



حل تحلیلی انتقال حرارت دایمی در محیط متخلخل چند لایه تحت شرایط عدم تعادل حرارتی

محمد محسن شاه مردان^۱، محسن نظری^{۲*}، سبجان مسیبه درچه^۳

۱- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

۲- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

۳ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

* شاهرود، صندوق پستی ۳۶۱۹۹۵۱۶۱، nazari_me@yahoo.com

چکیده- در این مقاله، انتقال حرارت هدایت بین دو صفحه موازی، حاوی چند لایه متخلخل متفاوت، با در نظر گرفتن تولید حرارت داخلی، تحت شرایط عدم تعادل حرارتی، مورد مطالعه قرار گرفته است. شرایط مرزی در صفحات بالا و پایین به صورت دما ثابت در نظر گرفته شده است. ابتدا، معادله انتقال حرارت در هر لایه برای فازهای جامد و سیال استخراج شده و سپس، با در نظر گرفتن شرایط مرزی حرارتی در هر لایه، نسبت به حل تحلیلی معادلات انتقال حرارت اقدام شده است. حل تحلیلی ارائه شده حالت عمومی دارد و برای هر تعداد لایه متخلخل با ضخامت‌های مختلف معتبر می‌باشد. نتایج این تحقیق تأثیرات نسبت‌های تخلخل هر لایه، ضرایب هدایت حرارتی سیال و جامد و همچنین ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی در مقیاس حفره را بر توزیع دما و اختلاف دمای بین دو فاز سیال و جامد نشان می‌دهد.

کلیدواژگان: انتقال حرارت هدایت، شرایط عدم تعادل حرارتی، لایه متخلخل، نسبت تخلخل، اختلاف دمای بین دو فاز

Analytical solution of steady heat transfer in a multi-layer porous media under local thermal non-equilibrium condition

M. M. Shahmardan¹, M. Nazari^{2*}, S. Mosayebidorcheh³

1- Assis. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran

2- Assis. Prof., Dept. of Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran

3- MSc. Student, Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran

* P. O. B. 361995161 Shahrood, nazari_me@yahoo.com

Abstract- This paper is concerned with the conduction heat transfer between two parallel plates filled with a multi-layer porous medium under a Local Thermal non - equilibrium condition. Analytical solution is obtained for both fluid and solid temperature fields in the porous channel incorporating the effects of thermal conductivity ratio, porosity, and a non-dimensional heat transfer coefficient at the pore level. The effects of the variable porosity on the temperature distribution are completely shown and compared with the constant porosity model. The presented method for analysis of heat transfer in a multi-layer porous medium is a generalized solution which is valid for arbitrary number of internal porous layers. The local temperature difference between fluid and solid phases is also calculated for a wide range of parameters. The results confirmed that the conductivity ratio and the porosity of the internal layers have significant role in the thermal modeling of the porous channel.

Keywords: Conduction Heat Transfer, Thermal Non-Equilibrium, Porous Layers, Porosity, Temperature Difference between Two Phases

۱- مقدمه

تحلیل جریان و انتقال حرارت در محیط‌های متخلخل یکی از زمینه‌هایی است که دانشمندان و مهندسان به آن علاقه‌مندند. این موضوع کاربردهای مهندسی فراوانی همچون طراحی مبدل‌های حرارتی، واحدهای ذخیره‌سازی انرژی و سلول‌های سوختی دارد.

تاکنون مطالعات زیادی بر روی تحلیل انتقال حرارت در محیط متخلخل تحت شرایط تعادل حرارتی صورت گرفته است. اگرچه، فرض تعادل حرارتی محلی در بسیاری از کاربردهای مهندسی و صنعتی با دقت کافی همراه است، ولی این فرض، در مواردی که اختلاف دمای بین فاز سیال و جامد زیاد شود، دقت نتایج را به شدت کاهش می‌دهد. به عبارت دیگر، تنها در صورتی می‌توان از شرط تعادل حرارتی استفاده کرد که اختلاف دمای بین دو فاز نسبت به حدکثر اختلاف دمای سیستم مقدار ناچیزی باشد. در ادامه گزارشی از کارهای قبلی، که با فرض عدم تعادل حرارتی انجام شده است، ارائه می‌شود.

مدل دومعادله‌ای انرژی در حالت عدم تعادل حرارتی برای انتقال حرارت هدایت و جابه‌جایی توسط ناکایاما و همکاران [۱] برای هر دو فاز سیال و جامد ارائه و به صورت تحلیلی حل شد. امیری و وفایی [۲]، با به‌کارگیری مدل جریان سیال عمومی و معادلات انرژی هر دو فاز، انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری را در طول کانال برای حالت دماثابت بررسی کرده‌اند. نیل و همکاران [۳] نیز، در تحقیقی دیگر، انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری در محیط متخلخل را مطالعه کرده‌اند. آن‌ها تاثیر عدم تعادل حرارتی را بر روی طول توسعه‌یافتگی حرارتی، به ازای مقادیر مختلف نسبت ضرایب هدایت حرارتی جامد و سیال، به‌دست آورده‌اند.

مارافی و وفایی [۴] جابه‌جایی اجباری در محیط متخلخل تحت شرایط عدم تعادل حرارتی را با استفاده از مدل داری-برینکمن-فرچیمر مطالعه کرده‌اند. آن‌ها، با استفاده از یک حل تحلیلی، تاثیر عدد بایوت، نسبت ضرایب هدایت حرارتی و عدد داری بر انتقال حرارت محیط متخلخل را بررسی کرده‌اند. شرط مرزی شار حرارتی ثابت در حالت عدم تعادل حرارتی در محیط متخلخل نیز توسط الزمی و وفایی [۵] در نظر گرفته شده است. در مطالعه آن‌ها، تاثیرات تغییر خواصی همچون تخلخل و نسبت ضرایب هدایت حرارتی جامد و سیال ارائه شده است. اثر

اتلاف در انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری در محیط متخلخل با فرض عدم تعادل حرارتی نیز توسط جیانگ و رن [۶] بررسی شده است. نتایج مینکوزا و همکاران [۷] نشان می‌دهد که تعادل حرارتی یک محیط متخلخل به عواملی مانند اندازه لایه‌ها، میانگین اندازه روزه‌ها در ماده متخلخل و ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی بستگی دارد. اثر تغییرات نسبت تخلخل در یک ماده متخلخل بر انتقال حرارت نیز توسط محققان مورد بررسی قرار گرفته است [۸-۱۲]. به عنوان مثال، این موضوع به همراه تغییرات اعداد بدون بعد رایلی، پرانتل و ... بر انتقال حرارت جابه‌جایی در مرجع [۸] به‌صورت عددی بررسی شده است. انتقال حرارت اجباری در یک کانال متخلخل با نسبت تخلخل متغیر در مرجع [۹] مطالعه شده است. تغییر پروفیل سرعت در نزدیکی دیواره و تغییر نرخ انتقال حرارت از جمله تاثیرات تغییر نسبت تخلخل می‌باشد. در اکثر این گزارش‌ها، توابع نمایی با چند ثابت را برای پیش‌بینی توزیع تخلخل استفاده کرده‌اند.

نظری و کوثری [۱۳]، با در نظر گرفتن تغییرات تخلخل در معادلات انرژی ماده متخلخل، درنهایت به دو معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبه سه رسیده‌اند و این معادلات را با روش‌های عددی حل کرده‌اند. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که افزایش نسبت ضرایب هدایت حرارتی سیال به جامد باعث افزایش اختلاف دمای بین دو فاز می‌شود و دیگر نمی‌توان از فرض تعادل حرارتی استفاده نمود. در تحقیق دیگری، که توسط نوری بروجردی و همکاران [۱۴] انجام شده، شرط عدم تعادل حرارتی در مسئله انتقال حرارت محیط متخلخل مطالعه شده است. این تحقیق تنها به بررسی حالت ساده تک‌لایه‌ای پرداخته است.

در این مقاله، انتقال حرارت هدایتی محیط متخلخل، تحت شرایط عدم تعادل حرارتی و تولید گرما، بین دو صفحه موازی با دمای ثابت در نظر گرفته شده است. این موضوع کاربردهای صنعتی مانند طراحی عایق‌های حرارتی، سیستم‌های ژئوترمال غیرهمگن و غیرایزوتروپیک و جریان سیال در مخازن نفتی دارد. فرض می‌شود که محیط متخلخل مذکور دارای چندین لایه است که نسبت تخلخل هر لایه با لایه‌های دیگر متفاوت است. سپس معادلات انرژی برای فازهای سیال و جامد در هر لایه به صورت تحلیلی حل شده‌اند. حل تحلیلی شامل ضرایبی است که در نهایت با استفاده از شرایط مرزی ابتدایی و انتهایی

$$[T_s, T_f] = \begin{cases} [T_{s_1}, T_{f_1}] & \text{for } 0 \leq Y \leq \frac{1}{n}H \\ [T_{s_2}, T_{f_2}] & \text{for } \frac{1}{n}H \leq Y \leq \frac{2}{n}H \\ \vdots \\ [T_{s_i}, T_{f_i}] & \text{for } \frac{i-1}{n}H \leq Y \leq \frac{i}{n}H \\ \vdots \\ [T_{s_n}, T_{f_n}] & \text{for } \frac{n-1}{n}H \leq Y \leq H \end{cases} \quad (1)$$

معادله انتقال حرارت یک‌بعدی را در حالت پایا می‌توان برای فازهای سیال و جامد در کلیه لایه‌ها به صورت زیر نوشت (این معادلات برای حالت تک‌لایه‌ای به صورت مفصل در مرجع [۱۵] ارائه شده است):

$$k_f \nabla \cdot (\varepsilon_i \nabla T_{f_i}) + h(T_{s_i} - T_{f_i}) = 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2)$$

$$k_s \nabla \cdot ((1 - \varepsilon_i) \nabla T_{s_i}) - h(T_{s_i} - T_{f_i}) + (1 - \varepsilon_i) q_s'' = 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3)$$

که در آن q_s'' تولید گرما بر واحد حجم جامد، h ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی در مقیاس حفره و k_s ، k_f ضرایب هدایت حرارتی فازهای سیال و جامدند. جمله دوم در معادلات انرژی نشان‌دهنده انتقال حرارت داخلی بین فازهای سیال و جامد است که به خاطر فرض عدم تعادل حرارتی ظاهر شده است. پارامترهای بدون بعد زیر برای به‌دست آوردن فرم بی‌بعد معادلات (۲) و (۳) استفاده شده است.

$$\theta_i = \frac{T_i - T_w}{q_s'' / h}, \quad y = \frac{Y}{H}, \quad A = \frac{hH^2}{k_f}, \quad k = \frac{k_f}{k_s} \quad (4)$$

پس از جایگذاری پارامترهای فوق در معادلات (۲) و (۳)، شکل بی‌بعد معادلات انرژی به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\varepsilon_i \theta_{f_i}'' + A(\theta_{s_i} - \theta_{f_i}) = 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (5)$$

$$(1 - \varepsilon_i) \theta_{s_i}'' - Ak(\theta_{s_i} - \theta_{f_i}) + (1 - \varepsilon_i) Ak = 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (6)$$

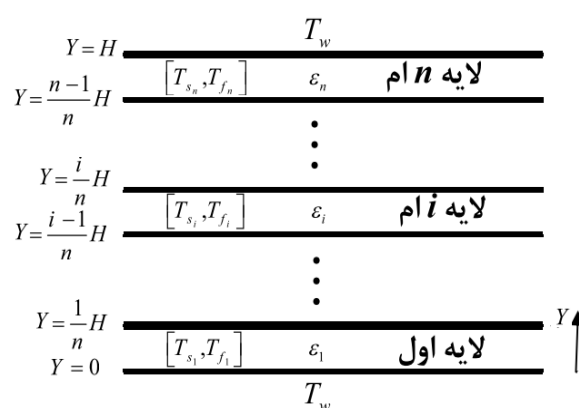
برای حل معادلات کوپل‌شده (۵) و (۶) به $2n$ شرط مرزی برای θ_s و همین تعداد شرط مرزی برای θ_f نیاز داریم (جمعاً $4n$ شرط مرزی). شرایط مرزی که می‌توان برای این مسئله استفاده کرد شرط دما ثابت برای هر دو فاز جامد و سیال در ابتدای لایه اول و انتهای لایه آخر ماده متخلخل ($y = 1$) و

هر لایه به‌دست می‌آیند. نتایج این حل تحلیلی تأثیرات خواصی مثل نسبت تخلخل هر لایه، نسبت ضرایب هدایت حرارتی جامد و سیال و ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی بر روی توزیع دمای هر دو فاز را نشان می‌دهد. روابط تحلیلی به‌دست آمده برای هر تعداد لایه متخلخل داخلی معتبر است.

از نوآوری‌های پژوهش حاضر می‌توان به این نکته اشاره کرد که یک حل تحلیلی کلی برای مسئله انتقال حرارت محیط متخلخل چندلایه با حضور تولید گرمای داخلی استخراج شده است. همان‌طور که بعداً در نتایج نشان داده خواهد شد، تغییر نسبت تخلخل لایه‌ها باعث تغییر مکان بیشینه دما در کانال خواهد شد. این پدیده، به‌عنوان یکی از کاربردهای مهندسی مسئله مورد نظر در زمینه طراحی عایق‌های حرارتی محسوب می‌شود.

۲- معادلات حاکم و شرایط مرزی

محیط متخلخل چندلایه‌ای را که بین دو صفحه موازی با دمای ثابت T_w و به فاصله H قرار دارد در نظر بگیرید (شکل ۱).



شکل ۱ نمایش هندسه محیط متخلخل چندلایه

برای حل توزیع دما در سرتاسر دامنه، باید معادلات انرژی در هر لایه حل شود. برای ساده‌سازی، ضخامت تمام لایه‌ها یکسان در نظر گرفته شده است. با فرض اینکه توزیع دمای فاز سیال و جامد در لایه i ام به‌ترتیب برابر با T_{f_i} و T_{s_i} باشد، می‌توان توزیع دما در کل دامنه را به صورت رابطه (۱) در نظر گرفت که در آن اندیس i نشان‌دهنده شماره لایه است و T_{s_i} و T_{f_i} به‌ترتیب دمای فاز سیال و جامد در لایه‌ی i ام را نشان می‌دهند.

$$\theta_{s_i}''(y) = -Ak - \frac{k\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i} \theta_{f_i}''(y) \quad (8)$$

با دو بار انتگرال گیری از رابطه بالا داریم:

$$\theta_{s_i}(y) = -\frac{Ak}{2}y^2 - \frac{k\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i} \theta_{f_i}(y) + E_i y + F_i \quad (9)$$

با F_i و E_i در رابطه (۹) ثابت‌های انتگرال گیری بوده و با اعمال شرایط مرزی مشخص می‌شوند. از آنجا که این ثابت‌ها برای هر لایه با لایه‌های دیگر متفاوت می‌باشند، از پانویس i برای بیان آن‌ها استفاده شده است.

با ترکیب روابط (۵) و (۹)، به یک معادله دیفرانسیل صریح مرتبه دو ناهمگن برحسب $\theta_{f_i}(y)$ می‌رسیم که مجموع حل خصوصی و عمومی آن به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$\theta_{f_i}(y) = B_i \sinh(q_i y) + D_i \cosh(q_i y) - \frac{Ak}{2\sigma_i} y^2 + \frac{E_i}{\sigma_i} y - \frac{k\varepsilon_i - F_i \sigma_i}{\sigma_i^2} \quad (10)$$

که در آن B_i, D_i, E_i, F_i ثابت‌های حل معادلات می‌باشند که در حالت کلی به پارامترهای فیزیکی مسئله و شرایط مرزی بستگی دارند. σ_i, q_i نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_i = 1 + \frac{k\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i} \quad (11)$$

$$q_i = \sqrt{\frac{A\sigma_i}{\varepsilon_i}} \quad (12)$$

با جایگذاری رابطه (۱۰) در معادله (۹)، رابطه صریحی نیز برای توزیع دمای فاز جامد، $\theta_{s_i}(y)$ ، به دست می‌آید.

معادلات (۹) و (۱۰) شکل کلی توزیع دما در فازهای سیال و جامد را بیان می‌کند و به ازای هر تعداد لایه متخلخل قابل استفاده است. به بیان دیگر، توزیع دمای به دست آمده، برای یک کانال متخلخل با چیدمان متناهی لایه‌هاست.

در انتها، با استفاده از معادلات (۹) و (۱۰) و شرایط مرزی (معادلات (۱-۷) تا (۳-۷))، می‌توان ضرایب مجهول B_i, D_i, E_i, F_i را برای هر لایه به دست آورد.

۴- نتایج

۴-۱- مورد خاص ۱: حالت تک لایه‌ای

ساده‌ترین حالت این مسئله حالتی است که ماده متخلخل مورد نظر تک لایه باشد ($n=1$). در این صورت، در ابتدا و انتهای

$y=0$ می‌باشد. شرایط مرزی دیگر شامل پیوستگی دمای سیال و جامد در سطح مشترک دو لایه و همچنین شرط موازنه انرژی در سطح مشترک برای هر دو فاز سیال و جامد است (شرط هدایت حرارتی). کلیه این شرایط مرزی در معادلات (۱-۷) تا (۳-۷) ارائه شده است.

برای لایه اول:

$$\begin{cases} \theta_{s_1}(0) = 0 \\ \theta_{f_1}(0) = 0 \end{cases} \quad (1-7)$$

برای لایه‌های داخلی:

$$(1 \leq i \leq n-1)$$

$$\begin{cases} \theta_{s_i}\left(\frac{i}{n}\right) = \theta_{s_{i+1}}\left(\frac{i}{n}\right) \\ (1-\varepsilon_i)\theta_{s_i}'\left(\frac{i}{n}\right) = (1-\varepsilon_{i+1})\theta_{s_{i+1}}'\left(\frac{i}{n}\right) \\ \theta_{f_i}\left(\frac{i}{n}\right) = \theta_{f_{i+1}}\left(\frac{i}{n}\right) \\ \varepsilon_i\theta_{f_i}'\left(\frac{i}{n}\right) = \varepsilon_{i+1}\theta_{f_{i+1}}'\left(\frac{i}{n}\right) \end{cases} \quad (2-7)$$

برای لایه آخر:

$$\begin{cases} \theta_{s_n}(1) = 0 \\ \theta_{f_n}(1) = 0 \end{cases} \quad (3-7)$$

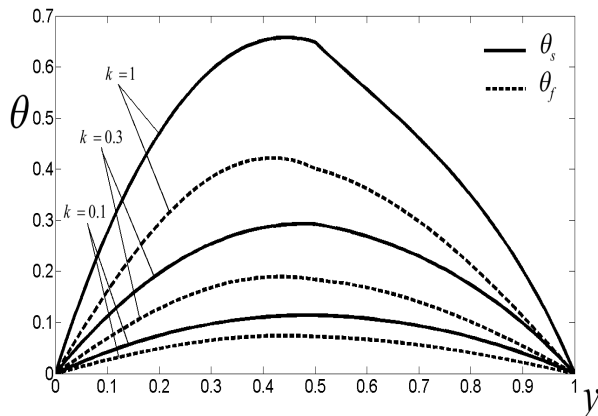
معادلات (۱-۷) و (۳-۷) نشان‌دهنده شرط دما ثابت دیواره‌های کانال می‌باشند. شرط پیوستگی دما در سطح مشترک لایه‌ها برای هر دو فاز سیال و جامد برقرار می‌باشد. با فرض اینکه انتقال حرارت هدایتی در سطح مشترک از طریق فازهای مشابه صورت می‌گیرد، معادلات (۲-۷) به عنوان شرایط مرزی حرارتی در سطح مشترک لایه‌ها در نظر گرفته می‌شود.

تعداد شرایط مرزی یعنی معادلات (۱-۷)، (۲-۷) و (۳-۷) جمعاً $4n$ است که برای حل معادلات (۵) و (۶) استفاده می‌شوند. روش حل نیز در ادامه ارائه می‌شود. ساده‌ترین حالت این مسئله کانال حاوی یک لایه متخلخل است که در ابتدا و انتهای لایه شرط دما ثابت در نظر گرفته می‌شود و شرایط مرزی در سطح مشترک لایه‌های داخلی (معادله ۲-۷) حذف می‌شوند.

۳- حل تحلیلی معادلات

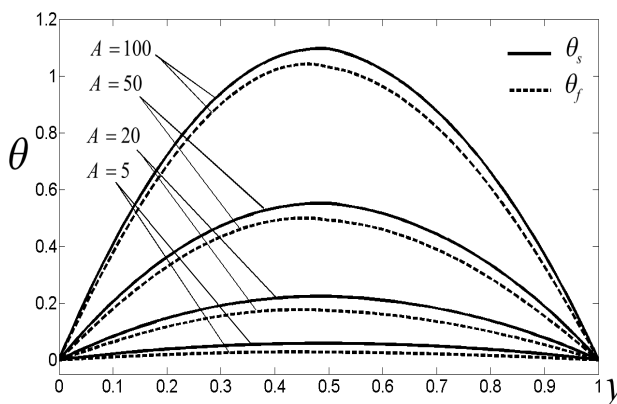
با ضرب معادله (۵) در k و جمع آن با رابطه (۶)، به رابطه زیر می‌رسیم:

انتقال حرارت هدایتی در فصل مشترک دو فاز جامد و سیال (در مقیاس حفره)، اختلاف دمای محلی بین سیال و جامد در داخل ماده متخلخل بسیار کوچک خواهد بود. این رفتار در شکل ۲ به وضوح قابل رویت است.



شکل ۲ توزیع دمای بدون بعد فازهای سیال و جامد در ماده متخلخل در نسبت‌های ضریب هدایت حرارتی مختلف به ازای $A=10$ ، $\varepsilon_1=0.4$ و $\varepsilon_2=0.8$

شکل ۳ توزیع دمای محیط متخلخل را به ازای مقادیر مختلف ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی (A) نشان می‌دهد. افزایش مقدار A باعث افزایش دماهای هر دو فاز سیال و جامد می‌شود. با توجه به معادلات (۵) و (۶)، با نزدیک شدن مقدار پارامتر A به صفر، دو معادله انرژی به طور کامل از یکدیگر مجزا شده و معادلات به نوعی نشان‌دهنده تعادل حرارتی بین دو فاز سیال و جامد می‌باشند.



شکل ۳ توزیع دمای فاز سیال و جامد در ماده متخلخل در ضرایب انتقال حرارت مختلف به ازای $k=0.1$ ، $\varepsilon_1=0.4$ و $\varepsilon_2=0.8$

لایه، شرط دما ثابت در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که ذکر شد، شرایط مرزی در فصل مشترک لایه‌ها (معادلات (۷-۲)) حذف می‌شوند. با حل معادلات انرژی برای این حالت، پاسخ صریحی برای توزیع دمای فازهای سیال و جامد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\theta_f = \frac{Ak}{\sigma_1} \left\{ \frac{\sinh q_1 y (1 - \cosh q_1)}{q_1^2 \sinh q_1} + \frac{\cosh q_1 y - 1}{q_1^2} - \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right\} \quad (12)$$

$$\theta_s = \frac{-Ak^2 \varepsilon_1}{\sigma_1 (1 - \varepsilon_1)} \left\{ \frac{\sinh q_1 y (1 - \cosh q_1)}{q_1^2 \sinh q_1} + \frac{\cosh q_1 y - 1}{q_1^2} - \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right\} + \frac{Aky}{2} (1 - y) \quad (13)$$

که در آن مقادیر σ_1 و q_1 از رابطه (۱۱) به دست می‌آیند. حل ارائه شده برای حالت تک‌لایه‌ای با حل تحلیلی در مرجع [۱۳] همخوانی دارد و نتایج یکسانی را به همراه دارد.

۴-۲- مورد خاص ۲: حالت دولایه‌ای

برای حالت کانال حاوی دولایه می‌توان از روابط (۹) و (۱۰) به ازای $n=2$ استفاده کرد. نتایج حاصل از حل تحلیلی معادلات انتقال حرارت هدایتی در شکل‌های ۲ تا ۶ و جدول‌های ۱ تا ۳ ارائه شده است.

شکل ۲ تاثیر نسبت ضرایب هدایت حرارتی دو فاز (k) روی توزیع دمای فازهای سیال و جامد را نشان می‌دهد. با افزایش نسبت ضرایب هدایت حرارتی جامد و سیال، اختلاف دمای بین دو فاز افزایش می‌یابد و در نتیجه اختلاف دمای بیشینه بین دو فاز نیز افزایش می‌یابد. این امر (افزایش k) موجب کاهش ناسلت (A) شده و بنابراین باعث افزایش اختلاف دما می‌شود. در مقطع $y=0.5$ نمودارها دچار شکستگی می‌باشد (اختلاف شیب سمت چپ و راست) که این امر به دلیل اعمال شرط مرزی در سطح مشترک دو لایه مجاور و اختلاف نسبت تخلخل در دو لایه است (معادله (۷-۲)). این رفتار دما در سطح مشترک لایه‌های متخلخل به صورت مفصل در قسمت‌های بعدی توضیح داده می‌شود.

در حالت حدی که ضریب هدایت حرارتی فاز جامد بسیار بزرگ انتخاب شود (یعنی در مقادیر بسیار کوچک k)، به دلیل

انحراف بیشتری از مقدار ۱ داشته باشد، شکستگی منحنی دمای فاز سیال در محل فصل مشترک دو لایه وضوح بیشتری خواهد داشت.

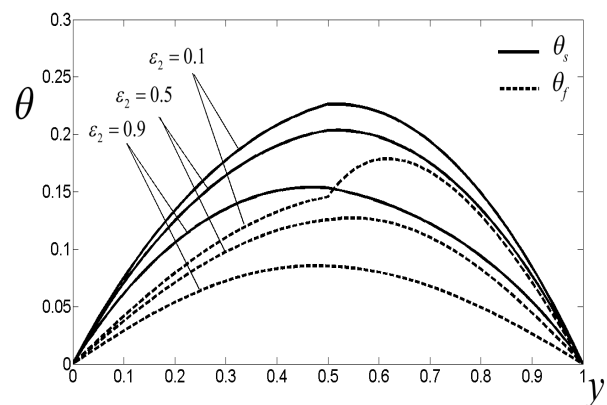
نمودار دمای فاز جامد نیز چنین رفتاری دارد. در حالت $\varepsilon_2 = 0.1$ ، شیب دما در فصل مشترک کاهش پیدا کرده است. طبق رابطه (۱۴-۲)، نسبت $(1-\varepsilon_1)/(1-\varepsilon_2)$ در محل دو لایه برابر ۲/۹ است.

در حالت کلی، هر چه نسبت $(1-\varepsilon_1)/(1-\varepsilon_2)$ از مقدار ۱ انحراف بیشتری داشته باشد، شکستگی نمودار دمای فاز جامد نیز بیشتر خواهد بود. از طرف دیگر، به ازای نسبت تخلخل‌های مختلف در کانال، بیشینه دمای فاز سیال و جامد از $y=0.5$ (مرکز کانال) به مکان دیگری منتقل می‌شود (حالت $\varepsilon_1 = 0.1$ شکل ۴ را مشاهده کنید). این موضوع از نتایج برجسته پژوهش حاضر در زمینه طراحی عایق‌های حرارتی است. در تحلیل‌های حرارتی سیستم‌های متخلخل، یکی از پرکاربردترین پارامترهای حرارتی اختلاف دمای بیشینه بین فازهای جامد و سیال ($\Delta\theta_{Max}$) می‌باشد. اختلاف دمای بین دو فاز سیال و جامد نشان‌دهنده برقراری شرط عدم تعادل حرارتی بین سیال و جامد است. در حالت فرض عدم تعادل حرارتی بین فازها، دو معادله انرژی برای تحلیل انتقال حرارت هدایتی باید مورد نظر قرار گیرد که این دو معادله به یکدیگر وابسته‌اند.

شکل ۵ اختلاف دمای بیشینه بین دو فاز را به عنوان تابعی از نسبت تخلخل هر دو لایه ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) در $k=1$ و $A=10$ نشان می‌دهد. برای هر کدام از حالت‌های نمودار شکل ۵، ابتدا ضرایب معادلات (۹) و (۱۰) به دست آمده و سپس اختلاف دمای بیشینه با استفاده از این معادلات محاسبه شده است. با توجه به اختلاف دمای بیشینه برای هر حالت در شکل ۵، می‌توان مشخص نمود که تا چه حد فرض تعادل حرارتی در مسئله حاضر قابل قبول می‌باشد.

شکل ۶ اختلاف دمای بیشینه را به عنوان تابعی از نسبت ضرایب هدایت حرارتی جامد و سیال (k) و ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی (A) نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، اختلاف دمای بیشینه نسبت مستقیم با ضریب k دارد. این نتیجه به صورت کیفی نیز از نمودار شکل ۲ قابل استخراج است. از طرف دیگر، تقریباً به ازای $A > 10$ و در مقادیر کوچک k ، تغییرات نمودارها قابل ملاحظه نیست.

تاثیر تغییرات نسبت تخلخل یکی از لایه‌ها بر توزیع دما در شکل ۴ مشاهده می‌شود. در این شکل نسبت تخلخل لایه اول ثابت و برابر ۰/۸ در نظر گرفته شده است. شکستگی نمودار شکل ۴ در $y=0.5$ ناشی از اعمال شرط مرزی در سطح مشترک دو لایه و اختلاف نسبت تخلخل دو لایه می‌باشد.



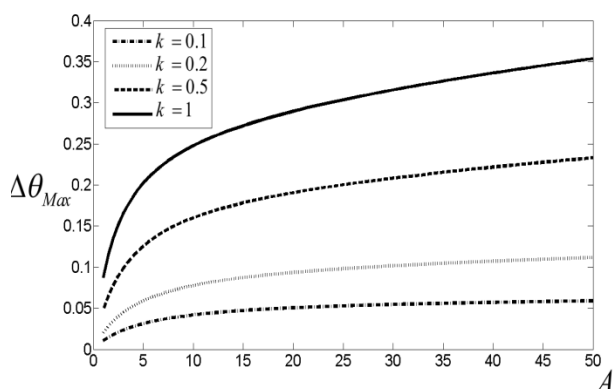
شکل ۴ توزیع دمای فاز سیال و جامد در ماده متخلخل در ε_2 های مختلف به ازای $A=10$ و $\varepsilon_1 = 0.8$ ، $k = 0.2$

بیشترین شکستگی در نمودار دما به ازای $\varepsilon_2 = 0.1$ به وجود آمده است. دلیل چنین شکستگی در نمودار مربوط به شرط مرزی انتقال حرارت هدایتی در مرکز کانال می‌باشد. همان‌طور که از معادله (۷-۲) مشخص است، داریم:

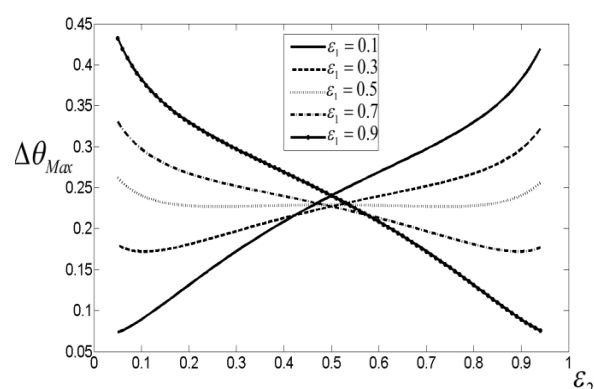
$$\varepsilon_1 \theta'_{f_1} \left(\frac{1}{2} \right) = \varepsilon_2 \theta'_{f_2} \left(\frac{1}{2} \right) \Rightarrow \frac{\theta'_{f_2} (1/2)}{\theta'_{f_1} (1/2)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (1-14)$$

$$(1-\varepsilon_1) \theta'_{s_1} \left(\frac{1}{2} \right) = (1-\varepsilon_2) \theta'_{s_2} \left(\frac{1}{2} \right) \Rightarrow \frac{\theta'_{s_2} (1/2)}{\theta'_{s_1} (1/2)} = \frac{(1-\varepsilon_1)}{(1-\varepsilon_2)} \quad (2-14)$$

معادله (۱۴) نشان‌دهنده مقادیر نسبت شیب دما در مرکز کانال برای هر دو فاز سیال و جامد است. در حالت $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ نسبت شیب برای هر دو فاز برابر با ۱ بوده و نمودارهای دما هیچ شکستگی در محل فصل مشترک لایه‌ها نخواهند داشت (شیب سمت چپ و راست با یکدیگر برابر می‌باشد). نمودار دمای فاز سیال را در شکل ۴ در نظر بگیرید. در حالت نسبت تخلخل $\varepsilon_2 = 0.1$ ، بیشترین شکستگی در فصل مشترک اتفاق افتاده است و در این حالت نسبت $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ برابر با ۸ می‌شود (مقدار $\varepsilon_1 = 0.8$ است). در حالت کلی، هر چه نسبت $\varepsilon_1/\varepsilon_2$



شکل ۶ اختلاف دمای بیشینه بین فاز جامد و سیال به عنوان تابعی از k, A به ازای $\varepsilon_1 = 0.4$ و $\varepsilon_2 = 0.8$



شکل ۵ اختلاف دمای بیشینه بین فاز جامد و سیال به عنوان تابعی از $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ به ازای $k=1$ و $A=10$

۳ مقادیر اختلاف دمای بیشینه بین دو فاز برای نسبت‌های تخلخل مختلف در حالت $k=0.2$ و $A=1000$ گزارش شده است.

در جداول ۱ و ۲ ضرایب و ثابت‌های حل تحلیلی معادلات ۹ و ۱۰ به‌ازای مقادیر مختلف A و k ارائه شده است. در جدول

جدول ۱ ضرایب و ثابت‌های حل تحلیلی توزیع دمای فاز سیال و جامد در حالت دولایه‌ای در روابط (۹) و (۱۰) به ازای $k=0.2$ ، $\varepsilon_1=0.3$ ، $\varepsilon_2=0.7$ و مقادیر مختلف A

F_2	F_1	E_2	E_1	D_2	D_1	B_2	B_1	q_2	q_1	σ_2	σ_1	
۰/۰۰۰	۰	۰/۰۱۰	۰/۰۱۰	۰/۰۶۵	۰/۰۵۱	-۰/۰۱۵	-۰/۰۱۵	۰/۴۵۸	۰/۶۰۲	۱/۴۶۷	۱/۰۸۶	$A=0.1$
۰/۰۰۲	۰	۰/۰۹۸	۰/۰۹۹	۰/۰۶۶	۰/۰۵۱	-۰/۰۴۱	-۰/۰۳۹	۱/۴۴۷	۱/۹۰۲	۱/۴۶۷	۱/۰۸۶	$A=1$
۰/۰۷۹	۰	۰/۹۲۱	۰/۹۶۶	۰/۰۹۳	۰/۰۵۱	-۰/۰۹۱	-۰/۰۵۳	۴/۵۷۷	۶/۰۱۶	۱/۴۶۷	۱/۰۸۶	$A=10$
۰/۱۸۴	۰	۱/۸۱۶	۱/۹۲۱	۰/۱۱۱	۰/۰۵۱	-۰/۱۱۰	-۰/۰۵۲	۶/۴۷۳	۸/۵۰۸	۱/۴۶۷	۱/۰۸۶	$A=20$

جدول ۲ ضرایب و ثابت‌های حل تحلیلی توزیع دمای فاز سیال و جامد در حالت دولایه‌ای در روابط (۹) و (۱۰) به ازای $A=0.2$ ، $\varepsilon_1=0.3$ ، $\varepsilon_2=0.7$ و مقادیر مختلف k

F_2	F_1	E_2	E_1	D_2	D_1	B_2	B_1	q_2	q_1	σ_2	σ_1	
۰/۰۰۰	۰	۰/۰۰۵	۰/۰۰۵	۰/۰۰۷	۰/۰۰۳	-۰/۰۰۴	-۰/۰۰۲	۱/۲۰۹	۱/۸۳۰	۱/۰۲۳	۱/۰۰۴	$k=0.1$
۰/۰۰۱	۰	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۴۷	۰/۰۲۸	-۰/۰۲۷	-۰/۰۲۱	۱/۳۲۷	۱/۸۶۴	۱/۲۳۳	۱/۰۴۲	$k=0.1$
۰/۰۱۳	۰	۰/۲۳۷	۰/۲۴۴	۰/۰۷۴	۰/۱۰۲	-۰/۰۵۲	-۰/۰۸۰	۱/۷۶۰	۲/۰۱۲	۲/۱۶۷	۱/۲۱۴	$k=0.5$
۰/۰۴۹	۰	۰/۴۵۱	۰/۴۷۹	۰/۰۵۸	۰/۱۴۷	-۰/۰۴۵	-۰/۱۲۰	۲/۱۸۲	۲/۱۸۲	۳/۳۳۳	۱/۴۲۹	$k=1$

جدول ۳ مقادیر حدی اختلاف دمای بیشینه به ازای $k=0.2$ ، ضریب انتقال حرارت بزرگ ($A=1000$)

$\varepsilon_2, \varepsilon_1$	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
۰/۱	۰/۰۱۹۵	۰/۰۳۳۴	۰/۰۵۴۷	۰/۰۸۴۲	۰/۱۲۵۱	۰/۱۸۴۱	۰/۲۷۵۵	۰/۴۳۳۴	۰/۷۶۹۶
۰/۲	۰/۰۳۸۱	۰/۰۵۰۷	۰/۰۷۰۹	۰/۱۰۱۲	۰/۱۴۷۰	۰/۲۲۰۲	۰/۳۴۹۲	۰/۶۲۴۴	۰/۱۱۹۶
۰/۳	۰/۰۵۵۲	۰/۰۶۷۲	۰/۱۰۸۱	۰/۱۲۲۶	۰/۱۴۵۷	۰/۲۲۸۷	۰/۳۴۹۲	۰/۶۲۴۴	۰/۱۱۹۶
۰/۴	۰/۰۷۰۶	۰/۱۰۸۲	۰/۱۲۲۶	۰/۱۴۵۷	۰/۲۲۸۷	۰/۳۴۹۲	۰/۶۲۴۴	۰/۱۱۹۶	۰/۱۱۹۶
۰/۵	۰/۰۸۳۳	۰/۱۰۹۴۷	۰/۱۲۳۹	۰/۱۳۹۰	۰/۱۶۰۰	۰/۲۳۶۴	۰/۳۵۲۷	۰/۶۲۴۴	۰/۱۱۹۶
۰/۶	۰/۰۹۲۳	۰/۱۰۴۴	۰/۱۲۳۹	۰/۱۳۹۰	۰/۱۶۰۰	۰/۲۳۶۴	۰/۳۵۲۷	۰/۶۲۴۴	۰/۱۱۹۶
۰/۷	۰/۰۹۵۵	۰/۱۱۰۵	۰/۱۲۳۹	۰/۱۳۹۰	۰/۱۶۰۰	۰/۲۳۶۴	۰/۳۵۲۷	۰/۶۲۴۴	۰/۱۱۹۶
۰/۸	۰/۰۸۸۹	۰/۱۱۱۰	۰/۱۲۳۹	۰/۱۳۹۰	۰/۱۶۰۰	۰/۲۳۶۴	۰/۳۵۲۷	۰/۶۲۴۴	۰/۱۱۹۶
۰/۹	۰/۰۶۴۲	۰/۱۱۱۰	۰/۱۲۳۹	۰/۱۳۹۰	۰/۱۶۰۰	۰/۲۳۶۴	۰/۳۵۲۷	۰/۶۲۴۴	۰/۱۱۹۶

- [3] Nield D. A., Kuznetsov A. V., Xiong M., "Effect of Local Thermal Non-Equilibrium on Thermally Developing Forced Convection in a Porous Medium," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 45, 2002, pp. 4949-4955.
- [4] Marafie A., Vafai K., "Analysis of Non-Darcian Effects on Temperature Difference in Porous Media", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 44, 2001, pp. 4401-4411.
- [5] Alazmi B., Vafai K., "Constant Wall Heat Flux Boundary Conditions in Porous Media under Local Thermal Non-Equilibrium Conditions," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 45, 2002, pp. 3071-3087.
- [6] Jiang P. X., Ren, Z. P., "Numerical Investigation of Forced Convection Heat Transfer in Porous Media using a Thermal Non-Equilibrium Model," *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 22, 2001, pp. 102-110.
- [7] Minkowycza W. J., Haji-Sheikh A., Vafai K., "On Departure from Local Thermal Equilibrium in Porous Media Due to a Rapidly Changing Heat Source: The Sparrow Number", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 42, 1999, pp. 3373-3385.
- [8] David E., Lauriat G., Cheng P., "A Numerical Solution of Variable Porosity Effects on Natural Convection in a Packed-Sphere Cavity," *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 113, 1991, pp. 391-399.
- [9] Poulikakos D., Renken K., "Forced Convection in a Channel Filled With Porous Medium Including the Effects of Flow Inertia, Variable Porosity and Brinkman Friction", *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 109, 1987, pp. 880-888.
- [10] Renken K. J., Poulikakos D., "Experiment and Analysis of Forced Convective Heat Transport in a Packed Bed of Spheres", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 31, 1988, pp. 1399-1408.
- [11] Amiri A., Vafai K., "Transient Analysis of Incompressible Flow through a Packed Bed," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 41, 1998, pp. 4259-4279.
- [12] Kaviany M., *Principle of Heat Transfer in Porous Media*, 2nd ed., Springer, Berlin, 1995.
- [13] Nazari M., Kowsary F., "Analytical Solution of Non-Equilibrium Heat Conduction in Porous Medium Incorporating a Variable Porosity Model with Heat Generation", *J. Heat Transfer, Transactions of the ASME*, Vol. 131, 2009, 014503 (1-4).
- [14] Nouri-Borujerdi A., Noghrehabadi A., Rees S., "The Effect of Local Thermal Nonequilibrium on Conduction in Porous Channels with a Uniform Heat Source", *Transp Porous Med*, Vol. 69, 2007, pp. 281-288.
- [15] Nield D. A., Bejan A., *Convection in Porous Media*, 2nd ed., Springer, Berlin, 1998.

در حالت حدی، ضریب انتقال حرارت محلی (A) برابر ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده است. دلیل اینکه مقادیر جدول ۳ به صورت یک ماتریس بالامثلثی گزارش شده این است که در این مسئله نسبت تخلخل ε_1 و ε_2 خاصیت تعویض پذیری دارند. به طور مثال، اختلاف دمای بیشینه در حالت $\varepsilon_1 = 0/1$ و $\varepsilon_2 = 0/2$ با اختلاف دمای بیشینه در حالت $\varepsilon_1 = 0/2$ و $\varepsilon_2 = 0/1$ هیچ تفاوتی ندارد.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، انتقال حرارت هدایت بین دو صفحه موازی، حاوی چند لایه متخلخل متفاوت، با در نظر گرفتن تولید حرارت داخلی تحت شرایط عدم تعادل حرارتی، مورد مطالعه قرار گرفت. سپس حل تحلیلی کلی برای حالت چندلایه‌ای به دست آمد و نتایج این حل به صورت روابط ریاضی و نمودارهایی برای حالت‌های تک‌لایه‌ای و دولایه‌ای ارائه شد. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش نسبت ضرایب هدایت حرارتی جامد و سیال، اختلاف دمای بین دو فاز افزایش می‌یابد. افزایش ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی باعث بالا رفتن دمای هر دو فاز سیال و جامد می‌شود.

برای حالتی که نسبت تخلخل دو لایه متفاوت است، در محل فصل مشترک، توزیع دمای هر دو فاز دارای شکستگی می‌باشد. تغییرات نسبت تخلخل در لایه‌ها می‌تواند باعث انتقال مکان دمای بیشینه هر دو فاز از مرکز کانال شود. اختلاف دمای بیشینه نسبت مستقیم با ضریب k دارد و به ازای $A > 10$ و در مقادیر کوچک k ، تغییرات اختلاف دمای بیشینه دو فاز قابل ملاحظه نیست.

۶- مراجع

- [1] Nakayama A., Kuwahara F., Sugiyama M., Xu G., "A Two Energy Equation Model for Conduction and Convection in Porous Media", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 44, 2001, pp. 4375-4379.
- [2] Amiri A., Vafai K., "Analysis of Dispersion Effects and Non-Thermal Equilibrium, Non-Darcian, Variable Porosity Incompressible Flow through Porous Media," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 37, 1994, pp. 939-954.