



بررسی تحلیلی تغییر شکل یک قطره نیوتنی در حال سقوط در اعداد رینولدز پایین

امین امامیان¹، محمود نوروزی^{2*}، مهدی داودی³

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

3- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه لیورپول، لیورپول

* شاهرود، صندوق پستی 3619995161، mnorouzi@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 07 آذر 1395

پذیرش: 21 دی 1395

ارائه در سایت: 25 بهمن 1395

کلید واژگان:

قطره ویسکوز

رینولدز

مویبندی

حساب اغتشاشات

چکیده

حرکت و تغییر شکل قطره در حال سقوط در یک مایع غیرقابل امتزاج دارای کاربرد گسترده‌ای از جمله در صنایع نفت و گاز، صنایع پزشکی و داروسازی، استخراج فلزات، نیروگاه‌ها و مبدل حرارتی دارد. در مقاله حاضر، حل تحلیلی تغییر شکل برای یک قطره ویسکوز در حال سقوط در اعداد رینولدز پایین ارائه شده است. حل تحلیلی برای هر دو جریان داخلی و خارجی با استفاده از روش اغتشاشات به دست می‌آید. اعداد رینولدز و مویبندی به عنوان پارامترهای اغتشاشی در نظر گرفته شده است. برای قطرات به اندازه کافی کوچک شکل قطره کروی باقی می‌ماند. شکل قطره در حال سقوط در فاز نیوتنی با افزایش حجم قطره از حالت کروی خارج می‌شود. نیروهای لختی، کشش سطحی و مؤلفه نرمال تنش دارای بیشترین تأثیر روی شکل قطره در حال سقوط می‌باشند. تغییر شکل قطره، ناشی از نیروهای است که در فصل مشترک دو سیال وارد می‌شود. با افزایش حجم قطره در حال سقوط علاوه بر افزایش نیروی لختی، مؤلفه نرمال تنش به نیروی کشش سطحی غلبه کرده و باعث ایجاد حفره‌ای در قسمت انتهایی قطره می‌شود. برای مقادیر کوچک اعداد بی بعد رینولدز و مویبندی، تغییر شکل قطره دقیقاً شبیه یک کره کروی می‌باشد و سپس با افزایش اعداد رینولدز و مویبندی شکل قطره تغییر پیدا کرده و یک گودی در انتهای قطره به وجود خواهد آمد. نشان داده شده است که نتایج حاصل از حل تحلیلی در تخمین سرعت حدی و شکل قطره با نتایج تجربی مطابقت خوبی دارد.

An analytical investigation on shape of a falling viscose drop at low Reynolds number

Amin Emamian¹, Mahmood Norouzi^{1*}, Mahdi Davoodi²

1- Mechanical Engineering Department, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

2- Mechanical Engineering Department, Liverpool University, Liverpool, United Kingdom

* P.O.B. 3619995161, Shahrood, Iran, mnorouzi@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 27 November 2016

Accepted 10 January 2017

Available Online 13 February 2017

Keywords:

Viscose drop

Reynolds

Capillary

Perturbation solution

ABSTRACT

Motion and deformation of the drop falling in an immiscible fluid has a wide range of applications in petroleum, medicine processing, metals extraction, power plant and heat exchanger. In this paper, an analytical solution of a falling viscous drop at low Reynolds number is investigated. Analytical solution for both internal and external flows is obtained using the perturbation method. The Reynolds numbers and capillary are considered as the perturbation parameters. The drop's shape remains spherical for sufficiently small ones. The falling drop's shape at Newtonian phase deforms from its spherical shape as its volume increases. Inertial forces, surface tension, normal components stresses have the most influence on its shape. Drop's deformation is due to the forces at the interfaces acting between two fluids. By volume increase of the falling drop, normal components stresses overcome to the surface tension and cause a dimple at the bottom drops in addition to the inertial force enhancement. For small non-dimensional parameters (Reynolds number and capillary) drop's deformation is exactly similar to a sphere and then by increase in Reynolds number and capillary, the drop's shape alters and causes a dimple in the bottom drops. Analytical solution show suitable agreement in terminal velocity and drop shape estimation with experimental results.

1- مقدمه

نیروگاه‌ها (برج‌های خنک کننده)، نقاشی، حوضچه‌های ته‌نشینی مراکز تصفیه آب (در عملیات‌های لخته‌سازی جامدهای شناور در آب)، مبردها و مبدل حرارتی مشاهده نمود. مسئله حرکت یک قطره در حال سقوط در غیاب لختی¹ توسط هادامارد [1] و ریبزینسکی [2] حل شده است. آن‌ها سرعت

بررسی حرکت و تغییر شکل قطرات یک سیال در سیالی دیگر از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اهمیت این موضوع را می‌توان در صنایع پزشکی و داروسازی، صنایع نفت و گاز (استخراج مایع- مایع)، استخراج فلزات،

¹ Inertia

Please cite this article using:

A. Emamian, M. Norouzi, M. Davoodi, An analytical investigation on shape of a falling viscose drop at low Reynolds number, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 251-262, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. Emamian, M. Norouzi, M. Davoodi, An analytical investigation on shape of a falling viscose drop at low Reynolds number, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 251-262, 2017 (in Persian)

حدی^۱ و نیروی پسا^۲ را به صورت تحلیلی برای یک قطره کروی به دست آوردند. در این میان فرض می شود که سیالات غیرقابل انحلال در یکدیگر می باشند. تمرکز اصلی این تحقیق بر روی بررسی های مرتبط به سرعت حدی (سرعت سقوط و یا بالا رفتن قطره) و نیروی پسا اعمال شونده روی سطح قطره با استفاده از معادلات استوکس^۳ است. به سبب خزشی^۴ بودن جریان، جمله لختی از معادله اندازه حرکت^۵ حذف گردیده و تبدیل به معادلات استوکس می گردد. آن ها دریافتند که شکل قطره در حال سقوط در غیاب لختی کاملاً کروی بوده و سرعت نهایی با افزایش حجم قطره افزایش می یابد. رابطه زیر، معادله سرعت نهایی سقوط قطره در فاز نیوتنی می باشد که این دو مرجع به دست آوردند.

$$U_{HR} = \frac{(2k+2)(\tilde{\rho}-\rho)gR^2}{9k+6\eta} \quad (1)$$

که در این معادله k نسبت لزجت^۶ بین دو سیال داخلی و خارجی، $\tilde{\rho}$ و ρ چگالی محیط های داخل و خارج قطره، g شتاب گرانش، R شعاع قطره و η لزجت محیط خارجی است.

پس از آن، تیلور و آکریوس [3] به صورت تحلیلی نشان دادند در حالتی که اعداد بی بعد رینولدز^۷ بسیار کم و اعداد موئینگی^۸ محدود باشند قطره دقیقاً کروی باقی می ماند و فقط در اعداد رینولدز پایین شکل قطره کرویت خود را از دست داده و شکلی پهن شده^۹ به خود می گیرند. همچنین، سوستارز و بلمونته [4] قطره ویسکوالاستیک^{۱۰} در حال سقوط در یک سیال ویسکوز را به صورت آزمایشگاهی و تحلیلی، تجزیه و تحلیل کردند. از تکنیک اغتشاشات^{۱۱} به عنوان روش حل تحلیلی برای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط در فاز نیوتنی بهره بردند. در این تحقیق اعداد دبورا^{۱۲} و موئینگی به عنوان پارامترهای اغتشاشی مورد استفاده قرار گرفتند. همچنین، از مدل سیال مرتبه سه^{۱۳} برای مدل سازی قطره ویسکوالاستیک به عنوان معادله ساختاری استفاده شده است. یک مدل سازی ریاضی بر اساس حساب اغتشاشات انجام شده است. در مدل سازی ریاضی فرض شده است که سیالات غیر قابل انحلال هستند و سرعت سقوط قطره در فاز سیال خارجی آن قدر کم باشد که آن را بتوان جریان خزشی لحاظ کرد. نتایج بدست آمده از حل تحلیلی تطابق خوبی با نتایج حاصل از مشاهدات آزمایشگاهی دارد. مؤلفه نرمال تنش ویسکوالاستیک به نیروی کشش سطحی^{۱۴} غلبه کرده و باعث ایجاد حفره ای^{۱۵} در قسمت انتهایی قطره می شود [5,6]. نتایج تجربی نشان داد که با افزایش حجم قطره یا همان قطر معادل قطره شکل قطره ناپایدار شده و کرویت خود را از دست می دهد و به شکل یک قطره پهن شده تبدیل می گردد. گورکان [7] مدل پاور لو^{۱۶} را برای قطره در حال سقوط در یک سیال نیوتنی در نظر گرفته است. اخیراً، اسماگین و همکاران [8] ته نشینی قطره سیال بینگهام^{۱۷} تغییرپذیر در سیال نیوتنی بی نهایت با استفاده از روش

نوروزی و همکاران [11] سقوط خزشی یک قطره ویسکوالاستیک در میان یک فاز مایع را به صورت تحلیلی بررسی کردند و نشان دادند که با افزایش حجم قطره، حفره ای در انتهای قطره ایجاد خواهد شد. آن ها از تکنیک اغتشاشات برای حل تحلیلی مسئله و از اعداد بی بعد دبورا و موئینگی به عنوان پارامتر اغتشاشی استفاده کردند. مدل مورد استفاده شده برای قطره ویسکوالاستیک، مدل اولدروییدی^{۲۳} می باشد. آن ها نشان دادند که با افزایش اعداد بی بعد دبورا و موئینگی حفره ایجاد شده در انتهای قطره رشد پیدا خواهد کرد. سقوط قطره نیوتنی در سیال غیرنیوتنی توسط لورنتنا و همکاران [12] به صورت آزمایشگاهی و پوتاوپو و همکاران [13] به صورت عددی بررسی شده است. یو و همکاران [14] به صورت عددی با روش المان محدود^{۲۴} تاثیر الاستیسیته را روی شکل و حرکت قطره بررسی کردند. مدل ساختاری استفاده شده برای فاز ویسکوالاستیک FENE-CR بوده است. در این پژوهش، یکبار فرض شده که سیال محیط ویسکوالاستیک و قطره در حال

¹⁸ Integral Equation Method

¹⁹ Prolate

²⁰ Froude

²¹ Viscoplastic

²² Aerodynamics

²³ Oldroyd-B Model

²⁴ Finite Element Method

¹ Terminal Velocity

² Drag Force

³ Stokes Equations

⁴ Creep

⁵ Momentum Equation

⁶ Viscosity

⁷ Reynolds

⁸ Capillary

⁹ Oblate

¹⁰ viscoelastic

¹¹ Perturbation

¹² Debora

¹³ The Third Order Constitutive Equation

¹⁴ Surface Tension

¹⁵ Dimple

¹⁶ Power-law

¹⁷ Bingham-Fluid

برخاست، ویسکوز هستند و بار دیگر فرض ویسکوالاستیک بودن قطره و ویسکوز بودن سیال محیط مدنظر بوده است و تاثیر پارامترهای دپورا و موینگی را بر روی سرعت حدی و نیروی پسا بررسی کردند. در ادامه این سری از بررسی‌ها آکارایا و همکاران [15,16] یک سری بررسی‌هایی روی خاصیت لزجت سیالاتی که با افزایش نرخ برش کاهش می‌یابند انجام دادند و حتی یک رابطه ریاضی برای تنش برشی حالاتی که عدد رینولدز پایین است پیشنهاد کردند. موهان و همکاران [17] روی حالت خاصی که سیال بیرونی غیرنیوتنی باشد تمرکز کردند و نشان دادند که با تغییر خاصیت‌های ماده بیرونی قطره شکل کروی خود را از دست داده و می‌تواند پهن و یا کشیده شود. واگنر و اسلاتری [18] با استفاده از حل تحلیلی توانستند شکل پایای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط در سیال ویسکوالاستیک محیط را بدست آورند. آن‌ها برای مدل‌سازی فاز قطره و سیال محیط از مدل سیال مرتبه سه برای هر دو فاز بهره بردند. در این مدل تمامی حالات ممکن جمله‌های تنش در یکسری ضرایب مجهول ضرب می‌شود که این ضرایب مفاهیم فیزیکی خاصی ندارند. روش حل آن‌ها استفاده از تکنیک حساب اغتشاشات برای هر دو سیال قطره و محیط بوده است.

در مقاله حاضر، تغییر شکل برای یک قطره ویسکوز در حال سقوط در اعداد رینولدز پایین به‌صورت تحلیلی بررسی می‌شود. برتری و نوآوری تحقیق حاضر نسبت به تحقیقات پیشین در نظر گرفتن ترم جابجایی (ترم غیرخطی) معادلات اندازه حرکت می‌باشد که در مطالعات پیشین به‌دلیل خزشی بودن جریان، این ترم صرف‌نظر شده است و چون این ترم غیرخطی می‌باشد، محاسبات و روش حل تحلیلی را سنگین و پیچیده خواهد کرد. در تحقیق حاضر ترم جابجایی (ترم غیرخطی) در معادلات اندازه حرکت در نظر گرفته شده است و به‌دلیل غیرخطی شدن معادلات اندازه حرکت از بسط عدد بی‌بعد رینولدز برای خطی سازی معادلات نیوتنی تحقیق حاضر استفاده می‌کنیم. دلیل استفاده از عدد بی‌بعد رینولدز برای خطی‌سازی، وجود عدد بی‌بعد رینولدز در معادلات اندازه حرکت پس از بی‌بعدسازی معادلات اندازه حرکت می‌باشد. ولی در تحقیقات پیشین به دلیل خزشی بودن جریان، از ترم جابجایی (ترم غیرخطی) صرف‌نظر شده بود. در تحقیق حاضر با استفاده از روش حل حساب اغتشاشات جریان لختی مربوط به سقوط قطره نیوتنی در اعداد رینولدز پایین را بررسی کرده‌ایم و حل خزشی مربوط به تحقیقات پیشین را ارتقا داده‌ایم.

در این تحقیق با استفاده از روش تحلیلی، سرعت و شکل نهایی قطره در شرایطی که دو سیال غیرقابل انحلال باشند مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. بررسی حرکت قطرات یک سیال در سیالی دیگر از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اهمیت این موضوع را می‌توان در صنایع پزشکی و داروسازی (به‌ویژه تولید پنی سیلین)، ته‌نشینی مراکز تصفیه آب، نیروگاه‌ها (برج‌های خنک‌کننده)، مبدل حرارتی، مبردها و ... مشاهده نمود. به منظور خطی‌سازی معادلات حاکم از پارامترهای بی‌بعد رینولدز (مربوط به سیال داخلی و خارجی) استفاده شده است. شکل قطره در حال سقوط در فاز نیوتنی با افزایش حجم قطره و به تبع آن افزایش نیروی لختی قطره با حجم مشخص از حالت کروی خارج می‌شود. به‌صورت عمده این پدیده به اختلاف تنش‌های نرمال سیال قطره مرتبط است. تغییر شکل قطره، علاوه بر نیروی لختی ناشی از نیروهای است که در فصل مشترک دو سیال وارد می‌شود. نیروهای کشش سطحی و تنش‌های فشاری و کششی بیشترین تاثیر را روی شکل قطره در حال سقوط دارند. برای قطرات به اندازه کافی کوچک شکل قطره کروی باقی می‌ماند در این حالت نیروی کشش سطحی پارامتر غالب می‌باشد که سعی در

کم کردن سطح مقطع قطره دارد که به تبع آن شکل نهایی کروی می‌شود. چرا که در این حالت، نیروی کشش سطحی به‌عنوان نیروی غالب عمل کرده و این نیرو همواره سعی دارد تا قطره کروییت خود را حفظ کرده و کمترین مساحت ممکن را اشغال نماید. با افزایش حجم قطره در حال سقوط، علاوه بر نیروی لختی، مؤلفه نرمال تنش قطره به نیروی کشش سطحی غلبه کرده و باعث ایجاد حفره‌ای در قسمت انتهایی قطره می‌شود. روش حل تحلیلی استفاده از حساب اغتشاشات می‌باشد که برای حل هر دو قسمت بیرونی (سیال محیط) و قسمت داخلی (قطره) مورد استفاده قرار می‌گیرد. اعداد بی‌بعد رینولدز و موینگی به‌عنوان پارامترهای اغتشاشی در نظر گرفته شده‌اند. در اینجا تاثیر عدد بی‌بعد k که نسبت لزجت قطره به محیط بیرون می‌باشد مورد بررسی قرار خواهد گرفت. همچنین، ما اثرات اعداد بی‌بعد رینولدز و موینگی را بر روی شکل قطره و میدان سرعت داخل و خارج قطره مورد بررسی قرار خواهیم داد.

2- معادلات حاکم و شرایط مرزی

در این بخش معادلات حاکم بر جریان قطره و سیال محیط ویسکوز در دستگاه مختصات کروی برای هر دو سیال ارائه شده است. در تحقیق حاضر، همه متغیرهای جریان به‌صورت بی‌بعد بررسی شده‌اند. برای توصیف ریاضی مسئله، ما از تحلیل اغتشاشات برای حل جریان داخلی و خارجی استفاده می‌کنیم. برای تعیین شکل قطره، جریان داخلی و خارجی را متقارن و شکل قطره را ثابت فرض می‌کنیم.

2-1- معادلات حاکم

سیال داخلی نیوتنی و تراکم‌ناپذیر است:

$$\nabla \cdot \tilde{u}^* = 0 \quad (2)$$

$$\tilde{\rho} \frac{D\tilde{u}^*}{Dt} = -\nabla \tilde{P}^* + \tilde{\rho} g + \nabla \cdot \tilde{\tau}^* \quad (3)$$

که در آن $\tilde{\tau}^* = 2\tilde{\eta}\tilde{D}^*$ و $\tilde{D}^* = \frac{1}{2}(\nabla \tilde{u}^* + \nabla \tilde{u}^{*T})$ است. در این جا $\tilde{\tau}^*$ تانسور تنش، $\tilde{D}^*$ تانسور تغییر شکل، $\tilde{u}^*$ مولفه سرعت، $\tilde{P}^*$ مولفه فشار و g شتاب گرانش می‌باشد.

لازم به ذکر است که در این جا و تمام متن مقاله تمامی پارامترهای ستاره‌دار حالات بعددار و پارامترهای بدون ستاره نمایانگر حالات بی‌بعد این پارامترها هستند. از آن جایی که اکثر پارامترها برای هر دو سیال داخلی و بیرونی یکی است برای نشان دادن سیال داخلی از زیر نماد " $\sim$ " و بدون علامت مربوط به سیال نیوتنی محیط بیرون می‌باشد.

معادلات حاکم برای سیال خارجی نیز همانند معادلات سیال داخلی می‌باشد:

$$\nabla \cdot u^* = 0 \quad (4)$$

$$\rho \frac{Du^*}{Dt} = -\nabla P^* + \rho g + \nabla \cdot \tau^* \quad (5)$$

که در آن $\tau^* = 2\eta D^* = \eta(\nabla u^* + \nabla u^{*T})$ می‌باشد.

2-2- شرایط مرزی

شرایط مرزی در فصل مشترک قطره و محیط بیرون عبارتند از:

مولفه شعاعی سرعت برای قطره و محیط بیرون صفر می‌باشد.

$$(u^*)_r = 0, (\tilde{u}^*)_r = 0 \quad (6-f)$$

مولفه مماسی سرعت باهم برابر هستند.

$$(u^*)_\theta = (\tilde{u}^*)_\theta \quad (6-b)$$

مولفه تنش مماسی باهم برابر هستند.

بیرون می‌باشد. در روابط بالا $g_r = g \cos(\theta)$ و $g_\theta = g \sin(\theta)$ است. به منظور ساده‌سازی و از بین بردن پارامتر فشار از معادله (13) نسبت به پارامتر θ مشتق گرفته و معادله (14) را در r ضرب کرده و از آن نسبت به r مشتق گرفته و از هم کم می‌کنیم.

روش حل به این شکل است که برای هر مرتبه و هر یک از سیالات قطره و محیط باید معادله یک‌بار حل شود. شکل معادله برای فاز قطره و سیال محیط در معادلات آورده شده است. با دارا بودن دو مجهول تانسور تنش و پروفیل فشار حل این معادله امکان‌پذیر نمی‌باشد، به همین خاطر با استفاده از روش تابع چرخش¹ پروفیل فشار را از معادله حذف کرده و پروفیل خط جریان برای هر مرتبه و هر کدام از سیالات محاسبه می‌گردد. هاپل و برنر [20] در سال 1965 با استفاده از این روش معادله جریان را به شکل زیر به‌دست آوردند.

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^{-n} + B_n r^{2-n} + C_n r^{n+1} + D_n r^{n+3}) Q_n(\mu) \quad (15)$$

در معادله بالا $\mu = \cos \theta$ و $Q_n(\mu)$ چندجمله‌ای Gegenbauer می‌باشد و با تابع لژاندر $P_n(\mu)$ رابطه‌ای به شکل زیر دارد.

$$Q_n(\mu) = \int_{-1}^{\mu} P_n(\mu) ds \quad (16)$$

در مختصات کروی تابع جریان به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{u}_j(r, \theta) = \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \theta}, -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial r} \right) \quad (17\text{-الف})$$

$$u_j(r, \theta) = \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta}, -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) \quad (17\text{-ب})$$

3-1- حساب اغتشاشات

از روش اغتشاشات برای حل معادلات حاکم جریان داخل و بیرون قطره استفاده شده است. پارامترهای اغتشاششی اعداد بی‌بعد رینولدز و موینگی می‌باشد. مولفه سرعت، توزیع فشار و تانسور تغییر شکل از قطره می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود:

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + \text{Re} \tilde{u}_1 \quad (18\text{-الف})$$

$$\tilde{P} = \tilde{P}_0 + \text{Re} \tilde{P}_1 \quad (18\text{-ب})$$

$$\tilde{D} = \tilde{D}_0 + \text{Re} \tilde{D}_1 \quad (18\text{-ج})$$

برای تانسور تنش نیز به همین شکل بسط می‌دهیم:

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0 + \text{Re} \tilde{\tau}_1 \quad (18\text{-د})$$

در این‌جا، روش اغتشاشات برای سیال بیرونی نیز استفاده می‌شود. مشابه جریان داخلی، ما باید سرعت، فشار و تانسور تغییر شکل را حول عدد بی‌بعد رینولدز بسط دهیم.

$$u = u_0 + \text{Re} u_1 \quad (19)$$

$$P = P_0 + \text{Re} P_1 \quad (20)$$

$$D = D_0 + \text{Re} D_1 \quad (21)$$

$$\tau = \tau_0 + \text{Re} \tau_1 \quad (22)$$

توابع جریان قطره داخلی و سیال خارجی را به شکل زیر بسط می‌دهیم:

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_0 + \text{Re} \tilde{\psi}_1 \quad (23)$$

$$\psi = \psi_0 + \text{Re} \psi_1 \quad (24)$$

همان‌طور که در معادلات مشاهده می‌شود، جملات دیگری با مرتبه بالاتر از $O(\text{Re}^2)$ وجود دارند که به آن‌ها پرداخته نشده است. زیرا پارامترهای

$$(\tau^*)_{r\theta} = (\tilde{\tau}^*)_{r\theta} \quad (6\text{-ج})$$

تغییر شکل قطره در حال سقوط در سیال نیوتنی از تعادل نیروی گرانشی، کشش سطحی، فشار و تنش مماسی به‌دست می‌آید [19].

$$n \cdot (\tilde{\tau}^* - \tau^*) \cdot n - P^* + \tilde{P}^* = \Gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (7)$$

که در آن n بردار عمود بر واحد سطح است و R_1 و R_2 شعاع انحنا اصلی هستند. ما فرض کردیم که مبدا مختصات در مرکز جرم قطره ثابت شده است.

از روش اغتشاشات برای حل معادلات حاکم جریان داخل و بیرون قطره استفاده شده است. پارامترهای اغتشاششی اعداد بی‌بعد رینولدز و موینگی می‌باشد.

به‌منظور ساده‌سازی معادلات حاکم مرسوم است از حالت بی‌بعد آن‌ها استفاده شود. در حل این معادلات از پارامترهای بی‌بعد زیر استفاده شده است:

$$\tilde{\tau} = \frac{\tilde{\tau}^* R}{\tilde{\eta} U_0}, \quad \tilde{u} = \frac{\tilde{u}^*}{U_0}, \quad \tilde{D} = \frac{\tilde{D}^* R}{U_0} \quad (8)$$

$$\tau = \frac{\tau^* R}{\eta U_\infty}, \quad u = \frac{u^*}{U_\infty} \quad (9)$$

پس از بی‌بعدسازی، شرایط مرزی و معادله تغییر شکل به‌صورت زیر بی‌بعد می‌شوند:

$$(u)_r = 0, \quad (\tilde{u})_r = 0 \quad (10\text{-الف})$$

$$(u)_\theta = \frac{1}{k+1} (\tilde{u})_\theta \quad (10\text{-ب})$$

$$(\tau)_{r\theta} = \frac{k}{k+1} (\tilde{\tau})_{r\theta} \quad (10\text{-ج})$$

$$n \cdot \left(\tilde{\tau} - \frac{k}{k+1} \tau \right) \cdot n - p + \tilde{p} = \frac{1}{\text{Ca}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (11)$$

در روابط (10) و (11)، k نسبت لزجت قطره به لزجت سیال خارجی می‌باشد که به‌دلیل بی‌بعدسازی به‌دست می‌آید. با استفاده از این عدد می‌توان بین سرعت مرجع جریان داخل قطره U_0 و سرعت نهایی U_∞ رابطه‌ای به‌وجود آورد که به‌صورت زیر می‌باشد:

$$U_0 = \frac{U_\infty}{(k+1)} \quad (12)$$

3-2- روش حل

در این بخش حل تحلیلی برای حرکت قطره در سیال نیوتنی ارائه می‌شود. در این‌جا از روش حساب اغتشاشات جهت حل میدان جریان استفاده شده است. حل معادله اندازه حرکت برای هر دو جریان و به‌دست آوردن توابع جریان، پروفیل‌های سرعت، فشار و تانسورهای تنش در این بخش مورد بحث قرار می‌گیرد. روند به‌دست آوردن سرعت نهایی قطره و شکل پایای آن به‌صورت تحلیلی در این فصل انجام می‌شود.

در تحقیق حاضر قطره پایای نیوتنی دارای تقارن محوری بوده و v_ϕ و $\partial/(\partial\phi)$ همواره صفر می‌باشند. با توجه به شکل قطرات از مختصات کروی استفاده شده است. معادلات اندازه حرکت بی‌بعد حاکم بر قطره داخلی و سیال بیرونی به شکل زیر می‌باشد:

$$\frac{D\tilde{u}}{Dt} = -\nabla \tilde{P} + \frac{\tilde{\rho} g_r R^2}{\tilde{\eta} U_0} + \frac{k}{\text{Re} \tilde{\gamma}} \nabla^2 \tilde{u} \quad (13)$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla P + \frac{\rho g_\theta R^2}{\eta U_\infty} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u \quad (14)$$

لازم به ذکر است که ضرایب شامل k در این روابط به خاطر تفاوت در بی‌بعدسازی آن‌ها ظاهر شده و همچنین γ نسبت چگالی قطره به محیط

¹ Vorticity

برای بدست آوردن شکل قطره، از معادله تعادل اختلاف تنش‌های نرمال قطره و سیال نیوتنی و نیروی کشش سطحی به شکل زیر استفاده می‌گردد. با قرار دادن پروفیل‌های فشار و تانسورهای تنش برای سیال داخلی و خارجی به ازای جمله اول حساب اغتشاشات به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\delta p = \frac{1}{Ca} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (35)$$

در رابطه بالا δp پرش فشار محیطی^۲ می‌باشد که مقدار آن هنگامی که $R_1 = R_2 = 1$ برابر $2/Ca$ می‌باشد.

برای مرتبه بعدی حساب اغتشاشات همین روند تکرار می‌شود، یعنی به همین ترتیب می‌توان جملات با توان یک را از معادله جدا و حل کرد. پس از جمع‌آوری جملات با مرتبه یک رینولدز معادله به شکل زیر به‌دست می‌آید.

$$E^4 \tilde{\psi}_1 = 0 \quad (36)$$

$$E^4 \psi_1 = \frac{Q_2(\mu)}{8} \frac{3k+2}{k+1} \left(r^2 - \frac{r}{2} \frac{3k+2}{k+1} - \frac{1}{2r} \frac{k}{k+1} \right) \quad (37)$$

در معادله بالا $Q_2(\mu) = -\frac{1}{2} \sin(\theta)^2 \cos(\theta)$ می‌باشد. بعد از حل این معادله و استفاده کردن از شرایط مرزی جواب جمله یک حساب اغتشاشات به‌دست می‌آید:

$$\tilde{\psi}_1 = -\frac{1}{2} (\tilde{f}_{r1}) \sin(\theta)^2 - \frac{1}{2} (\tilde{f}_{r2}) \sin(\theta)^2 \cos(\theta) \quad (38\text{-الف})$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{r1} &= -\frac{(3k+2)r^4}{16(k+1)} + \frac{(3k+2)r^2}{16(k+1)} \\ \tilde{f}_{r2} &= -\frac{(12k^2+23k+10)r^5}{160(k+1)^2} + \frac{(12k^2+23k+10)r^3}{160(k+1)^2} \end{aligned} \quad (38\text{-ب})$$

$$\psi_1 = -\frac{1}{2} (f_{r1}) \sin(\theta)^2 - \frac{1}{2} (f_{r2}) \sin(\theta)^2 \cos(\theta) \quad (39\text{-الف})$$

$$\begin{aligned} f_{r1} &= \frac{(3k+2)^2 r}{16(k+1)} - \frac{3k+2}{8(k+1)} r^2 + \frac{k(3k+2)}{16(k+1)^2} r \\ f_{r2} &= \frac{3k+2}{8(k+1)} r^2 - \frac{(3k+2)^2 r}{16(k+1)^2} - \frac{k(3k+2)}{16(k+1)^2} r \\ &\quad + \frac{k(15k^2+22k+8)}{80(k+1)^3} + \frac{k(15k^2+22k+8)}{80(k+1)^3} r^2 \end{aligned} \quad (39\text{-ب})$$

برای به‌دست آوردن سرعت نهایی قطره در قسمت قبل بیان شد که باید نیروی پسا وارد بر سطح قطره محاسبه شود و با صفر قرار دادن نیروی برآیند وارد بر قطره که شامل نیروی حجمی و پسا می‌باشد، سرعت نهایی قابل محاسبه است. مقادیر فشار برای هر دو جریان داخلی قطره و خارجی نیوتنی محیط را می‌توان با جایگذاری پروفیل سرعت به‌دست آمده در معادله اندازه حرکت یافت. همچنین مقادیر مربوط به τ_{rr} هم برای قطره و هم برای محیط بیرون با استفاده از رابطه بین تنش با تابع جریان به‌دست خواهد آمد.

بنابراین همانند مراحل قبل مقدار نیروی پسا را محاسبه می‌کنیم.

$$F_D = 2\pi \frac{3k+2}{k+1} + \text{Re} \frac{\pi}{4} \left(\frac{3k+2}{k+1} \right)^2 \quad (40)$$

با برابر قرار دادن رابطه نیروی پسا و حجمی مقدار سرعت حدی را می‌توان به دست آورد.

$$U_\infty = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho g R^2 (\gamma - 1)}{\eta (2\pi \frac{3k+2}{k+1} + \text{Re} \frac{\pi}{4} (\frac{3k+2}{k+1})^2)} \quad (41)$$

در تغییر شکل‌های کوچک رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} n \cdot \left(\tilde{\tau} - \frac{k}{k+1} \tau \right) \cdot n - p + \tilde{p} \\ = \frac{1}{Ca} \left(2 - 2\xi - \frac{d}{d\mu} [(1 - \mu^2) \frac{d\xi}{d\mu}] \right) \end{aligned} \quad (42)$$

اغتشاشی اعدادی کوچکتر از مقدار واحد می‌باشند و با رشد مرتبه آن‌ها به اعداد بسیار کوچک تبدیل می‌گردند به همین خاطر جملات بعدی حساب اغتشاشات کوچک و تأثیر ناچیزی را دارا می‌باشند.

3-2- حل معادلات

با جای‌گذاری بسط‌های اغتشاشی در معادله اندازه حرکت و جمع‌آوری جملات هم مرتبه معادله مرتبط با همان مرتبه به‌دست می‌آید. پس از جمع‌آوری جملات با مرتبه صفر رینولدز معادله به‌دست آمده همانند معادله حاکم بر سیال نیوتنی در مختصات کروی تحت جریان خزشی می‌شود:

$$E^4 \tilde{\psi}_0 = 0 \quad (25)$$

$$E^4 \psi_0 = 0 \quad (26)$$

در روابط بالا اپراتور $E^4 = E^2 E^2$ می‌باشد و E^2 به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (27)$$

بعد از حل این معادله و استفاده کردن از شرایط مرزی جواب جمله صفر حساب اغتشاشات به‌دست می‌آید که در این حالت دقیقاً برابر جملات به‌دست آمده توسط آقای هادامارد [1] است:

$$\tilde{\psi}_0 = \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^2}{4} \right) \sin(\theta)^2 \quad (28)$$

$$\psi_0 = \frac{1}{4} \left(-\frac{(3k+2)r}{k+1} + 2r^2 + \frac{k}{(k+1)r} \right) \sin(\theta)^2 \quad (29)$$

مقادیر فشار برای هر دو جریان داخلی قطره و خارجی نیوتنی محیط را می‌توان با جایگذاری پروفیل سرعت به‌دست آمده، از توابع جریان محاسبه شده، برای هر مرتبه در معادله اندازه حرکت یافت. گام بعدی در هر مرحله از حل، یافتن سرعت نهایی قطره می‌باشد. سرعت نهایی قطره در واقع سرعتی است که، سیال محیط و قطره در حالت پایا در فصل مشترک یکدیگر دارا هستند. برای بدست آوردن سرعت نهایی باید از برآیند نیروهای پسا و حجمی استفاده شود. برآیند نیروهای وارده بر قطره به‌صورت زیر می‌باشد.

$$F = F_D + F_B \quad (30)$$

در معادله بالا نیروی حجمی وارده بر قطره به‌صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$F_B = \frac{4\pi \rho g R^2 (1 - \gamma)}{3\eta U_\infty} \quad (31)$$

برای محاسبه نیروی پسا وارده بر سطح قطره از تئوری پایین و پل [21] استفاده می‌شود که به‌صورت زیر بیان شده است.

$$F_D = 8\pi \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\psi_\infty - \psi(r, \theta)}{r \sin^2 \theta} \quad (32)$$

در رابطه بالا $\psi_\infty = (r^2 \sin^2 \theta)/2$ و به آن خط جریان آزاد^۱ می‌گویند [21].

نیروی پسا حاصله به شکل زیر می‌باشد:

$$F_D = 2\pi \frac{3k+2}{k+1} \quad (33)$$

برای بدست آوردن سرعت نهایی قطره، برآیند نیروهای وارده بر سطح قطره در حال سقوط در حالت پایا برابر با صفر می‌باشد $F = 0$.

بنابراین، مقدار سرعت نهایی قطره در حال سقوط با مقدار بدست آمده از حل هادامارد [1] برابر شده و به شکل زیر می‌باشد:

$$U_\infty = \frac{2(k+1)}{3(3k+2)} \frac{\rho g R^2 (\gamma - 1)}{\eta} \quad (34)$$

² Jump Ambient Pressure

¹ Free Streaming Flow

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^{(1)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta) \frac{\partial \tau_{0,r\theta}}{\partial r} + 3\alpha_2 \cos\theta \sin\theta (\tau_{0,rr} - \tau_{0,\theta\theta}) \\ = \frac{k}{(k+1)} \\ (\tilde{\tau}_{r\theta}^{(1)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta) \frac{\partial \tilde{\tau}_{0,r\theta}}{\partial r} + 3\alpha_2 \cos\theta \sin\theta (\tilde{\tau}_{0,rr} \\ - \tilde{\tau}_{0,\theta\theta})) \end{aligned} \quad (52-د)$$

با استفاده از شرایط مرزی جدید تابع جریان مرتبه اول مطابق زیر محاسبه شده است:

$$\psi^{(1)} = -\frac{1}{2}(\tilde{f}^{(r1)}) \sin(\theta)^2 - \frac{1}{8}(\tilde{f}^{(r2)}) \sin(\theta)^2 (5 \cos(\theta)^2 - 1) \quad (53-الف)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(r1)} &= \frac{\alpha_2(4-2k)r^4}{5(k+1)} + \frac{(3k-3)r^2}{5(k+1)} \\ \tilde{f}^{(r2)} &= \frac{6\alpha_2(5)r^6}{35} + \frac{6\alpha_2(-12)r^4}{35} \\ \psi^{(1)} &= -\frac{1}{2}(f^{(r1)}) \sin(\theta)^2 - \frac{1}{8}(f^{(r2)}) \sin(\theta)^2 (5 \cos(\theta)^2 - 1) \end{aligned} \quad (53-ب)$$

$$f^{(r1)} = \frac{\alpha_2}{10(k+1)^2} \left[(3k^2 - k + 8)r + \frac{3k^2 - 3k + 6}{r} \right] \quad (54-الف)$$

$$f^{(r2)} = \frac{\alpha_2}{35(k+1)} \left[\frac{21k + 18}{r} - \frac{21k + 4}{r^3} \right] \quad (54-ب)$$

حال برای به دست آوردن تغییر شکل ناشی از این جمله ابتدا باید $\tilde{\tau}^{(1)}$ و $\tau^{(1)}$ را به دست آورده و در معادله (55) قرار دهیم:

$$\begin{aligned} n \cdot (\tau^{(1)} - \tilde{\tau}^{(1)}) \cdot n = \tau_{rr}^{(1)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta) \frac{\partial \tau_{0,rr}}{\partial r} \\ - 6\alpha_2 \cos\theta \sin\theta \tau_{0,r\theta} \\ - k(\tilde{\tau}_{rr}^{(1)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta) \frac{\partial \tilde{\tau}_{0,rr}}{\partial r} - 6\alpha_2 \cos\theta \sin\theta \tilde{\tau}_{0,r\theta}) \end{aligned} \quad (55)$$

با قرار دادن معادله (55) در معادله تنش نرمال (42) داریم:

$$\begin{aligned} -10\beta_2 \text{ReCa} P_3(\mu) = \frac{1}{\text{Ca}} \left(2 - 2\xi \right. \\ \left. - \frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d\xi}{d\mu} \right] \right) \end{aligned} \quad (56-الف)$$

که در آن

$$\beta_2 = \frac{3\alpha_2(173k + 142)}{700(k + 1)} \quad (56-ب)$$

با استفاده از شرایط مرزی معادله (43) و حل معادله (56-الف) داریم:

$$\xi = -\frac{3\alpha_2 \text{ReCa}^2(173k + 142)}{700(k + 1)} P_3(\mu) \quad (57)$$

تا به این جا تمامی جملات حساب اغتشاشات برای به دست آوردن توابع جریان، برای سیال قطره و محیط نیوتنی محاسبه شده است. برای محاسبه سرعت نهایی قطره در حال سقوط، تابع جریان سیال نیوتنی محیط را به صورت $\psi = \psi_0 + \text{Re}\psi_1 + \text{ReCa}\tilde{\psi}^{(1)}$ در معادله (32) قرار می دهیم. نیروی کلی پسا وارده بر سطح قطره به صورت زیر محاسبه می شود.

$$F_D = 2\pi \frac{3k + 2}{k + 1} + \text{Re} \frac{\pi}{4} \left(\frac{3k + 2}{k + 1} \right)^2 + \frac{2\pi\alpha_2 \text{ReCa}}{5(k + 1)^2} (3k^2 - k + 8) \quad (58)$$

سرعت نهایی قطره در حال سقوط با استفاده از تعادل نیروی حجمی وارده بر قطره و نیروی پسا کلی وارد شده بر سطح آن به صورت زیر محاسبه شده است:

$$U_\infty = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho g R^2 (\gamma - 1)}{\eta \left(2\pi \frac{3k + 2}{k + 1} + \text{Re} \frac{\pi}{4} \left(\frac{3k + 2}{k + 1} \right)^2 + \frac{2\pi\alpha_2 \text{ReCa}}{5(k + 1)^2} (3k^2 - k + 8) \right)} \quad (59)$$

که در آن $\mu = \cos\theta$ و ξ تابع تغییر شکل قطره از حالت کروی است. برای این که شکل قطره همچنان کروی باقی بماند باید مرکز جرم قطره در مرکز قطره باقی بماند. همچنین قانون بقای جرم نیز باید برقرار باشد. این دو شرط را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\int_{-1}^1 \xi d\mu = 0, \quad \int_{-1}^1 \xi \mu d\mu = 0 \quad (43)$$

بعد از محاسبه تنش های نرمال و جمله فشار با استفاده از معادله جریان و استفاده از معادله مرزی تنش های نرمال شکل جدید قطره به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\delta p - 4\alpha_2 \text{Re} P_2(\mu) = \frac{1}{\text{Ca}} \left(2 - 2\xi - \frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d\xi}{d\mu} \right] \right) \quad (44)$$

که در معادله بالا مقادیر δp و α_2 به صورت زیر تعریف شده اند:

$$\begin{aligned} \delta p &= \frac{2}{\text{Ca}} \\ \alpha_2 &= \frac{1}{960} \frac{(-243k^3 + 20\gamma k - 684k^2 + 20\gamma - 638k - 200)}{(k + 1)^3} \end{aligned} \quad (45)$$

که در نهایت تابع تغییر شکل ξ به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\xi = \frac{\text{ReCa} (-243k^3 + 20\gamma k - 684k^2 + 20\gamma - 638k - 200) (3 \cos(\theta)^2 - 1)}{1960 (k + 1)^3} \quad (46)$$

در حالتی که عدد رینولدز صفر باشد، با توجه به خزشی بودن جریان، جمله لختی از معادلات مومنتم حذف شده و جملات دارای توان غیر صفر از حساب اغتشاشات حذف گردیده و شکل قطره در حالت کروی باقی می ماند.

3-3- بررسی تغییر شکل روی جریان و شکل نهایی

در این مرحله با شکل تخمین زده شده در مرحله قبل حل جریان تصحیح و با تابع جریان جدید شکل دقیق تری از قطره محاسبه شده است. به این منظور جریان حول پارامتر رینولدز و موینگی بسط اغتشاشی داده شده اند:

$$\tilde{u} = \tilde{u}^{(0)} + \text{ReCa} \tilde{u}^{(1)} \quad (47)$$

$$u = u^{(0)} + \text{ReCa} u^{(1)} \quad (48)$$

به همین ترتیب برای توابع جریان خواهیم داشت:

$$E^4 \tilde{\psi}^{(1)} = 0 \quad (49)$$

$$E^4 \psi^{(1)} = 0 \quad (50)$$

در معادلات بالا $\tilde{u}^{(0)}$ و $u^{(0)}$ همان مقادیر محاسبه شده از اولین جمله حساب اغتشاشات $\tilde{u}_0$ و u_0 می باشند.

در مرحله قبلی تابع جریان با فرض کروی بودن قطره و با استفاده از شرایط مرزی در سطح کره به دست آمده اند. در این مرحله هدف بر آن است که توابع جریان در شکل تخمین زده شده جدید محاسبه شود. بنابراین در این مرحله شرایط مرزی در شکل تخمین زده شده اعمال شده است. به منظور ساده سازی آقایان ساسکراتزه و بلمونته [4] پیشنهاد کردند که شرایط مرزی همچنان روی $r = 1$ اعمال شود و در عوض خود شرایط مرزی روی شکل جدید بسط داده شود. شرایط مرزی بسط داده شده جدید به صورت زیر ارائه شده است:

$$u_r^{(1)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta) \frac{\partial u_{0,r}}{\partial r} - 3\alpha_2 \cos\theta \sin\theta u_{0,\theta} = 0 \quad (51-الف)$$

$$\tilde{u}_r^{(1)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta) \frac{\partial \tilde{u}_{0,r}}{\partial r} - 3\alpha_2 \cos\theta \sin\theta \tilde{u}_{0,\theta} = 0 \quad (51-ب)$$

$$\begin{aligned} u_\theta^{(1)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta) \frac{\partial u_{0,\theta}}{\partial r} + 3\alpha_2 \cos\theta \sin\theta u_{0,r} = \\ \frac{1}{(k + 1)} (\tilde{u}_\theta^{(1)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta) \frac{\partial \tilde{u}_{0,\theta}}{\partial r} \\ + 3\alpha_2 \cos\theta \sin\theta \tilde{u}_{0,r}) \end{aligned} \quad (51-ج)$$

متغیر نیز در شکل قطره به دست آمده، مشاهده نمی‌شود.

2-4- اعداد رینولدز و موینگی Ca

از متغیرهای مهم دیگری که می‌توانند در شکل قطره تاثیر داشته باشند اعداد بی‌بعد رینولدز و موینگی می‌باشند. عدد رینولدز نماینده نیروی لختی سیال می‌باشد. این عدد به صورت نسبت نیروی لختی به نیروی لزجت تعریف می‌شود. برای یک سیال و قطر معادل مشخص، هرچه عدد رینولدز افزایش پیدا کند نشان دهنده این واقعیت است که سرعت سیال موردنظر بیشتر می‌شود. تاثیر عدد بی‌بعد رینولدز در شکل قطرات در حال سقوط در "شکل 6" قابل مشاهده می‌باشند. عدد موینگی نماینده نیروی کشش سطحی در فصل مشترک دو سیال می‌باشد. این عدد با افزایش حجم و سرعت نهایی قطره و ثابت بودن ترکیب سیال قطره و محیط اطراف افزایش می‌یابد. "شکل 7" نشان دهنده اثر تغییرات عدد موینگی روی شکل پایای قطره در حال سقوط می‌باشند.

با افزایش هر کدام از اعداد رینولدز و موینگی حفره ایجاد شده در

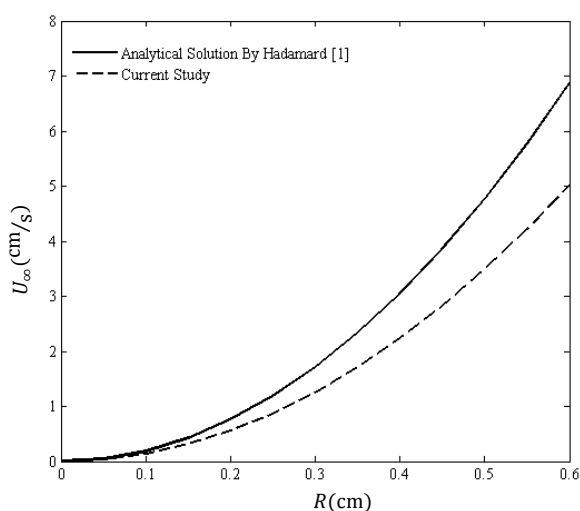


Fig. 1 Variation of terminal velocity with equivalent radius

شکل 1 تغییرات سرعت حدی بر حسب شعاع

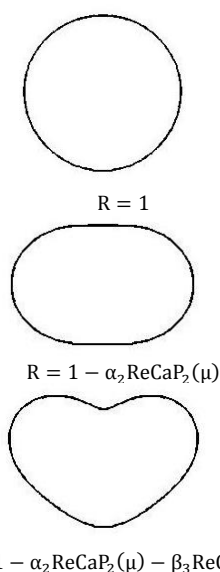


Fig. 2 Effects of different perturbation solution order on drop shape

شکل 2 تاثیر جملات با درجه‌های مختلف روی شکل قطره

با استفاده از شرط مرزی تنش‌های نرمال تغییر شکل اصلاح شده برابر با رابطه زیر به دست آمده است:

$$r(\theta) = 1 + \xi(\theta) = 1 - \alpha_2 \text{ReCa} P_2(\mu) - \beta_3 \text{ReCa}^2 P_3(\mu) \quad (60)$$

مراحل گفته شده تا به این‌جا حل تحلیلی شکل متقارن پایا و سرعت نهایی قطره در حال سقوط در فاز نیوتنی است.

4- نتایج و بحث

در این بخش نتایج حاصل از حل تحلیلی سقوط قطره در سیال ویسکوز ارائه می‌شوند. روش حل تحلیلی استفاده از حساب اغتشاشات برای هر دو جریان داخل و خارج بوده و اعداد بی‌بعد رینولدز و موینگی به عنوان پارامترهای اغتشاشی مورد استفاده قرار گرفتند.

در ابتدا به بررسی نتایج کار تحلیلی حاضر با کار آقای هادامارد [1] می‌پردازیم. در "شکل 1" نتایج به دست آمده برای تخمین سرعت حدی در حل تحلیلی آقای هادامارد [1] را با حل تحلیلی حاضر مقایسه می‌کنیم. همان‌طور که دیده می‌شود با افزایش حجم قطره سرعت سقوط افزایش می‌یابد. به وضوح می‌توان دریافت که حل حاضر تطابق خوبی با حل آقای هادامارد [1] دارد.

"شکل 2" تاثیر جملات محاسبه شده بر روی شکل قطره را نشان می‌دهد.

شکل اول از بالا مربوط به سقوط قطره نیوتنی می‌باشد. در حقیقت در این شکل اولین جمله از حل تحلیلی به نمایش درآمده است. شکل دوم مربوط به زمانی است که جمله دوم از معادله مرز قطره تاثیر داده شده است و آخرین شکل، جمله سوم از حل تحلیلی را شامل می‌گردد. همان‌طور که می‌بینیم، هر چه تعداد جملات حساب اغتشاشات بیشتر شود دقت شکل تولیدی بیشتر می‌گردد. در "شکل 2"، توابع $P_2(\mu)$ و $P_3(\mu)$ به ترتیب توابع لژاندر درجه دو و سه می‌باشند.

در "شکل 3" به روند تغییر شکل قطره برای حجم‌های مختلف حل حاضر می‌پردازیم. با افزایش سایز قطره و به تبع آن افزایش سرعت سقوط و اعداد رینولدز و موینگی شکل قطره از حالت کروی به حالت پهن شده تبدیل می‌شود. با افزایش حجم و این پارامترها یک فرورفتگی در انتهای قطره به وجود می‌آید که با ادامه روند، این فرورفتگی به سمت داخل رشد کرده و بزرگتر می‌شود.

1-4- نسبت لزجت k و نسبت چگالی γ

یکی از متغیرهای تأثیرگذار در شکل قطره نسبت لزجت k می‌باشد که به صورت نسبت لزجت قطره به لزجت سیال محیط بیرون تعریف می‌شود. "شکل 4" اثر تغییرات k روی شکل متقارن و پایای قطره در حال سقوط را نشان می‌دهد.

در "شکل 4"، مشاهده می‌شود که نسبت لزجت به ازای $k > 1$ نمی‌تواند زیاد روی شکل پایای قطره تأثیرگذار باشد. زیرا، در تمامی جملات به دست آمده برای شکل قطره مرتبه k در صورت و مخرج کسرها یکسان می‌باشد به همین جهت تأثیر آن چنانی به ازای مقادیر بزرگتر از یک برای این متغیر در شکل قطره به دست آمده، مشاهده نمی‌شود. همان‌طور که در "شکل 5" نیز مشاهده می‌شود نسبت چگالی نمی‌تواند زیاد روی شکل پایای قطره تأثیرگذار باشد. باید این مقدار بزرگتر از عدد 1 باشد، به این دلیل که برای سقوط قطره نیاز است چگالی قطره از چگالی محیط بیرون بیشتر باشد. به همین جهت، تأثیر آن چنانی به ازای مقادیر بزرگتر از یک برای این

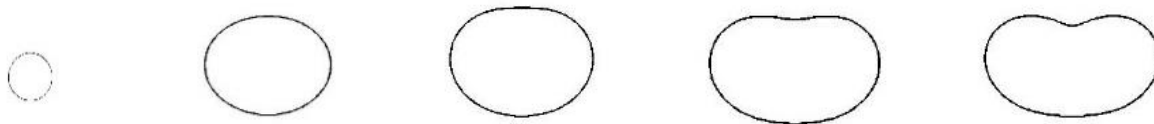
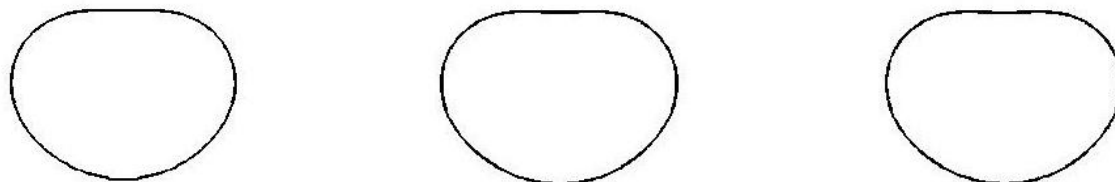
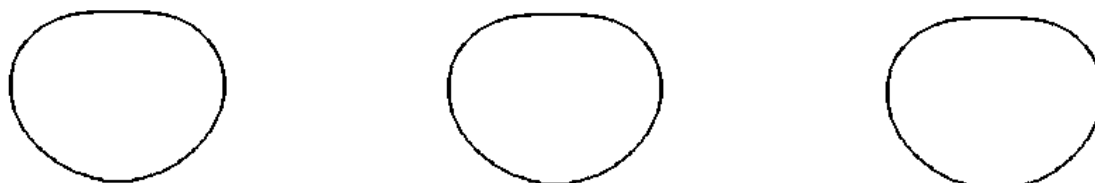
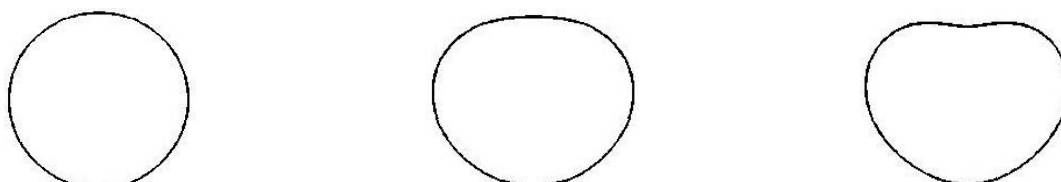
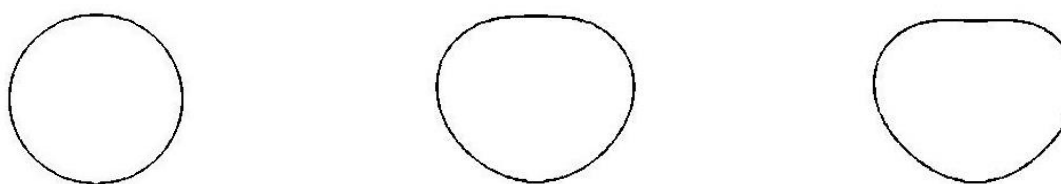


Fig. 3 Shapes of drops estimated using the current analytical solution

شکل 3 تغییر شکل به دست آمده از حل تحلیلی حاضر برای حجم‌های مختلف

 $k = 1$ $k = 10$ $k = 50$ Fig. 4 Effect of k variation on the drop shape at $Re = 0.9, Ca = 0.5$ شکل 4 تأثیر نسبت لزجت قطره به سیال محیط k برای قطره‌ای دارای $Re = 0.9, Ca = 0.5$  $\gamma = 1.5$ $\gamma = 3$ $\gamma = 5$ Fig. 5 Effect of γ variation on the drop shape at $Re = 0.9, Ca = 0.5$ شکل 5 تأثیر نسبت چگالی قطره به سیال محیط γ برای قطره‌ای دارای $Re = 0.9, Ca = 0.5$  $Re = 0.1, Ca = 0.6$ $Re = 0.7, Ca = 0.6$ $Re = 1.2, Ca = 0.6$ Fig. 6 Steady state shapes of drop at different Reynolds numbers at $k = 50$ شکل 6 شکل متقارن پایای قطره در حال سقوط با تغییر عدد رینولدز برای قطره‌ای با $k = 50$  $Re = 0.6, Ca = 0.1$ $Re = 0.6, Ca = 0.7$ $Re = 0.6, Ca = 1.2$ Fig. 7 Steady state shapes of drop at different Capillary numbers at $k = 50$ شکل 7 شکل متقارن پایای قطره در حال سقوط با تغییر عدد موینگی برای قطره‌ای با $k = 50$

افزایش می‌یابد. افزایش این تنش‌ها باعث غلبه بر نیروی کشش سطحی که میل به کروی نگه داشتن قطره را دارد، می‌شود و با ایجاد تمرکز تنش در قسمت انتهایی قطره یک حفره در آن ایجاد می‌کند.

"شکل 8" نشان دهنده توزیع تنش روی سطح قطره در حال سقوط می‌باشد. در "شکل 8" مقدار بی‌بعد مولفه نرمال تنش $\bar{\tau}_{rr}$ عمود بر سطح قطره رسم شده است. تغییر شکل قطره و ایجاد حفره در قسمت انتهایی آن

انتهای قطره رشد خواهد کرد. مشاهده می‌شود، دلیل این‌که با افزایش عدد رینولدز گودی ایجاد شده در بالای قطره رشد می‌کند به این صورت است که، با افزایش عدد رینولدز در واقع لختی سیال افزایش می‌یابد، هنگامی که رینولدز صفر باشد قطره نیوتنی بوده و اثری از لختی در آن وجود ندارد و قطره در حال سقوط، کاملاً کره گونه باقی می‌ماند.

با افزایش رینولدز لختی قطره رشد کرده و تنش‌های به وجود آمده

انتهای قطره می‌باشد که فرورفتگی در آن رخ می‌دهد. مؤلفه نرمال تنش که باعث تغییر شکل قطره می‌شود در این مکان دارای مقدار ماکزیمم می‌باشد. همچنین به‌ازای رینولدز مشخص مقدار $\bar{\tau}_{rr}$ تغییرات چشم‌گیری دارد که همین مؤلفه باعث ایجاد تغییر شکل در قطره می‌شود. همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، با افزایش عدد رینولدز به ازای حجم مشخص، میزان فرورفتگی افزایش یافته و قطره بیشتر از حالت کروی فاصله می‌گیرد.

یکی دیگر از پارامترهای مهم و تأثیر گذار بر مؤلفه نرمال تنش عدد موینگی می‌باشد. در "شکل 10" با افزایش عدد بی‌بعد موینگی مشاهده می‌شود که مقدار مؤلفه نرمال تنش قطره افزایش می‌یابد. همانند شکل قبلی با افزایش عدد موینگی، میزان $\bar{\tau}_{rr}$ در $\theta = 0$ افزایش می‌یابد و باعث ایجاد حفره‌ای در قسمت انتهایی قطره می‌شود.

از دیگر پارامترهایی که می‌توان اثر تغییرات آن را روی مؤلفه نرمال تنش قطره بررسی نمود نسبت لزجت قطره به محیط بیرون می‌باشد. در "شکل 11" می‌توان اثر این پارامتر را مشاهده کرد.

با توجه به "شکل 11"، با افزایش مقدار k مقدار مؤلفه نرمال تنش قطره که یکی از عوامل تأثیرگذار در تغییر شکل قطره در قسمت انتهایی آن می‌باشد، تغییر چندانی نخواهد داشت. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، این بی‌تأثیری ناشی از آن است که مقدار k در صورت و مخرج کسر مؤلفه نرمال تنش قطره یکسان بوده و تغییر چندانی در مقدار مؤلفه نرمال تنش قطره نخواهد داشت.

4-4- بردارهای سرعت داخل و خارج قطره

یکی دیگر از موارد مطالعه شده در این تحقیق، بررسی میدان سرعت داخل و خارج قطره با تغییر اعداد رینولدز و موینگی می‌باشد. "شکل 12" به بررسی اثر تغییر عدد رینولدز روی میدان سرعت داخل و خارج قطره پرداخته است. اثر تغییرات عدد موینگی روی میدان سرعت داخل و خارج قطره در "شکل 13" بررسی شده است. با افزایش اعداد بی‌بعد رینولدز یا موینگی مقادیر گردابه‌های داخل قطره تقویت شده و رشد می‌کند. با توجه به "شکل‌های 12 و 13" مشخص است، در داخل هر قطره دو گردابه متقارن وجود دارد که عکس جهت یکدیگر در حال چرخش می‌باشند. قدرت این گردابه‌ها با افزایش پارامترهای بدون بعد رینولدز و موینگی افزایش می‌یابند.

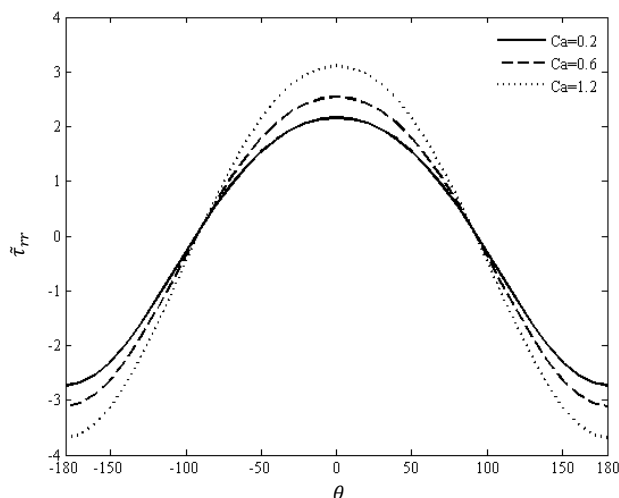


Fig. 10 Normal component of stress $\bar{\tau}_{rr}$ at free surface against the Capillary number for $Re = 0.6, k = 20$

شکل 10 تغییرات $\bar{\tau}_{rr}$ سطح قطره با تغییر موینگی برای $Re = 0.6, k = 20$

علاوه بر لختی جریان، از همین مؤلفه تانسور تنش قطره ناشی می‌شود. مشاهده می‌گردد، مقدار بیشینه این مؤلفه در $\theta = 0$ یعنی در قسمت انتهایی قطره رخ می‌دهد.

3-4- پارامترهای تأثیر گذار بر روی مؤلفه شعاعی تنش قطره

همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، عامل اصلی تغییر شکل قطره در حال سقوط در فاز نیوتنی علاوه بر لختی جریان، غلبه نیروی حاصل از مؤلفه نرمال شعاعی تنش $\bar{\tau}_{rr}$ بر نیروی کشش سطحی می‌باشد. برای قطرات به اندازه کافی کوچک، نیروی غالب که شکل پایای قطره در حال سقوط را مشخص می‌کند، کشش سطحی بین دو سیال می‌باشد. با افزایش حجم قطره تنش شعاعی افزایش می‌یابد و به‌عنوان نیروی غالب باعث ایجاد فرورفتگی در قسمت انتهایی قطره می‌گردد. در "شکل 9" می‌توان اثر تغییرات عدد بی‌بعد رینولدز بر $\bar{\tau}_{rr}$ را مشاهده نمود.

در "شکل 9" مشاهده می‌گردد، با افزایش عدد رینولدز علاوه بر افزایش لختی، میزان $\bar{\tau}_{rr}$ در $\theta = 0$ افزایش می‌یابد. در واقع $\theta = 0$ همان قسمت

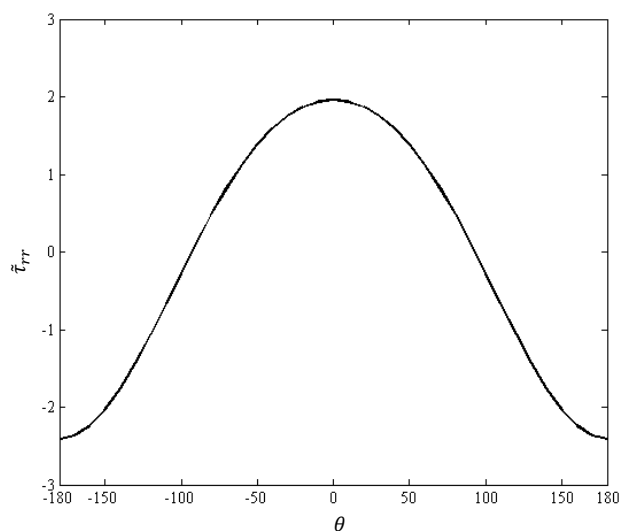


Fig. 8 Normal component of stress $\bar{\tau}_{rr}$ at free surface for $Re = 0.4, Ca = 0.6, k = 20$

شکل 8 تغییرات تنش $\bar{\tau}_{rr}$ سطح قطره برای $Re = 0.4, Ca = 0.6, k = 20$

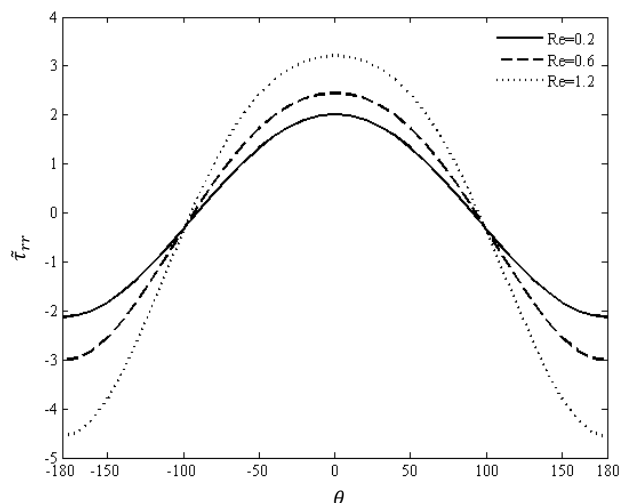


Fig. 9 Normal component of stress $\bar{\tau}_{rr}$ at free surface against the Reynolds number for $Ca = 0.6, k = 20$

شکل 9 تغییرات $\bar{\tau}_{rr}$ سطح قطره با تغییر رینولدز برای $Ca = 0.6, k = 20$

5- نتیجه گیری

در این تحقیق شکل و حرکت سقوط قطره در سیال نیوتنی به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. از حساب اغتشاشات برای هر دو جریان به عنوان روش حل استفاده شده است. اعداد بی بعد رینولدز و موینگی به عنوان پارامترهای اغتشاشی مورد استفاده قرار گرفتند. به منظور خطی سازی معادلات حاکم از پارامتر بی بعد رینولدز استفاده شده است. دستگاه مختصات مورد استفاده در تمام مسأله برای هر دو جریان داخل و خارجی کروی می باشد. براساس مطالعات انجام شده بر روی تنش نرمال در تحقیق حاضر می توان گفت این پدیده به اختلاف تنش های نرمال بین سیال داخلی و خارجی مرتبط می باشد.

با بررسی پارامترهای تأثیر گذار روی حرکت و شکل قطرات مشخص گردید که:

- با افزایش عدد بی بعد رینولدز حفره ایجاد شده در قسمت انتهایی قطره رشد و توسعه می یابد و سرعت نهایی قطره کاهش پیدا می کند.
- تغییرات نسبت لزجت k روی شکل پایای قطرات تأثیر چندانی ندارد.
- افزایش عدد موینگی Ca باعث رشد حفره ایجاد شده می گردد.
- با افزایش اعداد بی بعد رینولدز و موینگی میدان های سرعت داخل و خارج قطره رشد خواهند کرد.

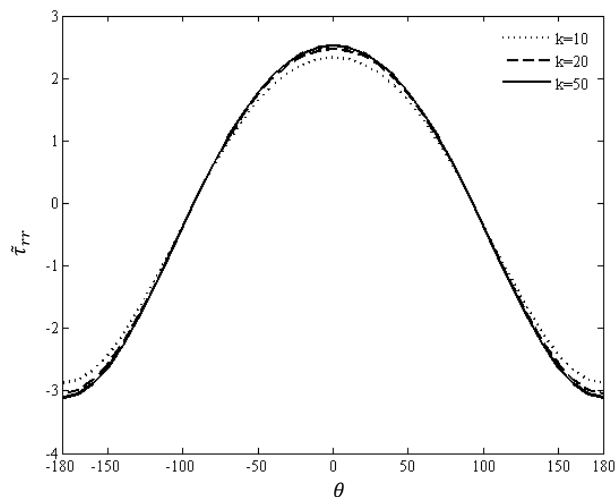
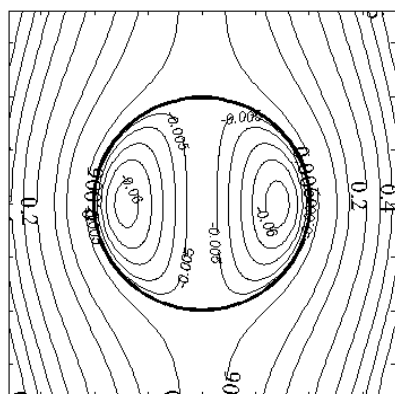


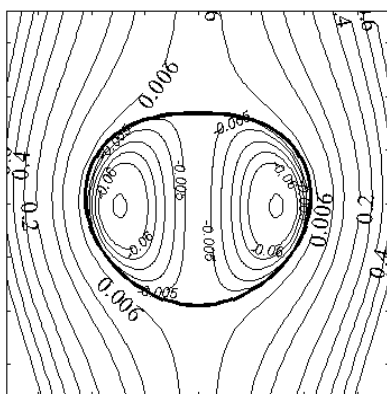
Fig. 11 Normal component of stress τ_{rr} at free surface against the viscosity ratio for $Ca = 0.6, Re = 0.6$

شکل 11 تغییرات τ_{rr} سطح قطره با تغییر k برای $Ca = 0.6, Re = 0.6$

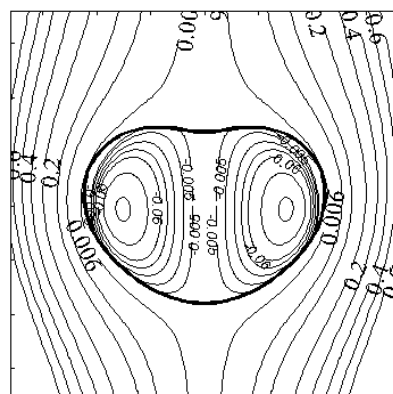
همان طور که قبلاً نیز گفته شد، پارامترهای بی بعد نسبت لزجت k و نسبت چگالی γ تأثیری بر روی شکل قطره ندارند. در "شکل های 14 و 15" نیز مشاهده می شود که پارامترهای بی بعد نسبت لزجت k و نسبت چگالی γ تأثیری بر روی میدان های سرعت داخل و خارج قطره ندارند.



Re = 0.1, Ca = 0.6



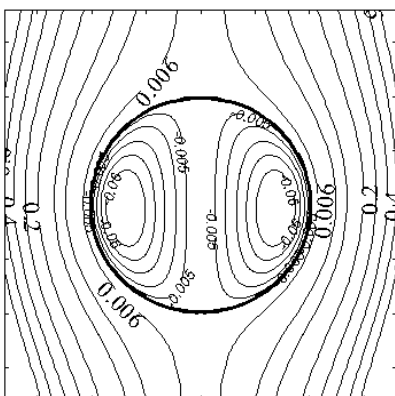
Re = 0.7, Ca = 0.6



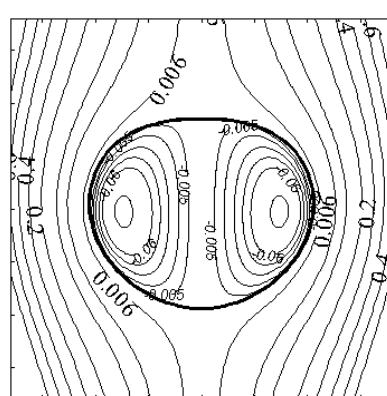
Re = 1.2, Ca = 0.6

Fig. 12 Streamlines of interior and exterior flow in different Reynolds numbers at $Ca = 0.6, k = 20$

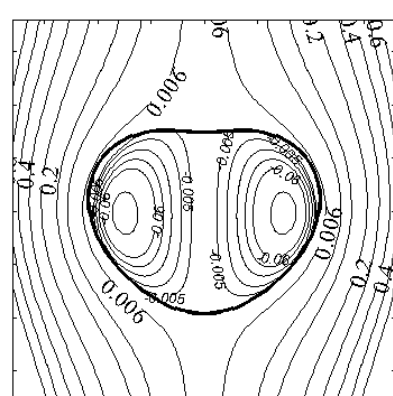
شکل 12 میدان سرعت داخل و خارج قطره با تغییر عدد رینولدز برای $Ca = 0.6, k = 20$



Re = 0.6, Ca = 0.1



Re = 0.6, Ca = 0.7



Re = 0.6, Ca = 1.2

Fig. 13 Streamlines of interior and exterior flow in different Capillary numbers at $Re = 0.6, k = 20$

شکل 13 میدان سرعت داخل و خارج قطره با تغییر عدد موینگی برای $Re = 0.6, k = 20$

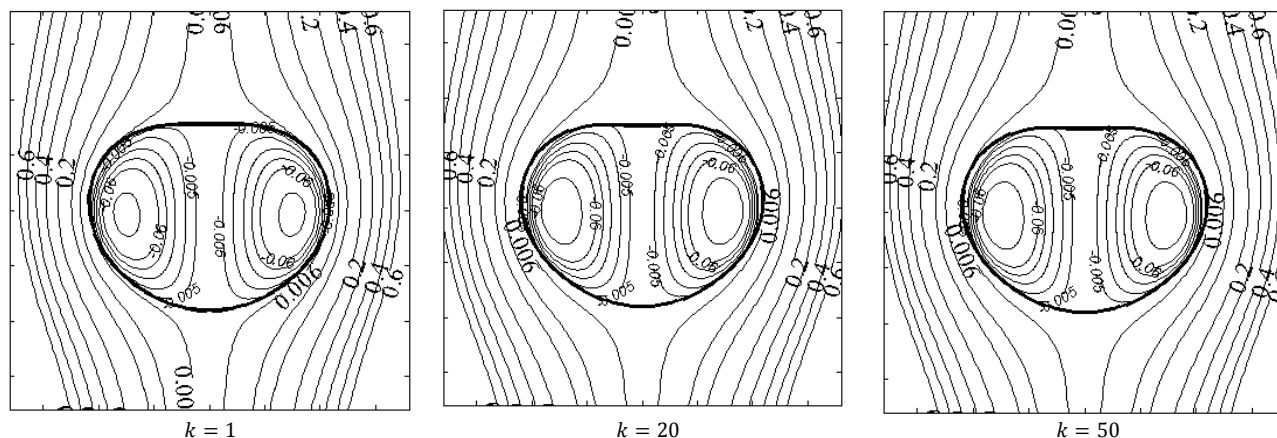


Fig. 14 Streamlines of interior and exterior flow in different k variation at $Ca = 0.5$, $Re = 0.9$

شکل 14 میدان سرعت داخل و خارج قطره با تغییر عدد k برای $Ca = 0.5$, $Re = 0.9$

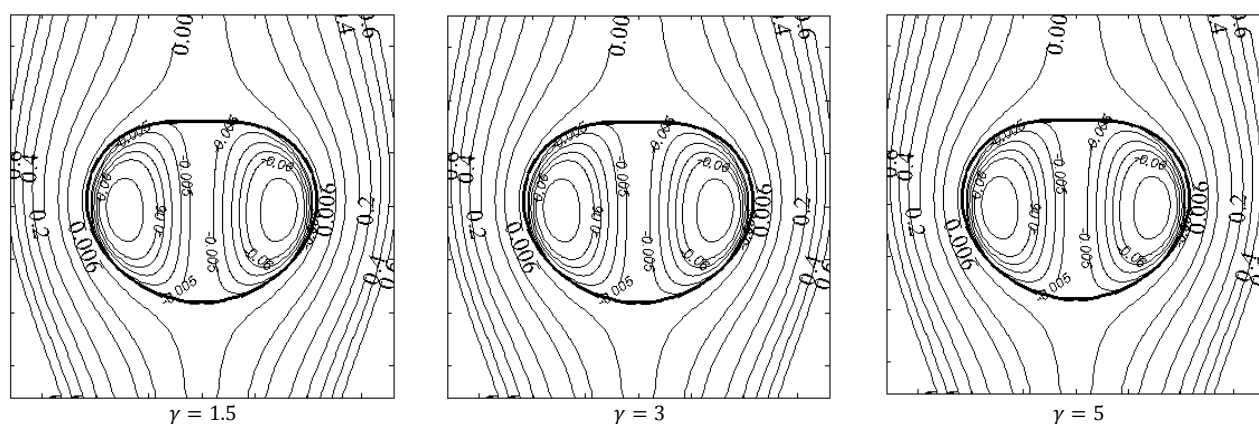


Fig. 15 Streamlines of interior and exterior flow in different γ variation at $Ca = 0.5$, $Re = 0.9$

شکل 15 میدان سرعت داخل و خارج قطره با تغییر عدد γ برای $Ca = 0.5$, $Re = 0.9$

تانسور تنش قطره ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$)	$\bar{\tau}$
جهت زاویه‌ای دستگاه مختصات کروی	θ
چگالی (kgm^{-3})	ρ
کشش سطحی (kg s^{-2})	Γ

7- مراجع

- [1] J. Hadamard, Mouvement permanent lent d'une sphere liquide et visqueuse dans un liquide, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, Vol. 152, No. 25, pp. 1735–1738, 1911 (In French).
- [2] W. Ryzczynski, Über die fortschreitende Bewegung einer flüssigen Kugel in einem zähen Medium, *Bulletin international de l'Académie des sciences de Cracovie*, Vol. 1, pp. 40–46, 1911 (In German).
- [3] T. D. Taylor, A. Acrivos, On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 18, No. 3, pp. 466–476, 1994.
- [4] M. C. Sostarez, A. Belmonte, Motion and shape of a viscoelastic drop falling through a viscous fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 497, pp. 235–252, 2003.
- [5] G. I. Taylor, The formation of emulsions in definable fields of flow, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, Vol. 146, No. 858, pp. 501–523, 1934.
- [6] H. A. Stone, Dynamics of drop deformation and breakup in viscous fluids, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 26, No. 1, pp. 65–102, 1994.
- [7] T. Gurkan, Motion of a circulating power-law drop translating through Newtonian fluid at intermediate Reynolds numbers, *Chemical Engineering Communication*, Vol. 80, No. 1, pp. 53–67, 1989.
- [8] I. Smagin, M. Pathak, O.M. Lavrenteva, A. Nir, Motion and shape of an axisymmetric viscoplastic drop slowly falling through a viscous fluid, *Rheologica Acta*, Vol. 50, No. 4, pp. 361–374, 2011.
- [9] S. Mukherjee, K. Sarkar, Viscoelastic drop falling through a viscous medium, *Physics of Fluids*, Vol. 23, No. 1, pp. 13101, 2011.
- [10] G. German, V. Bertola, The free-fall of viscoplastic drops, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 165, No. 13, pp. 825–828, 2010.

6- فهرست علائم

عدد موینگی	$Ca = \frac{\eta U_{\infty}}{\Gamma}$
تانسور تغییر شکل (s^{-1})	D
برآیند نیروها (kgms^{-2})	F
نیروی پسا (kgms^{-2})	F_D
نیروی حجمی (kgms^{-2})	F_B
نسبت لزجت	$k = \frac{\bar{\eta}_0}{\eta}$
بردار عمود بر سطح	n
فشار استاتیکی بی‌بعد	$P = \frac{P^* R}{\eta U_{\infty}}$
عدد رینولدز	$Re = \frac{\rho U_{\infty} R}{\eta}$
جهت شعاعی دستگاه مختصات کروی	r
سرعت مرجع سیال نیوتنی (ms^{-1})	U_{∞}
سرعت مرجع قطره (ms^{-1})	U_0

علائم یونانی

تابع تغییر شکل	ξ
تابع جریان سیال نیوتنی (s^{-1})	ψ
تابع جریان قطره (s^{-1})	$\bar{\psi}$
تانسور تنش سیال نیوتنی ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$)	τ

- deformation in non-newtonian media, *Chemical Engineering Communication*, Vol. 32, No. 8, pp. 863-872, 1978.
- [17] V. Mohan, R. Nagarajan, D. Venkateswarlu, Fall of drops in non-Newtonian media, *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 50, No. 1, pp. 37-40, 1972.
- [18] M. G. Wagner, J. C. Slattery, Slow flow of a non-Newtonian fluids past a droplet, *AIChE Journal*, Vol. 17, No. 5, pp. 1198-1207, 1971.
- [19] G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, pp. 320-410, Cambridge University: Cambridge University Press, 1967.
- [20] J. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, pp. 243-315, New Jersey: Prentice-Hall, 1965.
- [21] L. E. Payne, W. H. Pell, The Stokes flow problem for a class of axially symmetric bodies, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 7, No. 4, pp. 529-342, 1960.
- [11] M. Norouzi, B. , Vamarzani, B. Firoozabadi, Analytical solution for creeping motion of a viscoelastic drop falling through a Newtonian fluid, *Korea-Australia Rheology Journal*, Vol. 26, No. 1, pp.91-104, 2014.
- [12] O.M. Levrenteva, Y. Holenberg, A. Nir, Motion of viscous drops in tubes filled with yield stress fluid, *Chemical Engineering Communication*, Vol. 64, No. 22, pp. 4772-4786, 2009.
- [13] A. Potapov, R. Spivak, O. M. Laverenteva and A. Nir, Simulation of motion and deformation of Newtonian drops in Bingham fluid, *Industrial and Engineering Chemistry Research*, Vol. 45, No. 21, pp. 6985-6995, 2006.
- [14] R. You, A. Borhan, H. Haj-Hariri, A finite volume formulation for simulating drop motion in a viscoelastic two-phase system in a viscoelastic two-phase system, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 153, No. 2, pp. 109-129, 2008.
- [15] A. Acharya, R.A. Mashelkar, Motion of liquid drops in rheologically complex fluids, *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 56, No. 1, pp. 19-25, 1978.
- [16] A. Acharya, R. A. Mashelkar, J. Ulbrecht, Mechanics of bubble motion and