مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر 1394، دوره 15، شماره 7، ص‌ص 415-425

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

شبیه‌سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی لزج سیال غیرنیوتنی در محیط متخلخل ناهمسانگرد

محمود نوروزی[1*]، محمدرضا شوقی[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

2- کارشناسی‌ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

* شاهرود، صندوق‌پستی 3619995161، mnorouzi@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 15 اسفند 1393

پذیرش: 07 خرداد 1394

ارائه در سایت: 30 خرداد 1394

کلید واژگان:

ناپایداری انگشتی لزج

محیط متخلخل ناهمسانگرد

سیال غیرنیوتنی باریک‌شونده

شبیه‌سازی غیرخطی

چکیده

در این تحقیق، ناپایداری انگشتی لزج، در جابه‌جایی مخلوط پذیر سیال غیرنیوتنی در یک محیط متخلخل ناهمسان‌گرد مورد مطالعه قرار گرفته است. تأثیرات ناهمسان‌گردی‌های تانسورهای نفوذپذیری و پراکندگی و نیز تأثیر پارامترهای رئولوژیکی حاکم بر مدل کاریو- یاسودا و تفاوت آن با حالت نیوتنی، در حالت‌های متفاوتی از ناپایداری انگشتی مورد بررسی قرارگرفته‌اند. در شبیه‌سازی غیرخطی، با استفاده از روش طیفی و تبدیلات هارتلی به بررسی ویژگی‌های ناپایداری انگشتی در یک محیط متخلخل ناهمسان‌گرد پرداخته شده است. در این پژوهش سه نوع جریان بررسی و مطالعه شده‌اند؛ در حالت نخست، هر دو سیال جابه‌جاکننده و جابه‌جاشده، نیوتنی هستند و در دو حالت بعدی یک از سیالات جابه‌جاکننده یا جابه‌جاشده نیوتنی و دیگری غیرنیوتنی است. همچنین پارامترهای مشخص‌کننده رشد و گسترش ناپایداری انگشتی شامل طول اختلاط، بازده جاروبی و کانتورهای غلظت در حالت‌های متنوعی از جابه‌جایی سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی مورد ارزیابی و مقایسه قرارگرفته‌اند. در هر سه نوع جابه‌جایی، با افزایش نفوذپذیری در جهت جریان نسبت به جهت عمود بر جریان، از شدت رشد ناپایداری‌ها کاسته شده و جریان پایدارتری به‌دست می‌آید درحالی‌که با افزایش پراکندگی محیط متخلخل در جهت جریان نسبت به جهت عمود بر آن، جریان ناپایدارتر شده و ناپایداری‌ها با شدت بیشتری رشد می‌کنند. در جابه‌جایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی، با افزایش شاخص توانی و نیز کاهش عدد دبورا، جریانی پایدارتر می شود، درحالی‌که در جابه‌جایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی، عکس حالت پیش اتفاق می‌افتد.

Nonlinear simulation of non-Newtonian viscous fingering instability in anisotropic porous media

Mahmood Norouzi*, Mohammad Reza Shogh

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran.
* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, mnorouzi@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 03 March 2015
Accepted 28 May 2015
Available Online 20 June 2015

Keywords:
Viscous fingering instability
Anisotropic porous media
Shear-thinning fluid
Nonlinear simulation

ABSTRACT

The viscous fingering instability of miscible non-Newtonian flow displacements in anisotropic porous media is studied. This instability was studied in a rectilinear Hele-Shaw cell and the shear-thinning character of the fluids is modeled using the Carreau-Yasuda constitutive equation. In particular, the role of anisotropic properties of porous media including permeability and dispersion and also rheological parameters of non-Newtonian fluid are investigated through nonlinear simulation. In non-linear simulations, a spectral method based on the Hartley transforms are conducted and allowed in order to compare several non-linear finger interactions that were observed in simulation. In this paper, three types of displacement are considered. In the first one, the displacing fluid and the displaced one are Newtonian and in the next two types of displacement, one of the displacing fluids or the displaced one is non-Newtonian. Evaluation of mixing length, sweep efficiency and transversely average concentration are examined for two different types of displacement where the displacing or the displaced phase were shear-thinning fluids and also for different anisotropic scenarios. The results indicate that in three types of displacement, the flow becomes more stable by increasing the anisotropic permeability ratio and more unstable by increasing the anisotropic dispersion ratio. Moreover, it is concluded that in the case of the non-Newtonian fluid displaced the Newtonian fluid, by increasing the Deborah number and the power-law index, a more stable flow is obtained, while in the case of the Newtonian displaced the non-Newtonian one, a more unstable flow is obtained.

1- مقدمه

ناپایداری انگشتی لزج[1] یکی از انواع ناپایداری هیدرودینامیکی شناخته‌شده در جابه‌جایی جریان سیالات است که توجه بسیاری از دانشمندان را به‌خصوص در علوم مکانیک و شیمی به خود جلب کرده است. این توجه و علاقه زیاد به دلیل نقش بزرگ و مهمی است که این ناپایداری در گستره بزرگی از علوم

1- Viscous fingering instability

Please cite this article using:
M. Norouzi, M. R. Shogh, Nonlinear simulation of non-Newtonian viscous fingering instability in anisotropic porous media, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 7, pp. 415-425, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

طبیعی و زیست‌محیطی و به ویژه صنایع نفتی دارد، از جمله این موارد می‌توان به فرایندهای جداسازی اجزاء مواد و کروماتوگرافی [1] در علوم شیمی، جداسازی و حذف مواد آلوده از بسترهای آب زیرزمینی و از همه مهم‌تر، عملیات ازدیاد برداشت نفت اشاره کرد [2].

این ناپایداری که به دلیل پدیدار شدن الگوهایی شبیه به انگشتان دست در سطح مشترک دو سیال، ناپایداری انگشتی نامیده می‌شود، به دلیل اختلاف ویسکوزیته دو سیال به‌وجود می‌آید. هرگاه سیالی با ویسکوزیته کمتر سیالی با ویسکوزیته بیشتر را جابه‌جا کند، در سطح مشترک دو سیال ناپایداری انگشتی ایجاد می‌شود. ناپایداری انگشتی با افزایش نسبت تحرک[1] که به‌صورت ضریب تحرک سیال جابه‌جاکننده به سیال جابه‌جاشده تعریف می‌شود، افزایش می‌یابد. این ناپایداری در دو حالت جابه‌جایی مخلوط‌شدنی[2] و مخلوط‌نشدنی[3] [2] مورد بررسی قرار می‌گیرد. در جابه‌جایی مخلوط‌شدنی، از حضور نیروهای موئینگی صرف‌نظر می‌شود و فقط اختلاف ویسکوزیته‌ها در نظر گرفته می‌شود، درحالی‌که در جابه‌جایی‌های مخلوط‌ناشدنی تأثیر نیروهای موئینگی و کشش سطحی نیز مورد توجه و بررسی قرار می‌گیرد.

در روش‌های ازدیاد برداشت مرحله دوم و سوم از مخازن نفتی، معمولاً از آب برای استخراج نفت باقی‌مانده در مخازن استفاده می‌شود. به دلیل اختلاف ویسکوزیته قابل‌توجهی که بین آب تزریق‌شده و نفت موجود در مخازن وجود دارد، پس از مدتی آب تزریقی، درون نفت نفوذ کرده و ناپایداری انگشتی در جریان انتقال نفت به وجود می‌آید که به‌شدت بازده فرایند استخراج نفت را با مشکل مواجه می‌کند. در اثر ایجاد این ناپایداری، پس از مدتی از چاه‌های استخراج، به‌جای نفت، آب استخراج‌شده و عملاً عملیات ازدیاد برداشت صرفه اقتصادی و عملیاتی خود را ازدست می‌دهد. برای سرکوب و خنثی کردن این اثر مخرب معمولاً از پلیمرها و مواد فعال سطحی[4] استفاده می‌شود که می‌توانند ویسکوزیته آب را تا حد زیادی افزایش و نسبت تحرک جابه‌جایی را کاهش دهد. خواص مکانیکی این مواد اغلب پیچیده است و جزء سیالات غیرنیوتنی طبقه‌بندی می‌شوند. از این رو مطالعه این ناپایداری در جابه‌جایی جریان سیالات غیرنیوتنی می‌تواند نقش بسیار مهمی در فهم بهتر راه‌کارهای مفید و مناسب در جهت کاهش ناپایداری انگشتی و عوامل مؤثر در آن داشته باشد.

این پدیده شگفت‌انگیز، توجه بسیاری از دانشمندان را به‌خصوص در مواردی که هر دو سیال جابه‌جاکننده و جابه‌جاشده نیوتنی هستند، جلب کرده است. هیل [3] نخستین بار این ناپایداری را در جابه‌جایی مخلوط‌شدنی مورد بررسی قرارداد. پیسمن و همکاران [4] این ناپایداری را در یک محیط متخلخل مربعی با استفاده از روش تفاضل محدود مورد مطالعه قراردادند. کریستی [5]، مدل محاسباتی موجود را بهینه کرده و به بررسی آن با مدل جدید پرداخت. به دلیل دقت پایین این روش‌ها، از روش‌های طیفی در شبیه‌سازی این ناپایداری استفاده شد و در ادامه، برای افزایش سرعت در انجام محاسبات و کاهش حجم آن‌ها از تبدیلات هارتلی[5] در مدل کردن این پدیده استفاده شد [6-9].

از سوی دیگر، استفاده از سیالات غیرنیوتنی در بررسی این پدیده به اندازه مطالعات مربوط به سیالات نیوتنی مورد توجه قرار نگرفته است. بررسی این نوع از جریان سیالات غیرنیوتنی به دلیل کاربرد گسترده‌ای که در صنایع انتقال و بازیابی مواد نفتی و نیز جداسازی مواد و کروماتوگرافی دارند، می‌تواند بسیار کاربردی و مفید باشد. نخستین مطالعه آزمایشگاهی در بررسی ناپایداری انگشتی با استفاده از سیالات غیرنیوتنی مربوط به مطالعات نیتمن و همکارانش [10] است. ایشان با تزریق نوعی از پلیمرها در دبی‌های متفاوت به بررسی چگونگی جابه‌جایی نفت پرداختند. لیندر و همکاران [11] به بررسی این ناپایداری در یک سلول مربعی هل- شاو[6] پرداختند. ایشان با تغییر ضخامت این سلول و استفاده از پلیمرهای ویژه، سازوکارهای متفاوت جابه‌جایی نفت را مورد مطالعه قراردادند و مشاهده کردند که با استفاده از پلیمرهایی که خواص باریک‌شوندگی[7] قوی‌تری دارند، انگشتی‌های باریک‌تری در سطح مشترک دو سیال به‌وجود می‌آید. در همین راستا، تأثیرات الاستیسیته و باریک‌شوندگی سیالات غیرنیوتنی بر رشد و گسترش غیرخطی انگشتی‌ها توسط ویلسون [12] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت.

با دقت در مطالعات انجام‌شده، درمی‌یابیم که تمام این مطالعات مربوط به بررسی این ناپایداری در محیط‌های همگن و همسان‌گرد است و هیچ‌کدام از آن‌ها به بررسی تفاوت‌های این ناپایداری در محیط‌های ناهمسان‌گرد نپرداخته‌اند و تنها مطالعاتی در زمینه جریان سیالات نیوتنی در محیط‌های ناهمگن و ناهمسان‌گرد وجود دارد [13-16]. علاوه‌بر این مطالعاتی که به بررسی تأثیرات نفوذپذیری[8] و پراکندگی[9] بر این ناپایداری پرداخته‌اند، بسیار محدود و مختصر است. در واقع با توجه به کاربرد و نقش گسترده‌ای که ناهمسان‌گردی‌ها در محیط‌های طبیعی و نیز صنایع می‌توانند داشته باشد، مطالعات موجود بسیار ناکافی و ناقص است. به‌طور کلی، بررسی نقش ناهمسان‌گردی تانسور نفوذپذیری و پراکندگی محیط‌های مورد مطالعه به‌خصوص محیط‌های متخلخل، نقش بسیار گسترده‌ای در فرایندهایی مانند فیلتراسیون، کروماتوگرافی و ازدیاد برداشت نفت دارد. درحقیقت شناسایی مناسب‌تر مناطق مورد مطالعه برای فرایندهای ازدیاد برداشت و نیز مواردی که می‌توانند بر کاهش یا افزایش شدت رشد ناپایداری انگشتی تأثیرگذار هستند، می‌توانند کمک فزاینده‌ای در ایجاد شرایط بهتر و باصرفه‌تر از نظر اقتصادی در جهت ازدیاد بیشتر از مخازن نفت باقی‌مانده داشته باشند.

در این مقاله در نظر داریم تأثیرات ناهمسان‌گردی تانسور نفوذپذیری و پراکندگی را بر رشد و گسترش ناپایداری انگشتی لزج هنگامی که یکی از سیالات جابه‌جاکننده یا جابه‌جاشده غیرنیوتنی هستند، بررسی کنیم. تمرکز ما در این مطالعه بر جابه‌جایی مخلوط‌شدنی است؛ بنابراین از تأثیرات کشش سطحی صرف‌نظر شده است. علاوه‌بر این دو نوع جابه‌جایی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم؛ در حالت نخست، سیال غیرنیوتنی سیال نیوتنی دیگری را جابه‌جا می‌کند و در حالت دوم، سیال نیوتنی، سیال غیرنیوتنی دیگری را جابه‌جا می‌کند. دلیل بررسی این دو نوع از جابه‌جایی‌ها را می‌توان به این صورت بیان کرد که در صنایع انتقال نفت به دلیل گرانی مواد پلیمری به‌کار گرفته شده، یک بخش از پلیمر به درون مخازن تزریق می‌شود و پس از آن در ادامه برای جابه‌جایی پلیمر تزریق‌شده، آب در ادامه مسیر به درون مخازن تزریق می‌شود. بدین ترتیب دو نوع جابه‌جایی از سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی در مخازن به وجود می‌آید.

برای سیال نیوتنی خواص باریک‌شوندگی درنظر گرفته شده است و از هندسه سلول هل- شاو به‌عنوان محیط متخلخل استفاده شده است. همانندی و شباهتی که بین سلول هل- شاو و محیط متخلخل وجود دارد ناشی از این

1- Mobility ratio
2- Miscible
3- immiscible
4- surfactant
5- Hartley transform

6- Hele-Shaw cell
7- Shear-thinning
8- Permeability
9- Dispersion

موضوع است که متوسط جریانی که از این سلول می‌گذرد، توسط قانون دارسی[1] قابل‌بیان است. تانسور نفوذپذیری و پراکندگی به‌صورت ناهمسان‌گرد در نظر گرفته می‌شوند و تأثیرات آن بر افزایش یا کاهش ناپایداری انگشتی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

تصویر الگو واری از مسئله در شکل 1 آورده شده است، هندسه مسئله، مستطیلی به طول L و عرض W است. در این مسئله سیال با ویسکوزیته کمتر از سمت چپ وارد محیط متخلخلی که از سیال با ویسکوزیته بیشتر پر شده است، تزریق می‌شود. انتظار می‌رود که الگوهای انگشتی شکل در سطح مشترک دو سیال مشاهده شود.

2- سیال غیرنیوتنی

در مطالعه حاضر، همان‌گونه که پیش از این یاد شد برای سیال غیرنیوتنی رفتار باریک شونده در نظر می‌گیریم. مدل‌های زیادی برای بیان این نوع رفتار رئولوژیکی در سیالات غیرنیوتنی وجود دارد که هر کدام مزایا و معایب مخصوص به خود را دارند، ولی در این میان برخی از این مدل‌ها نسبت به سایر آن‌ها قابلیت‌ها و سازگاری مناسب‌تری با واقعیت‌ها دارند. مدل شناخته‌شده پاور- لا[2] [17] به‌طور گسترده‌ای برای بیان رفتار غیرنیوتنی سیالات در صنایع و تحقیقات به‌کار می‌رود. این مدل در نرخ برش‌های بسیار کوچک، ویسکوزیته‌ای بی‌نهایت مدل می‌کند، از این‌رو فقط برای بازه محدودی از نرخ برش‌ها قابل استفاده است. مدل دیگری که برای بیان رفتار باریک شوندگی مورد استفاده قرار می‌گیرد و مطابقت بیشتری با واقعیت دارد مدل کاریو- یاسودا[3] [17] است. این مدل به‌صورت رابطه (1) تعریف می‌شود.

$$\frac{\mu-\mu_\infty}{\mu_0-\mu_\infty}=[1+(\lambda\dot{\gamma})^a]^{(n-1)/a} \qquad (1)$$

در این معادله μ_0 ویسکوزیته در نرخ برش صفر، μ_∞ ویسکوزیته در نرخ برش نهایی، λ ثابت زمانی و n شاخص توانی است که شیب نمودار تغییرات $\mu(\dot{\gamma})$ را نشان می‌دهد، همچنین در این رابطه، a پارامتر بی‌بعدی است که انتقال از ناحیه نرخ برش صفر به ناحیه توانی را نشان می‌دهد و $\dot{\gamma}$ نرخ برش تعمیم یافته است. برای بسیاری از محلول‌های پلیمری، این معادله به‌ازای $\mu_\infty=0$ و $a=2$ تطابق بسیار خوبی با نتایج آزمایشگاهی به‌دست آمده دارد. با درنظر گرفتن این مقادیر معادله بالا به صورت رابطه (2) تبدیل می‌شود.

$$\mu=\mu_0[1+(\lambda\dot{\gamma})^2]^{(n-1)/2} \qquad (2)$$

مدل کاریو- یاسودا برای $n<1$ رفتار باریک‌شوندگی از خود نشان می‌دهد، همچنین به‌ازای $n=1$ یا $\lambda=0$، معادله موجود تبدیل به معادله حالت نیوتنی می‌شود.

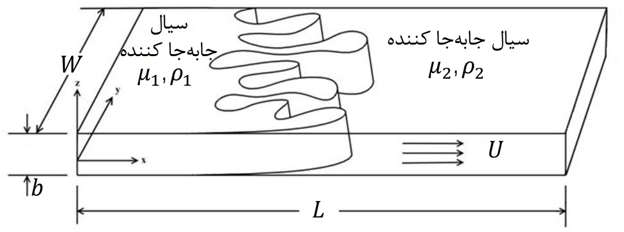
3- محیط متخلخل ناهمسان‌گرد

معادله دارسی که برای بررسی جریان سیال در محیط متخلخل به‌کار می‌رود، رابطه بین سرعت و گرادیان فشار را برای محیط متخلخلی با نفوذپذیری ناهمسان‌گرد به‌صورت رابطه (3) بیان می‌کند.

$$\begin{Bmatrix}q_x\\q_y\end{Bmatrix}=-\frac{1}{\mu}\begin{bmatrix}K_{11}&K_{12}\\K_{21}&K_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial p}{\partial x}\\\dfrac{\partial p}{\partial y}\end{Bmatrix} \qquad (3)$$

در این رابطه q دبی، k_{ij} اجزاء تانسور نفوذپذیری، μ ویسکوزیته سیال و

1- Darcy's Law
2- Power-law
3- Carreau-Yasuda



شکل 1 تصویری الگو وار از هندسه مسئله

p فشار استاتیک است. با توجه به قانون تقابل[4]، تانسور نفوذپذیری متقارن بوده و رابطه (4) در آن برقرار است.

$$K_{ij}=K_{ji} \qquad (4)$$

معمولاً در مطالعاتی که بررسی ناهمسان‌گردی در یک پدیده می‌پردازند، از دو سیستم محوری به‌صورت روشن[5] و خاموش[6] استفاده می‌کنند. در این روش، جهت‌های سیستم محوری روشن (x_1,x_2,x_3)، جهت‌هایی است که در آن‌ها مقادیر نفوذپذیری و پراکندگی با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی به‌صورت مستقیم به‌دست می‌آیند؛ بنابراین ترم‌های غیرقطری این خواص در سیستم محوری روشن برابر با صفر است. برای نمونه قانون دارسی در این سیستم محوری به‌صورت رابطه (5) بیان می‌شود.

$$\begin{Bmatrix}q_x\\q_y\end{Bmatrix}_{\text{on}}=-\frac{1}{\mu}\begin{bmatrix}\bar{K}_{11}&0\\0&\bar{K}_{22}\end{bmatrix}_{\text{on}}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial p}{\partial x}_1\\\dfrac{\partial p}{\partial y}_2\end{Bmatrix} \qquad (5)$$

با این تعریف، سیستم محوری خاموش، به‌صورت هر سیستم دلخواهی که با زاویه‌ای نسبت به سیستم محوری روشن قرار بگیرد، تعیین می‌شود، در واقع این سیستم به‌صورت رابطه (6) تعریف می‌شود.

$$[T(-\theta)]q_{\text{off}}=-\frac{1}{\mu}K_{\text{on}}[T(-\theta)]\nabla p_{\text{off}} \qquad (6)$$

که در آن $[T(\theta)]$ تانسور دوران است و به‌صورت رابطه (7) تعریف می‌شود.

$$[T(\theta)]=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix} \qquad (7)$$

با استفاده از معادله (6)، معادله دارسی در سیستم محوری خاموش به صورت رابطه (8) به‌دست می‌آید.

$$q_{\text{off}}=-\frac{1}{\mu}[T(-\theta)]^{-1}K_{\text{on}}[T(-\theta)]\nabla p_{\text{off}} \qquad (8)$$

با توجه به معادله (3)، معادله (8) به‌صورت ساده‌تر رابطه (9) تبدیل می‌شود.

$$q_{\text{off}}=-\frac{1}{\mu}K_{\text{off}}\nabla p_{\text{off}} \qquad (9)$$

با استفاده از معادلات (8،9) و خواص تعامد تانسور دوران که به‌صورت $[T(\theta)]^{-1}=[T(-\theta)]$ تعریف می‌شود، رابطه (10) را داریم.

$$K_{\text{off}}=[T(\theta)]K_{\text{on}}[T(-\theta)] \qquad (10)$$

درنهایت با استفاده از معادلات (7،10) اجزاء تانسور نفوذپذیری در سیستم خاموش به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\begin{bmatrix}K_{11}&K_{12}\\K_{21}&K_{22}\end{bmatrix}=$$

$$-\frac{1}{\mu}\begin{bmatrix}\bar{K}_{11}\cos^2\theta+\bar{K}_{22}\sin^2\theta&(\bar{K}_{11}-\bar{K}_{22})\sin\theta\cos\theta\\(\bar{K}_{11}-\bar{K}_{22})\sin\theta\cos\theta&\bar{K}_{11}\sin^2\theta+\bar{K}_{22}\cos^2\theta\end{bmatrix} \qquad (11)$$

4- Reciprocity law
5- On-axis
6- Off-axis

که در این رابطه $\bar{K}_{ij}$ و K_{ij} به‌ترتیب اجزای تانسور نفوذپذیری در جهت‌های روشن و خاموش است.

قانون اول فیک[1] نیز در مطالعه حاضر برای مدل کردن انتقال جرم در محیط متخلخل به‌کار می‌رود، این قانون در جهت سیستم روشن به‌صورت رابطه (12) بیان می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{Bmatrix}_{\mathrm{on}} = -\rho \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{D}_{22} \end{bmatrix}_{\mathrm{on}} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial x}_1 \\ \dfrac{\partial c}{\partial y}_2 \end{Bmatrix} \tag{12}$$

که در این رابطه j جریان جرمی مولکول، ρ چگالی، $\bar{D}$ ضریب تانسور پراکندگی در سیستم محوری روشن و c کسر جرمی است. قانون اول فیک در سیستم محوری خاموش به‌صورت رابطه (13) بیان می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} j_x \\ j_y \end{Bmatrix}_{\mathrm{off}} = -\rho \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}_{\mathrm{off}} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial x} \\ \dfrac{\partial c}{\partial y} \end{Bmatrix}_{\mathrm{off}} \tag{13}$$

که در این رابطه D ضریب تانسور پراکندگی در سیستم محوری خاموش است، به‌دست آوردن روابط مربوط به تانسور پراکندگی در سیستم محوری خاموش و روشن، دقیقاً مطابق با روابط مربوط به تانسور نفوذپذیری است؛ بنابراین مطابق معادله (11)، اجزاء تانسور پراکندگی در سیستم محوری روشن به صورت رابطه (14) بیان می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11}\cos^2\theta + \bar{D}_{22}\sin^2\theta & (\bar{D}_{11} - \bar{D}_{22})\sin\theta\cos\theta \\ (\bar{D}_{11} - \bar{D}_{22})\sin\theta\cos\theta & \bar{D}_{11}\sin^2\theta + \bar{D}_{22}\cos^2\theta \end{bmatrix} \tag{14}$$

4- معادلات حاکم

جابه‌جایی دوبعدی که شامل دو سیال تراکم ناپذیر با ویسکوزیته‌های متفاوت هستند را نظر می‌گیریم، قانون بقای جرم توسط معادله پیوستگی، معادله مومنتوم توسط قانون دارسی و معادله کانوکشن- دیفیوژن[2] برای غلظت به صورت روابط (15-17) درنظر گرفته می‌شود.

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{15}$$

$$\nabla P = -\mu\, K^{-1}\, u \tag{16}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \cdot \nabla c = \nabla \cdot D \nabla c \tag{17}$$

در این معادلات $u = (u, v)$ بردار سرعت، Kو D به‌ترتیب تانسورهای نفوذپذیری و پراکندگی است. قانون دارسی برای استفاده از سیالات غیرنیوتنی باید تغییراتی پیدا کند، برش اصلی در سلول هل- شاو در جهت عمود بر صفحات سلول رخ می‌دهد، میانگین برش را به‌صورت $\dot{\gamma} = V/b$ درنظر می‌گیریم که در آن b فاصله بین دو صفحه سلول و V بزرگی سرعت به‌صورت $V^2 = u^2 + v^2$ است. شکل اصلاح‌شده قانون دارسی برای سیال کاریو- یاسودا به‌صورت رابطه (18) تغییر می‌یابد [18].

$$\nabla P = -\mu\, K^{-1} \left[1 + \left(\frac{\lambda V}{b}\right)^2\right]^{(n-1)/2} u \tag{18}$$

مانند مطالعات پیشین [6-9]، شرایط مرزی به‌صورت روابط (20،19) درنظر گرفته می‌شود.

1- Fick's first law
2- convection-dispersion

$$\begin{cases} x = 0\ ; & u = U, \quad v = 0, \quad c = c_1 \\ x = L\ ; & u = U, \quad v = 0, \quad c = 0 \end{cases} \tag{19}$$

$$(u, c)(x, 0, t) = (u, c)(x, W, t) \tag{20}$$

برای کامل شدن مدل محاسباتی، مانند زیمرمن و هومسی [19،7] رابطه‌ای نمایی بین ویسکوزیته و غلظت برای جابه‌جایی سیالات نیوتنی به صورت رابطه (21) درنظر می‌گیریم.

$$\mu(c) = e^{R(1-c)} \tag{21}$$

در این رابطه R پارامتری است که نسبت ویسکوزیته دو سیال را به صورت رابطه (22) نشان می‌دهد.

$$R = \ln\frac{\mu_2}{\mu_1} \tag{22}$$

همچنین μ_1 و μ_2 به‌ترتیب ویسکوزیته سیال جابه‌جاکننده و جابه‌جاشده است. انتخاب این رابطه به هیچ‌وجه محدود به این رابطه نمایی نمی‌شود و می‌توان از هر رابطه یکنواخت دیگری استفاده کرد [20]. در همین راستا، برای حالتی که سیال غیرنیوتنی سیال نیوتنی دیگری را جابه‌جا می‌کند، رابطه ویسکوزیته و غلظت به‌صورت رابطه (23) تعریف می‌شود.

$$\mu(c, V^2) = e^{R(1-c)} \left[1 + \left(\frac{\lambda V}{b}\right)^2\right]^{\frac{(n-1)c}{2}}, \quad R = \ln\frac{\mu_2}{\mu_{1o}} \tag{23}$$

در این رابطه μ_{1o} ویسکوزیته در نرخ برش صفر و μ_2 ویسکوزیته سیال نیوتنی جابه‌جا شده است. به همین ترتیب، برای حالتی که سیال نیوتنی سیال غیرنیوتنی دیگری را جابه‌جا می‌کند، رابطه ویسکوزیته و غلظت به صورت رابطه (24) تعریف می‌شود.

$$\mu(c, V^2) = e^{R(1-c)} \left[1 + \left(\frac{\lambda V}{b}\right)^2\right]^{\frac{(n-1)(1-c)}{2}}, R = \ln\frac{\mu_{2o}}{\mu_1} \tag{24}$$

در این رابطه نیز، μ_1 ویسکوزیته سیال نیوتنی جابه‌جاکننده و μ_{2o} ویسکوزیته در نرخ برش صفر سیال باریک‌شونده جابه‌جا شده است.

4-1- بی‌بعدسازی

جهت بی‌بعدسازی معادلات از $\bar{D}_{22}/U$ و $\bar{D}_{22}/U^2$ به‌ترتیب برای بی‌بعدسازی طول و زمان استفاده می‌کنیم. ویسکوزیته هر دو سیال با استفاده از ویسکوزیته سیال جابه‌جاکننده (μ_1) بی‌بعد می‌شوند. فشار نیز توسط $\mu_1/(\bar{D}_{22}\bar{K}_{22})$ بی‌بعد خواهد شد. در این معادلات، $\bar{K}_{22}$ و $\bar{D}_{22}$ به‌ترتیب نفوذپذیری و پراکندگی در جهت عرضی است. همچنین از یک سیستم لاگرانژی برای بیان معادلات استفاده می‌کنیم، بدین‌صورت که فرض می‌کنیم به جای این‌که سیال تزریق شود، کل سیستم با سرعت U حرکت می‌کند. معادلات حاکم بر مسئله به صورت روابط (25-29) تبدیل می‌شوند.

$$\nabla \cdot u^* = 0 \tag{25}$$

$$\nabla P^* = -\bar{K}_{22} K^{-1} \mu^* (u^* + i) \tag{26}$$

$$\frac{\partial c^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla c^* = \nabla \cdot \left(\frac{D}{\bar{D}_{22}} \nabla c^*\right) \tag{27}$$

$$\frac{K}{\bar{K}_{22}} = \begin{bmatrix} \alpha_K \cos^2\beta_K + \sin^2\beta_K & (1/2)(\alpha_K - 1)\sin 2\beta_K \\ (1/2)(\alpha_K - 1)\sin 2\beta_K & \alpha_K \sin^2\beta_K + \cos^2\beta_K \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$\frac{D}{\bar{D}_{22}} = \begin{bmatrix} \alpha_D \cos^2\beta_D + \sin^2\beta_D & (1/2)(\alpha_D - 1)\sin 2\beta_D \\ (1/2)(\alpha_D - 1)\sin 2\beta_D & \alpha_D \sin^2\beta_D + \cos^2\beta_D \end{bmatrix} \tag{29}$$

در این معادلات $\alpha_D = \bar{D}_{11}/\bar{D}_{22}$ و $\alpha_K = \bar{K}_{11}/\bar{K}_{22}$ نسبت ناهمسان‌گردی طولی به عرضی تانسور نفوذپذیری و پراکندگی و β_K و β_D زاویه انحراف در تانسور نفوذپذیری و پراکندگی بین سیستم محوری خاموش و روشن است. در این معادلات، زیرنویس‌های K و D مقادیر مربوط به تانسور نفوذپذیری و پراکندگی را نشان می‌دهند. در حالت بی‌بعدشده معادله دارسی، i بردار یکه در راستای x است که در نتیجه استفاده از سیستم لاگرانژی در این معادله به وجود آمده است. در ادامه مقاله برای سهولت کار، ستاره‌های بالانویس‌شده در معادلات حذف می‌شوند.

4-2- تبدیل معادلات به صورت تابع جریان - ورتیسیتی

برای حل ساده‌تر معادلات حاکم بر مسئله، از تبدیل معادلات به صورت تابع جریان- ورتیسیتی[1] استفاده می‌کنیم. بدین‌منظور معادلات حاکم را هم برای حالت نیوتنی و هم غیرنیوتنی به این صورت تبدیل کرده و سپس با استفاده از آن‌ها به شبیه‌سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی خواهیم پرداخت. روابط اصلی این تبدیلات به صورت روابط (31،30) است.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{30}$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) \tag{31}$$

در این معادلات، ψ تابع جریان و ω ورتیسیتی است. با استفاده از این تبدیلات، معادله پیوستگی به‌صورت رابطه (32) همیشه برقرار است و از فهرست معادلات حاکم خارج می‌شود.

$$\nabla \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \tag{32}$$

معادله کانوکشن- دیفیوژن نیز به‌صورت رابطه (33) نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y} = A_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + A_3 \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} \tag{33}$$

این معادله برای جابه‌جایی سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی یکسان است و ضرایب A_1 ، A_2 و A_3 به صورت روابط (36-34) تعریف می‌شوند.

$$A_1 = \alpha_D \cos^2\beta_D + \sin^2\beta_D \tag{34}$$

$$A_2 = \alpha_D \sin^2\beta_D + \cos^2\beta_D \tag{35}$$

$$A_3 = (\alpha_D - 1)\sin 2\beta_D \tag{36}$$

با کرل گرفتن از معادله مومنتوم یعنی معادله (26)، فشار نیز از معادلات حذف می‌شود و معادله‌ای برای سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی به‌دست می‌آید.

1- جابه‌جایی سیالات نیوتنی

$$\omega = \left(\frac{2}{\alpha_K + 1 + (\alpha_K - 1)\cos(2\beta_K)}\right)$$
$$\left(-H_1\left(R\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial x}\right) - H_2\left(R\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}+1\right)\frac{\partial c}{\partial y}\right)\right.$$
$$-H_3\left(R\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}+1\right)\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y}\right] - 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right)$$
$$\left. + (1-\alpha_K)\cos(2\beta_K)\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) \tag{37}$$

در این معادله H_1، H_2 و H_3 به‌صورت روابط (40-38) تعریف می‌شوند.

$$H_1 = \alpha_K \cos^2\beta_K + \sin^2\beta_K \tag{38}$$

$$H_2 = \alpha_K \sin^2\beta_K + \cos^2\beta_K \tag{39}$$

$$H_3 = 0.5(1-\alpha_K)\sin 2\beta_K \tag{40}$$

2- جابه‌جایی سیالات غیرنیوتنی به‌صورت رابطه (41) است.

$$\omega = \left(\frac{2}{\alpha_K + 1 + (\alpha_K - 1)\cos(2\beta_K)}\right)$$
$$(\alpha_K - 1)\left(\sin(2\beta_K)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \cos(2\beta_K)\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)$$
$$+ \frac{d\ \ln\mu}{dc}\left(M\frac{\partial c}{\partial x} + N\frac{\partial c}{\partial y}\right)$$
$$+ \frac{d\ \ln\mu}{dV^2}\left(M\frac{\partial V^2}{\partial x} + N\frac{\partial V^2}{\partial y}\right) \tag{41}$$

پارامترهای موجود در این رابطه بر اساس این‌که سیال غیرنیوتنی، سیال جابه‌جا کننده یا جابه‌جا شده باشد، به شکل روابط (43-42) تعریف می‌شوند.

- جابه‌جایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی

$$\frac{d\ \ln\mu}{dc} = -R + \frac{n-1}{2}\ln(1 + \mathrm{De}^2 V^2) \tag{42}$$

$$\frac{d\ \ln\mu}{dV^2} = \frac{c(n-1)}{2}\,\frac{\mathrm{De}^2}{1 + \mathrm{De}^2 V^2} \tag{43}$$

- جابه‌جایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی به‌صورت روابط (45-44) است.

$$\frac{d\ \ln\mu}{dc} = -R - \frac{n-1}{2}\ln(1 + \mathrm{De}^2 V^2) \tag{44}$$

$$\frac{d\ \ln\mu}{dV^2} = \frac{(1-c)(n-1)}{2}\,\frac{\mathrm{De}^2}{1 + \mathrm{De}^2 V^2} \tag{45}$$

سایر پارامترها برای هر دو نوع جریان یکسان بوده و به‌صورت روابط (49-46) تعریف می‌شوند.

$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)(\alpha_K - 1)\sin(2\beta_K)$$
$$-\frac{\partial \psi}{\partial x}(\alpha_K \cos^2\beta_K + \sin^2\beta_K) \tag{46}$$

$$N = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + 1\right)(\alpha_K \sin^2\beta_K + \cos^2\beta_K)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial \psi}{\partial x}(1-\alpha_K)\sin(2\beta_K) \tag{47}$$

$$\frac{\partial V^2}{\partial x} = 2\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + 1\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \tag{48}$$

$$\frac{\partial V^2}{\partial y} = 2\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + 2\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + 1\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{49}$$

5- روش حل عددی

جهت شبیه‌سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی از ابزاری قدرتمند برای حل معادلات حاکم بر مسئله، به نام روش طیفی[2] [21] استفاده می‌کنیم. این روش به‌صورت گسترده‌ای در علم مکانیک سیالات استفاده می‌شود. دلیل اصلی استفاده از این روش، دقت بالای آن نسبت به سایر روش‌های حل عددی است. همچنین با استفاده از تبدیلات هارتلی، معادلات مشتق جزیی حاکم بر مسئله را به معادلات دیفرانسیلی تبدیل می‌کنیم. براسول و همکاران [22] توانستند با به‌کارگیری تبدیلات هارتلی بخش عمده‌ای از حجم محاسباتی مسئله را کاهش دهند. تبدیل دوبعدی هارتلی برای دو تابع دلخواه به‌صورت رابطه (50) است.

1- streamfunction-vorticity formulation

2- Spectral method

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.7.16.4]

$$\mathrm{G}(k_x,k_y) = \frac{1}{\sqrt{N_xN_y}}\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\mathrm{g}(x,y)\,\mathrm{cas}\left(\frac{2\pi x k_x}{N_x}+\frac{2\pi x k_y}{N_y}\right) \qquad (50)$$

در این معادله N_x و N_y تعداد گره‌های محاسباتی در جهت x و y و k_x و k_y عدد موج‌های متناظر با آن‌هاست. در این رابطه داریم $\mathrm{cas}(u) = \sin(u) + \cos(u)$. به دلیل استفاده از تبدیلات هارتلی، شرایط مرزی مسئله باید متناوب باشد، با توجه به معادلات، غلظت و سرعت در جهت y متناوب هستند، ولی غلظت در جهت x متناوب نیست. نخستین راه‌حلی که برای ایجاد شرایط متناوب در مسئله پیشنهاد شد به این صورت بود که دامنه محاسباتی را در جهت x دو برابر کنیم؛ بنابراین با استفاده از انعکاس در $x = L$، شرایط تناوب در مسئله ایجاد می‌شود. این روش هزینه محاسباتی زیادی دارد [6،7]. منیکام و همکاران [23] روش بسیار مناسب‌تری را ارائه کردند، آن‌ها پیشنهاد دادند تا غلظت را در هر زمان به دو بخش تقسیم کنیم، بخش نخست، حل معادله یک‌بعدی کانوکشن- دیفیوژن $\bar{c}(x,t)$ و بخش دوم، بخش اغتشاشی غلظت است $\acute{c}(x,y,t)$ به‌صورت رابطه (51) است.

$$c(x,y,t) = \bar{c}(x,t) + c'(x,y,t) \qquad (51)$$

در این معادله $\bar{c}(x,t) = (1/2)\left[1-\mathrm{erf}(x/\sqrt{4t})\right]$ و c' بخش اغتشاشی غلظت است. در این روش به‌جای حل کل غلظت در هر تکرار از برنامه نوشته‌شده، فقط بخش اغتشاشی غلظت c' حل می‌شود و با $\bar{c}$ جمع می‌شود. بخش اغتشاشی در شرایط مرزی $x = 0$ و $x = L$ صفر است که شرایط مرزی متناوب را در جهت x ایجاد می‌کند. با استفاده از این روش علاوه‌بر این‌که شرایط لازم برای استفاده از تبدیلات هارتلی فراهم می‌شود، هزینه محاسباتی برنامه نیز به‌شدت کاهش می‌یابد. شرایط نخستین حاکم بر مسئله نیز به‌صورت رابطه (52) است.

$$u = U\ ,\quad v = 0\quad ,\quad c = c_0(x,y,t=t_0) \qquad (52)$$

در این رابطه، برای c_0 به‌صورت رابطه (53) خواهیم داشت:

$$c_0 = \bar{c}(x,t_o) + \delta\cdot\zeta(y)\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \qquad (53)$$

همان‌گونه که بیان شد غلظت کلی به‌صورت یک بخش پایه و یک بخش اغتشاشی در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین مقدار نخستین غلظت، توسط یک بخش اغتشاشی و یک بخش تصادفی به‌وجود می‌آید. در این معادله، ζ یک عدد تصادفی بین 1و 1- است، δ ضریبی است که شدت مقادیر تصادفی را مشخص می‌کند و σ پارامتری است که شدت نفوذ پراکندگی‌ها را از مرز جلویی نشان می‌دهد. پیشرفت زمانی در مسئله با استفاده از روش حدس- اصلاح ادامز- بشفورس[1] صورت می‌گیرد. شرایط مرزی مسئله براساس ترم اغتشاشی غلظت و نیز تبدیل آن‌ها به شکل تابع جریان- ورتیسیتی به‌صورت روابط (54-55) تبدیل می‌شوند.

$$(\psi,\omega,\acute{c})(0,y,t) = (\psi,\omega,\acute{c})(\mathrm{Pe},y,t) \qquad (54)$$

$$(\psi,\omega,\acute{c})(x,0,t) = (\psi,\omega,\acute{c})\left(x,\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{A}},t\right) \qquad (55)$$

در این معادلات Pe عدد پکله به‌صورت $\mathrm{Pe} = LU/D$ و $\mathrm{A} = L/W$ نسبت ابعاد دامنه محاسباتی مسئله است.

6- نتایج شبیه‌سازی غیرخطی

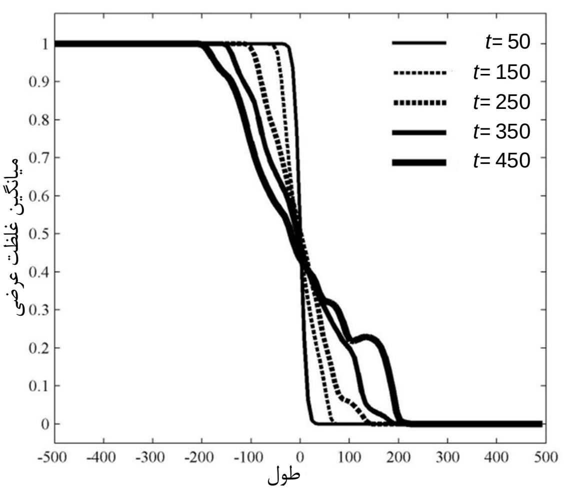
در این بخش نتایج به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی، جهت بررسی تأثیر ناهمسان‌گردی تانسور نفوذپذیری و پراکندگی در جابه‌جایی سیالات غیرنیوتنی و تفاوت آن با جابه‌جایی سیالات نیوتنی مورد بررسی قرار می‌گیرند. موارد مورد مطالعه شامل منحنی‌های میانگین غلظت، طول اختلاط، بازده جاروبی و کانتورهای غلظت است که در ادامه به تفصیل شرح داده خواهند شد.

6-1- طول اختلاط

طول اختلاط[2] یکی از پارامترهای مهمی است که از آن در فرایندهای انتقال سیالات استفاده می‌شود. از این کمیت در ناپایداری انگشتی برای بیان مقدار پیشرفت و حرکت انگشتی‌ها در محیط متخلخل استفاده می‌شود. برای به‌دست‌آوردن این طول، روش‌های زیادی معرفی شده است که در مطالعه حاضر با استفاده از روش زیرمن و هومسی [7] این کمیت اندازه‌گیری می‌شود. در این روش براساس معادله (56)، فاصله بین مقادیر خاصی از غلظت میانگین به‌عنوان طول اختلاط به‌صورت رابطه (56) درنظر گرفته می‌شود.

$$L_\delta = x|_{\bar{c}=\delta} - x|_{\bar{c}=1-\delta} \qquad (56)$$

در این معادله، δ یک عدد مثبت کوچک است که مقدار آن را 0/01 درنظر می‌گیریم و $\bar{c}$میانگین غلظت عرضی است. میانگین غلظت عرضی، یکی از متداول‌ترین مطالعات آزمایشگاهی و عددی در بررسی ناپایداری انگشتی است. در حقیقت مطالعه نتایج به‌دست‌آمده از اندازه‌گیری پارامترهای متفاوت در یک‌بعد، راهی مناسب برای پی بردن به رفتار جریان در محیط‌های مختلف است. علاوه‌بر این معمولاً از اطلاعات به‌دست‌آمده از این روش برای به‌دست‌آوردن پارامترهایی که برای محاسبه آن‌ها به مقادیر میانگین نیاز است مانند طول اختلاط استفاده می‌شود. شکل 2 منحنی‌های میانگین غلظت عرضی را برحسب زمان در جابه‌جایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی، نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در زمان‌های ابتدایی آغاز ناپایداری، منحنی به‌صورت خطی، بدون پستی و بلندی است. با افزایش زمان و رشد انگشتی‌ها، پستی و بلندی‌های موجود بر منحنی‌ها نیز می‌افزاید. در ناپایداری انگشتی، نرخ رشد و گسترش انگشتی‌ها متناسب با پستی‌ها و بلندی‌های موجود در منحنی‌های میانگین غلظت عرضی است، به‌صورتی که



شکل 2 منحنی‌های میانگین غلظت عرضی در جابه‌جایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی در زمان‌های متفاوت و $\mathrm{De} = 0.5$، $n = 0.7$، $\alpha_K = 2$، $\alpha_D = 1$، $\beta_K = \beta_D = 0^\circ$

1- Adams-Bashforth predictor-corrector method

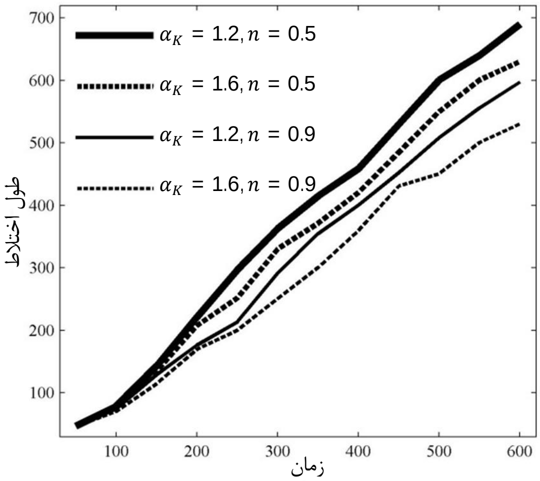
2- Mixing length

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.7.16.4]

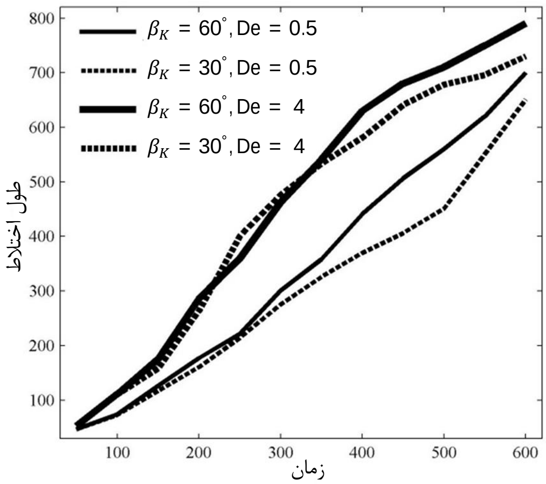
هر چه موج‌های موجود در منحنی‌ها بیشتر باشند، شدت ناپایداری نیز بیشتر خواهد بود.

به‌دست‌آوردن مقادیر طول اختلاط یکی از بهترین روش‌های تشخیص میزان رشد و گسترش ناپایداری انگشتی در جابه‌جایی سیالات است. شکل 3 تغییرات طول اختلاط را برحسب زمان برای حالتی که سیال غیرنیوتنی، سیال نیوتنی دیگری را جابه‌جا می‌کند، نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نفوذپذیری در جهت جریان نسبت به مقدار آن در جهت عمود بر جریان، طول اختلاط کاهش می‌یابد. در واقع با افزایش نفوذپذیری در جهت جریان، رشد انگشتی‌ها با مشکل مواجه شده و از سرعت نفوذ ناپایداری کاسته می‌شود، همچنین روشن است که با افزایش n و در نتیجه آن، افزایش ویسکوزیته سیال غیرنیوتنی، طول اختلاط نیز کاهش می‌یابد.

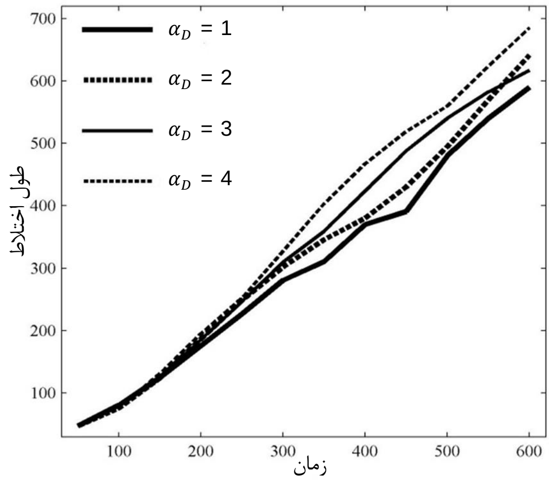
شکل 4 تأثیر β_K و De را بر شدت ناپایداری نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود با افزایش β_K و De طول اختلاط افزایش‌یافته و جریان ناپایدارتر می‌شود. به عبارت دیگر هر چه سیال باریک‌شونده قوی‌تری داشته باشیم، ویسکوزیته آن با کاهش نرخ برش، رشد بیشتری داشته و نسبت تحرک‌پذیری را به مقدار بیشتری کاهش می‌دهد. در نتیجه این فرایند، جریان پایدارتر شده و طول اختلاط کاهش می‌یابد. شکل 5 تأثیر



شکل 3 منحنی‌های طول اختلاط در جابه‌جایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی در زمان‌های متفاوت و $\mathrm{De} = 0.5$، $\beta_K = 0^\circ$، $\alpha_D = 1$، $\beta_D = 0^\circ$



شکل 4 منحنی‌های طول اختلاط در جابه‌جایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی در زمان‌های متفاوت و $n = 0.6$، $\alpha_K = 2$، $\alpha_D = 1$، $\beta_D = 0^\circ$



شکل 5 منحنی‌های طول اختلاط در جابه‌جایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی در زمان‌های متفاوت و $\mathrm{De} = 2$، $n = 0.7$، $\beta_K = 0^\circ$، $\alpha_K = 1$، $\beta_D = 0^\circ$

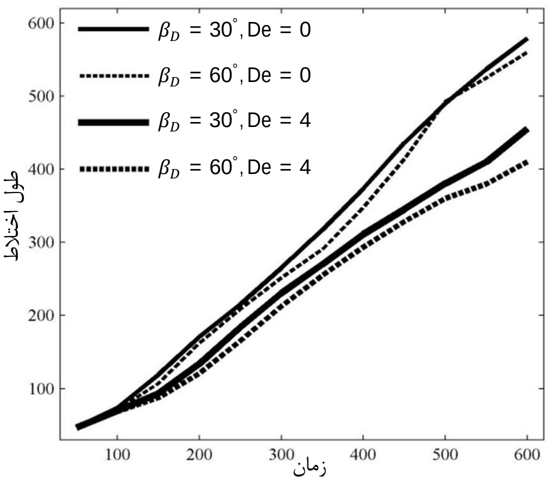
ناهمسان‌گردی تانسور پراکندگی را بر این ناپایداری نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود با کاهش α_D جریان پایدارتر شده و طول اختلاط کاهش می‌یابد.

شکل 6 نیز تفاوت جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی را برای حالت‌های متفاوتی از β_D و De نشان می‌دهد.

همان‌طور که پیش از این گفته شده بود، به‌ازای $\mathrm{De} = 0$ جریان سیالات غیرنیوتنی به جریان سیالات نیوتنی تبدیل می‌شوند. در جابه‌جایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی برخلاف حالتی که سیال غیرنیوتنی، سیال نیوتنی دیگری را جابه‌جا می‌کند، با افزایش De و کاهش n، جریان پایدارتر می‌شود. همان‌گونه که در شکل نیز مشاهده می‌شود، با افزایش De جریان پایدارتر شده و طول اختلاط کاهش یافته است. با افزایش β_D، رشد ناپایداری با مشکل مواجه شده، جریان پایدارتر شده و طول اختلاط کاهش یافته است.

6-2- بازده جاروبی

حجم سیال جابه‌جاشده در یک محیط متخلخل نسبت به حجم کل موجود از آن سیال در محیط متخلخل را بازده جاروبی[1] می‌گویند. این بازده بنا به کاربردهای متفاوتی که دارد در چند نوع مختلف تعریف می‌شود که از جمله



شکل 6 منحنی‌های طول اختلاط در جابه‌جایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی در زمان‌های متفاوت و $n = 0.4$، $\beta_K = 0^\circ$، $\alpha_K = 1$، $\alpha_D = 2$

1- Sweep efficiency

آن‌ها می‌توان به بازده جاروبی عمودی، بازده جاروبی سطحی و بازده جاروبی واقعی اشاره کرد. در صنایع مرتبط با نفت و استخراج آن، این بازده به‌صورت نسبت حجم کل مواد هیدروکربنی موجود در مخزن به حجم جاروب شده از این مواد هیدروکربنی توسط یک سیال تزریقی، تعریف می‌شود و معمولاً از آن به‌عنوان پارامتری که میزان بهره‌وری روش استخراجی را تعیین می‌کند، استفاده می‌شود. این پارامتر در بررسی ناپایداری انگشتی، نشان‌دهنده رشد انگشتی‌ها در محیط متخلخل است.

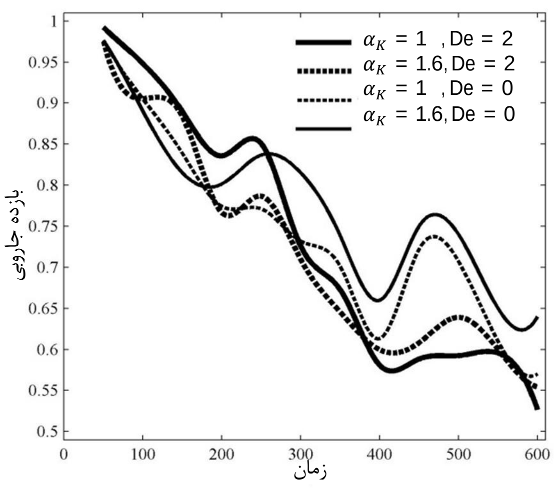
جهت به‌دست آوردن این بازده، در مطالعه حاضر از روش استفاده‌شده توسط قسمت و عزایز [16] استفاده می‌کنیم. این دو محقق در بررسی ناپایداری انگشتی در محیط متخلخلی که پراکندگی آن وابسته به سرعت جریان بود، منحنی‌های این بازده را در پارامترهای مختلف تأثیرگذار بر پراکندگی محیط متخلخل مورد بررسی قراردادند. در این روش، آن‌ها برای تعریف این بازده، تعداد گره‌هایی را که غلظت آن‌ها مساوی یا بزرگ‌تر از 0/5 بود بر تعداد کل گره‌های موجود در منطقه محاسباتی تقسیم کردند. شکل 7 تفاوت بازده جاروبی را در جابه‌جایی جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی در محیط متخلخلی با تانسور نفوذپذیری ناهمسان‌گرد نشان می‌دهد.

همان‌طور که در این شکل نشان داده شده است، با افزایش α_K جریان پایدارتر شده و بازده جاروبی افزایش یافته است. تأثیر عدد De بر بازده جاروبی نشان داده شده است. بدین‌صورت که با افزایش آن، جریان ناپایدارتر شده و بازده جاروبی کاهش یافته است. به این ترتیب افرایش β_K، سبب ناپایداری جریان و کاهش بازده جاروبی خواهد شد.

تأثیر n و β_D بر بازده جاروبی در شکل 8 نشان داده شده است. در این شکل با افزایش n در جابه‌جایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی، جریان پایدارتر شده و بازده جاروبی افزایش یافته است. با افزایش β_D بازده جاروبی افزایش می‌یابد. مانند نتایج به‌دست‌آمده در طول اختلاط، با افزایش α_D یا به عبارت دیگر نسبت مقدار پراکندگی در جهت جریان به مقدار آن در جهت عمود بر جریان، بازده جاروبی کاهش پیدا می‌کند. در جابه‌جایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی، با افزایش De و کاهش n ، جریان پایدارتر شده و بازده جاروبی افزایش می‌یابد.

3-6- کانتورهای غلظت

در این بخش کانتورهای غلظت برای هر دو نوع جریان سیالات نیوتنی و



شکل 7 منحنی‌های بازده جاروبی در جابه‌جایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی در زمان‌های متفاوت و $n = 0.8$، $\beta_K = 0^\circ$، $\beta_D = 0^\circ$، $\alpha_D = 1$

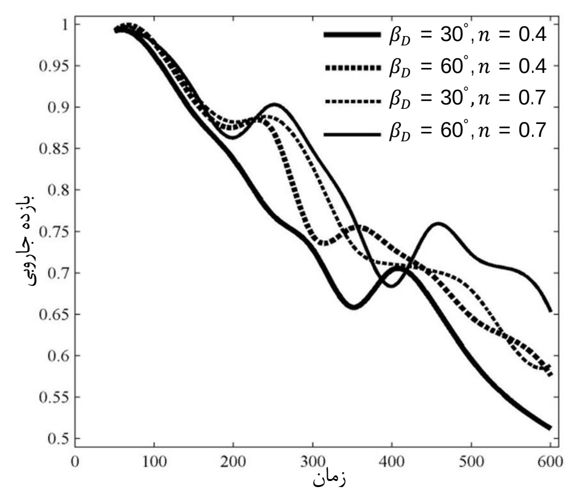
غیرنیوتنی مورد بررسی قرار می‌گیرند. ناپایداری انگشتی در زمان‌های ابتدایی با اعمال یک اغتشاش تصادفی ایجادشده و با گذشت زمان، انگشتی‌های ایجادشده، رشد کرده و درون سیال با ویسکوزیته بیشتر نفوذ می‌کنند. همان‌گونه که در تصاویر موجود مشاهده خواهیم کرد، انگشتی‌های ایجادشده در ثانیه‌های ابتدایی پس از مدتی بانفوذ بیشتر رشد کرده و با یکدیگر مخلوط شده و انگشتی‌های جدیدی ایجاد می‌کنند. با دقت در این تصاویر، مشاهده می‌شود که اگرچه تمام انگشتی‌ها با گذشت زمان رشد می‌کنند، ولی چگونگی رشد و تشکیل آن‌ها با یکدیگر متفاوت است. در این قسمت به بررسی فرایندهای متفاوتی که در روند رشد و شکل‌گیری انگشتی‌ها رخ می‌دهد، خواهیم پرداخت. در تمام نتایج مورد بحث در این بخش A = 2 ، Pe = 1000 و $R = 3$ است. فرایندهای متفاوت توسط دایره‌هایی در تصاویر نشان داده شده‌اند.

فرایند پیچیده رشد انگشتی‌ها توسط سازوکارهایی معرفی می‌شود که انواع متفاوتی از آن‌ها توسط محققین بسیاری در مطالعات پیشین مورد بررسی قرارگرفته‌اند. از جمله آن‌ها می‌توان به مطالعات انجام‌شده توسط تن و هومسی [6]، زیمرمن و هومسی [7] و موارد بسیار دیگر اشاره کرد.

یکی از ساده‌ترین این فرایندها، فرایند انتشار[1] در شکل‌گیری انگشتی‌هاست. در این فرایند، انگشتی‌ها با گذشت زمان فرم افقی خود را از دست می‌دهند و پهن‌تر می‌شوند. این پهن‌شدگی به دلیل حرکت‌های بسیار کوچک عمود بر جهت جریان ناشی می‌شود. این فرایند در شکل 9 نشان داده شده است.

یکی دیگر از فرایندهای رشد انگشتی، فرایند بهم پیوستگی[2] است که در شکل 10 نشان داده شده است. در این فرایند نوک یک انگشتی درون بدنه انگشتی همسایه نفوذ کرده و با آن ترکیب می‌شود. در نتیجه این ترکیب، انگشتی بزرگ‌تر و با ضخامت بیشتری به‌وجود می‌آید. با شکل‌گیری این فرایند، جابه‌جایی سیال ویسکوز تر توسط سیال دیگر با سرعت بیشتری انجام می‌گیرد.

فرایند شکافته‌شدن نوک انگشتی[3] یکی دیگر از معروف‌ترین این فرایندهاست که در این شبیه‌سازی مشاهده شده است. در این فرایند، نوک انگشتی پس از رشد تا حدی پهن می‌شود که در آن یک موج ایجاد می‌شود.



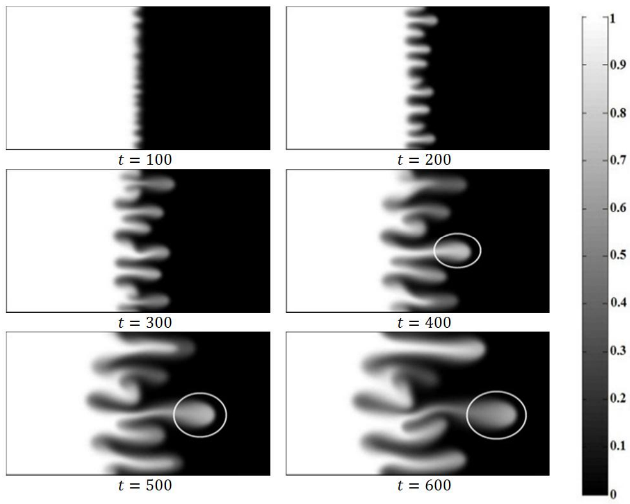
شکل 8 منحنی‌های بازده جاروبی در جابه‌جایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی در زمان‌های متفاوت و De = 0.5، $\beta_K = 0^\circ$، $\alpha_K = 1$، $\alpha_D = 2$

1- Spreading
2- Coalescence
3- Tip-splitting

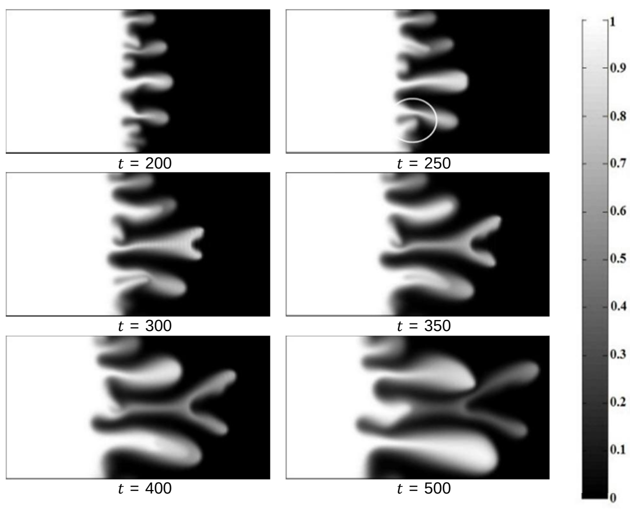
به دلیل وجود جریان، گرادیان غلظت در این موج پرشیب‌تر می‌شود و درنتیجه آن، با گذشت زمان و رشد موج‌ها، نوک انگشتی شکافته و دو انگشتی جدید از آن به‌وجود می‌آید، این فرایند در شکل 11 به نمایش در آمده است.

نوع دیگری از فرایندهای رشد ناپایداری انگشتی در شکل 12 نشان داده است، در این فرایند، شکاف ایجادشده در نوک فرایند مانند موارد پیشین به انگشتی‌هایی تقریباً هم‌اندازه تبدیل نمی‌شود، بلکه یکی از آن‌ها رشد بیشتری می‌کند. درنتیجه شرایط ایجادشده، گرادیان غلظت در قسمت بالایی انگشتی بیشتر شده و همراه با جریان در همان جهت کشیده شده و ناپایدارتر می‌شود، این وضع شرایطی را به‌وجود می‌آورد که به موج‌های اغتشاشی ایجادشده در لبه بالایی انگشتی اجازه حرکت سریع‌تر و درنهایت چند شاخه‌شدن را می‌دهد، این فرایند با عنوان مکانیزم چند شاخه‌ای شدن انگشتی از کناره[1]، شناخته‌شده و در مطالعات زیادی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

علاوه‌بر این موارد، فرایند دیگری نیز در شبیه‌سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی مورد توجه قرار می‌گیرد، در این فرایند، بخشی از سیال با ویسکوزیته



شکل 9 کانتورهای غلظت برحسب زمان در جابه‌جایی سیالات نیوتنی و $\alpha_K = 1$، $\beta_K = \beta_D = 0^\circ$ و $\alpha_D = 2$



شکل 10 کانتورهای غلظت برحسب زمان در جابه‌جایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی و $De = 1.5$ ، $n = 0.7$، $\alpha_K = 1$، $\alpha_D = 1.5$، $\beta_K = 0^\circ$، $\beta_D = 90^\circ$

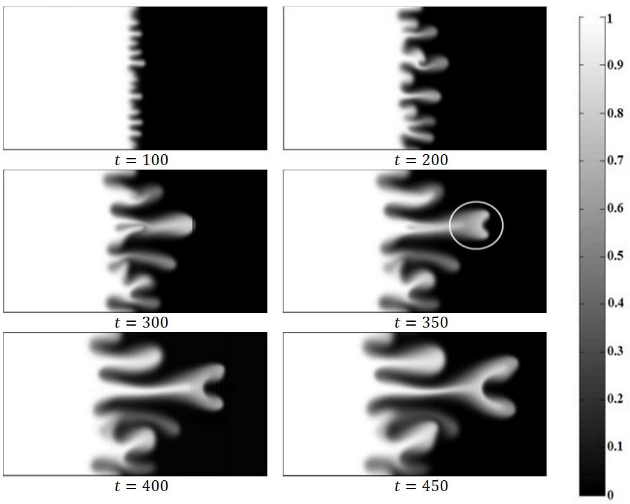
1- Side-branching

بیشتر، بین دو انگشتی ناشی از سیال با ویسکوزیته کمتر، محبوس می‌شود، با گذشت زمان و رشد انگشتی‌ها، سیال محبوس شده، در سیال جابه‌جاکننده حل شده و اثری از آن مشاهده نمی‌شود، این مکانیزم نیز با نام قسمت گمشده[2]، در شبیه‌سازی‌های غیرخطی شناخته می‌شود.

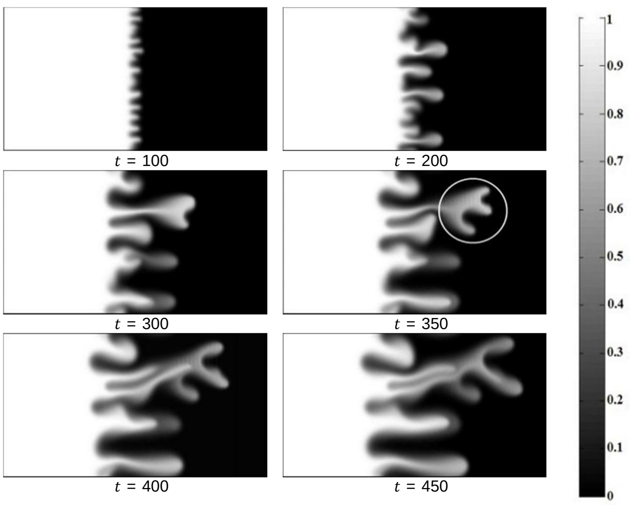
7- نتیجه‌گیری

در این مطالعه شبیه‌سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی لزج در جابه‌جایی مخلوط شدنی جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی مورد بررسی قرار گرفت، شبیه‌سازی این ناپایداری در محیط متخلخلی که تانسور نفوذپذیری و پراکندگی آن ناهمسان‌گرد است، انجام پذیرفت، برای مدل کردن محیط متخلخل از یک سلول مربعی هل- شاو و برای سیال غیرنیوتنی از مدل کاریو- یاسودا استفاده شد.

تأثیر پارامترهای حاکم بر مدل کاریو- یاسودا و نیز ناهمسان‌گردی تانسور نفوذپذیری و پراکندگی بر عوامل مشخص‌کننده ناپایداری مانند

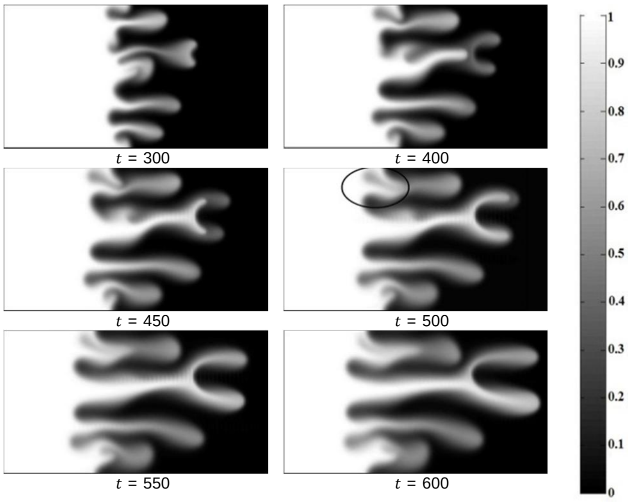


شکل ۱۱ کانتورهای غلظت برحسب زمان در جابه‌جایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی و $De = 1.5$، $n = 0.7$، $\alpha_K = 1$، $\alpha_D = 1.5$، $\beta_K = 0^\circ$، $\beta_D = 90^\circ$



شکل 12 کانتورهای غلظت برحسب زمان در جابه‌جایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی و $De = 0.4$، $n = 0.5$، $\alpha_K = 1.2$، $\alpha_D = 1$، $\beta_K = 30^\circ$، $\beta_D = 0^\circ$

2- Trailing lobe



شکل 13 کانتورهای غلظت بر حسب زمان در جابه‌جایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی و De = 0.5، n = 0.7، α_K = 1، α_D = 2، $\beta_K = 0^{\circ}$، $\beta_D = 30^{\circ}$

میانگین غلظت عرضی، طول اختلاط و بازده جاروبی مورد بررسی قرار گرفتند. فرایندهای متفاوت شکل‌گیری انگشتی‌ها در شرایط متنوعی از جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی مورد مطالعه قرار گرفتند. از نتایج به‌دست‌آمده دریافتیم که در جابه‌جایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی، با افزایش n و کاهش De جریان پایدارتر شده، طول اختلاط کاهش می‌یابد و بازده جاروبی افزایش پیدا می‌کند. به این ترتیب، در جابه‌جایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی، عکس نتایج حالت پیشین به‌دست آمد، یعنی با کاهش n و افزایش De، جریان پایدارتری به‌دست می‌آید. علاوه‌بر این موارد، مشاهده شد که با افزایش نفوذپذیری در جهت جریان نسبت به جهت عمود بر جریان (افزایش α_K)، در دو حالت نیوتنی و غیرنیوتنی، جریان پایدارتر شده و با افزایش β_K، جریان ناپایدارتر می‌شود. به همین صورت با افزایش پراکندگی در جهت جریان نسبت به جهت عمود بر جریان (افزایش α_D)، جریان سیالات ناپایدارتر شده و با افزایش β_D، جریانی پایدارتر به‌دست خواهد آمد.

هدف از این مطالعه، بررسی تأثیر پارامترهای حاکم بر مدل سیال غیرنیوتنی و نیز تأثیر ناهمسان‌گردی محیط متخلخل، بر چگونگی رشد و پیشرفت ناپایداری انگشتی لزج بوده است. مطالعات مشابهی در زمینه بررسی این ناپایداری در محیط‌های متخلخل ناهمگن و ناهمسان‌گرد انجام شده، ولی بررسی تأثیرات ناهمسان‌گردی محیط متخلخل در جریان سیالات غیرنیوتنی بر ناپایداری انگشتی برای نخستین بار در این مطالعه صورت پذیرفته است. نتایج به‌دست‌آمده در این مطالعه نشان می‌دهند که ویژگی‌های سیالات غیرنیوتنی و نیز ناهمسان‌گردی‌های محیط متخلخل، تأثیر زیادی در شکل‌گیری و رشد ناپایداری انگشتی دارند.

8- فهرست علائم

A	نسبت طول به عرض سلول هل- شاو
b	عمق سلول هل- شاو (m)
c	غلظت
D	پراکندگی (m^2s^{-1})
De	عدد دبورا
K	نفوذپذیری (m^2)
L	طول سلول هل- شاو (m)
n	شاخص توانی پاور- لا
p	فشار ($kgm^{-1}s^{-2}$)
Pe	عدد پکله
R	لگاریتم نسبت ویسکوزیته‌ها
U	سرعت (ms^{-1})
W	عرض سلول هل- شاو (m)

علایم یونانی

P	چگالی (kgm^{-3})
M	لزجت دینامیکی ($kgm^{-1}s^{-1}$)
λ	ثابت زمانی (s)
$\dot{\gamma}$	نرخ برش تعمیم‌یافته (s^{-1})
ψ	تابع جریان (m^2s^{-1})
ω	ورتیسیتی (s^{-1})
ζ	عدد تصادفی

زیرنویس

Off	سیستم محوری خاموش
on	سیستم محوری روشن

9- مراجع

[1] G. Rousseaux, A. De Wit, M. Martin, Viscous fungering in packed chromatographic columns: Linear stability analysis, *Journal of Chromatography A,* Vol. 1149, No. 2, pp. 254-273, 2007.

[2] G. M. Homsy, Viscous fingering in porous media, *Annual Review of Fluid Mechanics,* Vol. 19, No. 1, pp. 271-311, 1978.

[3] S. Hill, F. Inst. P, Channeling in packed columns, *Chemical Engineering Science,* Vol. 1, No. 6, pp. 247-253, 1952.

[4] D. W. Peaceman, H. H. Rachford Jr., Numerical Calculation of Multidimensional Miscible Displacement, *Society of Petroleum Engineers,* Vol. 2, No. 4, pp. 327-339, 1962.

[5] M. A. Christie, High-resolution simulation of unstable flows in porous media, *Society of Petroleum Engineers,* Vol. 4, No. 3, pp. 297-303, 1989.

[6] C. T. Tan, G. M. Homsy, Simulation of nonlinear viscous fingering in miscible displacement, *Physics of Fluids,* Vol. 31, No. 6, pp. 1330-1338, 1988.

[7] W. B. Zimmerman, G. M. Homsy, Nonlinear viscous fingering in miscible displacement with anisotropic dispersion, *Physics of Fluids A,* Vol. 3, No. 8, pp. 1859-1872, 1991.

[8] J. Azaiez, B. Singh, Stability of miscible displacement of shear thinning fluids in a Hele-Shaw cell, *Physics of Fluids,* Vol. 14, No. 5, pp. 1557-1571, 2002.

[9] C. T. Tan, G. M. Homsy, Viscous fingering with permeability heterogeneity, *Physics of Fluids A,* Vol. 4, No. 6, pp. 1099-1101, 1992.

[10] J. Nittmann, G. Daccord, H. E. Stanley, Fractal growth viscous fingers: quantitative characterization of a fluid instability phenomenon, *Nature,* Vol. 314, No. 6007, pp. 141-144, 1985.

[11] A. Lindner, D. Bonn, J. Meunier, Viscous fingering in a shear-thinning fluid, *Physics of Fluids,* Vol. 12, No. 2, pp. 256-261, 2000.

[12] S. D. R. Wilson, The Taylor-Saffman problem for a non-Newtonian liquid, *Journal of Fluid Mechanics,* Vol. 220, No. 1, pp. 413-425, 1990.

[13] A. De Wit, G. M. Homsy, Viscous fingering in periodically heterogeneous porous media. I. Formulation and linear instability, *The Journal of Chemical Physics,* Vol. 107, No. 22, pp. 9609-9618, 1997.

[14] A. De Wit, G. M. Homsy, Viscous fingering in periodically heterogeneous porous media. II. Numerical simulations, *The Journal of Chemical Physics,* Vol. 107, No. 22, pp. 9619-9628, 1997.

[15] M. Norouzi, M. R. Shoghi, A numerical study on miscible viscous fingering instability in anisotropic porous media, *Physics of Fluids,* Vol. 26, No. 8, 2014.

[16] K. Ghesmat, J. Azaiez, Viscous Fingering Instability in Porous Media: Effect of Anisotropic Velocity Dependent Dispersion Tensor, *Transport in Porous Media,* Vol. 73, No. 3, pp. 297-318, 2008.

[17] R. B. Bird, C. F. Curtiss, R. C. Armstrong, O. Hassager, *Dynamics of Polymer Liquids,* Second Edittion, pp. 171-175, New York: Wiley, 1987.

[18] D. Bonn, H. Kellay, M. Ben Amar, J. Meunier, Viscous Finger Widening with Surfactants and Polymers, *Physical Review Letters,* Vol. 75, No. 11, pp. 2132-2135, 1995.

[19] W. B. Zimmerman, G. M. Homsy, Three-dimensional viscous fingering: A numerical study, *Physics of Fluids,* Vol. 4, No. 9, pp. 1901-1914, 1992.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.7.16.4]

[20] O. Manickam, G. M. Homsy, Stability of miscible displacements in porous media with nonmonotonic viscosity profiles, *Physics of Fluids,* Vol. 5, No. 6, pp. 1356-1367, 1993.
[21] M. Y. Hussaini, T. A. Zang, Spectral Methods in Fluid Dynamics, *Annual Review of Fluid Mechanics,* Vol. 19, No. 1, pp. 339-367, 1987.
[22] R. N. Bracewell, O. Buneman, H. Hao, J. Villasenor, Fast two-dimensional Hartley transform, *Proceedings of the IEEE,* Vol. 74, No. 9, pp. 1282-1283, 1986.
[23] O. Manickam, G. M. Homsy, Fingering instabilities in vertical miscible displacement flows in porous media, *Journal of Fluid Mechanics,* Vol. 288, No. 1, pp. 75-102, 1995.