مجله مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1396، دوره 17، شماره 9، ص‌ص 36-44

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

کمانش ترموالاستیک ورق مستطیل‌شکل مدرج تابعی براساس تئوری بهبودیافته مرتبه سوم تغییر شکل برشی

هیربد احمدی‌فر[1]، امین یاقوتیان[2*]

1- دانشجوی کارشناسی‌ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهواز، اهواز
2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز
* اهواز، صندوق پستی 6135743337، a.yaghootian@scu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 28 اردیبهشت 1396
پذیرش: 14 تیر 1396
ارائه در سایت: 10 شهریور 1396

کلید واژگان:
کمانش ترموالاستیک
ورق مدرج تابعی
تئوری بهبودیافته مرتبه سوم تغییر شکل برشی

چکیده

در این پژوهش، از تئوری بهبودیافته مرتبه سوم تغییر شکل برشی، جهت تحلیل کمانش ترموالاستیک ورق مستطیل‌شکل ساخته‌شده از ماده مدرج تابعی استفاده شده است. فرض شده که ورق تحت دو نوع بارگذاری افزایش یکنواخت درجه حرارت و افزایش درجه حرارت خطی در راستای ضخامت قرار دارد و نیز ترکیب مواد تشکیل‌دهنده ورق مدرج تابعی مطابق با قانون توزیع توانی ردی در راستای ضخامت تغییر می‌کند. همچنین، ورق بر تکیه‌گاه‌های ساده در نظر گرفته شده است. ابتدا روابط کرنش- جابجایی غیرخطی برمبنای تئوری بهبودیافته مرتبه سوم در نظر گرفته شده و معادلات تعادل و پایداری ورق استخراج گردیده است. سپس جابجایی‌ها و نیروهای پیش‌کمانش با استفاده از معادلات تعادل به‌دست آمده و در معادلات پایداری گذاشته می‌شود. با حل معادلات پایداری، رابطه اختلاف دمای کمانش به‌دست می‌آید. مقدار بحرانی اختلاف دمای کمانش، با کمینه کردن رابطه استخراج‌شده، نسبت به پارامترهای نیم‌موج به‌دست می‌آید. با هدف صحت‌سنجی نتایج، روابط به‌دست آمده برای اختلاف دمای کمانش، با مراجع مقایسه گردیده است. نتایج نشان می‌دهد که مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش حاصل از تئوری بهبودیافته مرتبه سوم، پایین‌تر از نتایج به‌دست آمده از تئوری‌های کلاسیک، مرتبه اول و مرتبه سوم برشی است. همچنین، مقدار اختلاف دمای کمانش در حالت افزایش خطی درجه حرارت از حالت افزایش یکنواخت دما بیشتر است و هرچه ورق ضخیم‌تر باشد میزان تفاوت بین این دو مقدار بیشتر می‌گردد.

Thermoelastic buckling of functionally graded rectangular plate based on improved third order shear deformation theory

Hirbod Ahmadifar[1], Amin Yaghootian[2*]

1- Department of Mechanical Engineering, Ahvaz Branch, Islamic Azad University, Ahvaz, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran
* P.O.B. 6135743337, Ahvaz, Iran, a.yaghootian@scu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 18 May 2017
Accepted 05 July 2017
Available Online 01 September 2017

Keywords:
Thermoelastic Buckling
Functionally Graded Plate
Improved Third Order Shear Deformation Theory

ABSTRACT

In this study, an improved third order shear deformation theory is used to analyze the thermoelastic buckling of a functionally graded rectangular plate. The plate is assumed to be under two types of thermal loading, namely, uniform temperature rise across the thickness and linear temperature change across the thickness of the plate. Moreover, the material properties of the functionally graded plate vary linearly through the thickness and simply supported are considered for all edges of the plate. First, the nonlinear strain-displacement relations are considered based on improved third order theory and then the equilibrium and stability equations are derived. In continue, displacements and the pre-buckling forces are calculated using the equilibrium equations. The temperature difference relation of buckling is obtained by solving the stability equations. To obtain the critical temperature difference, the recent relation is minimized with respect to the number of half wave parameters. Resulting equations are compared with the literature. The results show that, the values of buckling temperature difference obtained based on improved third order shear deformation theory, are lower compared with the classical plate theory, first and third order shear deformation theories. Moreover, the value of critical temperature difference under linear temperature change is bigger compared with the uniform temperature rise across the thickness, and the difference between the two values will be bigger with increasing the thickness of the plate.

1- مقدمه

مواد مدرج تابعی یا FGM[1] در سال 1984 توسط گروهی از دانشمندان ژاپنی به‌عنوان موادی با قابلیت تحمل دما معرفی شدند. FGM ماده‌ای متشکل از دو یا چند جز است و خواص مکانیکی و حرارتی آن به‌صورت پیوسته با مکان تغییر می‌کند. این ویژگی به دلیل تغییر تدریجی ترکیب و درصد حجمی

[1] Functionally Graded Materials

Please cite this article using:
H. Ahmadifar, A. Yaghootian, Thermoelastic buckling of functionally graded rectangular plate based on improved third order shear deformation theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 9, pp. 36-44, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.7.3]

اجزای سازنده ماده در فرآیند ساخت آن، ایجاد می‌شود. لذا این مواد جزو مواد غیرهمگن[1] محسوب می‌شوند. FGM از مقاومت مکانیکی و حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی، سایش، خزش و خستگی برخوردار است و در صنایع مختلف از جمله هوافضا و خودروسازی مورد توجه قرار می‌گیرد [1]. کمانش جزو پدیده‌های نامطلوب و مخرب در ورق‌ها محسوب می‌شود. لذا طراحان می‌بایست با محاسبات دقیق و در نظر گرفتن پیش‌بینی‌های لازم از به‌وجود آمدن پدیده کمانش در اجزای تشکیل‌دهنده سازه جلوگیری کنند [2]. تاکنون پژوهش‌های بسیاری در ارتباط با تحلیل کمانش ورق‌ها با استفاده از تئوری‌های کلاسیک، مرتبه اول و مرتبه سوم تغییر شکل برشی انجام شده است. ردی و خدیر [3] حل تحلیلی و اجزا محدود کمانش و ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی مرکب چندلایه را تحت شرایط مرزی مختلف با استفاده از تئوری‌های کلاسیک، مرتبه اول و مرتبه سوم برشی مورد مطالعه قرار دادند. مطالعات ایشان نشان داد که تئوری کلاسیک بار کمانش و فرکانس طبیعی را بیش از مقدار پیش‌بینی‌شده محاسبه می‌کند درصورتی‌که تئوری‌های مرتبه اول و سوم که اثرات برشی را در نظر می‌گیرند، پیش‌بینی دقیق‌تری از رفتار کمانش و ارتعاش چندلایه ارائه می‌دهند.

جواهری [2] کمانش ورق مستطیل‌شکل مدرج تابعی را تحت بارهای مکانیکی و حرارتی مختلف با استفاده از تئوری‌های کلاسیک و مرتبه سوم برشی بررسی کرد. وی نتیجه گرفت که استفاده از تئوری برشی مرتبه سوم باعث تعیین مقادیر بحرانی بار یا اختلاف دمای کمانش ورق با دقت بالاتری می‌شود و استفاده از تئوری کلاسیک منجر به تقریب بالاتری در محاسبه مقادیر بحرانی بار یا اختلاف دمای کمانش می‌شود. جواهری و اسلامی [4] حل بسته کمانش ورق‌های مستطیل‌شکل FGM را تحت چهار نوع بار حرارتی، با استفاده از تئوری کلاسیک صفحات مورد بررسی قرار دادند و نتایج را با ورق همگن ایزوتروپ[2] تحت همان شرایط مقایسه کردند. ایشان نتیجه گرفتند که مقدار بحرانی اختلاف دمای کمانش ورق FGM از مقادیر متناظر برای ورق همگن پایین‌تر است. همچنین، در تحقیق دیگری [5] با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی، کمانش حرارتی ورق‌های مستطیل‌شکل مدرج تابعی را بررسی کردند و نتیجه گرفتند که تئوری مرتبه سوم بار بحرانی کمانش را در مقایسه با تئوری کلاسیک کمتر محاسبه می‌کند.

مصورعلی و اسلامی [6] به تحلیل کمانش ترموالاستیک ورق‌های نازک ارتوتروپ[3] تحت سه نوع بارگذاری حرارتی براساس تئوری برشی مرتبه بالا پرداختند. ایشان از روش انرژی جهت استخراج معادلات تعادل و از روش تغییری برای به‌دست آوردن معادلات پایداری استفاده کرده و با حل معادلات پایداری رابطه اختلاف دمای کمانش را محاسبه کردند. همچنین، ایشان کمانش ورق‌های ایزوتروپ دارای نقص اولیه را مورد مطالعه قرار دادند. نجفی‌زاده و یوسف‌زاده [7] کمانش ورق مستطیلی FGM را تحت دو نوع بارگذاری حرارتی با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی بررسی کردند. ایشان نتایج خود را با نتایج حاصل از تئوری کلاسیک صفحه مقایسه کرده و نتیجه گرفتند که تئوری کلاسیک منجر به تقریب بالاتری در محاسبه اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق می‌گردد. نجفی‌زاده و حیدری [8] کمانش ورق‌های دایره‌ای‌شکل مدرج تابعی را تحت انواع بارهای حرارتی با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی مورد مطالعه قرار دادند. ایشان نتایج خود را با نتایج به‌دست آمده از تئوری‌های کلاسیک و مرتبه اول برشی مقایسه کرده و نتیجه گرفتند که تئوری مرتبه سوم، پیش‌بینی دقیق‌تری از رفتار کمانش ورق‌های دایره‌ای FGM نسبت به تئوری‌های کلاسیک و مرتبه اول می‌کند.

صمصام‌شریعت و اسلامی [9] کمانش ورق‌های مدرج تابعی مستطیلی دارای نقص اولیه را تحت سه نوع بار حرارتی براساس تئوری مرتبه اول برشی مورد بررسی قرار دادند. ایشان نتیجه گرفتند که تئوری کلاسیک مقدار اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق را، به‌خصوص زمانی‌که ضخامت ورق زیاد باشد، بیشتر از مقدار پیش‌بینی‌شده محاسبه می‌کند. تئوری بهبودیافته مرتبه سوم تغییر شکل برشی[4] توسط شی [10] ارائه شد. وی از این تئوری جهت تحلیل استاتیکی تیرها و ورق‌های ایزوتروپ و ارتوتروپ استفاده کرد و نتیجه گرفت که تئوری بهبودیافته مرتبه سوم صحت بیشتری نسبت به دیگر تئوری‌های مرتبه بالا دارد. بداغی و سعیدی [11] کمانش ورق‌های ضخیم مدرج تابعی مستطیل‌شکل را با استفاده از تئوری مرتبه بالای برشی مورد مطالعه قرار دادند. ایشان از روش لوی[5] جهت حل معادلات پایداری ورق استفاده نموده و تاثیر شرایط مرزی مختلف بر بار بحرانی کمانش را بررسی کردند. ژانگ و همکارانش [12] به مطالعه رفتار کمانش، ارتعاشات آزاد و خمش استاتیکی میکروتیرهای مدرج تابعی بر بنیان الاستیک با استفاده از تئوری بهبودیافته مرتبه سوم تغییر شکل برشی پرداختند. ایشان از قانون موری-تانکا[6] جهت تخمین توزیع خواص مواد در جهت ضخامت استفاده کردند و نشان دادند که نتایج عددی حاصل از تئوری بهبودیافته مرتبه سوم تغییر شکل برشی تطابق قابل قبولی با نتایج حاصل از تئوری مرتبه سوم ردی دارد.

به‌کار بردن تئوری بهبودیافته مرتبه سوم تغییر شکل برشی، می‌تواند منجر به تقریب پایین‌تری در محاسبه اختلاف دمای بحرانی کمانش یک ورق ضخیم مدرج تابعی شود که تاکنون کمتر مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. لذا در این پژوهش از تئوری بهبودیافته مرتبه سوم، جهت تحلیل کمانش ورق ضخیم مدرج تابعی تحت دو نوع بارگذاری افزایش یکنواخت دما و افزایش درجه حرارت خطی در راستای ضخامت استفاده می‌شود. از جمله نوآوری‌های پژوهش حاضر، در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی فون - کارمن[7] در روابط کرنش- جابجایی تئوری بهبودیافته مرتبه سوم برشی به‌منظور محاسبه اختلاف دمای کمانش می‌باشد.

2- پروفیل توزیع فلز و سرامیک در FGM

مدل‌های مختلفی برای توزیع فلز و سرامیک ارائه شده است. از جمله مدل ردی[8]، مدل تانیگاوا[9] و مدل موری - تانکا که هرکدام با توزیع به‌خصوصی از ترکیب نسبی سرامیک و فلز به‌دست آمده است. در این پژوهش از مدل ردی برای توزیع خواص فلز و سرامیک استفاده شده است. با در نظر گرفتن دستگاه مختصات کارتزین[10]، درصورتی‌که محور مختصات در راستای ضخامت ورق، z نامیده شود می‌توان نوشت [7]:

$$P(z) = P_{\mathrm{m}} + P_{\mathrm{cm}}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^{k} \quad ; \quad P_{\mathrm{cm}} = P_{\mathrm{c}} - P_{\mathrm{m}} \qquad (1)$$

به‌صورتی‌که P می‌تواند یکی از خصوصیات مکانیکی و حرارتی ماده مانند مدول الاستیسیته و یا ضریب انبساط حرارتی باشد. زیرنویس‌های c و m به‌ترتیب معرف خواص سرامیک و فلز است. پارامتر h معرف ضخامت ورق می‌باشد. همچنین، اندیس k در رابطه (1)، ثابت قانون توانی بوده و مقادیر

[1] Nonhomogeneous
[2] Isotropic
[3] Orthotropic
[4] Improved Third Order Shear Deformation Theory
[5] Levy Method
[6] Mori Tanka
[7] Von-Karman
[8] Reddy
[9] Tanigawa
[10] Cartesian coordinate system

بزرگ‌تر یا مساوی صفر را اختیار می‌کند. ترکیب سرامیک و فلز وقتی اندیس k برابر با یک است خطی می‌باشد. همچنین، با قرار دادن k برابر با صفر ورق همگن از جنس سرامیک حاصل می‌شود [2]. در این تحقیق مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی ورق مطابق با قانون توزیع توانی ردی، متغیر در نظر گرفته شده و ضریب پواسون[1] ورق ثابت فرض شده است. لذا با توجه به رابطه (1) می‌توان نوشت [5]:

$$E(z) = E_{\mathrm{m}} + E_{\mathrm{cm}}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k \quad \text{(2 - الف)}$$

$$\alpha(z) = \alpha_{\mathrm{m}} + \alpha_{\mathrm{cm}}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k \quad \text{(2 - ب)}$$

$$\upsilon(z) = \upsilon_0 \quad \text{(2 - ج)}$$

در روابط (2)، پارامترهای E، α و υ به‌ترتیب معرف مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی و ضریب پواسون ورق می‌باشد.

3- استخراج معادلات تعادل

در ابتدا یک ورق مستطیل‌شکل از جنس FGM به طول a، عرض b و ضخامت h در نظر گرفته می‌شود. دستگاه مختصات کارتزین مستطیلی (x,y,z) جهت استخراج روابط، فرض می‌شود. همچنین، محور z، مبدا مختصات در راستای ضخامت ورق در نظر گرفته می‌شود ($-h/2 \leq z \leq h/2$). به‌منظور حل مساله، ورق FGM، ضخیم در نظر گرفته شده و خواص FGM به‌طور پیوسته و یکنواخت در راستای ضخامت فرض می‌شود. مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی مطابق با قانون توزیع توانی ردی در جهت ضخامت، متغیر در نظر گرفته شده و ضریب پواسون ورق ثابت فرض می‌شود. ورق تحت دو حالت افزایش یکنواخت دما در راستای ضخامت و افزایش درجه حرارت خطی در راستای ضخامت، به‌صورت مجزا، در نظر گرفته می‌شود. همچنین، شرایط مرزی مساله به‌صورت تکیه‌گاه ساده فرض می‌شود. میدان جابجایی تئوری بهبودیافته مرتبه سوم برشی به‌صورت رابطه (3) می‌باشد [10]:

$$u = u_0(x,y,t) + \frac{5}{4}\left(z - \frac{4}{3h^2}z^3\right)u_1(x,y,t) + \left(\frac{1}{4}z - \frac{5}{3h^2}z^3\right)\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{(3 - الف)}$$

$$v = v_0(x,y,t) + \frac{5}{4}\left(z - \frac{4}{3h^2}z^3\right)v_1(x,y,t) + \left(\frac{1}{4}z - \frac{5}{3h^2}z^3\right)\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad \text{(3 - ب)}$$

$$w = w_0(x,y,t) \quad \text{(3 - ج)}$$

روابط کلی کرنش - جابجایی مطابق با روابط (4) است [5]:

$$\epsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \quad \text{(4 - الف)}$$

$$\epsilon_y = v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 \quad \text{(4 - ب)}$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \quad \text{(4 - ج)}$$

$$\gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x} \quad \text{(4 - د)}$$

$$\gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} \quad \text{(4 - ه)}$$

با جایگذاری روابط (3) در روابط (4)، روابط کرنش - جابجایی با در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی فون - کارمن، بر پایه تئوری بهبودیافته مرتبه سوم به‌صورت روابط (5) حاصل می‌گردد.

$$\begin{Bmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} = \{\epsilon^{(0)}\} + z\{\epsilon^{(1)}\} + z^3\{\epsilon^{(3)}\} \quad \text{(5 - الف)}$$

[1] Poisson's ratio

$$\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\gamma_{yz}^{(0)}\\ \gamma_{xz}^{(0)}\end{Bmatrix} + z^2\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}^{(2)}\\ \gamma_{xz}^{(2)}\end{Bmatrix} \quad \text{(5 - ب)}$$

به‌طوری‌که

$$\begin{pmatrix}\epsilon_x^{(0)}\\ \epsilon_y^{(0)}\\ \gamma_{xy}^{(0)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_{0,x} + \frac{1}{2}w_{0,x}^2\\ v_{0,y} + \frac{1}{2}w_{0,y}^2\\ u_{0,y} + v_{0,x} + w_{0,x}w_{0,y}\end{pmatrix} \quad \text{(6 - الف)}$$

$$\begin{pmatrix}\gamma_{xz}^{(0)}\\ \gamma_{yz}^{(0)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{4}(u_1 + w_{0,x})\\ \frac{5}{4}(v_1 + w_{0,y})\end{pmatrix} \quad \text{(6 - ب)}$$

$$\begin{pmatrix}\epsilon_x^{(1)}\\ \epsilon_y^{(1)}\\ \gamma_{xy}^{(1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}(5u_{1,x} + w_{0,xx})\\ \frac{1}{4}(5v_{1,y} + w_{0,yy})\\ \frac{1}{4}(5u_{1,y} + 2w_{0,xy} + 5v_{1,x})\end{pmatrix} \quad \text{(6 - ج)}$$

$$\begin{pmatrix}\gamma_{xz}^{(2)}\\ \gamma_{yz}^{(2)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{5}{h^2}(u_1 + w_{0,x})\\ -\frac{5}{h^2}(v_1 + w_{0,y})\end{pmatrix} \quad \text{(6 - د)}$$

$$\begin{pmatrix}\epsilon_x^{(3)}\\ \epsilon_y^{(3)}\\ \gamma_{xy}^{(3)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{5}{3h^2}(u_{1,x} + w_{0,xx})\\ -\frac{5}{3h^2}(v_{1,y} + w_{0,yy})\\ -\frac{5}{3h^2}(u_{1,y} + 2w_{0,xy} + v_{1,x})\end{pmatrix} \quad \text{(6 - ه)}$$

روابط تنش - کرنش با در نظر گرفتن اثرات حرارتی به‌صورت روابط (7) نوشته می‌شود [5]:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\upsilon_0^2}[\epsilon_x + \upsilon_0\epsilon_y - (1+\upsilon_0)\alpha T] \quad \text{(7 - الف)}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\upsilon_0^2}[\epsilon_y + \upsilon_0\epsilon_x - (1+\upsilon_0)\alpha T] \quad \text{(7 - ب)}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\upsilon_0)}\gamma_{xy} \quad \text{(7 - ج)}$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\upsilon_0)}\gamma_{xz} \quad \text{(7 - د)}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\upsilon_0)}\gamma_{yz} \quad \text{(7 - ه)}$$

به‌طوری‌که E، α و υ_0 برای ورق FGM از روابط (2) به‌دست می‌آید. منتجه‌های نیرو و گشتاور به‌صورت روابط (8) تعریف می‌گردد [5]:

$$(N_i, M_i) = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_i(1,z)dz \qquad , \quad i = x, y \quad \text{(8 - الف)}$$

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_j dz \qquad , \quad i = x, y; \quad j = xz, yz \quad \text{(8 - ب)}$$

پس از قراردادن روابط (2)، (5) و (7) در روابط (8) و انتگرال‌گیری، معادلات ساختاری ورق FGM به‌صورت روابط (9) به‌دست می‌آید.

$$(N_x, M_x) = \frac{1}{1-\upsilon_0^2}[(E_1,E_2)(\epsilon_x^0 + \upsilon_0\epsilon_y^0) + (E_2,E_3)(k_x^0 + \upsilon_0 k_y^0) + (E_4,E_5)(k_x^2 + \upsilon_0 k_y^2) - (1+\upsilon_0)(\varphi_1,\varphi_2)] \quad \text{(9 - الف)}$$

$$(N_y, M_y) = \frac{1}{1-\upsilon_0^2}[(E_1,E_2)(\epsilon_y^0 + \upsilon_0\epsilon_x^0) + (E_2,E_3)(k_y^0 + \upsilon_0 k_x^0) + (E_4,E_5)(k_y^2 + \upsilon_0 k_x^2) - (1+\upsilon_0)(\varphi_1,\varphi_2)] \quad \text{(9 - ب)}$$

$$(N_{xy}, M_{xy}) = \frac{1}{2(1+\upsilon_0)}\left[(E_1, E_2)\gamma_{xy}^0 + (E_2, E_3)k_{xy}^0 + (E_4, E_5)k_{xy}^2\right]$$ (ج - 9)

$$Q_x = \frac{1}{2(1+\upsilon_0)}\left[E_1\gamma_{xz}^0 + E_3 k_{xz}^1\right]$$ (د - 9)

$$Q_y = \frac{1}{2(1+\upsilon_0)}\left[E_1\gamma_{yz}^0 + E_3 k_{yz}^1\right]$$ (ه - 9)

به‌طوری‌که

$$(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, z^3, z^4)\, E(z) dz$$ (الف - 10)

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z) E(z)\alpha(z)\Delta T(x, y, z)\, dz$$ (ب - 10)

به‌منظور استخراج معادلات تعادل حاکم بر ورق FGM از روش انرژی[1] پتانسیل استفاده شده است. برمبنای این روش، جهت به‌دست آوردن معادلات تعادل، می‌بایست عبارت زیر انتگرال در رابطه انرژی پتانسیل، معادلات اولر[2] را ارضا کند [7]. انرژی پتانسیل کل ورق تحت بارهای حرارتی و مکانیکی به‌صورت رابطه (11) قابل محاسبه می‌باشد [7]:

$$V = U + \Omega$$ (11)

به‌طوری‌که V انرژی پتانسیل کل ورق، U انرژی کرنشی کل و Ω انرژی پتانسیل نیروهای مکانیکی اعمال‌شده به ورق می‌باشد. مقدار انرژی کرنشی یک محیط ایزوتروپ سه‌بعدی در دستگاه مختصات کارتزین به‌شکل رابطه (12) بیان می‌گردد [5]:

$$U = \frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^b\int_0^a \left[\sigma_x(\epsilon_x - \alpha T) + \sigma_y(\epsilon_y - \alpha T) + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right] dxdydz$$ (12)

در رابطه (12)، T معرف تابع توزیع دما در ورق می‌باشد. با توجه به عدم اعمال نیروی مکانیکی بر ورق، ترم Ω برابر با صفر می‌باشد. پس از جایگذاری روابط (5)، (6) و (7) در رابطه (12) مقدار انرژی کرنشی محاسبه می‌شود. سپس به کمک رابطه (11) مقدار انرژی پتانسیل کل به‌دست می‌آید. با استفاده از معادلات ساختاری (9) و به‌کار بردن معادلات اولر [7]، معادلات تعادل ورق FGM براساس تئوری بهبودیافته مرتبه سوم به‌صورت روابط (13) به‌دست می‌آید.

$$s_1 u_{0,xx} + s_2 v_{0,xy} + s_3 u_{1,xx} + s_4 w_{0,xxx} + s_5 v_{1,xy} + s_6 w_{0,xyy} - \frac{1}{1-\upsilon_0}\varphi_{1,x} + s_7 u_{0,yy} + s_8 u_{1,yy} = 0$$ (الف - 13)

$$s_2 u_{0,xy} + s_7 v_{0,xx} + s_5 u_{1,xy} + s_6 w_{0,xxy} + s_8 v_{1,xx} + s_1 v_{0,yy} + s_3 v_{1,yy} + s_4 w_{0,yyy} - \frac{1}{1-\upsilon_0}\varphi_{1,y} = 0$$ (ب - 13)

$$s_9 u_{1,x} + s_9 w_{0,xx} + s_9 v_{1,y} + s_9 w_{0,yy} + N_x w_{0,xx} + 2N_{xy} w_{0,xy} + N_y w_{0,yy} = 0$$ (ج - 13)

$$s_{10} u_{0,xx} + s_{11} v_{0,xy} + s_{12} u_{1,xx} + s_{13} w_{0,xxx} + s_{14} v_{1,xy} + s_{15} w_{0,xyy} - \frac{1}{1-\upsilon_0}\varphi_{2,x} + s_{16} u_{0,yy} + s_{17} u_{1,yy} + s_{18} u_1 + s_{18} w_{0,x} = 0$$ (د - 13)

$$s_{11} u_{0,xy} + s_{16} v_{0,xx} + s_{14} u_{1,xy} + s_{15} w_{0,xxy} + s_{17} v_{1,xx} + s_{10} v_{0,yy} + s_{12} v_{1,yy} + s_{13} w_{0,yyy} - \frac{1}{1-\upsilon_0}\varphi_{2,y} + s_{18} v_1 + s_{18} w_{0,y} = 0$$ (ه - 13)

4- استخراج معادلات پایداری

جهت به‌دست آوردن معادلات پایداری ورق از معیار تعادل در مجاورت[3] استفاده می‌شود. در این روش به‌منظور بررسی امکان وجود تعادل در همسایگی مطابق روابط (14) به هر یک از مولفه‌های جابجایی، نمو بسیار کوچکی داده می‌شود [13].

$$u_0 \rightarrow u_0^0 + u_0^1$$ (الف - 14)

$$v_0 \rightarrow v_0^0 + v_0^1$$ (ب - 14)

$$w_0 \rightarrow w_0^0 + w_0^1$$ (ج - 14)

$$u_1 \rightarrow u_1^0 + u_1^1$$ (د - 14)

$$v_1 \rightarrow v_1^0 + v_1^1$$ (ه - 14)

در روابط (14)، $(u_0, v_0, w_0, u_1, v_1)$ و $(u_0^0, v_0^0, w_0^0, u_1^0, v_1^0)$ دو حالت تعادل در همسایگی هم بوده و $(u_0^1, v_0^1, w_0^1, u_1^1, v_1^1)$ نموهای کوچک جابجایی می‌باشند. تغییر در مولفه‌های جابجایی، موجب تغییر در مولفه نیروهای داخلی به‌صورت روابط (15) می‌شود [13]:

$$N_x \rightarrow N_x^0 + \Delta N_x$$ (الف - 15)

$$N_y \rightarrow N_y^0 + \Delta N_y$$ (ب - 15)

$$N_{xy} \rightarrow N_{xy}^0 + \Delta N_{xy}$$ (ج - 15)

به‌صورتی‌که بالانویس صفر در روابط (15) نشان‌دهنده نیروهای متناظر با (u^0, v^0, w^0) و $(\Delta N_x, \Delta N_y, \Delta N_{xy})$ متناظر با نموهای (u^1, v^1, w^1) می‌باشد. بخشی از $(\Delta N_x, \Delta N_y, \Delta N_{xy})$ که نسبت به (u^1, v^1, w^1) خطی است، به‌صورت (N_x^1, N_y^1, N_{xy}^1) نمایش داده می‌شود [13]. در معادلات تعادل به‌جای ترم‌های u_0، v_0، w_0، u_1، v_1، N_x، N_y و N_{xy} به‌ترتیب مقادیر $u_0^0 + u_0^1$، $v_0^0 + v_0^1$، $w_0^0 + w_0^1$، $u_1^0 + u_1^1$، $v_1^0 + v_1^1$، $N_x^0 + N_x^1$، $N_y^0 + N_y^1$ و $N_{xy}^0 + N_{xy}^1$ جایگزین می‌شود، به‌صورتی‌که بالانویس (0) مربوط به حالت تعادل و بالانویس (1) مربوط به حالت پایداری ورق می‌باشد. پس از انجام این‌کار و حذف عبارات مربوط به حالت تعادل با بالانویس (0)، معادلات پایداری ورق به‌صورت روابط (16) حاصل می‌گردد.

$$s_1 u_{0,xx}^1 + s_2 v_{0,xy}^1 + s_3 u_{1,xx}^1 + s_4 w_{0,xxx}^1 + s_5 v_{1,xy}^1 + s_6 w_{0,xyy}^1 + s_7 u_{0,yy}^1 + s_8 u_{1,yy}^1 = 0$$ (الف - 16)

$$s_2 u_{0,xy}^1 + s_7 v_{0,xx}^1 + s_5 u_{1,xy}^1 + s_6 w_{0,xxy}^1 + s_8 v_{1,xx}^1 + s_1 v_{0,yy}^1 + s_3 v_{1,yy}^1 + s_4 w_{0,yyy}^1 = 0$$ (ب - 16)

$$s_9 u_{1,x}^1 + s_9 w_{0,xx}^1 + s_9 v_{1,y}^1 + s_9 w_{0,yy}^1 + N_x^0 w_{0,xx}^1 + 2N_{xy}^0 w_{0,xy}^1 + N_y^0 w_{0,yy}^1 = 0$$ (ج - 16)

$$s_{10} u_{0,xx}^1 + s_{11} v_{0,xy}^1 + s_{12} u_{1,xx}^1 + s_{13} w_{0,xxx}^1 + s_{14} v_{1,xy}^1 + s_{15} w_{0,xyy}^1 + s_{16} u_{0,yy}^1 + s_{17} u_{1,yy}^1 + s_{18} u_1^1 + s_{18} w_{0,x}^1 = 0$$ (د - 16)

$$s_{11} u_{0,xy}^1 + s_{16} v_{0,xx}^1 + s_{14} u_{1,xy}^1 + s_{15} w_{0,xxy}^1 + s_{17} v_{1,xx}^1 + s_{10} v_{0,yy}^1 + s_{12} v_{1,yy}^1 + s_{13} w_{0,yyy}^1 + s_{18} v_1^1 + s_{18} w_{0,y}^1 = 0$$ (ه - 16)

[1] Energy method
[2] Euler equations
[3] Adjacent equilibrium criterion

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.7.3]

معادلات پایداری (16) پس از انجام عملیات ریاضی، به سه معادله برحسب مولفه‌های u_1^1، v_1^1 و w_0^1 کاهش می‌یابد.

5- تحلیل کمانش حرارتی

به‌منظور تحلیل کمانش حرارتی، ورق مستطیل‌شکل FGM در نظر گرفته می‌شود. شرایط مرزی ورق مطابق رابطه (17) به‌گونه‌ای فرض می‌شود که از انبساط ورق جلوگیری می‌کند [9].

$$u = v = w = M_x = 0 \qquad @ \quad x = 0, a \qquad (\text{17 - الف})$$
$$u = v = w = M_y = 0 \qquad @ \quad y = 0, b \qquad (\text{17 - ب})$$

5-1- افزایش یکنواخت درجه حرارت

دمای اولیه ورق T_i فرض می‌گردد. سپس به‌صورت یکنواخت دمای ورق افزایش یافته و به دمای نهایی T_f می‌رسد. اختلاف دمای ΔT مطابق رابطه (18) است [7]:

$$\Delta T = T_\mathrm{f} - T_\mathrm{i} \qquad (18)$$

به‌منظور به‌دست آوردن نیروهای پیش‌کمانش[1] از روش پیشنهاد شده توسط میرز و همکارش [14] استفاده می‌گردد. لذا نیروهای پیش‌کمانش به‌صورت روابط (19) حاصل می‌شوند.

$$N_x^0 = -\frac{\varphi_1}{1-\upsilon_0} \qquad (\text{19 - الف})$$
$$N_y^0 = -\frac{\varphi_1}{1-\upsilon_0} \qquad (\text{19 - ب})$$
$$N_{xy}^0 = 0 \qquad (\text{19 - ج})$$

به‌طوری‌که N_x^0، N_y^0 و N_{xy}^0 معرف نیروهای پیش‌کمانش می‌باشند. جهت حل معادلات پایداری، پاسخ‌های تقریبی مطابق روابط (20) در نظر گرفته می‌شود [15]:

$$u_1^1 = u_{1mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (\text{20 - الف})$$
$$v_1^1 = v_{1mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \qquad (\text{20 - ب})$$
$$w_0^1 = w_{1mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad m, n = 1, 2, \ldots \qquad (\text{20 - ج})$$

پارامترهای m و n معرف تعداد نیم‌موج کمانش در جهت محورهای x و y می‌باشد. بعد از جایگذاری پاسخ‌های تقریبی در معادلات پایداری و استفاده از روش گالرکین[2] و سپس حل معادلات، ترم حرارتی φ_1 به‌دست می‌آید. سپس به کمک رابطه (10-ب) مقدار اختلاف دمای کمانش ورق تحت افزایش یکنواخت درجه حرارت در راستای ضخامت به‌دست می‌آید.

5-2- افزایش درجه حرارت خطی در راستای ضخامت

فرض می‌گردد که ورق تحت افزایش درجه حرارت خطی در راستای ضخامت قرار دارد به‌طوری‌که [5]:

$$T(z) = \frac{\Delta T}{h}\left(z + \frac{h}{2}\right) + T_\mathrm{m} \qquad ; \qquad -\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2} \qquad (21)$$
$$\Delta T = T_\mathrm{c} - T_\mathrm{m} \qquad (22)$$

در رابطه (22)، T_c دمای سطح سرامیکی و T_m دمای سطح فلزی می‌باشد. مشابه با حالت قبل، نیروهای پیش‌کمانش با استفاده از روش میرز و همکارش [14] به‌صورت روابط (19) به‌دست می‌آید. شرایط مرزی مطابق با رابطه (17) و پاسخ‌های تقریبی مشابه با روابط (20) در نظر گرفته می‌شود. بعد از جایگذاری پاسخ‌های تقریبی در معادلات پایداری و حل معادلات، ترم حرارتی φ_1 به‌دست می‌آید. سپس به کمک روابط (10 - ب) و (21) مقدار اختلاف دمای کمانش ورق تحت افزایش درجه حرارت خطی به‌دست می‌آید.

6- نتایج عددی

یک ورق مستطیل‌شکل FGM فلز - سرامیک که فلز آن از جنس آلومینیوم[3] و سرامیک آن از جنس آلومینا[4] می‌باشد، در نظر گرفته می‌شود. مشخصات ورق مطابق جدول 1 است [15].

همچنین، ضخامت ورق برابر با 0.005 متر در نظر گرفته شده است. با این فرض که ورق FGM نمونه تحت بارگذاری‌های افزایش یکنواخت دما و نیز افزایش درجه حرارت خطی در راستای ضخامت قرار گرفته است با استفاده از روابط به‌دست آمده، مقدار اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق (ΔT_cr) محاسبه شده است. نتایج در جدول 2 و "شکل‌های 1 الی 5" ارائه شده است. مقدار اختلاف دماهای به‌دست آمده برحسب درجه سانتی‌گراد می‌باشد.

در "شکل 1" مقادیر ΔT_cr ورق FGM برمبنای تئوری‌های کلاسیک، مرتبه اول، مرتبه سوم و بهبودیافته مرتبه سوم برشی برحسب نسبت عرض به ضخامت ورق (b/h) رسم شده است. مقادیر بحرانی اختلاف دمای کمانش در جدول 2 برای تئوری‌های بیان‌شده درج شده است. در این حالت مقدار اندیس قانون توانی برابر با مقدار ثابت $(k = 1)$ فرض شده است. همچنین، نسبت طول به عرض ورق ثابت در نظر گرفته شده است $(a/b = 0.25)$. همان‌گونه که مشاهده می‌شود مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش با افزایش نسبت b/h یعنی نازک شدن ورق، کاهش یافته است. همچنین، مشاهده می‌گردد که نتایج اختلاف دمای بحرانی کمانش به‌دست آمده از تئوری

جدول 1 خواص ورق مدرج تابعی [15]

Table 1 Properties of functionally graded plate [15]

ماده	E(GPa)	$\alpha(1/°\mathrm{C})$	υ_0
آلومینیوم	70	23×10^{-6}	0.3
آلومینا	380	7.4×10^{-6}	0.3

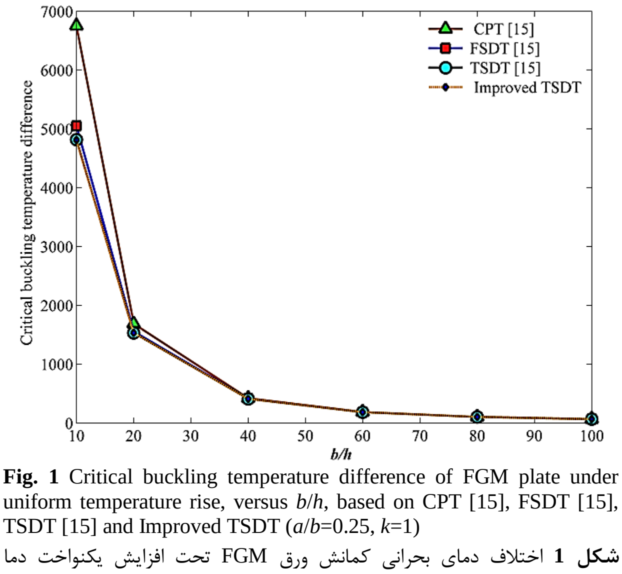

Fig. 1 Critical buckling temperature difference of FGM plate under uniform temperature rise, versus *b*/*h*, based on CPT [15], FSDT [15], TSDT [15] and Improved TSDT (*a*/*b*=0.25, *k*=1)

شکل 1 اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM تحت افزایش یکنواخت دما برحسب *b*/*h*، برمبنای تئوری‌های کلاسیک [15]، مرتبه اول [15]، مرتبه سوم [15] و بهبودیافته مرتبه سوم برشی (*a*/*b*=0.25, *k*=1)

[1] Pre-buckling forces
[2] Galerkin method
[3] Aluminum
[4] Alumina

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.7.3]

بهبودیافته مرتبه سوم برشی از مقادیر حاصل از تئوری‌های کلاسیک و مرتبه اول کمتر است. نکته قابل توجه دیگر این است که مقادیر بحرانی اختلاف دمای کمانش به‌دست آمده از تئوری بهبودیافته مرتبه سوم برشی برای ورق نازک یعنی از $b/h = 100$ تا $b/h = 60$ با مقادیر حاصل از تئوری مرتبه سوم ردی برابر است. اما با کاهش نسبت عرض به ضخامت ورق از $b/h = 40$ تا $b/h = 10$ یعنی ضخیم شدن ورق، مقادیر اختلاف دمای بحرانی به‌دست آمده از تئوری بهبودیافته مرتبه سوم پایین‌تر از مقادیر حاصل از تئوری مرتبه سوم است.

در "شکل 2" تحلیل کمانش برمبنای تئوری بهبودیافته مرتبه سوم تغییر شکل برشی بوده و نسبت عرض به ضخامت ورق ثابت در نظر گرفته شده است ($b/h = 100$). همان‌گونه که مشاهده می‌شود مقادیر بحرانی اختلاف دمای کمانش با افزایش نسبت عرض به طول یعنی کاهش طول ورق، افزایش یافته است. همچنین، میزان افزایش اختلاف دمای بحرانی کمانش در ورق همگن ($k = 0$) بیشتر از ورق FGM ($k > 0$) است. با افزایش مقدار ثابت قانون توانی، مقادیر بحرانی اختلاف دمای کمانش ورق کاهش یافته است. میزان تفاوت بین مقادیر بحرانی اختلاف دمای کمانش ورق همگن با ورق FGM با ترکیب خطی مولفه‌ها ($k = 1$) زیاد است درصورتی‌که این تفاوت در ورق FGM با مقادیر مختلف ثابت توانی کمتر است. همچنین، مشاهده می‌گردد میزان تفاوت بین مقادیر بحرانی اختلاف دمای کمانش ورق FGM با ترکیب غیرخطی مولفه‌ها ($k > 1$) ناچیز است. با افزایش نسبت عرض به طول، تفاوت بین مقادیر بحرانی اختلاف دمای کمانش ورق همگن با ورق FGM و انواع ورق FGM با ترکیب خطی و غیرخطی مولفه‌ها افزایش یافته است.

در "شکل 3" مقادیر ΔT_{cr} برای دو حالت افزایش درجه حرارت خطی و افزایش یکنواخت درجه حرارت براساس تئوری بهبودیافته مرتبه سوم ترسیم شده است. در این حالت نسبت عرض به ضخامت ورق ثابت در نظر گرفته شده است ($b/h = 100$). همان‌طور که مشاهده می‌شود، در هر دو حالت با افزایش نسبت b/a یعنی کاهش طول ورق، مقادیر ΔT_{cr} افزایش یافته است. همچنین، مقادیر ΔT_{cr} در حالت افزایش خطی دما در راستای ضخامت از مقادیر متناظر در حالت افزایش یکنواخت دما بالاتر است. همچنین، هرچه طول ورق کمتر شود، میزان تفاوت بین مقدار بحرانی اختلاف دمای کمانش در حالت افزایش یکنواخت دما و افزایش درجه حرارت خطی بیشتر می‌شود.

در "شکل 4" مقادیر ΔT_{cr} برای دو حالت افزایش درجه حرارت خطی و افزایش یکنواخت درجه حرارت براساس تئوری بهبودیافته مرتبه سوم برای نسبت طول به عرض ثابت ترسیم شده است ($a/b = 1$). مشاهده می‌شود در هر دو حالت بارگذاری با افزایش نسبت b/h یعنی نازک شدن ورق، مقادیر بحرانی اختلاف دمای کمانش کاهش یافته است. همچنین، مشاهده

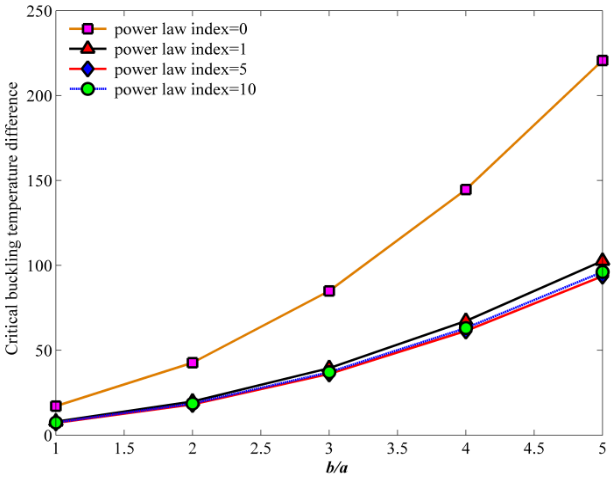

Fig. 2 Critical buckling temperature difference of FGM plate under uniform temperature rise, versus *b*/*a*, for various power law index, *k*, based on Improved TSDT (*b*/*h*=100)

شکل 2 اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM تحت افزایش یکنواخت دما برحسب *b*/*a*، برای ثابت‌های توانی مختلف، *k*، براساس تئوری بهبودیافته مرتبه سوم برشی (*b*/*h*=100)

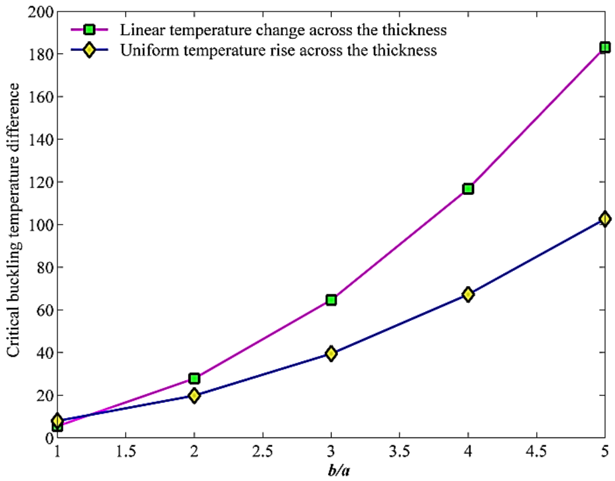

Fig. 3 Critical buckling temperature difference of FGM plate under uniform temperature rise and linear temperature change across the thickness, versus *b*/*a*, based on Improved TSDT (*b*/*h*=100, *k*=1)

شکل 3 اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM برای حالت‌های افزایش یکنواخت دما و افزایش درجه حرارت خطی در جهت ضخامت برحسب *b*/*a*، بر پایه تئوری بهبودیافته مرتبه سوم برشی (*b*/*h*=100, *k*=1)

جدول 2 اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM نمونه تحت افزایش یکنواخت درجه حرارت برمبنای تئوری‌های کلاسیک [15]، مرتبه اول [15]، مرتبه سوم [15] و بهبودیافته مرتبه سوم برشی ($k = 1$)

Table 2 Critical buckling temperature difference of the sample FGM plate under uniform temperature rise based on CPT [15], FSDT [15], TSDT [15] and Improved TSDT ($k = 1$)

a/b	تئوری	b/h=10	b/h=20	b/h=40	b/h=60	b/h=80	b/h=100
0.5	CPT [15]	1985.9	496.49	124.12	55.17	31.03	19.85
	FSDT [15]	1807.2	484.51	123.36	55.01	30.98	19.84
	TSDT [15]	1775.6	482.18	123.21	54.98	30.97	19.84
	پژوهش حاضر	1775.2	482.17	123.20	54.98	30.97	19.83
0.25	CPT [15]	6752.2	1688.1	422.01	187.56	105.50	67.52
	FSDT [15]	5053.0	1557.1	413.33	185.83	104.95	67.30
	TSDT [15]	4818.7	1533.6	411.63	185.48	104.84	67.25
	پژوهش حاضر	4810.8	1533.4	411.63	185.48	104.84	67.25

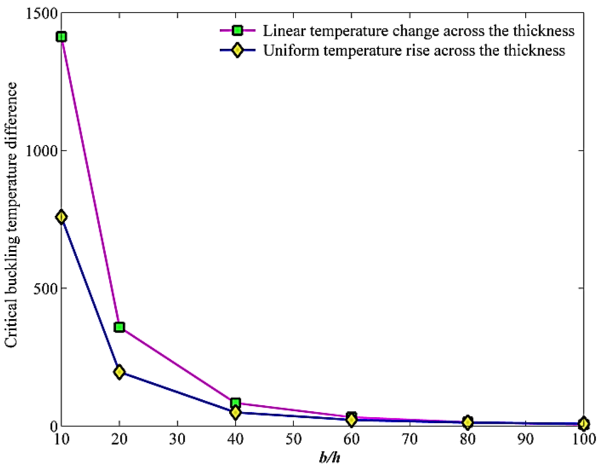

Fig. 4 Critical buckling temperature difference of FGM plate under uniform temperature rise and linear temperature change across the thickness, versus *b*/*h*, based on Improved TSDT (*a*/*b*=1, *k*=1)

شکل 4 اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM برای حالت‌های افزایش یکنواخت دما و افزایش درجه حرارت خطی در جهت ضخامت برحسب *b*/*h*، بر پایه تئوری بهبودیافته مرتبه سوم برشی (*a*/*b*=1, *k*=1)

می‌گردد مقادیر بحرانی اختلاف دمای کمانش در حالت افزایش خطی دما از مقادیر متناظر در حالت افزایش یکنواخت دما بالاتر است. همچنین، با افزایش ضخامت ورق، میزان تفاوت بین مقدار اختلاف دمای بحرانی کمانش در حالت افزایش یکنواخت دما و افزایش درجه حرارت خطی، بیشتر می‌شود.

در "شکل 5" اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM در حالت افزایش درجه حرارت خطی در راستای ضخامت، برای ثابت‌های توانی مختلف برمبنای تئوری بهبودیافته مرتبه سوم بررسی شده است. در این منحنی نسبت عرض به ضخامت ورق ثابت در نظر گرفته شده است ($b/h=100$). مشاهده می‌شود مقادیر ΔT_{cr} با کاهش طول ورق، افزایش یافته است. همچنین، میزان افزایش ΔT_{cr} در ورق همگن نسبت به ورق FGM بیشتر است. با افزایش مقدار ثابت قانون توانی، مقدار بحرانی اختلاف دمای کمانش ورق کاهش یافته است.

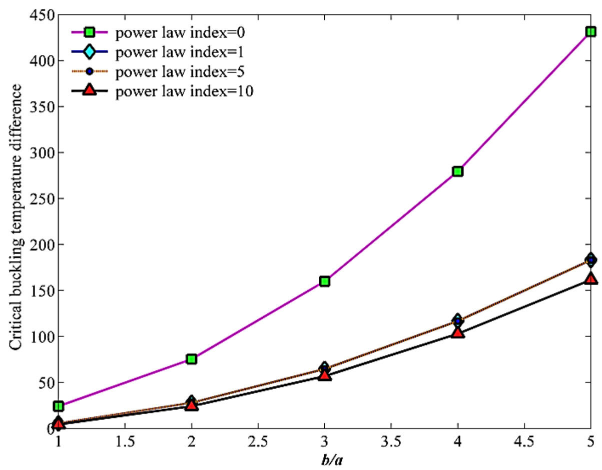

Fig. 5 Critical buckling temperature difference of FGM plate under linear temperature change across the thickness, versus *b*/*a*, for various power law index, *k*, based on Improved TSDT (*b*/*h*=100)

شکل 5 اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM تحت افزایش درجه حرارت خطی در راستای ضخامت، بر حسب *b*/*a*، برای ثابت‌های توانی مختلف، *k*، بر پایه تئوری بهبودیافته مرتبه سوم برشی (*b*/*h*=100)

7- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، کمانش ترموالاستیک ورق مستطیل‌شکل FGM قرارگرفته بر تکیه‌گاه‌های ساده با استفاده از تئوری بهبودیافته مرتبه سوم تغییر شکل برشی، بررسی گردید. ورق تحت دو نوع بارگذاری حرارتی افزایش یکنواخت دما و افزایش درجه حرارت خطی در راستای ضخامت در نظر گرفته شد. معادلات تعادل به کمک روش انرژی و معادلات پایداری توسط معیار تعادل در مجاورت استخراج گردید. پس از حل معادلات پایداری، مقدار اختلاف دمای کمانش ورق برای هر حالت بارگذاری به‌دست آمد. نتایج تحلیل کمانش برای حالت‌های مختلف نسبت عرض به طول و عرض به ضخامت ارائه گردید. در تمام حالت‌های مورد بررسی، مقدار بحرانی اختلاف دمای کمانش با استفاده از تئوری بهبودیافته مرتبه سوم، به ازای یک نیم‌موج در جهت محور x و یک نیم‌موج در جهت محور y به‌دست آمد. مشاهده گردید مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش حاصل از تئوری بهبودیافته در حالت افزایش خطی دما در راستای ضخامت از مقادیر متناظر در حالت افزایش یکنواخت درجه حرارت بالاتر است. با کاهش طول ورق، میزان تفاوت بین مقدار بحرانی اختلاف دمای کمانش در حالت افزایش یکنواخت دما و افزایش درجه حرارت خطی، بیشتر می‌شود. همچنین، با افزایش میزان ضخامت ورق، میزان تفاوت بین این دو مقدار، بیشتر می‌شود. با مقایسه اختلاف دمای بحرانی کمانش حاصل از تئوری بهبودیافته مرتبه سوم با مقادیر به‌دست آمده از تئوری‌های کلاسیک، مرتبه اول و مرتبه سوم مشاهده گردید که مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش حاصل از تئوری بهبودیافته مرتبه سوم برشی، پایین‌تر از مقادیر به‌دست آمده از تئوری‌های کلاسیک و مرتبه اول برشی می‌باشد. همچنین، زمانی‌که ضخامت ورق زیاد باشد، تئوری بهبودیافته مرتبه سوم برشی منجر به تقریب پایین‌تری در محاسبه اختلاف دمای بحرانی کمانش نسبت به تئوری مرتبه سوم برشی می‌شود.

8- فهرست علایم

a	طول ورق
b	عرض ورق
E_{c}	مدول الاستیسیته سرامیک
E_{m}	مدول الاستیسیته فلز
$E(z)$	مدول الاستیسیته ورق مدرج تابعی
h	ضخامت ورق
k	اندیس قانون توانی ردی
m	تعداد نیم‌موج کمانش در جهت محور x
M_x, M_y, M_{xy}	گشتاورها بر واحد طول
n	تعداد نیم‌موج کمانش در جهت محور y
N_x, N_y, N_{xy}	نیروها بر واحد طول
N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0	نیروهای پیش‌کمانش
Q_x, Q_y	نیروهای برشی
$T(x,y,z)$	تابع توزیع دما
T_{c}	دمای سطح سرامیکی
T_{m}	دمای سطح فلزی
u	جابجایی هر نقطه از ورق در جهت محور x
$u_1(x,y,t)$	چرخش عمودهای عرضی حول محور y
U	انرژی کرنشی

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.7.3]

v	جابجایی هر نقطه از ورق در جهت محور y
$v_1(x,y,t)$	چرخش عمودهای عرضی حول محور x
w	جابجایی هر نقطه از ورق در جهت محور z

علایم یونانی

α_{c}	ضریب انبساط حرارتی سرامیک
α_{m}	ضریب انبساط حرارتی فلز
$\alpha(z)$	ضریب انبساط حرارتی ورق مدرج تابعی
$\gamma_{xy},\gamma_{xz},\gamma_{yz}$	کرنش‌های برشی در صفحه‌های $x-y$، $x-z$ و $y-z$
$\gamma_{xy}^0,\gamma_{xz}^0,\gamma_{yz}^0$	کرنش‌های برشی صفحه میانی ورق در صفحه‌های $x-y$، $x-z$ و $y-z$
ΔT	اختلاف دمای کمانش
ΔT_{cr}	اختلاف دمای بحرانی کمانش
ϵ	کرنش عمودی
ϵ_x,ϵ_y	کرنش‌های عمودی ورق در جهت‌های x و y
$\epsilon_x^0,\epsilon_y^0$	کرنش‌های عمودی صفحه میانی ورق در جهت‌های x و y
υ_0	ضریب پواسون ورق
σ	تنش عمودی
σ_x,σ_y	تنش‌های عمودی ورق در جهت‌های x و y
$\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yz}$	تنش‌های برشی در صفحه‌های $x-y$، $x-z$ و $y-z$
φ	ترم حرارتی
Ω	انرژی پتانسیل نیروهای مکانیکی اعمالی بر ورق

بالانویس‌ها

(0)	حالت تعادل ورق
(1)	حالت پایداری ورق

زیرنویس‌ها

c	معرف خواص سرامیک
m	معرف خواص فلز

اختصارها

CPT	Classical Plate Theory
FSDT	First Order Shear Deformation Theory
Improved TSDT	Improved Third Order Shear Deformation Theory
TSDT	Third Order Shear Deformation Theory

9- پیوست

$$s_1=\frac{E_1}{1-\upsilon_0^2}$$

$$s_2=\left(\frac{\upsilon_0 E_1}{1-\upsilon_0^2}+\frac{E_1}{2(1+\upsilon_0)}\right)$$

$$s_3=\left(\frac{\frac{5}{4}E_2}{1-\upsilon_0^2}+\frac{\left(\frac{-5}{3h^2}\right)E_4}{1-\upsilon_0^2}\right)$$

$$s_4=\left(\frac{\frac{1}{4}E_2}{1-\upsilon_0^2}+\frac{\left(\frac{-5}{3h^2}\right)E_4}{1-\upsilon_0^2}\right)$$

$$s_5=\left(\frac{\frac{5}{4}\upsilon_0\,E_2}{1-\upsilon_0^2}+\frac{\left(\frac{-5}{3h^2}\right)\upsilon_0\,E_4}{1-\upsilon_0^2}+\frac{\frac{5}{4}E_2}{2(1+\upsilon_0)}+\frac{\left(\frac{-5}{3h^2}\right)E_4}{2(1+\upsilon_0)}\right)$$

$$s_6=\left(\frac{\frac{1}{4}\upsilon_0\,E_2}{1-\upsilon_0^2}+\frac{\left(\frac{-5}{3h^2}\right)\upsilon_0\,E_4}{1-\upsilon_0^2}+\frac{\frac{1}{4}E_2}{1+\upsilon_0}+\frac{\left(\frac{-5}{3h^2}\right)E_4}{1+\upsilon_0}\right)$$

$$s_7=\frac{E_1}{2(1+\upsilon_0)}$$

$$s_8=\left(\frac{\frac{5}{4}E_2}{2(1+\upsilon_0)}+\frac{\left(\frac{-5}{3h^2}\right)E_4}{2(1+\upsilon_0)}\right)$$

$$s_9=\left(\frac{\frac{5}{4}E_1}{2(1+\upsilon_0)}+\frac{\left(\frac{-5}{h^2}\right)E_3}{2(1+\upsilon_0)}\right)$$

$$s_{10}=\frac{E_2}{1-\upsilon_0^2}$$

$$s_{11}=\left(\frac{\upsilon_0\,E_2}{1-\upsilon_0^2}+\frac{E_2}{2(1+\upsilon_0)}\right)$$

$$s_{12}=\left(\frac{\frac{5}{4}\,E_3}{1-\upsilon_0^2}+\frac{\left(\frac{-5}{3h^2}\right)E_5}{1-\upsilon_0^2}\right)$$

$$s_{13}=\left(\frac{\frac{1}{4}\,E_3}{1-\upsilon_0^2}+\frac{\left(\frac{-5}{3h^2}\right)E_5}{1-\upsilon_0^2}\right)$$

$$s_{14}=\left(\frac{\frac{5}{4}\upsilon_0\,E_3}{1-\upsilon_0^2}+\frac{\left(\frac{-5}{3h^2}\right)\upsilon_0\,E_5}{1-\upsilon_0^2}+\frac{\frac{5}{4}\,E_3}{2(1+\upsilon_0)}+\frac{\left(\frac{-5}{3h^2}\right)E_5}{2(1+\upsilon_0)}\right)$$

$$s_{15}=\left(\frac{\frac{1}{4}\upsilon_0\,E_3}{1-\upsilon_0^2}+\frac{\left(\frac{-5}{3h^2}\right)\upsilon_0\,E_5}{1-\upsilon_0^2}+\frac{\frac{1}{4}\,E_3}{(1+\upsilon_0)}+\frac{\left(\frac{-5}{3h^2}\right)E_5}{(1+\upsilon_0)}\right)$$

$$s_{16}=\frac{E_2}{2(1+\upsilon_0)}$$

$$s_{17}=\left(\frac{\frac{5}{4}E_3}{2(1+\upsilon_0)}+\frac{\left(\frac{-5}{3h^2}\right)E_5}{2(1+\upsilon_0)}\right)$$

$$s_{18}=\left(\frac{\left(\frac{-5}{4}\right)E_1}{2(1+\upsilon_0)}+\frac{\left(\frac{5}{h^2}\right)E_3}{2(1+\upsilon_0)}\right)$$

10- مراجع

[1] A. R. Shaterzadeh, K. Foroutan, Post-buckling of eccentrically stiffened FGM cylindrical shells under external pressure and elastic foundation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 7, pp. 80-88, 2015. (in Persian فارسی)

[2] R. Javaheri, *Buckling of FGM rectangular plate under various mechanical and thermal loading based on classical and higher order theories*, PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Science and Research Branch, Tehran, 2001. (in Persian فارسی)

[3] J. N. Reddy, A. Khdeir, Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories, *AIAA*, Vol. 27, No. 12, pp. 1808-1817, 1989.

[4] R. Javaheri, M. R. Eslami, Thermal buckling of functionally graded plates, *AIAA*, Vol. 40, No. 1, pp. 162-169, 2002.

[5] R. Javaheri, M. R. Eslami, Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory, *Thermal Stresses*, Vol. 25, No. 7, pp. 603-625, 2002.

[6] A. Mossavarali, M. R. Eslami, Thermoelastic buckling of plates with imperfections based on a higher order displacement field, *Thermal Stresses*, Vol. 25, No. 8, pp. 745-771, 2002.

[7] M. M. Najafizadeh, S. Yousefzadeh, Thermal buckling of rectangular FGM plate based on first order shear deformation theory, *Mechanical Engineering Transactions of the ISME*, Vol. 6, No. 1, pp. 75-100, 2004. (in Persian فارسی)

[8] M. M. Najafizadeh, H. R. Heydari, Thermal buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory, *Mechanics - A/Solids*, Vol. 23, No. 6, pp. 1085-1100, 2004.

[9] B. A. Samsam Shariat, M. R. Eslami, Effect of initial imperfections on thermal buckling of functionally graded plates, *Thermal Stresses*, Vol. 28, No. 12, pp. 1183-1198, 2005.

[10] G. Shi, A new simple third-order shear deformation theory of plates, *Solids and Structures*, Vol. 44, No. 13, pp. 4399-4417, 2007.

[11] M. Bodaghi, A. R. Saidi, Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, No. 11, pp. 3659-3673, 2010.

[12] B. Zhang, Y. He, D. Liu, Z. Gan, L. Shen, Size-dependent functionally graded beam model based on an improved third-order shear deformation theory, *Mechanics - A/Solids*, Vol. 47, pp. 211-230, 2014.

[13] S. Abolghasemi, H. R. Eipakchi, M. Shariati, Analytical solution for buckling of rectangular plates subjected to non-uniform in-plane loading based on first order shear deformation theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 13, pp. 37-46, 2015. (in Persian فارسی)

[14] C. A. Meyers, M. W. Hyer, Thermal buckling and postbuckling of symmetrically laminated composite plates, *Thermal Stresses*, Vol. 14, No. 4, pp. 519-540, 1991.

[15] B. A. S. Shariat, M. R. Eslami, Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads, *Composite Structures*, Vol. 78, No. 3, pp. 433-439, 2007.