



تحلیل ورق ساندویچی با رویه‌های چند لایه مرکب و هسته هوشمند مگنتورئولوژیکال تحت ضربه سرعت پایین

غلامحسن پایگانه^{1*}، کرامت ملک‌زاده فرد²، فهیمه راشد سقاواز³، مجتبی عسگری⁴

1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

2- دانشیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

3- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

4- دانشجوی دکترا، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

* تهران، صندوق پستی 16785-163، g.payganeh@srutu.edu

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 23 مرداد 1395

پذیرش: 13 مهر 1395

ارائه در سایت: 13 آذر 1395

کلید واژگان:

چندلایه مرکب

مگنتورئولوژیکال

مدل جرم و فنر

نیروی تماسی

ضربه

یکی از روش‌های کاهش ارتعاشات در سازه‌ها، اضافه نمودن یک لایه نازک از مواد ویسکوالاستیک به سازه است. با استفاده مناسب از مواد ویسکوالاستیک در سازه، می‌توان ضریب استهلاک مودال را افزایش داد و از ارتعاشات نامطلوب که یکی از دلایل خستگی و خرابی سازه‌ها می‌باشد، کاست. در این مقاله پاسخ ورق ساندویچی با هسته مایع هوشمند مگنتورئولوژیکال تحت ضربه‌ی سرعت پایین مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حرکت ورق مستطیلی ساندویچی به کمک اصل هامیلتون استخراج شده و مساله ارتعاشات آزاد ورق با استفاده از روش تحلیلی نویر حل شده و از روابط تئوری کلاسیک ورق برای تحلیل رفتار مکانیکی رویه‌های مرکب استفاده شده است. برای مدل‌سازی هسته تنها انرژی کرنشی مربوط به برش لحاظ شده است و رفتار ویسکوالاستیک مایع مگنتورئولوژیکال با مدل برشی مختلط وابسته به شدت میدان مغناطیسی نشان داده شده است. همچنین، نیروی برخورد به کمک مدل جرم و فنر دو درجه آزادی به صورت تحلیلی به دست آمده است. برای سه نوع لایه‌چینی مختلف، تاریخچه نیروی ضربه و تغییرات بیشینه مقدار نیروی ضربه و زمان متناسب با آن، با تغییر شدت میدان مغناطیسی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج، تغییرات قابل توجهی در بیشینه مقدار نیروی ضربه و زمان متناسب با آن با تغییر شدت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.

Analysis of laminated composite sandwich plates with magnetorheological fluid core under low velocity impact

Gholamhasan Payganeh^{1*}, Keramat Malekzade Fard², Fahimeh Rashed Saghavaz³, Mojtaba Asgari⁴

1- Department of Aerospace Engineering, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran

2- Department of Aerospace Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

3- Department of Mechanical Engineering, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran

4- Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

* P.O.B. 16785-163, Tehran, Iran, g.payganeh@srutu.edu

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 13 August 2016

Accepted 04 October 2016

Available Online 03 December 2016

Keywords:

Composite

Magneto Rheological

Mass-Spring Model

Contact Force

Impact

ABSTRACT

One of the common ways to reduce vibration in the structures is to add a thin viscoelastic material layer to the structure. By appropriate use of viscoelastic materials one may increase modal loss factor of the structure and reduce unfavorable structural vibration which is a main cause of fatigue and failure in the structures. In this paper, low velocity impact response of sandwich plate with magnetorheological fluid core is investigated. Hamilton principal is used to obtain the governing equation of motion for sandwich plate. Free vibration problem of the sandwich plate is solved using the Navier solution method. Classical lamination theory is used to analyze the mechanical behavior of the composite laminate in the facesheet. Only shear strain energy of the core is considered and viscoelastic behavior of the MR material was described by complex shear modulus approach as a function of magnetic field intensity. Furthermore, analytical solution for impact force is obtained by a two degree of freedom spring mass model. For three different stacking sequence of face layers, contact for history and variation of maximum impact force and its corresponding time by magnetic field intensity is investigated. The results show considerable effect of variation in magnetic field intensity on maximum impact force and its corresponding time.

1- مقدمه

میدان الکتریکی و یا میدان مغناطیسی اعمالی خارجی و کنترل پذیری آسان به وسیله رایانه برخوردارند [1]. از کاربرد مایعات MR مورد استفاده در ورق‌های ساندویچی می‌توان به ساخت جک و یا ساخت جلیقه ضدگلوله

سازه‌های تطبیقی که در آن‌ها از مواد MR و ER استفاده شده است از خواص کنترلی خوبی، نظیر قابلیت تغییر سریع و برگشت پذیر میرایی و سفتی، بر اثر

Please cite this article using:

Gh. Payganeh, K. Malekzade Fard, F. Rashed Saghavaz, M. Asgari, Analysis of laminated composite sandwich plates with magnetorheological fluid core under low velocity impact, Modares Mechanical Engineering, Vol. 16, No. 12, pp. 114-124, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مرجع [13] را برای یافتن محل بهینه‌ی قرارگیری لایه‌های مگنتورئولوژیکال جزئی برای ماکزیمم کردن ضریب استهلاک مودال تیر ساندویچی مورد مطالعه قرار دادند و محل بهینه‌ی قرارگیری لایه‌های مگنتورئولوژیکال جزئی را برای ماکزیمم کردن 5 ضریب استهلاک مودال اول تیر به طور جداگانه و همزمان مورد بررسی قرار دادند. پریو و همکاران [15] قابلیت کنترل مشخصه‌های ارتعاشی یک تیر ساندویچی با هسته‌ی مگنتورئولوژیکال را در حالت‌های افقی و عمودی و در حالت تحریک جزئی و کامل مورد بررسی قرار دادند. برای مقایسه اثر مواد مختلف آن‌ها از دو ماده متفاوت آلومینیوم و پلی اتیلن ترفنات برای رویه‌ها استفاده کردند. لی و زانگ [16] به تحلیل ارتعاشات آزاد ورق مگنتوالکتروالاستیک براساس تئوری میندلین³ روی بستر الاستیک پاسترانک پرداختند. زانگ و هانگ [17] با استفاده از نرم‌افزار انسیس به تحلیل دینامیکی ورق ساندویچی مستطیلی با هسته MR پرداختند. آن‌ها در مطالعات خود چندین روش برای شبیه‌سازی ورق ساندویچی مستطیلی ارائه کردند و با مقایسه نتایج تئوری و نتایج شبیه‌سازی، بهترین روش شبیه‌سازی ورق ساندویچی مستطیلی را ارائه کردند. اندرسن [18] از مدل جرم و فنر برای محاسبه نیروی برخورد استفاده کرده است. او از روش حل عددی و نتایج تست‌های تجربی در مدل خود بهره برده است.

رحیمی نسب و همکار [19] با استفاده از روش اجزای محدود، ارتعاشات گذرای صفحات کامپوزیتی ساندویچی با لایه سیال الکتروئولوژیکال را مورد بررسی قرار دادند. بشارتی و همکاران [20]، بررسی میراگرهای لایه مقید فعال و غیرفعال در کاهش ارتعاشات سازه ورق را بررسی کردند و معادلات حاکم بر ورق با لایه پی‌زوسرامیک را استخراج کردند. حجت و همکاران [21] به بررسی رفتار گذرای سیال مگنتورئولوژیکال در کوپلینگ مغناطیسی پرداختند. آن‌ها جریان الکتریکی ورودی را به‌صورت تابع نمایی و نرخ برشی را به‌صورت متغیر در نظر گرفتند. رضایی‌پژند و همکار [22] ارتعاشات گذرای غیرخطی و نوسانات چرخه حد صفحات ساندویچی کامپوزیتی با لایه سیال الکتروئولوژیکال را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها برای تحریک نخستین، از یک بار گسترده یکنواخت و جریان هوای مافوق صوت استفاده کردند و برای مدل‌سازی رفتار سیال الکتروئولوژیکال از مدل پلاستیک بینگهام بهره بردند. سلیمانی و همکاران [23]، ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی ساندویچی با لایه میانی سیال الکتروئولوژیکال را مورد بررسی قرار دادند. تبکی و همکاران [24] به شبیه‌سازی و ارزیابی تجربی دسته موتور هیدرولیکی مگنتورئولوژیکال پرداختند. فتاحی و همکار [25] به مطالعه‌ی ارتعاشات صفحه کامپوزیتی پر شده با مواد اثرپذیر مغناطیسی پرداختند. آن‌ها با استفاده از مثال‌های عددی، دقت و کارایی اثر افزودن مواد MR بر ارتعاشات یک صفحه کامپوزیت را نشان دادند. اله وردی‌زاده و همکاران [26] به بررسی رفتار ارتعاشاتی تیر ساندویچی با به‌کارگیری مواد با خواص تابعی (FGM) در رویه‌ها و هسته هوشمند ER پرداختند. مواد هدفمند تاثیر بسیاری در بهبود ویژگی‌های ترمومکانیکی مواد دارد. سرپرست و همکاران [27] با استفاده از آنالیز پاسخ به شناسایی پارامترهای مودال سازه تحت بار محیطی پرداختند. آن‌ها پارامترهای مودال یک تیر را با استفاده از روش تجزیه فرکانسی بدست آوردند و با نتایج اجزای محدود و تست‌های آزمایشگاهی مقایسه نمودند.

از نتایج مطالعات به وضوح مشاهده می‌شود، با وجود پژوهش‌های قابل توجهی که در زمینه ارتعاشات آزاد ورق‌های ساندویچی با هسته مگنتورئولوژیکال انجام شده است، در زمینه حل مسئله ضربه با سرعت پایین

(زربه‌پوش) اشاره کرد. زربه‌پوش تا زمانی که، هیچ جریانی در مدار تعبیه شده در پیرامون سیال برقرار نشده است، کاملاً نرم و منعطف می‌باشد، ولی به محض برقراری میدان، سفت و خشک شده و در برابر ضربات از فرد نظامی محافظت می‌کند. علاوه بر این از دمپرهای مگنتورئولوژیکال [2]، برای تحلیل نیروی‌های وارد شده بر سازه‌ها استفاده می‌شود. پژوهش‌های بسیاری ویژگی‌های ارتعاشی و دمپینگ مواد الکتروئولوژیکال (ER) و مگنتورئولوژیکال (MR) را، مورد بررسی قرار داده‌اند. از جمله این پژوهش می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. هارلند و همکاران [3] و میس و همکاران [4] از مدل مید و مارکو س¹ برای مدل‌سازی یک تیر ساندویچی با هسته مایعات الکتروئولوژیکال و مگنتورئولوژیکال استفاده کردند. آن‌ها روشی را برای کنترل انتقال صوت پیشنهاد دادند. یالسینتاس و دای [5] توانایی کنترل ارتعاشاتی سازه‌های ساندویچی مبتنی بر مایعات الکتروئولوژیکال و مگنتورئولوژیکال را مورد بررسی قرار دادند و نرخ کاهش ارتعاش، پاسخ زمانی و نرخ مصرف انرژی آن‌ها را با هم مقایسه کردند. آن‌ها از روش انرژی برای پیش‌بینی و مقایسه پاسخ ارتعاشی سازه‌های تطبیقی الکتروئولوژیکال استفاده کردند. سان و همکاران [6] از تکنیک رنومتری نوسانی² برای بدست آوردن رابطه بین میدان مغناطیسی و مدول برشی مختلط مواد مگنتورئولوژیکال در ناحیه‌ی قبل از تسلیم استفاده کردند. آن‌ها به طور تجربی و به‌صورت تئوری ویژگی‌های دینامیکی تیر تطبیقی مگنتورئولوژیکال را برای شدت میدان‌های مغناطیسی مختلف مورد مطالعه قرار دادند. سازه‌های تطبیقی عموماً توسط تئوری‌های مربوط به تیرها و ورق‌های ساندویچی مدل شده‌اند. راس و همکاران [7] یک کار پایه‌ای و ابتدایی را بر روی تیر ساندویچی انجام دادند. این تئوری شامل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه چهار برای یک تیر ساده‌ی اوایلر برنولی است و از این مدل برای تحلیل مدول یانگ مختلط در یک تیر ساندویچی لایه‌ای بهره برده است. هونگ‌کوان لو و منگ [8] ویژگی‌های ارتعاشی ورق ساندویچی با هسته الکتروئولوژیکال و رویه‌هایی از جنس فیبر شیشه را به‌صورت تجربی و تحلیلی مورد بررسی قرار دادند و اثر تغییر شدت میدان الکتریکی بر فرکانس‌های طبیعی و ضریب استهلاک مودال را بررسی کردند.

یه [9] مایع الکتروئولوژیکال را در هسته ورق ساندویچی دایروی به‌کار برد، او از روش اجزای محدود ریلی ریتز جهت حل مساله استفاده کرد. وی همچنین کنترل ارتعاشات ورق ساندویچی با هسته‌ی الکتروئولوژیکال را مورد بررسی قرار داد [10]. راجاموهان و همکاران [11] یک تیر ساندویچی با هسته مگنتورئولوژیکال را با در نظر گرفتن اثرات برشی لایه مقید کننده مگنتورئولوژیکال در هسته و به کار بردن مدول برشی معادل، مدل‌سازی کردند. آن‌ها برای حل مساله از روش اجزای محدود استفاده کردند و اثرات شدت میدان مغناطیسی بر ویژگی‌های ارتعاشی را، برای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها همچنین با استفاده از مدل چوی و همکاران [12] مدول مختلط مایع مگنتورئولوژیکال به‌کار رفته را تخمین زدند و روابطی از نوع چند جمله‌ای درجه دوم وابسته به شدت میدان مغناطیسی را ارائه دادند. راجاموهان و همکاران [13] ویژگی‌های ارتعاشی یک تیر ساندویچی پرشده‌ی جزئی از ماده مگنتورئولوژیکال را از روش اجزای محدود و به صورت تجربی بررسی کردند. آن‌ها در تحقیقاتشان به مطالعه اثر تغییر محل مایع مگنتورئولوژیکال و پارامترهای مختلف مثل ضخامت رویه‌ها و هسته بر پاسخ ارتعاشی پرداختند. راجاموهان و همکاران [14]، همچنین مدل ارائه شده در

¹ Mead and Marcus² Oscillatory rheometry techniques³ Mead and Marcus

در سازه‌های ساندویچی و با رویه‌های مرکب پژوهشی انجام نگرفته است. هدف اصلی این مقاله پر کردن این خلا می‌باشد.

2- مدل سازی ریاضی مساله

1-1 روابط ساختاری مایع MR

مایع تغییر شکل دهنده مغناطیسی یا مگنتورئولوژیکال (MR) نوعی از مایعات هوشمند است. در حقیقت تعلیقی از ذرات مغناطیسی میکرومتری در یک مایع که معمولاً نوعی روغن است می‌باشد. به هنگام اعمال میدان مغناطیسی، ویسکوزیته مایع تا حدی بالا می‌رود که به شکل یک جامد ویسکوالاستیک درمی‌آید. نکته قابل توجه این است که تنش تسلیم مایع وقتی در حالت فعال خود قرار دارد به‌طور بسیار دقیقی با اعمال تغییر در شدت میدان مغناطیسی قابل کنترل است. در نتیجه می‌توان قابلیت سیال در انتقال نیرو را با آهنربای الکتریکی کنترل کرد. برای فهم و پیش‌بینی رفتار یک مایع MR باید بتوان سیال را به‌طور ریاضی مدل کرد. همان‌طور که در بالا اشاره شد مایعات هوشمند در غیاب اعمال میدان مغناطیسی ویسکوزیته پایینی دارند اما در نتیجه‌ی اعمال میدان مغناطیسی به حالت شبه جامد تبدیل می‌شوند. در مورد مایعات MR و ER (تعلیقی از ذرات بینهایت ریز غیرهادی - تا قطر 50 میکرومتر - در یک سیال احاطه کننده) فرض می‌شود که مایع در حالت فعال¹ خود یعنی در حالت اعمال میدان مغناطیسی، خواصی قابل مقایسه با یک جامد ویسکوالاستیک تا یک نقطه‌ی تسلیم پیدا می‌کند (تنش برشی که بالاتر از آن برش اتفاق می‌افتد).

تنش تسلیم به میدان مغناطیسی که به مایع اعمال می‌شود بستگی دارد، اما با افزایش میدان مغناطیسی به نقطه‌ای می‌رسیم که بعد از آن افزایش شدت میدان مغناطیسی تاثیر بیشتری ندارد و مایع در این نقطه از نظر مغناطیسی به حالت اشباع² می‌رسد. بنابراین رفتار مایع مگنتورئولوژیکال (MR) می‌تواند مانند مدل پلاستیک بینگهام³ فرض شود. هر چند که یک مایع مگنتورئولوژیکال دقیقاً از ویژگی‌های پلاستیک بینگهام پیروی نمی‌کند. برای مثال زیر تنش تسلیم (در حالت فعال) مایع مثل یک ماده ویسکوالاستیک با یک مدول مدول برشی مختلط که تابعی از شدت میدان مغناطیسی است رفتار می‌کند.

از آنجایی که ماده MR در ناحیه قبل از تسلیم خاصیت مواد ویسکوالاستیک خطی را دارد لذا مدول مدول برشی شکل مختلط داشته که وابسته به شدت میدان مغناطیسی است. در این مساله از رابطه‌ای که راجاموچان و همکاران [13] برای ارتباط بین مدول برشی مختلط مایع MR و شدت میدان مغناطیسی پیشنهاد داده‌اند استفاده شده است. مدول برشی مختلط برای مواد ویسکوالاستیک به‌صورت رابطه (1) و (2) می‌باشد.

$$\tau = G^* \gamma \quad (1)$$

$$G^* = G' + iG'' \\ = G'(1 + iG''/G') = G'(1 + i\eta) \quad (2)$$

در رابطه (2)، قسمت حقیقی G' ، مدول برشی ذخیره نامیده می‌شود و توانایی ماده برای ذخیره انرژی کرنش الاستیک را نشان می‌دهد. درحالی که قسمت موهومی G'' ، مدول برشی اتلاف نامیده می‌شود و با اتلاف انرژی در طول مدت تغییر شکل مرتبط است.

G''/G' همان ضریب اتلاف برشی سازه (η) است. مدول برش مختلط

برای ماده MR به‌صورت یک تابع چند جمله‌ای از میدان مغناطیسی B (برحسب گاوس) به‌صورت رابطه (3) تعریف می‌شوند [13].

$$G' = -3.3691B^2 + 4.9975 \times 10^3 B + 0.873 \\ \times 10^6 \text{ MPa} \\ G'' = 0.9B^2 + 0.8124 \times 10^3 B + 0.1855 \\ \times 10^6 \text{ MPa} \quad (3)$$

2-2 مدل ریاضی و روابط پایه‌ای

در "شکل 1"، ورق مستطیلی ساندویچی که از یک ورق پایه با ضخامت h_3 ، یک لایه مقیدکننده هسته MR با ضخامت h_1 ، و هسته MR به ضخامت h_2 تشکیل شده است مشاهده می‌شود. u ، v و w به ترتیب تغییر مکان‌های صفحه میانی در راستای x ، y و z هستند (شکل 2).

در مدل ارائه شده فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

- 1- ورق پایه و لایه‌ی مقید کننده الاستیک بوده و می‌توانند ایزوتروپیک یا از جنس مواد کامپوزیتی باشند.
 - 2- فرض می‌شود هیچ‌گونه لغزشی بین لایه‌های الاستیک و لایه MR وجود ندارد.
 - 3- جابجایی عرضی w برای تمام نقاط روی یک سطح مقطع فرضی از ورق ساندویچی یکسان فرض می‌شوند.
 - 4- فرض می‌شود در لایه MR تنش نرمال وجود ندارد، همچنین از کرنش‌های برشی عرضی در لایه‌های الاستیک هم صرف نظر می‌شود.
 - 5- ماده‌ی MR در شرایط قبل از تسلیم و به صورت ماده ویسکوالاستیک خطی مدل می‌شود.
 - 6- با فرض نازک بودن رویه‌ها از تئوری کلاسیک ورق برای مدل‌سازی رویه‌های کامپوزیتی استفاده می‌شود (از کرنش برشی در راستای ضخامت صرف نظر می‌شود).
 - 7- انرژی جنبشی ورق ساندویچی با صرف نظر کردن از اینرسی دورانی در لایه‌های الاستیک و مولفه‌های صفحه‌ای انرژی جنبشی در هسته به‌دست می‌آید و جابجایی درون صفحه‌ای لایه میانی هسته صفر است.
- از شرایط سینماتیکی فرض شده در بالا، روابط جابجایی در لایه‌های الاستیک به‌صورت روابط (4-6) می‌باشد.

$$U_i(x, y, z_i, t) = u_i(x, y, t) - z_i \partial w / \partial x \quad (4)$$

$$V_i(x, y, z_i, t) = v_i(x, y, t) - z_i \partial w / \partial y \quad (5)$$

$$w_i(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (6)$$

در این روابط z_i مختصات عرضی در سیستم مختصات محلی لایه‌های بالا و پایینی است. i می‌تواند مقادیر 1 و 3 را اختیار کند که در صفحات میانی این لایه‌ها قرار گرفته است.

$u_i(x, y, t)$ و $v_i(x, y, t)$ به‌ترتیب تغییر مکان‌های صفحه میانی در راستای x و y هستند. با فرض خطی بودن رابطه بین کرنش‌ها و جابجایی‌ها،

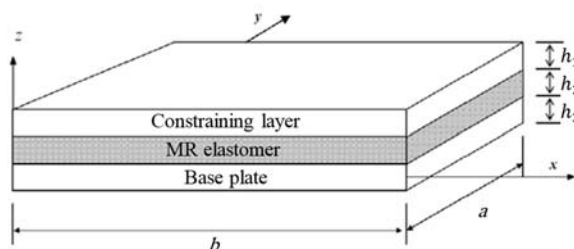


Fig. 1 Sandwich plate geometry with MR fluid core [17]

شکل 1 هندسه ورق ساندویچی با هسته‌ی MR [28]

¹ Active State

² Magnetically saturated

³ Bingham plastic

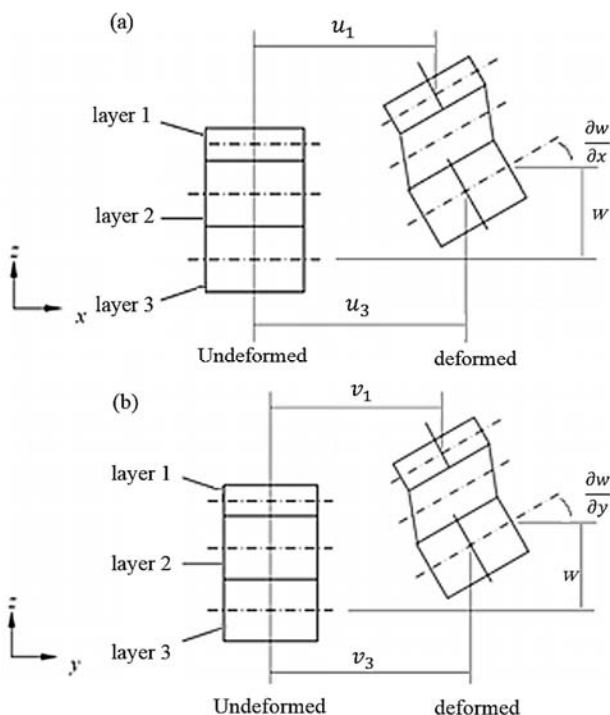


Fig. 2 Undeformed and deformed configurations of the sandwich rectangular plate (a) xz -plane (b) yz -plane [28]

شکل 2 مقطع ورق ساندویچی قبل و پس از تغییر شکل (a) صفحه xz (b) صفحه yz [28]

انرژی جنبشی ورق ساندویچی با توجه به فرض 7 به صورت رابطه (17) به دست می‌آید. Ω سطح هر لایه را در صفحه xy را نشان می‌دهد.

$$\delta T = \sum_{i=1,3} \delta \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_i h_i (\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2 + \dot{w}_i^2) d\Omega + \delta \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\rho_2 h_2 \dot{w}_i^2 + I_2 \{(\dot{\gamma}_{xz}^{(2)})^2 + (\dot{\gamma}_{yz}^{(2)})^2\}] d\Omega \quad (17)$$

در رابطه (17)، ρ_i ($i = 1, 2, 3$) نشان دهنده چگالی جرمی در لایه i ام و $I_2 = \rho_2 h_2^3 / 12$ ممان اینرسی جرمی لایه MR است.

کار نیروی خارجی ناشی از برخورد پرتابه به ورق را می‌توان با رابطه (18) نشان داد.

$$\delta W = \int_{\Omega} F_c^* \delta W d\Omega \quad (18)$$

با جایگزین کردن روابط (7-12)، در روابط (16) و (17) و استفاده از قاعده گرین [29] و اصل اساسی حساب تغییرات [29]، فرم کلی معادله حرکت برای ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته به دست خواهد آمد.

$$\delta u_i: \partial N_{xx}^{(i)} / \partial x + \partial N_{xy}^{(i)} / \partial y - (\delta_i / h_2) Q_x^{(2)} = \rho_i h_i \ddot{u}_i + (\delta_i I_2 / h_2^2) (\ddot{u}_1 - \ddot{u}_3) + (\delta_i I_2 d / h_2^2) \partial \ddot{w} / \partial x \quad (19)$$

$$\delta v_i: \partial N_{yy}^{(i)} / \partial y + \partial N_{xy}^{(i)} / \partial x - (\delta_i / h_2) Q_y^{(2)} = \rho_i h_i \ddot{v}_i + (\delta_i I_2 / h_2^2) (\ddot{v}_1 - \ddot{v}_3) + (\delta_i I_2 d / h_2^2) \partial \ddot{w} / \partial y \quad (20)$$

مولفه‌های کرنش در لایه‌های الاستیک کامپوزیتی را می‌توان به صورت روابط (9-7) بیان کرد.

$$\varepsilon_{xx}^{(i)} = \varepsilon_{xx}^{0(i)} + z_i \kappa_{xx}^{0(i)} \quad (7)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(i)} = \varepsilon_{yy}^{0(i)} + z_i \kappa_{yy}^{0(i)} \quad (8)$$

$$\gamma_{xy}^{(i)} = \gamma_{xy}^{0(i)} + z_i \kappa_{xy}^{0(i)} \quad (9)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{0(i)} &= \partial u_i / \partial x & \kappa_{xx}^{0(i)} &= -\partial^2 w / \partial x^2 \\ \varepsilon_{yy}^{0(i)} &= \partial v_i / \partial y & \kappa_{yy}^{0(i)} &= -\partial^2 w / \partial y^2 \\ \gamma_{xy}^{0(i)} &= \partial u_i / \partial y + \partial v_i / \partial x & \kappa_{xy}^{0(i)} &= -2 \partial^2 w / \partial x \partial y \end{aligned} \quad (10)$$

در روابط (7-10) i می‌تواند مقادیر 1 و 3 را اختیار کند.

با توجه به "شکل 2"، مولفه‌های کرنش عرضی در لایه MR برابر است با:

$$\gamma_{xz}^{(2)} = d / h_2 \times \partial w / \partial x + (u_1 - u_3) / h_2 \quad (11)$$

$$\gamma_{yz}^{(2)} = d / h_2 \times \partial w / \partial y + (v_1 - v_3) / h_2 \quad (12)$$

در رابطه (11) و (12)، d برابر مجموع ضخامت هسته و نصف ضخامت رویه‌ها است. رابطه‌ی نهایی بین تنش‌ها و کرنش‌های عرضی در لایه MR به صورت رابطه (13) نوشته می‌شود که G_2 نشان دهنده‌ی مدول برشی ویسکوالاستیک مربوط به لایه مایع MR است.

$$\sigma_{xz}^{(2)} = G_2 \gamma_{xz}^{(2)} \quad \sigma_{yz}^{(2)} = G_2 \gamma_{yz}^{(2)} \quad (13)$$

با فرض تنش صفحه‌ای در لایه‌های بالا و پایین، مولفه‌های تنش k امین زیر لایه در هر یک از لایه‌ها با استفاده از رابطه‌ی هوک به دست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(i)} \\ \sigma_{yy}^{(i)} \\ \sigma_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(i)} & \bar{Q}_{12}^{(i)} & 0 \\ \bar{Q}_{12}^{(i)} & \bar{Q}_{22}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66}^{(i)} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(i)} \\ \varepsilon_{yy}^{(i)} \\ \varepsilon_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

در $\bar{Q}_{\alpha\beta}^{(i)}$ ($i = 1, 3$) نشان دهنده‌ی ثابت‌های الاستیک انتقال یافته کاهش یافته در هر زیرلایه در میان لایه‌های 1 و 3 است.

3-2- معادلات حرکت و محاسبه فرکانس‌های طبیعی ورق هوشمند

از روابط همیلتون [29] برای استخراج معادلات حاکم بر حرکت ورق مستطیلی ساندویچی استفاده شده است.

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) = 0 \quad (15)$$

L ، U ، T و W به ترتیب نشان دهنده‌ی لاگرانژین، انرژی کرنشی کل، انرژی جنبشی کل و کار انجام شده توسط نیروهای خارجی F_c^* (نیروی ضربه) وارد بر ورق ساندویچی است. برای ارتعاشات آزاد مقدار W برابر صفر است. تغییرات انرژی کرنشی کل ورق را با توجه به در نظر گرفتن حالت تنش صفحه‌ای در لایه‌های بالا و پایین و با در نظر نگرفتن تنش‌های نرمال در لایه MR می‌توان به صورت رابطه (16) بیان کرد.

$$\begin{aligned} \delta U &= \sum_{i=1,3} \int_{V_i} (\sigma_{xx}^{(i)} \varepsilon_{xx}^{(i)} + \sigma_{yy}^{(i)} \varepsilon_{yy}^{(i)} + \sigma_{xy}^{(i)} \gamma_{xy}^{(i)}) \\ dV_i &+ \int_{V_2} (\sigma_{xz}^{(2)} \gamma_{xz}^{(2)} + \sigma_{yz}^{(2)} \gamma_{yz}^{(2)}) dV_2 \end{aligned} \quad (16)$$

در رابطه (16)، V حجم مربوط به هر یک از لایه‌ها می‌باشد.

در نهایت با فرض ارتعاشات هارمونیک به یک مساله مقدار ویژه با مقادیر ویژه مختلط خواهیم رسید که از آن فرکانس‌های طبیعی و ضرایب استهلاك سیستم برای مدهای مختلف ارتعاشی استخراج خواهند شد. برای ورق با تکیه‌گاه ساده شرایط مرزی هندسی به صورت رابطه (27) می‌باشد.

$$\begin{cases} u_i(x, 0, t) = u_i(x, b, t) = v_i(0, y, t) \\ \quad = v_i(a, y, t) = 0 \\ w(x, 0, t) = w(x, b, t) = w(0, y, t) \\ \quad = w(a, y, t) = 0 \\ \partial w(x, 0, t)/\partial x = \partial w(x, b, t)/\partial x = \\ \quad \partial w(0, y, t)/\partial y = 0 \\ \partial w(a, y, t)/\partial y = 0 \quad (i = 1, 3) \end{cases} \quad (27)$$

شرایط مرزی طبیعی را نیز می‌توان به‌صورت رابطه (28) نوشت.

$$\begin{cases} N_{xx}^{(i)}(0, y, t) = N_{xx}^{(i)}(a, y, t) = N_{yy}^{(i)}(x, 0, t) \\ \quad = N_{yy}^{(i)}(x, b, t) = 0 \\ M_{xx}^{(1)}(0, y, t) = M_{xx}^{(3)}(0, y, t) = M_{xx}^{(1)}(a, y, t) \\ \quad = M_{xx}^{(3)}(a, y, t) = 0 \\ M_{yy}^{(1)}(x, 0, t) = M_{yy}^{(3)}(x, 0, t) = M_{yy}^{(1)}(x, b, t) \\ \quad = M_{yy}^{(3)}(x, b, t) = 0 \\ (i = 1, 3) \end{cases} \quad (28)$$

مولفه‌های جابجایی u_i ، v_i و w باید تمام شرایط مرزی هندسی و طبیعی ذکر شده در روابط (27, 28) را برآورده کنند. بسط فرم سری فوریه دوتایی مناسب برای این مولفه‌ها به‌صورت رابطه (29) است.

$$\begin{aligned} u_i(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}^{(i)} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) e^{i\bar{\omega} t} \\ v_i(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v_{mn}^{(i)} \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) e^{i\bar{\omega} t} \\ w(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) e^{i\bar{\omega} t} \\ (i = 1, 3) \end{aligned} \quad (29)$$

در این روابط $u_{mn}^{(i)}$ ، $v_{mn}^{(i)}$ و w_{mn} ضرایب جابه‌جایی مجهول و $\beta_m = n\pi/b$ و $\alpha_m = m\pi/a$ است. حال با جای‌گذاری رابطه (26) در رابطه (25) معادلات نهایی را می‌توان به شکل ماتریسی رابطه (30) نوشت.

$$\begin{aligned} Z_{mn} \xi_{mn} &= 0 \\ \xi_{mn} &= [u_{mn}^{(1)}, u_{mn}^{(3)}, v_{mn}^{(1)}, v_{mn}^{(3)}, w_{mn}]^T \end{aligned} \quad (30)$$

با استخراج ریشه‌های دترمینان ماتریس ضرایب $(\bar{\omega})$ ، فرکانس طبیعی و ضریب استهلاك مودال ورق قابل محاسبه است. در رابطه (31)، $\bar{\omega} = \omega(1 + i\eta_v)^{1/2}$ می‌توان فرکانس-های طبیعی (ω) و ضرایب استهلاك مودال مختلف (η_v) ارتعاشی را به‌دست آورد.

$$w = \sqrt{\text{Re}(\bar{\omega}^2)} \quad , \quad \eta_v = \text{Im}(\bar{\omega}^2)/\text{Re}(\bar{\omega}^2) \quad (31)$$

4-2- ارائه مدل ضربه و بدست آوردن نیروی ضربه

در این مقاله از روش جرم و فنر دو درجه آزادی برای مدل کردن ضربه استفاده شده است. برای محاسبه جرم معادل در روش نامبرده از فرکانس طبیعی پایه به‌دست آمده در بخش قبلی (بخش 2-3) استفاده خواهد شد. مدل جرم و فنر در سال 1985 توسط شیواکومار و همکارانش [31] ارائه شده است.

$$\begin{aligned} \delta w: \sum_{i=1}^3 [\partial^2 M_{xx}^{(i)}/\partial x^2 + \partial^2 M_{yy}^{(i)}/\partial y^2 + \\ 2\partial^2 M_{xy}^{(i)}/\partial y \partial x] + (d/h_2) \\ (\partial Q_x^{(2)}/\partial x + \partial Q_y^{(2)}/\partial y) = \left(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 \right) \ddot{w} \\ - I_2(d/h_2^2)(\partial^2 \ddot{w}/\partial x^2 + \partial^2 \ddot{w}/\partial y^2) - I_2(d/h_2^2) \\ [\partial/\partial x (\ddot{u}_1 - \ddot{u}_3) + \partial/\partial y (\ddot{v}_1 - \ddot{v}_3)] - F_c^* \end{aligned} \quad (21)$$

در روابط (21-19) δ_i برابر یک است، اگر i برابر یک باشد و δ_i برابر منفی یک است، اگر i برابر سه باشد.

منتجه‌های تنش که در روابط بالا وارد شده است به شکل زیر تعریف می‌شوند (رابطه 22):

$$\begin{aligned} (N_{xx}^{(i)}, N_{yy}^{(i)}, N_{xy}^{(i)}) &= \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (\sigma_{xx}^{(i)}, \sigma_{yy}^{(i)}, \sigma_{xy}^{(i)}) dz_i \\ (M_{xx}^{(i)}, M_{yy}^{(i)}, M_{xy}^{(i)}) &= \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (\sigma_{xx}^{(i)}, \sigma_{yy}^{(i)}, \sigma_{xy}^{(i)}) z_i dz_i \\ (Q_{xx}^{(2)}, Q_{yy}^{(2)}) &= \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (\sigma_{xz}^{(2)}, \sigma_{yz}^{(2)}) dz_2 \end{aligned} \quad (i = 1, 3) \quad (22)$$

روابط بین منتجه‌های تنش با کرنش‌های و انحنای سطح میانی در یک ماده کامپوزیتی را می‌توان به صورت رابطه (23) نشان داد [29]:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

ثابت‌های سختی ظاهر شده در رابطه (23) به‌صورت رابطه (24) تعریف می‌شوند [29]:

$$(A_{jk}^{(i)}, B_{jk}^{(i)}, D_{jk}^{(i)}) = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} (1, z_i, z_i^2) \bar{Q}_{jk} dz_i \quad (24)$$

اندیس‌های j و k می‌توانند مقادیر 1، 2 و یا 6 را اختیار کنند همچنین رابطه بین منتجه‌های نیرویی هسته با جابجایی‌ها را می‌توان به‌صورت رابطه (25) نوشت:

$$\begin{aligned} Q_x^{(2)} &= G_2(d \partial w / \partial x + u_1 - u_3) \\ Q_y^{(2)} &= G_2(d \partial w / \partial y + v_1 - v_3) \end{aligned} \quad (25)$$

حال با جای‌گذاری رابطه (23) در روابط (21-19)، معادلات حرکت ورق ساندویچی برحسب جابجایی‌ها را می‌توان به‌صورت رابطه (26) بیان کرد.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w \\ u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

اپراتور دیفرانسیلی L_{ij} برای ورق ساندویچ با چهار سو تکیه‌گاه‌های ساده در بخش ضمايم آورده شده است.

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش ناویر [30] انجام شده است. استفاده از روش ناویر منجر به ایجاد یک دستگاه معادلات خطی خواهد شد. لازم به ذکر است برای استفاده از روش ناویر در حل مساله ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی باید درایه‌های A_{16} ، A_{26} ، B_{16} ، B_{26} ، D_{16} ، D_{26} در لایه‌چینی رویه‌های بالایی و پایینی برابر صفر باشند.

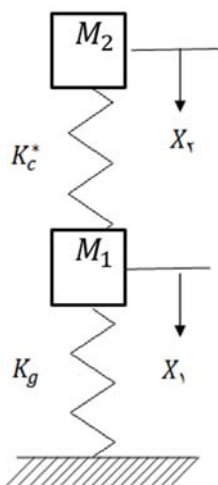


Fig. 4 Two degree of freedom linear mass spring model

شکل 4 مدل سیستم جرم و فنر دو درجه آزادی خطی

در رابطه (37)، v سرعت اولیه ضربه‌زننده در هنگام برخورد به ورق است. پس از حل معادلات (34) و جایگزین کردن $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در آن، فرکانس‌های طبیعی مطابق رابطه (38) حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{1}{2}((N+1)K_c^* + k_g/NM_2 - \sqrt{((N+1)K_c^* + k_g/nM_2)^2 - 4K_c^* K_g/NM_2^2}) \\ \omega_2^2 = \frac{1}{2}((N+1)K_c^* + k_g/NM_2 + \sqrt{((N+1)K_c^* + k_g/nM_2)^2 - 4K_c^* K_g/NM_2^2}) \end{cases} \quad (38)$$

در رابطه (38)، N نسبت جرم موثر سازه مورد برخورد به جرم ضربه‌زننده است.

از رابطه (39) شکل مودها به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{B}\right)_{\omega_1} &= \phi^1 = K_c^*/K_c^* - M_2 \omega_1^2 = \phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \left(\frac{A}{B}\right)_{\omega_2} &= \phi^2 = K_c^*/K_c^* - M_2 \omega_2^2 = \phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

رابطه (40) بیان‌کننده شکل کلی معادلات حرکت سیستم است.

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 \begin{pmatrix} \phi_2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (40)$$

با اعمال شرایط مرزی ضرایب C_1 ، C_2 ، φ_1 و φ_2 به‌صورت رابطه (41) به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 = 0 \\ C_1 &= -C_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = V/\omega_1(\phi_2 - \phi_1) \\ C_2 = V/\omega_1(\phi_2 - \phi_1) \end{cases} \end{aligned} \quad (41)$$

نیروی تماسی ایجاد شده بین دو جرم ضربه‌زننده و هدف به‌صورت رابطه (42) می‌باشد.

$$F_c^* = K_c^*(x_2(t) - x_1(t)) \quad (42)$$

$$F_c^* = K_c^* V / (\phi_2 - \phi_1) [1 - \phi_2/\omega_2 \sin(\omega_2 t) - 1 - \phi_1/\omega_1 \sin(\omega_1 t)] \quad (43)$$

در "شکل 3" ورق ساندویچی تحت ضربه شی خارجی مشاهده می‌شود. در این روش با استفاده از قانون تماس خطی شده، معادله حرکت حاکم بر سیستم جرم و فنر نوشته می‌شود و نیروی برخورد حاصل از ضربه برحسب پارامترهای مسئله از جمله سختی موثر تماسی که مجهول است نوشته خواهد شد. نیروی تماسی از رابطه هرتز به فرم رابطه (32) به‌دست می‌آید.

$$F_c(t) = k\delta^n \quad n = 1.5 \quad (32)$$

مدل‌سازی جرم و فنر معادل ضربه در "شکل 4" نشان داده شده است. K_c^* سختی خطی شده تماسی و K_g سختی معادل ورق است. M_2 جرم ضربه‌زننده و M_1 جرم موثر هدف می‌باشد. با استفاده از مرجع [32]، سختی خطی شده تماسی K_c^* را می‌توان از رابطه‌ی (33) به‌دست آورد.

$$K_c^* = K_c^{1/n} F_{\max}^{n-1/n} \quad (33)$$

نیروی تماس از معادلات حرکت سیستم جرم و فنر، به‌دست می‌آید و معادلات حرکت از رابطه (34) حاصل می‌شود (شکل 3).

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_c^* + K_g & -K_c^* \\ -K_c^* & K_c^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (34)$$

k_g سختی معادل ورق است و برطبق نظریه سوانسون [33] برابر با رابطه (35) می‌باشد. در رابطه (35)، ω_{11} کوچکترین فرکانس طبیعی سازه است که از حل ارتعاشات آزاد به‌دست آمده است.

$$k_g = \omega_{11}^2 M_1 \quad (35)$$

k_g سفتی معادل سازه، در زیر نقطه ضربه‌زننده می‌باشد که با توجه به "شکل 4" به‌صورت رابطه (36) معرفی می‌شود.

$$k_g = 1/\delta_l, \quad \delta_l = w(x, y) \quad (36)$$

در رابطه (36)، δ_l همان خیز به‌دست آمده از تحلیل استاتیکی در نقطه زیرین مرکز اعمال بار در اثر نیروی واحد در محل اصابت ضربه‌زننده است. با توجه به این‌که ضربه‌زننده‌ها می‌توانند در نقاط مختلفی به سازه برخورد کنند، رابطه حاضر توانایی محاسبه سفتی سازه را در هر نقطه‌ای دارد.

شرط اولیه رابطه (34) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x_1(t=0) &= 0, & x_2(t=0) &= 0 \\ x_2(t=0) &= 0, & \dot{x}_1(t=0) &= v \end{aligned} \quad (37)$$

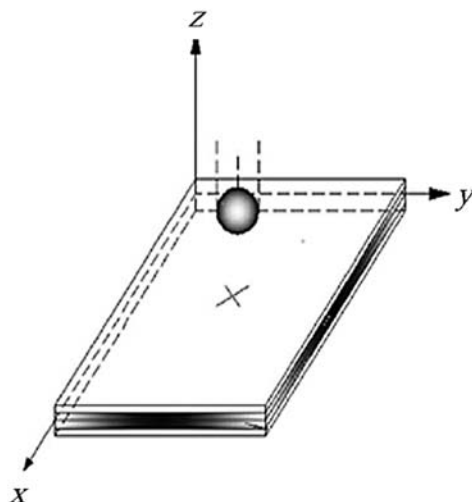


Fig. 3 Sandwich plate under impact of an external object

شکل 3 ورق ساندویچی تحت ضربه شی خارجی

2-3- بررسی ضربه سرعت پایین روی ورق ساندویچی با هسته هوشمند و لایه‌های کامپوزیتی

در این قسمت به بررسی رفتار ورق ساندویچی با هسته هوشمند تحت ضربه با سرعت پایین پرداخته می‌شود. به این منظور، برخورد یک پرتابه کروی شکل با سرعت 3 متر بر ثانیه و جرم 1.8 کیلوگرم را بر روی ورق ساندویچی مستطیلی شکل با تکیه‌گاه ساده، [MR در نظر گرفته می‌شود. خواص هندسی و مکانیکی ورق در جدول 3 آورده شده است [36].

برای صحت کار و اعتبارسنجی، از مقایسه نمودارها و نتایج بدست آمده مطالعه حاضر، با سایر نتایج مطالعات ضربه، بر روی ورق ساندویچی با هسته هوشمند استفاده شده است. اعتبارسنجی از مقایسه نتایج ضربه بدست آمده با نتایج مرجع [18] صورت گرفته است (شکل 5 - اطلاعات تکمیلی در مرجع 37). در این مرجع اندرسن از مدل جرم و فنر برای محاسبه نیروی برخورد استفاده کرده است. او از روش حل عددی و نتایج تست‌های تجربی در مدل خود بهره برده است.

جدول 1 همگرایی فرکانس طبیعی اول ورق ساندویچی به فرکانس طبیعی اول

ورق کامپوزیتی با کاهش ضخامت لایه MR

Table 1 Convergence of the fundamental frequency of the MR sandwich plate to that of the equivalent composite plate by decreasing of the MR layer thickness

ضخامت (mm)	فرکانس طبیعی (بی بعد)
e^{-1}	3.56336
e^{-2}	3.87564
e^{-3}	4.46105
e^{-4}	6.27945
e^{-5}	7.35096
e^{-10}	7.53323
e^{-12}	7.51710
e^{-14}	7.51700

جدول 2 خصوصیات مکانیکی و هندسی ورق ساندویچی با هسته MR [18]

Table 2 Mechanical and geometric properties of the sandwich plate with MR core [29]

ورق کامپوزیتی	خواص
v_{12}	0.25
G_{12}/E_2	0.5
E_1/E_2	3
a/b	0.5
h/b	0.1

جدول 3 خصوصیات مکانیکی و هندسی ورق ساندویچی با هسته MR [36]

Table 3 Mechanical and geometric properties of the sandwich plate with MR core [36]

خواص	رویه	هسته
E_{11} (GPa)	172.37	-
E_{22} (GPa)	6.89	-
E_{33} (GPa)	6.89	-
G_{12} (GPa)	3.45	معادله 3
G_{13} (GPa)	3.45	معادله 3
G_{23} (GPa)	1.38	معادله 3
$v_{12} = v_{13} = v_{23}$	0.25	-
ρ (kg/m ⁻³)	222.64	3500
a (mm)	400	400

از قرار دادن بسط دو جمله‌ای تیلور در رابطه (44) و با مشتق گرفتن از آن ماکزیمم نیروی تماس بر طبق رابطه (44) به دست می‌آید.

$$F_{\max} = \frac{2}{3} V \sqrt{2NM_2 K_c^* / (N+1)} \quad (44)$$

از رابطه (45) زمان متناسب با ماکزیمم نیروی تماسی ایجاد شده نیز به دست می‌آید.

$$t_{\max} = \sqrt{2NM_2 / (N+1)K_c^*} \quad (45)$$

از رابطه (44) و (45) مقدار K_c^* به صورت رابطه (46) حاصل خواهد شد.

$$K_c^* = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^{2(n-1)/n+1} (N/N+1)^{(n-1)/n+1} (V)^{2(n-1)/n+1} (K_c)^{2(n-1)/n+1} (M_i)^{(n-1)/n+1} \quad (46)$$

در تحلیل‌های انجام شده توسط شیواکومار و همکاران [31] و گانگ [34] (برای حالت تکیه‌گاه ساده و ورق چهار طرف لولا) جرم موثر پِنل برابر یک چهارم جرم کل پِنل در نظر گرفته می‌شود. ژو و سترونج [35] نشان دادند که نسبت جرم موثر به جرم کل پِنل به شدت وابسته به نسبت سفتی برشی به سفتی خمشی ساده k_s/k_b در محل اعمال بار ضربه‌ای است.

سوانسون [33] نشان داد که نسبت جرم موثر سازه به کل جرم آن به نوع سازه مانند شکل هندسی سازه و ضخامت جداره سازه، محل اعمال بار، شرایط مرزی و ناهمسانگردی خواص ماده بستگی دارد. او نسبت جرم موثر سازه به کل جرم آن را به طور تقریبی برای تیرهای دو سرگیردار 0.375 و برای تیرهای دو سر لولا 0.5 تخمین زد. وی مقدار این نسبت‌ها، در مورد ورق‌ها را تقریباً نصف مقدار این نسبت‌ها در مورد تیرها با همین شرایط مرزی در نظر گرفت.

در رابطه (46)، N به صورت $M_p/M_s = 1/4$ تعریف می‌شود. در نهایت تاریخچه نیروی تماس به صورت رابطه (47) به دست می‌آید.

$$F_c^* = 0.978(N/N+1)^{0.2} (V)^{1.4} (K_c)^{0.8} (M_i)^{0.2} \\ 1/\phi_2 - \phi_1 [1 - \phi_2/w_2 \sin(\omega_2 t) - 1 - \phi_1/w_1 \sin(\omega_1 t)] \quad (47)$$

3- نتایج

1-3- فرکانس طبیعی ورق ساندویچی

برای بررسی درستی روابط حاکم بر معادلات ارتعاشات آزاد، (همان‌طور که از "شکل 2" مشخص است) با میل دادن ضخامت لایه MR به سمت صفر فرکانس طبیعی ورق ساندویچی باید به فرکانس طبیعی ورق کامپوزیتی $h_1 + h_3$ همگرا شود.

در جدول 1 همگرایی فرکانس طبیعی اول ورق با کاهش ضخامت لایه MR با نتایج حاصل از ارتعاشات آزاد ورق کامپوزیتی ذکر شده در مرجع [29] مقایسه شده است و تطبیق خوب نتایج حاصل شده است.

فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق کامپوزیتی در مرجع [29] برای ورق کامپوزیتی با خواص مکانیکی و هندسی ذکر شده در جدول 2، برابر 7.517 است.

فرکانس‌های طبیعی ورق با استفاده از رابطه (48) بی‌بعد شده‌اند [29]:

$$\bar{w} = w(b^2/\pi^2)\sqrt{\rho_i h/D_i} \\ D_i = E_i h^3/12(1 - \nu_i^2) \quad (48)$$

بررسی قرار گرفته است. در "شکل 8" تغییرات نیروی تماس پنل با هسته MR با تغییرات نسبت a/h رسم شده است. با افزایش نسبت مقدار (a) به ضخامت کل ورق ساندویچی (h) ، بیشینه نیروی برخورد کاهش می‌یابد. در این حالت ورق ساندویچی نازک‌تر شده و لذا تغییر شکل کلی سازه بیشتر خواهد شد. در حالی که که مقاومت کمتری نسبت به ضربه‌زننده از خود نشان می‌دهد و باعث کاهش نیروی برخورد می‌شود. در این حالت تغییر شکل کلی سازه با افزایش بازه زمانی به وجود خواهد آمد.

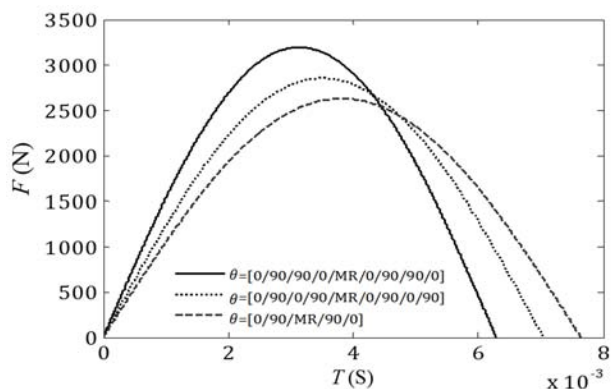


Fig. 6 Impact force history of sandwich plate for three different stacking sequences at 500 Gauss magnetic field intensity.

شکل 6 تاریخچه نیروی ضربه ورق ساندویچی برای سه نوع لایه‌چینی مختلف در میدان مغناطیسی 500 گاوس

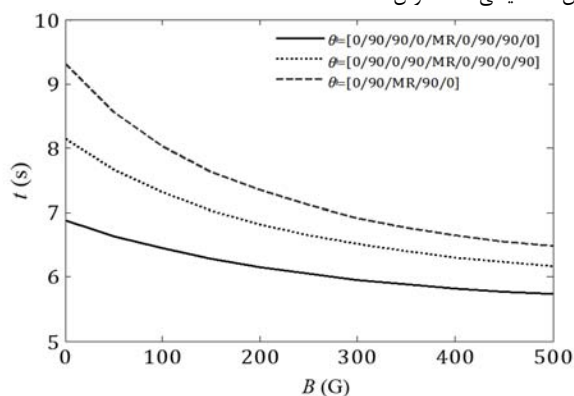


Fig. 7 Variation of impact time with magnetic field intensity for three different stacking sequences.

شکل 7 تغییرات زمان ضربه با شدت میدان مغناطیسی در سه نوع لایه‌چینی مختلف

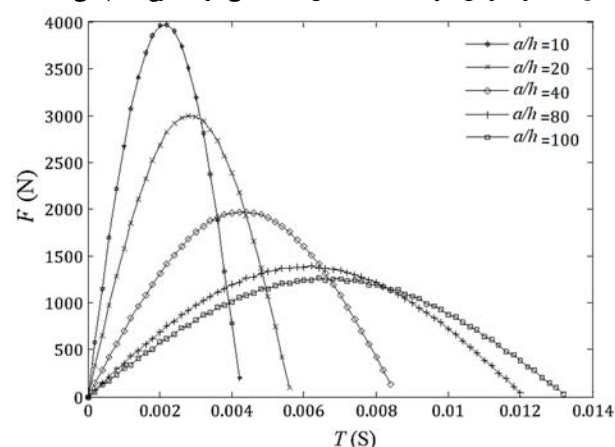


Fig. 8 Variation of impact force history with a/h at 500 Gauss magnetic field intensity.

شکل 8 تغییرات تاریخچه نیروی ضربه با تغییرات نسبت a/h در شدت میدان 500 گاوس

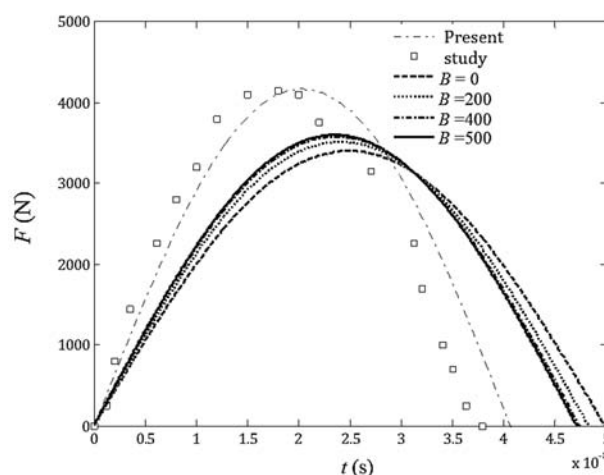


Fig. 5 Impact force history with and without MR core.

شکل 5 تاریخچه نیروی ضربه با استفاده از روغن و بدون استفاده از روغن

همان‌گونه که در "شکل 5" ملاحظه می‌شود تطبیق خوب مطالعه حاضر با تست تجربی و آزمایشگاهی بدست آمده است. افزودن ماده MR به ورق ساندویچی باعث افزایش نرمی ورق می‌گردد. در نتیجه کاهش نیروی تماس و افزایش زمان تماس حاصل خواهد شد. با افزایش شدت میدان مغناطیسی به دلیل تغییر ماهیت ماده هوشمند به یک ماده نیمه جامد سفتی ورق ساندویچی افزایش خواهد یافت. این امر سبب افزایش نیروی تماس و کاهش زمان برخورد می‌گردد.

این افزایش نیروی برخورد و کاهش زمان برخورد تا زمانی که ماده با افزایش میدان مغناطیسی به حد اشباع نرسیده باشد ادامه می‌یابد. هرچه ماده هوشمند به حالت اشباع نزدیک‌تر شود، تغییرات در مدول برشی و اتلاف ماده کمتر شده و تغییرات نیروی برخورد و زمان برخورد کمتر خواهد شد و با رسیدن به حالت اشباع تغییری در نیروی برخورد و زمان برخورد مشاهده نمی‌شود. نزدیک‌تر شدن نمودارها بهم این گفته را تایید می‌کند (شکل 5). از عوامل مهم و تأثیرگذار در روند حل مسأله ضربه، مقدار فرکانس طبیعی پایه ورق ساندویچی است. فرکانس طبیعی پایه مورد استفاده در تحلیل ضربه، فرکانس طبیعی اول حاصل از ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هوشمند است که از روش ذکر شده در بخش قبل (بخش 3-2) به‌دست می‌آید. نتایج در مود اول و با تغییرات شدت میدان مغناطیسی استخراج شده است.

در "شکل‌های 6 و 7" نمودارهای تاریخچه نیروی تماس، بیشینه نیروی تماس و مدت زمان برخورد در شدت میدان‌های مختلف مغناطیسی، در سه نوع لایه‌چینی رسم شده‌اند. در "شکل 6" نمودار نیروی تاریخچه تماس ورق ساندویچی با هسته MR در سه حالت $[0/90/90/0/MR/0/90/90/0]$ و $[0/90/0/90/MR/0/90/0/90]$ و $[0/90/MR/90/0]$ نشان داده شده است.

همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود لایه‌چینی $[0/90/0/90/MR/0/90/90/0]$ دارای نیروی برخورد بیشتری است که این امر به‌دلیل استحکام بیشتر کامپوزیت در جهت زاوایای چیده شده می‌باشد.

در نمودار "شکل‌های 6 و 7" با افزایش شدت میدان مغناطیسی به دلیل روند افزایشی سفتی معادل ورق، میزان نیروی برخورد بیشینه تغییر یافته و افزایش می‌یابد و مدت زمان برخورد نیز کاهش خواهد یافت. در "شکل‌های 8 تا 11"، تغییرات پارامتری ورق ساندویچی با هسته MR با چیدمان $[0/90/90/0/MR/0/90/90/0]$ در شدت میدان مغناطیسی 500 گاوس مورد

با افزایش میزان h_c/h تا نسبت 0.5، بیشینه نیروی برخورد کاهش یافته ولی بیشینه خیز ضربه‌زننده ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. همچنین بیشینه خیز ورق از نسبت $h_c/h < 0.1$ به بعد روند کاهشی دارد. این اثر در نمودار "شکل 9" نمایش داده شده است. با افزایش مقدار نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل، به سبب ایجاد فاصله بیشتر بین رویه‌ها و افزایش حجم هسته که نرم است، مقاومت ورق نسبت به بارهای خمشی کمتر شده و نیروی برخورد کاهش خواهد یافت. "شکل 10" نشان دهنده این است که با افزایش شدت میدان مغناطیسی و با افزایش نسبت h_c/h ، بیشینه نیروی برخورد افزایش می‌یابد، این امر به دلیل تاثیر میدان مغناطیسی در کاهش نرمی ورق می‌باشد. با افزایش شدت میدان مغناطیسی و با افزایش نسبت h_c/h ، بیشینه خیز ضربه زننده و ورق نیز کاهش خواهد یافت. علت این امر تغییر ماهیت مایع هوشمند و افزایش سفتی ورق و کاهش نرمی است (شکل 10 و 11).

4- بحث و بررسی

همان‌طور که از نتایج مشاهده می‌شود تاثیر شدت میدان مغناطیسی بر سفتی ورق ساندویچی با هسته MR رابطه‌ای مستقیم دارد. این ویژگی امکان قابلیت کنترل فرکانس طبیعی و ضربه استهلاک را، (با به کارگیری مواد هوشمند MR در شدت میدان مغناطیسی مختلف)، برای ما فراهم می‌نماید. افزودن روغن به ورق ساندویچی باعث افزایش نرمی ورق ساندویچی شده، در نتیجه کاهش نیروی تماس و افزایش زمان تماس مشاهده می‌شود. با افزایش شدت میدان مغناطیسی به دلیل تغییر ماهیت روغن به یک ماده نیمه جامد، سفتی ورق ساندویچی افزایش یافته در نتیجه نیروی تماس افزایش و زمان برخورد کاهش خواهد یافت. این افزایش نیروی برخورد و کاهش زمان برخورد تا هنگامی ادامه خواهد یافت که روغن به حد اشباع نرسیده باشد، هرچه به اشباع روغن هوشمند نزدیک می‌شویم تغییرات نیروی برخورد و زمان برخورد کمتر شده و در زمان اشباع، دیگر تغییری مشاهده نخواهد شد.

5- نتیجه گیری

در این مقاله با در نظر گرفتن ورق ساندویچی مستطیلی با رویه‌های کامپوزیتی و هسته هوشمند به بررسی فرکانس طبیعی و نیروی تماس ورق پرداخته شده است. همگرایی خوب ورق ساندویچی کامپوزیتی با میل دادن ضخامت لایه MR به سمت صفر با مرجع [18] حاصل شده است و مقایسه نتایج ضربه با مرجع [16] صورت گرفته است. از روش جرم و فنر دو درجه آزادی برای مدل کردن ضربه استفاده شده و برای محاسبه جرم معادل در روش نامبرده از فرکانس طبیعی پایه به دست آمده در بخش ارتعاشات آزاد استفاده شده است (فلوچارت الگوریتم حل در "شکل 12" آورده شده است). همچنین در سه نوع لایه چینی به بررسی تغییرات بیشینه نیروی برخورد و زمان متناسب با آن در شدت میدان‌های مغناطیسی مختلف پرداخته شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که با تغییر شدت میدان مغناطیسی هسته میانی، می‌توان مقدار سفتی، ضربه استهلاک سازه‌ای و ماکزیمم نیروی برخورد را تغییر داد و کنترل کرد. فرکانس طبیعی با افزایش شدت میدان مغناطیسی افزایش پیدا خواهد کرد. همچنین با افزایش شدت میدان مغناطیسی بیشینه نیروی برخورد افزایش و زمان برخورد کاهش می‌یابد. از بین سه نوع لایه چینی مورد بررسی در این مقاله، بیشترین نیروی برخورد به ترتیب در حالت‌های $[0/90/90/0/MR/0/90/90/0]$ و $[0/90/0/90]$ و $[0/90/0/90/MR]$ به وجود آمده است.

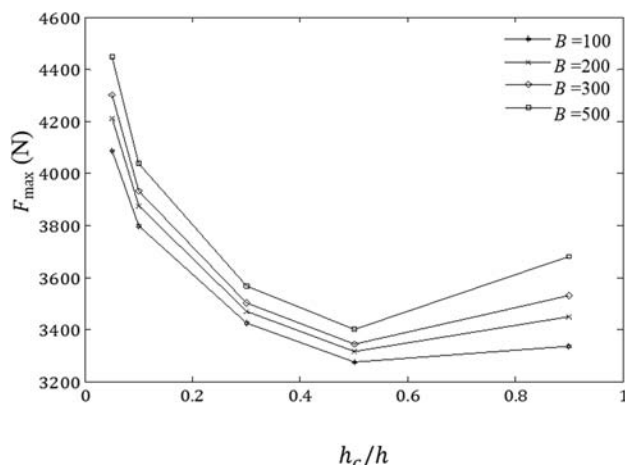


Fig. 9 Variation of maximum impact force history with h_c/h at different magnetic field intensities.

شکل 9 تغییرات بیشینه مقدار نیروی ضربه با نسبت h_c/h در شدت میدان‌های مغناطیسی مختلف

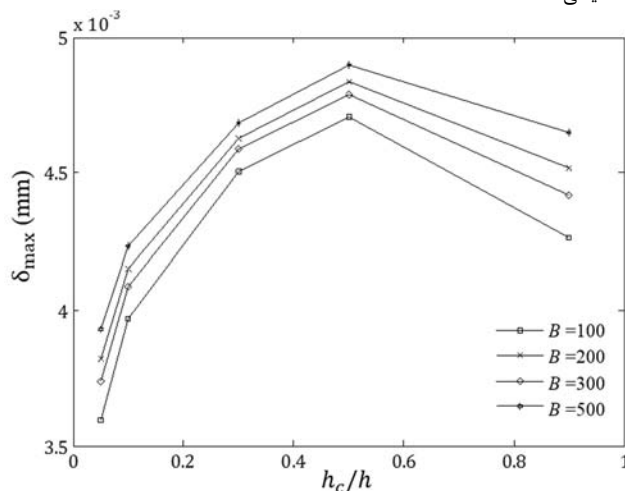


Fig. 10 Variation of maximum indentation with h_c/h at different magnetic field intensities.

شکل 10 تغییرات بیشینه فرورفتگی با نسبت h_c/h در شدت میدان مغناطیسی مختلف

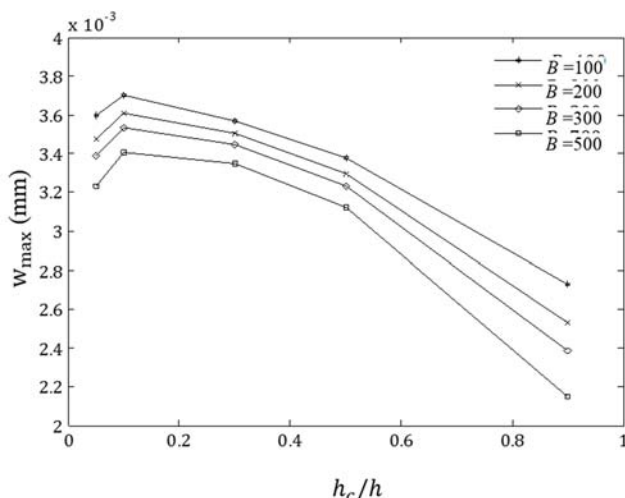


Fig. 11 Variation of maximum deflection of sandwich plate with h_c/h at different magnetic field intensities.

شکل 11 تغییرات بیشینه خیز ورق ساندویچی با نسبت h_c/h در شدت میدان‌های مغناطیسی مختلف

7- مراجع

- [1] M. Yalcintas, H. Dai, Magnetorheological and electrorheological materials in adaptive structures and their performance comparison, *Smart Materials and Structures*, Vol. 8, No. 5, pp. 560-573, 1999.
- [2] I. Bica, damper with magnetorheological suspension, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 241, No. 2-3, pp. 196-200, 2002.
- [3] N. R. Harland, B. R. Mace, R. W. Jones, Adaptive - passive control of vibration transmission in beams using electro/magnetorheological fluid filled inserts, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 9, No. 2, pp. 209-220, 2001.
- [4] B. R. Mace, R. W. Jones, N. R. Harland, Wave transmission through structural inserts, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 109, No. 4, pp. 1417-1421, 2001.
- [5] M. Yalcintas, H. Dai, Magnetorheological and electrorheological materials in adaptive structures and their performance comparison. *Smart Materials and Structures*, Vol. 8, No. 5, pp. 560-573, 1999.
- [6] Q. Sun, J.X. Zhou, L. Zhang, An adaptive beam model and dynamic characteristics of magnetorheological materials, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 261, No. 3, pp. 465-481, 2003.
- [7] D. Ross, E.E. Ungar, Jr. E. M. Kerwin, Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminae, *American Society of Mechanical Engineers*, Vol. 3, No. 5, pp. 48-88, 1959.
- [8] Lu. Hongquan, GuangMeng, An experimental and analytical investigation of the dynamic characteristics of a flexible sandwich plate filled with electrorheological fluid, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 28, No. 11, pp. 1049-1055, 2006.
- [9] Jia-Yi. Yeh, Vibration analyses of the annular plate with electrorheological fluid damping treatment. *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 43, No. 11-12, pp. 965-974, 2007.
- [10] Jia-Yi. Yeh, Vibration control of a sandwich annular plate with an electrorheological fluid core layer. *Smart Materials and Structures*, Vol. 16, pp. 837-842, 2007.
- [11] V. Rajamohan, R. Sedaghati, S. Rakheja, Vibration analysis of a multi-layer beam containing magnetorheological fluid. *Smart Materials and Structures*, Vol. 19, No. 1, 015013, 2010.
- [12] Y. Choi, A. F. Sprecher, H. Conrad, Vibration characteristics of a composite beam containing an electrorheological fluid. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 1, No. 1, pp. 91-104, 1990.
- [13] V. Rajamohan, S. Rakheja, R. Sedaghati, Vibration analysis of a partially treated multi-layer beam with magnetorheological fluid. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, No. 17, pp. 3451-3469, 2010.
- [14] V. Rajamohan, R. Sedaghati, S. Rakheja, Optimum design of a multilayer beam partially treated with magnetorheological fluid. *Smart Materials and Structures*, Vol. 19, No. 6, 065002, 2010.
- [15] V. I. Prieto, et.al, Vibration characteristics of MR cantilever sandwich beams: experimental study. *Smart Materials and Structures*, Vol. 19, No. 1, 015005, 2010.
- [16] Y. Li, J. Zhang, Free vibration analysis of magnetoelastoelectroelastic plate resting on a pasternak foundation, *Smart Materials and Structures*, Vol. 23, No. 2, 025002, 9pp, 2014.
- [17] Z. Zhang, F. Huang, Dynamic analysis of the MRF rectangular sandwich plate based on ANSYS, *Proceedings of the 2nd International Conference on Green Communications*, Vol. 4, 2013.
- [18] T. A. Anderson, An investigation of SDOF models for large mass impact on sandwich composites. *Composites Part B: Engineering*, Vol. 36, No. 2, pp. 135-142, 2005.
- [19] J. Rahiminasab, J. Rezaeepazhand, Transient response analysis of composite sandwich plates with electrorheological layer, *The 19th International Conference on Mechanical Engineering*, Birjand, Iran, 2011. (in Persian فارسی)
- [20] A. Besharati, F. Bakhtiarinejad, M. Sohrabian, Investigation of active and passive constrained layer damping for vibration reduction of plate structures, *The 17th International Conference on Mechanical Engineering*, Isfahan, Iran, 2009. (in Persian فارسی)
- [21] Y. Hojjat, K. Kakavand, M. Ghodsi, A. A. Maddah, Study on the transient state behavior of magnetorheological fluid in magnetic coupling, *Moderate Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 12, pp. 156-162, 2014. (in Persian فارسی)
- [22] J. Rezaeepazhand, J. Rahiminasab, A nonlinear study on transient vibration and limit cycle oscillation of composite sandwich plates

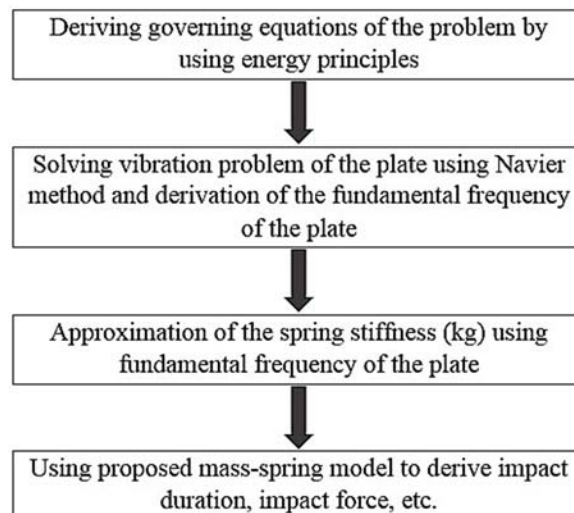


Fig. 12 Flowchart of the solution algorithm

شکل 12 فلوچارت الگوریتم حل

6- پیوست

$$\alpha_m = m\pi/a \text{ و } \beta_n = n\pi/b$$

اپراتور دیفرانسیلی L_{ij} :

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= A_{11}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{66}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - G_2/h_2 - (\rho_1 h_1 + I_2/h_2^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
 L_{12} &= G_2/h_2 + I_2/h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
 L_{13} &= (A_{12}^{(1)} + A_{66}^{(1)}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
 L_{15} &= -B_{11}^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - G_2 d/h_2 \frac{\partial}{\partial x} - (B_{12}^{(1)} + 2B_{66}^{(1)}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
 &\quad - (I_2 d/h_2^2) \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x} \\
 L_{21} &= G_2/h_2 + I_2/h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
 L_{22} &= A_{11}^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{66}^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - G_2/h_2 - (\rho_3 h_3 + I_2/h_2^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
 L_{24} &= (A_{12}^{(3)} + A_{66}^{(3)}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
 L_{25} &= B_{11}^{(3)} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + G_2 d/h_2 \frac{\partial}{\partial x} - (B_{12}^{(3)} + 2B_{66}^{(3)}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (I_2 d/h_2^2) \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x} \\
 L_{31} &= (A_{12}^{(1)} + A_{66}^{(1)}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
 L_{33} &= A_{66}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{22}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - G_2/h_2 - (\rho_1 h_1 + I_2/h_2^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
 L_{34} &= G_2/h_2 - I_2/h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
 L_{35} &= -(B_{12}^{(1)} + 2B_{66}^{(1)}) \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y} - B_{22}^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\
 &\quad - (I_2 d/h_2^2) \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial y} - G_2 d/h_2 \frac{\partial}{\partial y} \\
 L_{42} &= (A_{12}^{(3)} + A_{66}^{(3)}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
 L_{43} &= G_2/h_2 + I_2/h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
 L_{44} &= A_{66}^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{22}^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - G_2/h_2 - (\rho_3 h_3 + I_2/h_2^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
 L_{45} &= -(B_{12}^{(3)} + 2B_{66}^{(3)}) \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y} - B_{22}^{(3)} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\
 &\quad + (I_2 d/h_2^2) \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial y} + G_2 d/h_2 \frac{\partial}{\partial y} \\
 L_{51} &= B_{11}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12}^{(1)} + 2B_{66}^{(1)}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + G_2 d/h_2 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 d/h_2^2 \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x} \\
 L_{52} &= B_{11}^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12}^{(3)} + 2B_{66}^{(3)}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + G_2 d/h_2 \frac{\partial}{\partial x} - I_2 d/h_2^2 \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x} \\
 L_{53} &= B_{22}^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + (B_{12}^{(1)} + 2B_{66}^{(1)}) \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y} + G_2 d/h_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_2 d/h_2^2 \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial y} \\
 L_{54} &= B_{22}^{(3)} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + (B_{12}^{(3)} + 2B_{66}^{(3)}) \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y} - G_2 d/h_2 \frac{\partial}{\partial y} - I_2 d/h_2^2 \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial y} \\
 L_{55} &= -(D_{11}^{(1)} + D_{11}^{(3)}) \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2[(D_{12}^{(1)} + 2D_{66}^{(1)}) + (D_{12}^{(3)} + 2D_{66}^{(3)})] \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + (D_{22}^{(1)} + D_{22}^{(3)}) \frac{\partial^4}{\partial y^4} \\
 &\quad + I_2 d^2/h_2^2 (\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial y^2}) + G_2 d^2/h_2 (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) - (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) \frac{\partial^2}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

اپراتورهای $L_{41}, L_{32}, L_{23}, L_{14}$ برابر صفر است.

- Second Edition, pp. 345-357, Texas, CRC Press, 2006.
- [30] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells, theory and analysis*. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, chapter 5, p.p. 272, 1945.
- [31] K. N. Shivakumar, W. Elber, W. Illg, Prediction of impact force and duration due to low-velocity impact on circular composite laminates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 421, No. 4, pp. 675-680, 1984.
- [32] I.H. Choi, CH. Lim, Low-velocity impact analysis of composite laminates using linearized contact law, *Composite Structures*. Vol.66, No. 7, pp. 125-32, 2004.
- [33] S. R. Swanson, Limits of quasi-static solutions in impact of composite structures, *Composites Engineering*, Vol. 2 , No. 4, pp. 261-7, 1992.
- [34] S. W. Gong, A study of impact on composite laminated shells, *PhD Dissertation*, National University of Singapore, 1994.
- [35] G. Y. Zhou, Q. Wang, Use of Magnetorheological Elastomer in an Adaptive Sandwich Beam with Conductive Skins, Part II: Dynamic Properties, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 11, pp. 5403-5420, 2006.
- [36] K. Malekzadeh Fard, GH. Payganeh, M. kardan, Dynamic response of sandwich panels with flexible cores and elastic foundation subjected to low velocity impact, *Amirkabir Journal of Sciences & Research*. Vol. 45, No. 2, pp. 9-11, 2013.
- [37] K. Malekzade Fard, Gh. Payganeh, F. Rashed Saghavaz, Free vibration and low velocity impact analysis of sandwich plates with smart flexible cores, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 13, pp. 191-200, 2015. (in Persian فارسی)
- with electrorheological fluid layer, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 285-293, 2015. (in Persian فارسی)
- [23] M. Mohammadi Soleymani, M. A. Hajabbasi, S. Mirzade, Free vibration study of rectangular sandwich plate with electrorheological fluid interlayer, *The 16th International Conference on Mechanical Engineering*, Kerman, Iran, 2008. (in Persian فارسی)
- [24] R. Tikani, S. Ziaei-Rad, M. Esfahanian, Simulation and experimental evaluation of a magneto-rheological hydraulic engine mount, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 10, pp. 43-49, 2014. (in Persian فارسی)
- [25] Z. Sadat Fattahi, A. Zabihollah, Vibrations of laminated composite structures integrated with magnetorheological fluid segments, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 12, pp. 156-160, 2013. (in Persian فارسی)
- [26] A. Allahverdizadeh, M. J. mahjoob, I. Eshraghi, N. Nasrollahzadeh, On the vibration behavior of functionally graded electro-rheological sandwich beam, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 70, No. 3, pp. 130-139, 2013.
- [27] H. sarparast, M. R. Ashory, P. Ebadi, M. M. Khatibi, Modal parameter identification of a structure subjected to ambient load using ouput analysis, *Modares Mechanical Engineering*, vol. 13, No. 5, pp. 73-33, 2013. (in Persian فارسی)
- [28] Jia-Yi Yeh, Vibration analysis of sandwich rectangular plates with magnetorheological elastomer damping treatment, *Smart Materials and Structures*, Vol. 22, No. 1, 035010, 2013.
- [29] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*