق با تکیه‌گاه ساده در زمان بوده که به ترتیب برای نقص $۱۰^{-۳}$، $۱۰^{-۲}$ و $۱۰^{-۱}$ حاصل شده است. این تغییرات در طول ۳۶۰۰ ثانیه از اعمال بار ۰/۸۵ و ۰/۹ = PPcr بدست آمده است. همان طور که در شکل ۴ نشان داده شده نزدیک زمان ۱۰۰ ثانیه، در بار اعمالی ۰/۹ افزایش خیز با شیب تندتری (حدود ۱۵ برابر) نسبت به بار ۰/۸۵ رخ می‌دهد. با این وجود کاهش طول روند یکسانی در این دو بار دارد.

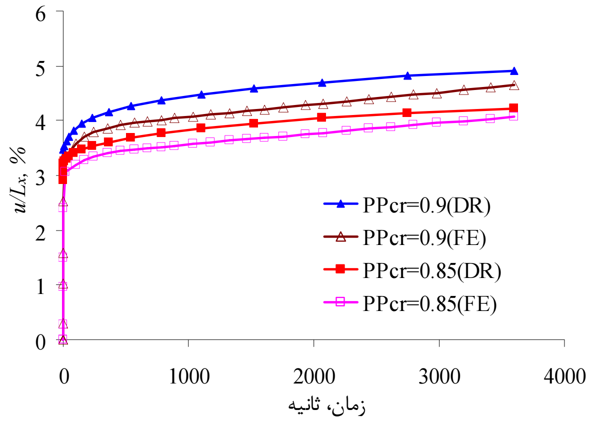


الف- منحنی کاهش طول

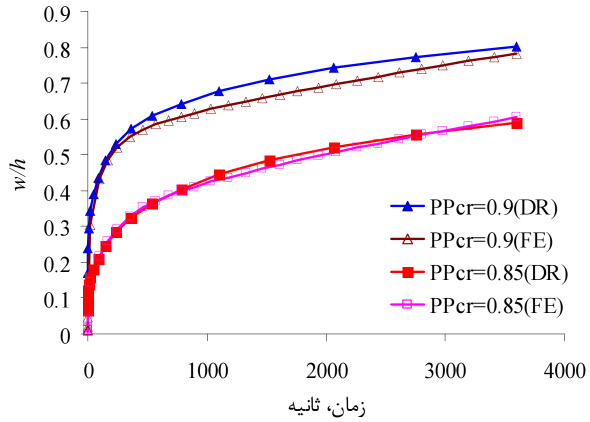


ب- منحنی خیز

شکل ۴ ورق با تکیه‌گاه ساده و نقص اولیه imp = $۱۰^{-۳}$



الف- منحنی کاهش طول



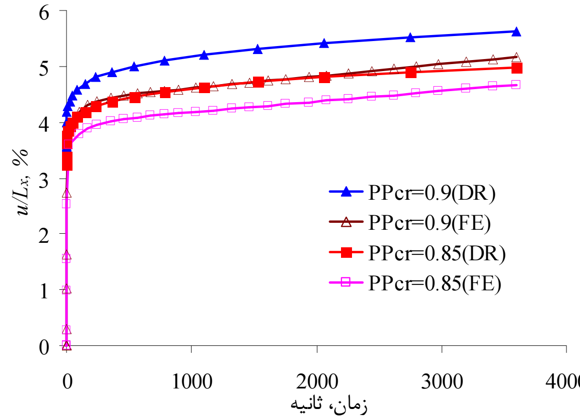
ب- منحنی خیز

شکل ۵ ورق با تکیه‌گاه ساده و نقص اولیه imp = $۱۰^{-۲}$

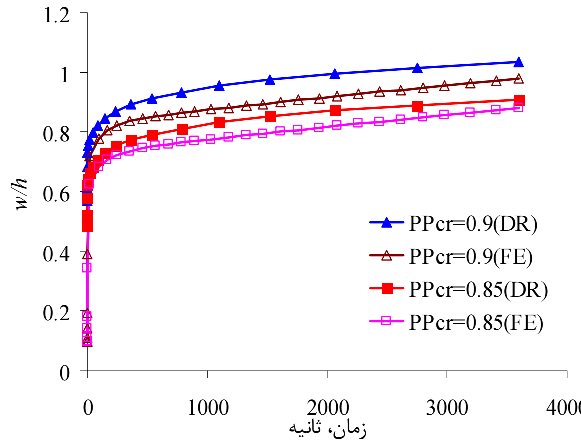
کمانش نیز از همان ابتدای بارگذاری بدون هیچ زمان بحرانی قابل مشاهده است. با افزایش نقص در شکل‌های ۵ و ۶ روند افزایش خیز وسط ورق شیب افزایشی برابری در دو نسبت بار اعمالی دارد. باز هم تغییر شکل زیاد ورق از ابتدای زمان بارگذاری اتفاق افتاده است.

تفاوت جواب های DR و کد انسیس برای خیز وسط ورق در انتهای زمان بارگذاری مطابق این شکل‌ها خیلی کم بوده که حداکثر آن در شکل ۶- ب حدود ۶٪ است. اختلاف پاسخ برای کاهش طول نسبت به خیز بیشتر است که حداکثر آن نیز در شکل ۶- الف و حدوداً برابر ۸٪ مشاهده می‌شود.

در جدول ۴ مقادیر خیز حداکثر و کاهش طول حداکثر در پایان زمان بارگذاری یعنی ۳۶۰۰ ثانیه برای ورق با تکیه‌گاه ساده با هم مقایسه شده است. با افزایش نسبت بار از ۰/۸۵ به ۰/۹، در ورق با نقص $۱۰^{-۳}$، خیز ۱/۵۸ برابر شده است.



الف- منحنی کاهش طول



ب- منحنی خیز

شکل ۶ ورق با تکیه‌گاه ساده و نقص اولیه $imp = ۱۰^{-۱}$

جدول ۴ خیز حداکثر و کاهش طول حداکثر در ورق با شرایط تکیه‌گاه ساده SSSS

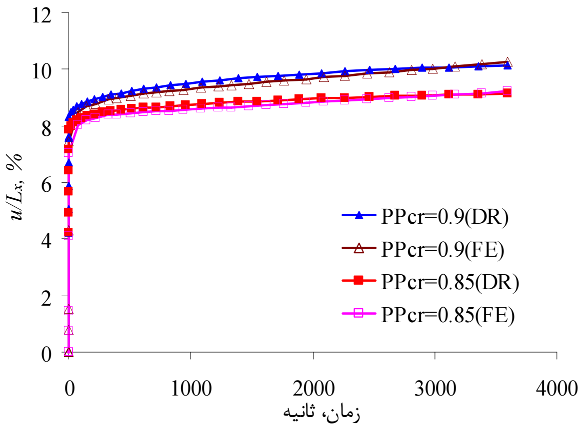
imp	PPcr	w/h	$u/L_x,\%$
$۱۰^{-۳}$	۰/۹	۰/۶۷	۱۰/۱۵
	۰/۸۵	۰/۱۹	۹/۲۲
$۱۰^{-۲}$	۰/۹	۰/۷۳	۱۰/۳۶
	۰/۸۵	۰/۴۶	۹/۴۶
$۱۰^{-۱}$	۰/۹	۱/۰۲	۱۰/۷۸
	۰/۸۵	۰/۸۸	۱۰/۰۹

این افزایش با نقص $۱۰^{-۲}$ و $۱۰^{-۱}$ به ترتیب ۱/۳۶ و ۱/۱۴ برابر خواهد شد. یعنی با وجود نقص بیشتر افزایش بار افزایش خیز کمتری را موجب شده است. در مقابل مطابق جدول ۴ کاهش طول ورق در این نقص‌ها با افزایش بار به تقریباً ثابت با مقدار متوسط ۱/۱۵ برابر بوده است.

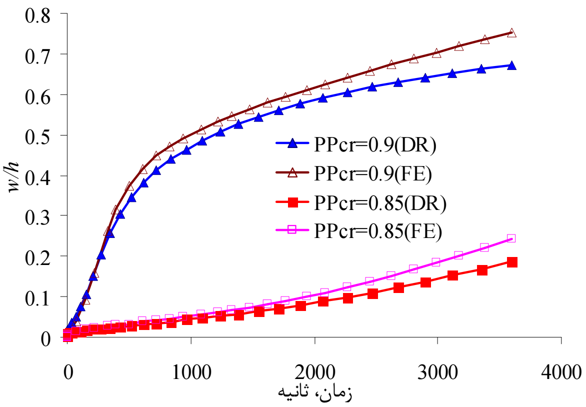
از طرف دیگر در مقایسه خیزها در نسبت بار ۰/۹ نتیجه می‌شود که افزایش ۱۰۰ برابری نقص از $۱۰^{-۳}$ به $۱۰^{-۱}$ خیز را ۱/۳۶ برابر کرده است. این در حالی است که کاهش طول تنها ۱/۱۶ برابر بوده است. پس افزایش نقص تأثیر قابل ملاحظه در (چند برابر شدن) پاسخ نهایی ندارد.

در شکل های ۷ تا ۹ نیز درصد تغییر کاهش طول و افزایش خیز بدون بعد وسط ورق با مقادیر نقص و بار مشابه قبل برای تکیه‌گاه گیردار ارائه شده است. در این شکل‌ها تفاوتی بین حل DR و حل انسیس در کاهش طول مشاهده نمی‌شود. نکته قابل توجه در شکل ۷- ب است که افزایش خیز در زمان ۳۰۰ ثانیه برای نسبت بار ۰/۹ تقریباً ۱۳ برابر بار ۰/۸۵ شده است.

در جدول ۵ مقادیر خیز حداکثر و کاهش طول حداکثر در پایان زمان بارگذاری برای ورق با تکیه‌گاه گیردار آمده است. با افزایش نسبت بار از ۰/۸۵ به ۰/۹، در ورق با نقص $۱۰^{-۳}$، خیز ۳/۵۳ برابر و با نقص $۱۰^{-۲}$ و $۱۰^{-۱}$ به ترتیب ۱/۵۹ و ۱/۱۶ برابر است.



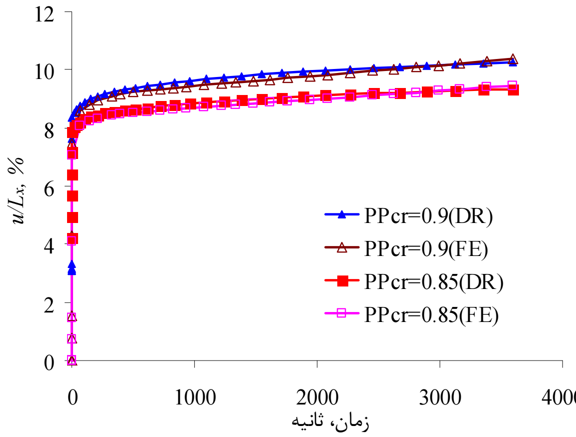
الف- منحنی کاهش طول



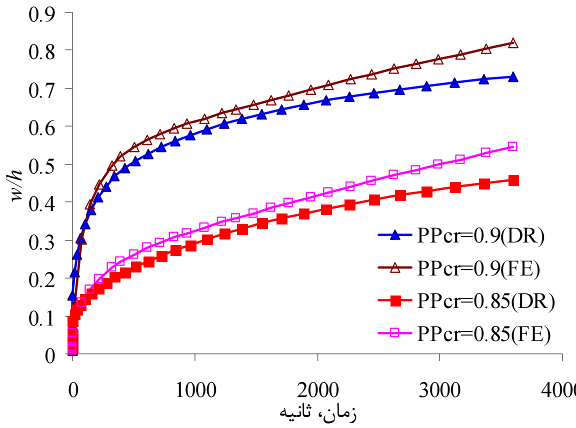
ب- منحنی خیز

شکل ۷ ورق با تکیه‌گاه گیردار و نقص اولیه $imp = ۱۰^{-۳}$

مشابه ورق SSSS با وجود نقص بیشتر، افزایش بار افـزایش خیز کمتری را موجب شـده اسـت. کـاهش طـول ورق در ایـن نقص‌ها مطابق جدول ۵ با افزایش بار به نسبت تقریبـاً ثابـت بـا مقدار متوسط ۱/۱ برابر بوده است.



الف- منحنی کاهش طول



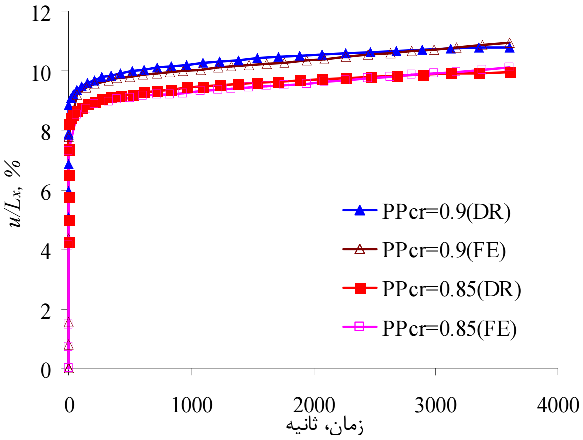
ب- منحنی خیز

شکل ۸ ورق با تکیه‌گاه گیردار و نقص اولیه $imp = ۱۰^{-۲}$

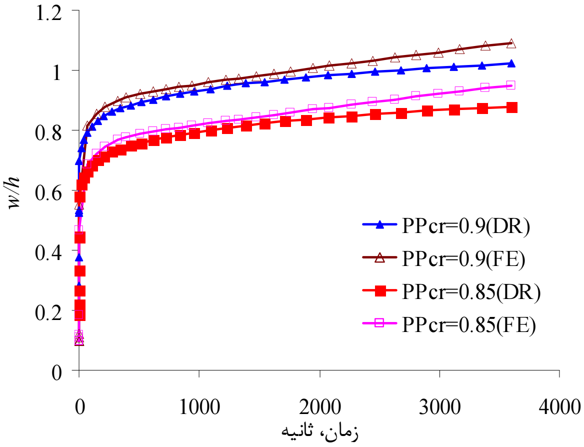
جدول ۵ خیز حداکثر و کاهش طول حداکثر در ورق با شرایط تکیه‌گاه گیردار CCCC

imp	PPcr	w/h	u/L_x,%
$۱۰^{-۳}$	۰/۹	۰/۷۶	۴/۸۲
	۰/۸۵	۰/۴۸	۴/۰۴
$۱۰^{-۲}$	۰/۹	۰/۸۰	۴/۹۱
	۰/۸۵	۰/۵۹	۴/۲۳
$۱۰^{-۱}$	۰/۹	۱/۰۳	۵/۶۱
	۰/۸۵	۰/۹۰	۴/۹۸

از مقایسه خیزها در نسبت بـار ۰/۹ نتیجـه مـی‌شـود کـه افزایش ۱۰۰ برابری نقص از $۱۰^{-۳}$ به $۱۰^{-۱}$ خیـز را ۱/۵۲ برابـر کرده است. در حالی که کاهش طول تنها ۱/۰۶ برابر بوده است. پس افزایش نقص در ورق با تکیه گاه گیردار نیز باعث تأثیر قابل ملاحظه در پاسخ نهایی نشده است.



الف- منحنی کاهش طول



ب- منحنی خیز

شکل ۹ ورق با تکیه‌گاه گیردار و نقص اولیه $imp = ۱۰^{-۱}$

۶- نتیجه‌گیری

با فرض ماده ویسکوالاستیک برای جنس ورق، رفتار تحـت بـار فشاری داخل صفحه بررسـی شـد. بـه منظـور تعیـین زمـان ناپایداری ورق و نیز پاسخ بعد از آن از معادلات ورق میندلین با غیرخطی بودن هندسی استفاده شد. بـرای حـل معـادلات نیـز روش صریح در المان محدود فرمول‌بنـدی و پیـاده‌سـازی شـد. نتایج نشان داد که حتی در بارهای فشاری کمتر و نزدیک به بار بحرانی کمانش الاستیک، رفتار ورق ویسکوالاستیک بـه سـمت ناپایدار شدن رفته و عملاً در زمان‌های بخصوصی کـه از آن بـه

زمان بحرانی یاد می‌شود ناپایداری رخ خواهد داد. افزایش نقص نیز باعث تأثیر قابل ملاحظه در پاسخ نهایی نشده است.

هدف اصلی از کار حاضر ارائه فرمولاسیون ورق ویسکوالاستیک و انجام حل آن با روش المان محدود به طریقه صریح بوده و از این جهت مقایسه با حل ضمنی انسیس بیشتر از جنبه رفتار ورق در زمان بود که به خوبی تطابق در نتایج مشهود است. با توجه به روش حل، گسترش کار به تحلیل ورق غیرخطی با ماده ویسکوالاستیک غیرخطی که در کدهای تجاری مرسوم موجود نیست نیز با فرمولاسیون ارائه شده امکان‌پذیر خواهد بود.

۷- مراجع

[1] Deleeuw S.L., "Circular viscoelastic plates subjected to in- plane loads", *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 5, 1971, pp. 931-937.
[2] Minahen T.M., Knauss W.C., "Creep buckling of viscoelastic structures", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 30, No. 8, 1993, pp. 1057-1092.
[3] Cederbaum G., Touati D., "Postbuckling analysis of imperfect non-linear viscoelastic cylindrical panels", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 37, No. 4-5, 2002, pp. 757-762.
[4] Muliana A.H., Haj-Ali R.M., "Analysis for creep behavior and collapse of thick-section composite structures", *Composite Structures*, Vol. 73, No. 3, 2006, pp. 331-341.
[5] Rushton K.R., "Large deflexion of plates with initial curvature", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 12, No. 12, 1970, pp. 1037-1051.
[6] Ramesh G., Krishnamoorthy C.S., "Geometrically non-linear analysis of plates and shallow shells by dynamic relaxation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 123, No. 1-4, 1995, pp. 15-32.
[7] Lee KS., Han SE., Park T., "A simple explicit arc-length method using the dynamic relaxation method with kinetic damping", *Computers and Structures*, Vol. 89, No. 1-2, 2011, pp. 216-233.
[8] Falahatgar S.R., Salehi M., "Dynamic Relaxation Nonlinear Viscoelastic Analysis of Annular Sector Composite Plate", *Journal of Composite Materials*, Vol. 43, No. 3, 2009, pp. 257 - 275.
[9] Falahatgar S.R., Salehi M., "Nonlinear viscoelastic response of unidirectional polymeric laminated composite plates under bending loads", *Applied Composite Materials*, Vol. 18, No. 6, 2011, pp. 471-483
[10] Beeten J., *Creep Mechanics*, Berlin, Springe-Verlag, 2002, pp. 195-199.
[11] Haj-Ali R.M., Muliana A.H., "Numerical finite element formulation of the Schapery nonlinear viscoelastic material model", *International Journal of Numerical Method in Engineering*, Vol. 59, No. 1, 2004, pp. 25-45.
[12] Henriksen M., "Nonlinear viscoelastic stress analysis- A finite element approach", *Computers and Structures*, Vol. 18, No. 1, 1984, pp. 133-139.
[13] Reddy J.N., *Mechanics of laminated Composite plates and shells*, New York, CRC press, 2004. pp. 132-134.
[14] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The Finite Element Method, volume 2: solid mechanics*. 5th Ed., Oxford, Butterworth Heinemann, 2000, pp 4-6.
[15] Pica A., Wood R.D., Hinton E., "Finite element analysis of geometrically nonlinear plate behaviour using a mindlin formulation", *Computers and Structures*, Vol. 11, No. 3, 1980, pp. 203-215.
[16] Pica A., Hinton E., "Transient and pseudo-transient analysis of Mindlin plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, No. 1, 1980, pp. 189-208.
[17] Underwood P., Dynamic relaxation, in: Belytschko T., Hughes T.J.R., eds., *Computational Methods for Transient Dynamic Analysis*, Amsterdam, North Holland, 1983, pp. 246-265.
[18] Khante S.N., Rode V., Kant T., "Nonlinear transient dynamic response of damped plates using a higher order shear deformation theory", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 47, No. 4, 2007, pp. 389-403.
[19] Suli E., Mayers D.F., *An Introduction to Numerical Analysis*, London, Cambridge University Press, 2003, pp. 145-147.
[20] Decolon C., *Analysis of Composite Structures*, London, Hermes Penton Science, 2002, pp. 271.
[21] Lai J., Bakker A., "3-D Schapery representation for nonlinear viscoelasticity and finite element implementation", *Computational Mechanics*, Vol. 18, No. 3, 1996, pp. 182-191.
[22] ANSYS doumentation, Swanson Analysis Systems, Inc., Houston, PA., 2002.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.13.4.0]