http://mme.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
بهمن ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۱۱ ص ص ۹۹-۱۰۹

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۱/۱۲/۱۰
تاریخ پذیرش ۹۲/۳/۱۴
ارائه در سایت ۹۲/۹/۳۰

پایداری مکانیکی تیر خمیده ساندویچی با رویه‌های ایزوتروپیک در معرض بار یکنواخت

مهدی مقصودی[۱*]، عبدالحسین پورطبیب[۲]

۱- استادیار مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران
* تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵-۱۷۷۴، mehdi@mut.ac.ir

چکیده- در این تحقیق به بررسی پایداری یک تیر خمیده ساندویچی با رویه‌های ایزوتروپیک و هسته قابل انعطاف پرداخته می‌شود. در استخراج معادلات حاکم، از فرض تئوری کلاسیک برای رویه‌ها و از معادلات الاستیسیته در مختصات قطبی برای هسته استفاده شده است. ساختار تیر شامل دو رویه بالا و پایین از جنس فلز یا کامپوزیت لایه‌ای متقارن و یک هسته نرم ساخته شده از فوم یا لانه زنبوری با استحکام کم می‌باشد. معادلات غیرخطی حاکم با در نظر گرفتن روابط کرنش-تغییر مکان ون- کارمن حاصل شده است. در تحلیل پیش از کمانش از اثرات دوران صرف نظر شده است. بدین ترتیب لحظه پیش از کمانش بر مبنای حل خطی معادلات تعادل به دست می‌آیند. برای استخراج معادلات پایداری از معیار نقطه مجاورت استفاده شده است. با در نظر گرفتن شرایط مرزی لولایی متحرک، از بسطهای مثلثاتی مناسب برای ارضای شرایط مرزی استفاده شده است. مقدار بار بحرانی گسترده به صورت جواب بسته به دست آمده است. اثر پارامترهای مختلف بر روی مقدار بار بحرانی مورد بررسی قرار گرفته است.براساس بهترین اطلاعات نگارندگان این مقاله، لازم به ذکر است که این تحقیق و بررسی برای اولین بار است که انجام می‌پذیرد.

کلیدواژگان: پایداری مکانیکی، تیر خمیده ساندویچی، هسته قابل انعطاف، بار یکنواخت.

Mechanical stabilityof sandwich curved beams with isotropic skins subjected to uniform load

M. Maghsoudi [*1], A. Poortabib[2]

1- Assist. Prof., Aerospace Eng., Malek Ashtar Univ. of Tech., Tehran, Iran
2- MSc. Student, Aerospace Eng., Malek Ashtar Univ. of Tech., Tehran, Iran
* P.O.B. 15875-1774 Tehran, Iran. mehdi@mut.ac.ir

Abstract- The stability analysis of a curved sandwich beam with isotropic skins and flexible core is investigated in this research. Derivation of equations for face sheets is accomplished via the classical theory of curved beam, whereas for the flexible core, the elasticity equations in polar coordinates are implemented. The beam construction consists of two skins (not necessarily identical), metallic or composite laminated symmetric, and a soft core made of foam or a low-strength honeycomb that is flexible in the vertical direction. Employing the von-Karman type geometrical non-linearity in strain-displacement relations, nonlinear governing equations are resulted. Linear pre-buckling analysis is performed neglecting the rotation effects in pre-buckling state. Stability equations are concluded based on the adjacent equilibrium criterion. Considering the movable simply supported type of boundary conditions, suitable trigonometric solutions are adopted which satisfy the assumed edge conditions. The critical uniform load of the beam is obtained as a closed-form solution. Numerical results cover the effects of various parameters on the critical buckling load of the beam. To the best of the authors' knowledge, this research is investigated here in for the first time.

Keywords: Mechanical Stability, Sandwich Curved Beam, Flexible Core, Uniform Load.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.11.8.0]

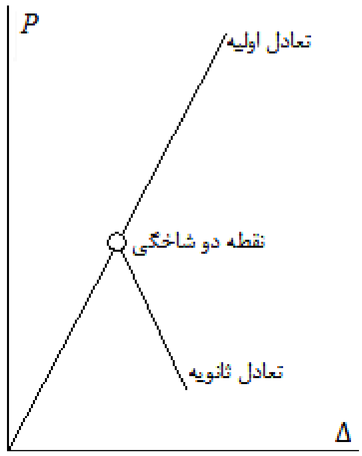
۱- مقدمه

کمانش [1] پدیده‌ای است که بیانگر بوجود آمدن یک ناپایداری در یک قطعه تحت بارگذاری می‌باشد به عنوان مثال هنگامی که بار اعمالی به قطعه در حال افزایش است، امکان دارد یک نقطه از قطعه دچار ناپایداری شود و جابجایی‌های آن نقطه شروع به افزایش ناگهانی کنند. بهترین مثال برای پدیده کمانش، یک ستون باریک است که تحت بار محوری قرار گرفته است. در صورتی که کوچک‌ترین نیروی غیر محوری به این ستون وارد شود، جابجایی‌های غیر محوری، به سرعت رشد کرده و پدیده کمانش اتفاق می‌افتد [۱].

کمانش هم در حوزه الاستیک اتفاق می‌افتد و هم در حوزه پلاستیک؛ این مسأله به این معناست که تنش‌های موجود در قطعه چه در حد تنش‌های الاستیک باشند و چه در حد تنش‌های پلاستیک، احتمال بروز پدیده کمانش وجود دارد. معمولاً پیش از آغاز کمانش، نسبت بار به جابجایی، به نسبتی است که می‌توان قطعه را باربر خواند، اما پس از شروع کمانش به ازای تغییر کوچکی در نیروی اعمالی، جابجایی زیادی در نقطه‌ای که کمانش اتفاق افتاده است، مشاهده می‌شود، از این رو اصولاً کمانش یک پدیده غیرخطی است. در مکانیک خطی، تغییر مکان‌ها متناسب با بار است. اما در کمانش که در اصل جزء مکانیک غیرخطی می‌باشد با افزایش کوچکی در بار تغییر مکان‌ها بدون هیچ گونه تناسبی افزایش پیدا میکند. بار بحرانی [2] کمترین باری است که به ازاء آن سیستم از حالت پایداری خارج می‌شود.

برای شناخت دقیق رفتار یک سازه در برابر کمانش نیاز به شناخت مسیرهای تعادل که در واقع نمودارهای بار تغییر مکان هستند می‌باشد. در شکل ۱ محل تقاطع مسیرهای اولیه [3] و ثانویه [4] تعادل را نقطه دوشاخگی [5] می‌نامند. تعریف مسیرهای تعادل و نقاط دوشاخگی از مهمترین ایده‌ها برای تحلیل کمانش سازه‌ها هستند. همان طور که گفته شد نقاط واقع بر مسیرهای تعادل، نشانگر حالات تعادل می‌باشند و بنابراین تمام نقاط روی مسیرهای اولیه و ثانویه یک حالت فیزیکی امکان‌پذیر برای سازه را نشان می‌دهند [۱].

1. Buckling
2. Critical Load
3. Primary Equlibrium Path
4. Secondary Equlibrium Path
5. Bifurcation Points



شکل ۱ نمایش منحنی بار- تغییر مکان برای یک پانل جدار نازک تحت بار محوری

اما به منظور بررسی رفتار کمانش، بایستی تعادل در این نقاط را مد نظر قرار دارد. بار کمانش بار نقطه‌ای روی مسیر تعادل اولیه می‌باشد. به طوری که سازه در آن نقطه تغییر سطح انرژی ناگهانی می‌دهد و مقدار تغییر مکان با افزایش کوچکی در بار تغییرات زیادی پیدا می‌کند. مسیرهای تعادل ثانویه در نمودار نیرو تغییر مکان به ازای هر کدام از مقادیر گسسته بار وضعیت‌های مختلف تغییر شکل را پیش‌بینی میکنند. به همین دلیل نسبت به مسیرهای تعادل اولیه دارای سطح انرژی بالاتری هستند و در واقع هریک نشانگر یک مود کمانش می‌باشند. بنابراین محل تلاقی مسیر تعادل ثانویه‌ای که نسبت به بقیه مسیرهای تعادل ثانویه کمترین سطح انرژی را دارد با مسیر تعادل اولیه، نقطه دوگانه است که بار در آن نقطه بار بحرانی نامیده می‌شود. بنابراین افزایش ناگهانی سطح انرژی در یک تغییر کوچک بارهای وارد بر سیستم که منجر به اشکال مختلف تعادل برای سیستم شود، کمانش نامیده می‌شود.

بر اساس معیار دینامیکی پایداری، یک حالت تعادل، پایدار خواهد بود اگر و فقط اگر به ازای یک نیروی ثابت، یک تغییر شکل جزئی در سیستم باعث نوسان محدود سیستم حول نقطه تعادل آن شود. یک روش تعیین پایداری این سیستم‌ها معیار حداقل انرژی پتانسیل است. براساس این معیار یک سیستم موقعی پایدار است که اگر و فقط اگر تغییر انرژی پتانسیل آن به ازای هر تغییر جزئی کافی در جابجایی‌ها مقداری مثبت باشد [۱].

سازه‌های ساندویچی با هسته‌های نرم ساخته شده از فوم یا لانه زنبوری با استحکام کم شبیه آرامید یا نومکس در صنایع کاربردی مختلفی مانند مهندسی هوافضا و عمران مورد استفاده قرار گرفته‌اند. بکار بردن یک هسته فومی یا لانه زنبوری با استحکام کم به دلیل وزن، مراحل ساخت و منابع به مراتب مزیت بهتری از هسته لانه زنبوری فلزی دارد. اختلاف عمده بین یک لانه زنبوری فلزی و یک هسته نرم، انعطاف پذیریاش در امتداد قائم می‌باشد.

این انعطاف‌پذیری عمدتاً بر رفتار تأثیر می‌گذارد، مخصوصاً تحت بارهای تمرکز یافته و به رفتارهای موثر کاملاً متفاوت در مقایسه با سازه‌های دیگری که دارای هسته لانه زنبوری سفت می‌باشند. راهکار عمومی بر مبنای کمانش کلی تیر و کمانش محلی رویه‌ها که مجزا هستند فرض می‌شود. کمانش کلی با حل یک تیر معادل تعریف می‌شود که ترکیبی از سفتی برشی هسته در سفتی خمشی تیر می‌باشد. کمانش محلی با توجه نمودن به رویه‌های مجزای یک تیر ثابت بر روی پایه الاستیک با این شرط که هسته در امتداد قائم باشد، تعیین می‌شود.

بولسون[۲]، براش و آلمراخ[۳] روشی مشابه را با این فرض که هیچ فعل و انفعالی بین رویه‌ها در مود کمانش محلی وجود ندارد را بکار بردند. داسیلوا و هانت [۴] یک روش متفاوتی را بر مبنای روش‌های انرژی و انطباق مودهای کمانش متقارن و نامتقارن استفاده نمودند. که این روش به شکل ویژه و شرایط مرزی ویژه محدود شده است. فروستیگ و باروچ [۵] و فروستیگ و همکارانش [۶] تیرهای ساندویچی باهسته نرم و با کمک روش شکل ویژه تحلیل نمودند. فروستیگ و باروچ [۷] تحلیل کمانش مرتبه بالای تیرهای ساندویچی مستقیم با هسته انعطاف پذیر عرضی را ارائه نمودند. آنها از روش حل تحلیلی برای تیرهایی با تکیه‌گاه ساده به همراه رویه‌های یکسان و نتایج عددی مشخص استفاده کردند.

اسمیت [۸] یک روش تحلیلی یک‌پارچه بر مبنای تئوری الاستیسیته دوبعدی برای ارزیابی خمش، کمانش و ارتعاش تیرها و پانل‌های ساندویچی چند لایه ارتوتروپیک طرح‌ریزی نمود. چنگ و لین و وانگ [۹] یک روش تحلیلی پیوسته برای پیش‌گویی بار کمانش محلی لایه لایه شده از رویه ظاهری تیرهای ساندویچی را ارائه نمودند. بوژول نایا و کیلهگارد [۱۰] تیر خمیده ساندویچی تحت بارگذاری یکنواخت را به‌طور تجربی بررسی نمودند. وانگ و شنوی [۱۱] روشی را بر مبنای تئوری الاستیسیته برای تورق و استحکام خمشی تیرهای ساندویچی و لامینیتهای کامپوزیتی لایه‌ای خمیده توسعه دادند.و نیز آنها [۱۲] تحلیل تیرهای ساندویچی خمیده با تمرکز بر روی تورق و کمانش- چین خوردگی رویه‌ها را بررسی نمودند. لیکگارد و تامسن [۱۳] رفتار کمانش تیرهای ساندویچی مستقیم متصل به تیرهای خمیده ساندویچی بارگذاری شده در خمش خالص را با استفاده نمودن از دو نمونه متفاوت بررسی کردند. ووسوک و واس [۱۴] مدل مکانیکی دو بعدی را با استفاده نمودن از تئوری الاستیسیته کلاسیک جهت کمانش کلی و محلی یک تیر ساندویچی توسعه دادند.

معادلات حاکم در ابتدا بر اساس روابط خطی و غیرخطی و در ادامه با استفاده از شرایط مرزی و پیوستگی حاصل شده است.

۲- معادلات اساسی

برای طرح هندسه مسأله و روابط سینماتیکی آن، یک تیر ساندویچی خمیده به صورت استوانه‌ای با پهنای b در نظر گرفته شده است. در مقاله حاضر زیر نویس‌های b,t به ترتیب به رویه بالایی و رویه پایینی اشاره دارند [۱۵]. هر صفحه یک سیستم مختصات منحنی‌الخط مختص به خود دارد (z_i, s_i)، که به صورت رابطه (۱) نوشته می‌شود.

$$s_i = r_i \omega \quad (i=t,b) \tag{۱}$$

سیستم مختصات محلی (r,ω) برای هسته به صورت قطبی می‌باشد که مرکز آن در مرکز انحنای تیر قرار دارد.

فرضیات زیر بر اساس مدل ارائه شده در نظر گرفته شده است [۱۵].

- صفحات می‌توانند مقادیر متفاوت ضخامت d_t و d_b داشته باشند که مقدار آنها در مقایسه با طول و شعاع انحنای تیر کوچک است. صفحات به صورت پانل‌های نازک کش‌سان مطابق با فرضیات برنولی رفتار می‌کنند. هسته به صورت یک کش‌سان میانی دو بعدی با مقاومت برشی و تنش‌های شعاعی در نظر گرفته شده است.

- هسته با ضخامت t_c کاملاً به صفحات چسبیده است. تنش درون صفحه‌ای (مماسی) در هسته قابل صرف‌نظر کردن می‌باشد. به دلایل آن در ذیل اشاره شده است. سازه‌های

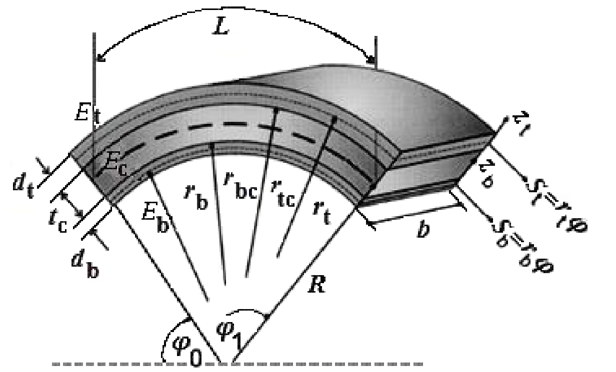
ساندویچی مدرن‌از رویه‌های خیلی سفت (فلز یا مواد کامپوزیتی) و هسته‌های فومی یا هانیکوم با مقاومت کم ساخته می‌شوند.

- روابط سینماتیکی هسته از تغییر شکل‌های کوچک بوده، پس آنها خطی می‌باشند. توجه کنید که فرضیات قبلی بر روی حوزه‌های تغییر شکل از طریق ضخامت هسته درست نشده‌اند. تغییر مکان‌های شعاعی w_b, w_t و تغییر مکان‌های مماسی u_b, u_t از مرکز المان‌های رویه تیر می‌باشند که در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده است.

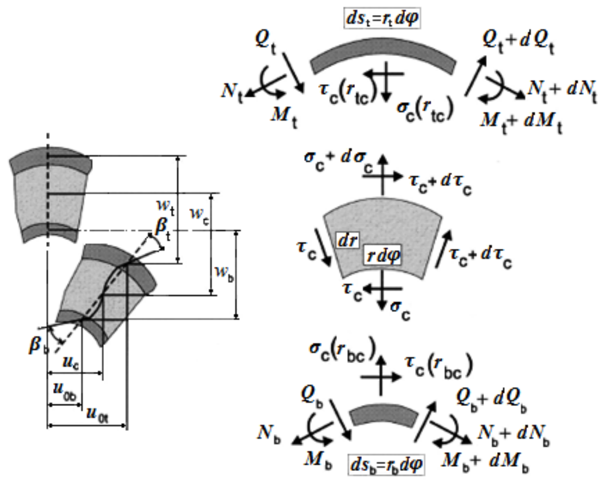
در سیستم مختصات قطبی روابط سینماتیکی رویه‌ها به صورت معادلات (۲) و (۳) ارائه می‌شوند.

$$u_i = u_{0i} + z_i \beta_i \tag{۲}$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{0i} + z_i \kappa_i + \frac{1}{2}\beta_i^2 \ (i=t,b) \tag{۳}$$



شکل ۲ نمایش ابعاد هندسی تیر خمیده در مختصات قطبی



(ب) (الف)

شکل ۳ الف- نمایش نتایج درونی المان های متفاوت از رویه‌ها
ب- نمایش تغییر مکان در المان تیر ساندویچی

که در روابط (۲) و (۳)، u_{0i} و ε_i به ترتیب تغییرمکان مماسی و کرنش مماسی در رویه‌ها هستند که از مرکز هر یک از رویه‌ها به سمت بالا اندازه‌گیری می‌شوند و β_i هم مقدار دوران می‌باشد.

$$\beta_i = \frac{u_{0i} - w_i'}{r_i} \tag{۴}$$

در رابطه (۳) ε_{0i} و κ_i به ترتیب مقدار کرنش و مقدار انحنا در هریک از رویه‌ها می‌باشند که به صورت معادلات (۵) و (۶) نشان داده شده‌اند.

$$\varepsilon_{0i} = \frac{u_{oi}' + w_i}{r_i} \tag{۵}$$

$$\kappa_i = \frac{u_{oi}' - w_i''}{r_i^2} \tag{۶}$$

در روابط فوق کلیه مشتقات بر حسب زاویه ω در نظر گرفته شده‌اند. روابط سینماتیکی مناسب برای هسته به صورت معادلات (۷) و (۸) می‌باشند.

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial w_c}{\partial r} \tag{۷}$$

$$\gamma_{r\omega} = \gamma_{sr} = \frac{\partial u_c}{\partial r} - \frac{u_c}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_c}{\partial \omega} \tag{۸}$$

شرایط سازگاری از شرایط چسبندگی کامل رویه‌ها و هسته پدید آمده است [۱۵].

سطح مشترک بالایی:

$$w_c|_{r=r_{tc}} = w_t|_{z=\frac{-d_t}{2}} \rightarrow u_c|_{r=r_{tc}} = u_{0t}(1-k_t) + w_t' k_t \tag{۹}$$

سطح مشترک پایینی:

$$w_c|_{r=r_{bc}} = w_b|_{z=\frac{d_b}{2}} \rightarrow u_c|_{r=r_{bc}} = u_{0b}(1+k_b) - w_b' k_b \tag{۱۰}$$

در رابطه‌های (۹) و (۱۰)، k_t و k_b برابر با رابطه (۱۱) می‌باشد.

$$k_t = \frac{d_t}{2r_t}, \quad k_b = \frac{d_b}{2r_b} \tag{۱۱}$$

روابط ساختاری برای رویه‌ها در حالت یک بعدی و هسته در حالت دو بعدی به صورت رابطه (۱۲) می‌باشد.

$$\sigma_t^{(k)} = Q_{11t}^{(k)} \varepsilon_t, \ \sigma_b^{(k)} = Q_{11b}^{(k)} \varepsilon_b$$

$$\sigma_c = E_c \varepsilon_c, \tau_c = G_c \gamma_{r\omega} \tag{۱۲}$$

A_{11i}، D_{11i}، N_i و M_i به ترتیب سفتی غشایی، سفتی خمشی لامینیت، نیروی محوری، ممان خمشی برای هر کدام از رویه‌ها و $Q_{11}^{(k)}$ سفتی‌های هر لایه بر حسب زاویه الیاف

می‌باشند که روابط مربوط به آنها به صورت معادلات (۱۳) تا (۱۵) آمده است.

$$A_{11i}=b\sum_{k=1}^{N}\int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{11}^{(k)}\, dz$$

$$D_{11i}=b\sum_{k=1}^{N}\int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{11}^{(k)}\, z^2 dz \tag{۱۳}$$

$$N_i=\int_{-\frac{d_i}{2}}^{\frac{d_i}{2}} b\sigma_i\, dz$$

$$M_i=\int_{-\frac{d_i}{2}}^{\frac{d_i}{2}} b\sigma_i z\, dz\,(\mathrm{i=t,b}) \tag{۱۴}$$

$$Q_{11}^{(k)}=Q_{11}\cos^4\theta+Q_{22}\sin^4\theta+2\left(Q_{12}+2Q_{66}\right) \times \sin^2\theta\cos^2\theta \tag{۱۵}$$

که اجزای رابطه (۱۵) به صورت رابطه (۱۶) می‌باشند.

$$Q_{11}=\frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\ , Q_{12}=\frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12}=\nu_{21}Q_{11},\ Q_{66}=G_{12} \tag{۱۶}$$

۲-۱- معادلات حاکم

معادلات حاکم، شرایط مرزی وشرایط پیوستگی از طریق اصول تغییرات که در آن مجموع انرژی پتانسیل به حداقل می‌رسد، بدست می‌آید. روش بدست آوردن آن به صورت معادله (۱۷) می‌باشد [۷].

$$\delta(U+V)=0 \tag{۱۷}$$

که در رابطه اخیر U و V به ترتیب انرژی‌های داخلی و خارجی و δ عملگر تغییرات می‌باشد.

$$\delta(U+V)=\int_{v_{top}}\sigma_t\,\delta\varepsilon_t dv_t+\int_{v_{bot}}\sigma_b\,\delta\varepsilon_b dv_b + \int_{v_{core}}(\tau_c\,\delta\gamma_{r\omega}+\sigma_c\delta\varepsilon_c)dv_c-\int_0^{\alpha_0} q_t\delta w_t b r_t d\omega=0 \tag{۱۸}$$

در رابطه (۱۸) σ_t، ε_t، q_t و w_t به ترتیب تنش و کرنش در راستای مماسی و بار گسترده و تغییر مکان در راستای شعاعی در رویه بالایی، σ_b و ε_b تنش و کرنش در راستای مماسی در رویه پایینی، σ_c و ε_c تنش‌ها و کرنش‌ها در راستای شعاعی در هسته، τ_c و $\gamma_{r\omega}$ تنش‌ها و کرنش‌های برشی در هسته، v_{top} و v_{bot} و v_{core} به ترتیب حجم رویه‌های بالایی، پایینی و حجم هسته و dv_t، dv_b، dv_c به ترتیب دیفرانسیل حجم در رویه‌های بالایی، پایینی و هسته می‌باشند.

$$\begin{aligned}
\delta(U+V)
&=\int_0^{\alpha_0}-N_t'\delta u_{0t}\,d\omega+N_t\delta u_{0t}\Big|_0^{\alpha_0}+\int_0^{\alpha_0}N_t\delta w_t\,d\omega\\
&+\int_0^{\alpha_0}\frac{N_t}{r_t}(u_{0t}-w_t)\,\delta u_{0t}d\omega-\frac{N_t}{r_t}(u_{0t}-w_t)'\,\delta w_t\Big|_0^{\alpha_0}\\
&+\int_0^{\alpha_0}\left(\frac{N_t}{r_t}(u_{0t}-w_t)'\right)'\delta w_t d\omega-\int_0^{\alpha_0}\frac{M_t'}{r_t}\delta u_{0t}d\omega\\
&+\frac{M_t}{r_t}\delta u_{0t}\Big|_0^{\alpha_0}-\int_0^{\alpha_0}\frac{M_t''}{r_t}\delta w_t d\omega+\frac{M_t'}{r_t}\delta w_t\Big|_0^{\alpha_0}\\
&-\frac{M_t}{r_t}\delta w_t'\Big|_0^{\alpha_0}+\int_0^{\alpha_0}-N_b'\delta u_{0b}\,d\omega+N_b\delta u_{0b}\Big|_0^{\alpha_0}\\
&+\int_0^{\alpha_0}N_b\delta w_b\,d\omega+\int_0^{\alpha_0}\frac{N_b}{r_b}(u_{0b}-w_b)\,\delta u_{0b}d\omega\\
&+\int_0^{\alpha_0}\left(\frac{N_b}{r_b}(u_{0b}-w_b)'\right)'\delta w_b d\omega-\frac{N_b}{r_b}(u_{0b}-w_b)'\,\delta w_b\Big|_0^{\alpha_0}\\
&-\int_0^{\alpha_0}\frac{M_b'}{r_b}\delta u_{0b}d\omega+\frac{M_b}{r_b}\delta u_{0b}\Big|_0^{\alpha_0}-\int_0^{\alpha_0}\frac{M_b''}{r_b}\delta w_b d\omega\\
&+\frac{M_b'}{r_b}\delta w_b\Big|_0^{\alpha_0}-\frac{M_b}{r_b}\delta w_b'\Big|_0^{\alpha_0}-\int_0^{\alpha_0}b r_{tc}\,k_t\tau_c'\big|_{r_{tc}}\delta w_t d\omega\\
&+\int_0^{\alpha_0}b r_{tc}\,(1-k_t)\tau_c\big|_{r_{tc}}\delta u_{0t}d\omega+b r_{tc}k_t\tau_c\big|_{r_{tc}}\delta w_t\big|_0^{\alpha_0}\\
&-\int_0^{\alpha_0}b r_{bc}\,(1+k_b)\tau_c\big|_{r_{bc}}\delta u_{0b}\,d\omega\\
&-\int_0^{\alpha_0}b r_{bc}\,k_b\tau_c'\big|_{r_{bc}}\delta w_b d\omega+b r_{bc}k_b\tau_c\big|_{r_{bc}}\delta w_b\big|_0^{\alpha_0}\\
&-\frac{\partial}{\partial r}\int_\omega\int_r\frac{\partial}{\partial r}(br\tau_c)\,\delta u_c drd\omega-\int_\omega\int_r b\tau_c\,\delta u_c drd\omega\\
&+\int_r\int_\omega -b\frac{\partial\delta\tau_c}{\partial\omega}\partial \mathrm{w_c}\mathrm{d}r\mathrm{d}\omega+\int_r b\tau_c\,\partial\delta \mathrm{w_c}\big|_0^{\alpha_0}\,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.11.8.0]

$$+\int_0^{\alpha_0} br_{tc}\,\sigma_c|_{r_{tc}}\delta w_t d\omega - \int_0^{\alpha_0} br_{bc}\,\sigma_c|_{r_{bc}}\delta w_b d\omega$$

$$-b\int_{\omega}\int_{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_c)\delta w_c dr d\omega - \int_0^{\alpha_0} q_t \delta w_t r_t d\omega = 0$$

(۱۹)

برای دست‌یابی به معادلات تعادل، باید معادله (۱۹) برقرار باشد. در نتیجه با برابر صفر قرار دادن ضرایب δw_c , δu_c و δu_{0t} , δu_{0b} , δw_t , δw_b در رابطه فوق، معادلات تعادل به صورت رابطه (۲۰) بدست می‌آید.

$$-N_t' - \frac{M_t'}{r_t} + \frac{N_t}{r_t}\left(u_{0t} - w_t'\right) + br_{tc}\left(1-k_t\right)\tau_c|_{r_{tc}} = 0$$

$$-N_b' - \frac{M_b'}{r_b} + \frac{N_b}{r_b}\left(u_{0b} - w_b'\right) - br_{bc}(1+k_b)\tau_c|_{r_{bc}} = 0$$

$$N_t - \frac{M_t''}{r_t} + \frac{1}{r_t}\left[N_t\left(u_{0t} - w_t'\right)\right]^9 + br_{tc}\sigma_c|_{r_{tc}} - br_{tc}k_t\tau_c'|_{r_{tc}} - br_t q_t = 0$$

$$N_b - \frac{M_b''}{r_b} + \frac{1}{r_b}\left[N_b\left(u_{0b} - w_b'\right)\right]^9 - br_{bc}\sigma_c|_{r_{bc}} - br_{bc}k_b \times \tau_c'|_{r_{bc}} = 0$$

$$\left(1-k_t\right)u_{0t} - \frac{r_{tc}}{r_{bc}}(1+k_b)u_{0b} - \left[\left(1-k_t\right) + \frac{k_0 r_{tc}}{\ln\frac{r_{bc}}{r_{tc}}}\right]w_t^9 + \frac{r_{tc}}{r_{bc}}\left[1 + k_b + \frac{k_0 r_{bc}}{\ln\frac{r_{bc}}{r_{tc}}}\right]w_b^9 - \frac{k_0}{2G_c}\tau\left(\frac{r_{tc}+r_{bc}}{r_{bc}}\right) + \frac{k_0}{2E_c}\tau''\left(2k_0\frac{r_{tc}}{\ln\frac{r_{bc}}{r_{tc}}} + \frac{r_{tc}+r_{bc}}{r_{bc}}\right) = 0 \quad (۲۰)$$

شرایط مرزی ساده در هر انتهای یک تیر خمیده ساندویچی که در شکل ۴ نمایش داده شده به صورت رابطه (۲۱) می‌باشد.

$$\delta w_b = 0 \qquad \frac{M_b'}{r_b} - \frac{N_b}{r_b}\left(u_{0b} - w_b'\right) + br_{bc}k_b\tau_c|_{r_{bc}} = 0$$

$$\delta w_t = 0 \qquad \frac{M_t'}{r_t} - \frac{N_t}{r_t}\left(u_{0t} - w_t'\right) + br_{tc}k_t\tau_c|_{r_{tc}} = 0$$

$$\delta w_b^9 = 0 \qquad M_b = 0$$

$$\delta w_t^9 = 0 \qquad M_t = 0$$

$$\delta w_c = 0 \qquad \text{یا} \qquad \tau_c = 0 \quad (۲۱)$$

می‌توان میدان جابجایی درون هسته را به طور دقیق محاسبه کرد. دو معادله آخری تعادل در رابطه (۲۰) مربوط به معادلات تعادل هسته می‌باشند. معادله توزیع w_c در هسته به صورت رابطه (۲۲) خواهد بود.

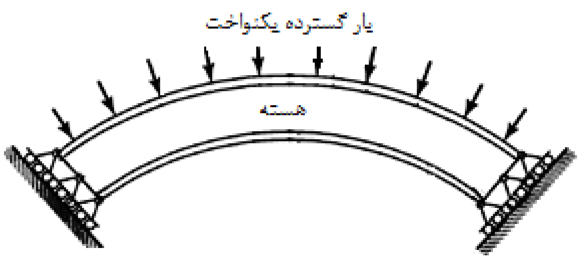
$$w_c = w_b + \frac{\tau^9}{E_c}\left(\frac{1}{r_{bc}} - \frac{1}{r} + \frac{\ln\frac{r}{r_{bc}}}{\ln\frac{r_{bc}}{r_{tc}}}k_0\right) + \frac{\ln\frac{r}{r_{bc}}}{\ln\frac{r_{bc}}{r_{tc}}} \times (w_b - w_t) \quad (۲۲)$$

با مشخص شدن توزیع w_c می توان توزیع u_c در هسته را نیز بدست آورد.

$$u_c = \frac{r}{r_{tc}}(1-k_t)u_{0t} + \frac{r}{r_{tc}}w_t^9 + \left(1 - \frac{r}{r_{tc}}\right)w_b^9 + \left(w_b^9 - w_t^9\right) \times \left(\frac{r_{tc}-r}{r_{tc}\ln\frac{r_{bc}}{r_{tc}}} + \frac{\ln\frac{r}{r_{bc}}}{\ln\frac{r_{bc}}{r_{tc}}} + \frac{r}{r_{tc}}\right) + \frac{\tau^{99}}{E_c}\left[\left(\frac{r_{tc}-r_{bc}}{r_{tc}\ln\frac{r_{bc}}{r_{tc}}} + \frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right) \times k_0 + \frac{r_{tc}-r}{r_{tc}r_{bc}} - \frac{1}{2}\left(\frac{r_{tc}^2 - r^2}{r r_{tc}^2}\right)\right] - \frac{\tau}{2G_c}\left(\frac{r_{tc}^2 - r^2}{r r_{tc}^2}\right) \quad (۲۳)$$

۲-۲- تحلیل پیش کمانش

در این تحلیل بررسی کمانش مسأله تیر خمیده ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر مدنظر است که رویه بالایی آن در معرض بار گسترده یکنواخت q_t قرار گرفته است. در تحلیل پیشکمانش تیر خمیده عموماً از جملات غیرخطی ون-کارمن صرف‌نظر می‌شود. زیرا مقدار خیز تیر چندان زیاد نبوده و در نتیجه مقدار دوران های β_t و β_b چندان زیاد نمی‌باشد. در نتیجه از مقادیر β_t^2 و β_b^2 که عوامل ایجاد کننده کرنش‌های غیرخطی هستند صرف‌نظر می‌شود. به عبارت دیگر در مرحله پیش‌کمانش تنها تحلیل خطی کفایت می‌کند.



شکل ۴ نمایش تیر خمیده ساندویچی با شرایط مرزی ساده در معرض بار فشاری یکنواخت

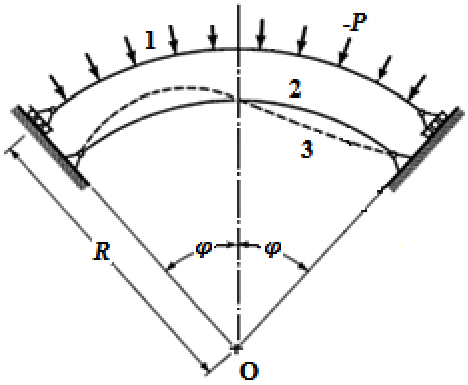
[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.11.8.0]

همچنین در این مرحله فرض بر آن است که تیر به صورت یکنواخت منقبض می‌شود و در نتیجه از مؤلفه‌های جابجایی u_{0t}، u_{0b} و u_c در مرحله پیش از کمانش صرف‌نظر می‌شود. با توجه به فرضیات بنا شده و استفاده از بالانویس صفر برای مرحله پیش کمانش، معادلات تعادل در این مرحله به صورت زیر خواهد بود [۱۶]. نمایش شماتیکی مسیر پیش‌کمانش و شکل کمانش یافته یک تیر خمیده با شرایط مرزی ساده در معرض بار فشاری یکنواخت در شکل ۵ نشان داده شده است.

$$
\begin{aligned}
& br_{tc}(1-k_t)\tau_c^0\big|_{r_{tc}}=0 \\
& -br_{bc}(1+k_b)\tau_c^0\big|_{r_{bc}}=0 \\
& N_t^0+br_{tc}\sigma_c^0\big|_{r_{tc}}-br_{tc}k_t\tau_c^{'0}\big|_{r_{tc}}-br_t q_t=0 \\
& N_b^0-br_{bc}\sigma_c^0\big|_{r_{bc}}-br_{bc}k_b\tau_c^{'0}\big|_{r_{bc}}=0 \\
& \tau^0=0
\end{aligned}
\tag{۲۴}
$$

N_t^0 و N_b^0 نیروهای پیش‌کمانش برای رویه‌های بالا و پایین بوده که به صورت رابطه (۲۵) محاسبه می‌شوند.

$$
\begin{aligned}
& N_t^0=\frac{br_t q_t\left(1-\frac{A_{11b}}{E_c b r_b}.\ \ln\frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right)}{1-\frac{A_{11b}}{E_c b r_b}.\ \ln\frac{r_{bc}}{r_{tc}}+\frac{r_t}{r_b}.\frac{A_{11b}}{A_t E_t}} \\
& N_b^0=\frac{br_t q_t}{1+\frac{A_{11t}}{A_{11b}}.\frac{r_b}{r_t}\left(1-\frac{A_{11b}}{E_c b r_b}.\ \ln\frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right)}
\end{aligned}
\tag{۲۵}
$$



شکل ۵ شماتیک نمایش ۱- شکل اولیه ۲- شکل کمانش نیافته ۳- شکل کمانش یافته، یک تیر خمیده با شرایط مرزی ساده در معرض بار فشاری یکنواخت

۲-۳- معادلات پایداری

برای استخراج معادلات تعادل پایداری از معیار نقطه مجاورت استفاده می‌شود. مطابق با این معیار یک لحظه تعادل بر روی مسیر پیش‌کمانش در نظر گرفته می‌شود که توسط بالانویس صفر نشان داده شده است. به هرکدام از این مؤلفه‌ها در مرحله پیش از کمانش یک نمره داده می‌شود. مقدار این نمو بسیار اندک، مطمئناً مخالف صفر می‌باشد. زیرا چنانچه این نمو برابر صفر باشد سازه بر روی مسیر اولیه باقی می‌ماند. در حالت پایداری مقدار نمو با بالانویس یک نشان داده می‌شود، در نتیجه مسیر تعادل جدیدی حاصل می‌شود که مؤلفه‌های آن به صورت رابطه (۲۶) خواهند بود [۱۶].

$$
\begin{aligned}
& -N_b^{1'}-\frac{1}{r_b}M_b^{1'}+\frac{N_b^0}{r_b}\left(u_{0b}^1-w_b^{1'}\right)-br_{bc}(1+k_b)\tau_c^1\big|_{r_{bc}}=0 \\
& -N_t^{1'}-\frac{1}{r_t}M_t^{1'}+\frac{N_t^0}{r_t}\left(u_{0t}^1-w_t^{1'}\right)+br_{tc}\left(1-k_t\right)\tau_c^1\big|_{r_{tc}}=0 \\
& N_b^1\ -\frac{1}{r_b}M_b^{1''}+\frac{N_b^0}{r_b}\left(u_{0b}^{1'}-w_b^{1''}\right)-br_{bc}\sigma_c^1\big|_{r_{bc}}-br_{bc}k_b \\
& \quad\times\tau_c^{1'}\big|_{r_{bc}}=0 \\
& N_t^1\ -\frac{1}{r_t}M_t^{1''}+\frac{N_t^0}{r_t}\left(u_{0t}^{1'}-w_t^{1''}\right)+br_{tc}\sigma_c^1\big|_{r_{bc}}-br_{tc}k_t \\
& \quad\times\tau_c^{1'}\big|_{r_{tc}}=0 \\
& \left(1-k_t\right)u_{0t}^1-\frac{r_{tc}}{r_{bc}}(1+k_b)u_{0b}^1-\left[\left(1-k_t\right)+\frac{k_0 r_{tc}}{\ln\frac{r_{bc}}{r_{tc}}}\right]w_t^{1'}+\frac{r_{tc}}{r_{bc}} \\
& \quad\times\left[1+k_b+\frac{k_0 r_{tc}}{\ln\frac{r_{bc}}{r_{tc}}}\right]w_b^{1'}-\frac{k_0}{2G_c}\tau^1\left(\frac{r_{tc}+r_{bc}}{r_{bc}}\right)+\frac{k_0}{2E_c}\tau^{1''} \\
& \quad\times\left(2k_0\frac{r_{tc}}{\ln\frac{r_{bc}}{r_{tc}}}+\frac{r_{tc}+r_{bc}}{r_{bc}}\right)=0
\end{aligned}
\tag{۲۶}
$$

معادلات موجود در رابطه (۲۶) باید به صورت یک مسأله مقدار ویژه نسبت به N_t^0 و N_b^0 حل شوند. لازم به ذکر است که N_t^1، M_t^1، N_b^1 و M_b^1 مقدار نموهای منتجه‌های تنش هستند که به صورت رابطه (۲۷) محاسبه شده‌اند.

$$
\begin{aligned}
& N_b^1=A_{11b}\left(\frac{u_{0b}^{1'}+w_b^1}{r_b}\right) \\
& N_t^1=A_{11t}\left(\frac{u_{0t}^{1'}+w_t^1}{r_t}\right) \\
& M_b^1=D_{11b}\left(\frac{u_{0b}^{1'}-w_b^{1''}}{r_b^2}\right)
\end{aligned}
$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.11.8.0]

$$M_{\mathrm{t}}^{1}=D_{11\mathrm{t}}\left(\frac{u_{0\mathrm{t}}^{1'}-w_{\mathrm{t}}^{1''}}{r_{\mathrm{t}}^{2}}\right)$$

$$\sigma_{\mathrm{c}}^{1}=\frac{1}{r^{2}}\tau^{1'}+\frac{1}{r}\left(\frac{E_{\mathrm{c}}}{\ln\frac{r_{\mathrm{bc}}}{r_{\mathrm{tc}}}}\left(w_{\mathrm{b}}^{1}-w_{\mathrm{t}}^{1}\right)+\frac{\tau^{1'}k_{0}}{\ln\frac{r_{\mathrm{bc}}}{r_{\mathrm{tc}}}}\right) \qquad (۲۷)$$

شرایط مرزی در این تحلیل به صورت تکیه‌گاه دو سر لولا در نظر گرفته شده است. برای دو لبه $\omega=0,\ \alpha_0$ این شرایط به صورت رابطه (۲۸) نوشته می‌شوند.

$$N_{\mathrm{b}}^{1}+\frac{1}{r}M_{\mathrm{b}}^{1}=0 \quad , \quad N_{\mathrm{t}}^{1}+\frac{1}{r}M_{\mathrm{t}}^{1}=0 \quad , \quad w_{\mathrm{b}}^{1}=w_{\mathrm{t}}^{1}=0$$

$$M_{\mathrm{b}}^{1}=M_{\mathrm{t}}^{1}=0 \quad , \quad w_{\mathrm{c}}^{1}=0 \qquad (۲۸)$$

با توجه به آنچه برای w_{c} بدست آمده و همین طور با توجه به این که w_{b} و w_{t} در دو لبه برابر صفر هستند، شرایط مرزی به صورت رابطه (۲۹) ساده می‌شوند.

$$N_{\mathrm{b}}^{1}=N_{\mathrm{t}}^{1}=0 \quad , \quad w_{\mathrm{b}}^{1}=w_{\mathrm{t}}^{1}=0$$

$$M_{\mathrm{b}}^{1}=M_{\mathrm{t}}^{1}=0 \quad , \quad \tau^{1'}=0 \qquad (۲۹)$$

برای ارضای شرایط مرزی نوشته شده در رابطه (۲۹)، توابع $u_{0\mathrm{b}}^{1}$، $u_{0\mathrm{t}}^{1}$، w_{b}^{1}، w_{t}^{1} و τ^{1} به صورت رابطه (۳۰) در نظر گرفته می‌شوند.

$$u_{0\mathrm{b}}^{1}=U_{\mathrm{b}}\cos\frac{n\pi\varphi}{\alpha_0} \quad , \quad u_{0\mathrm{t}}^{1}=U_{\mathrm{t}}\cos\frac{n\pi\varphi}{\alpha_0}$$

$$w_{\mathrm{b}}^{1}=W_{\mathrm{b}}\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha_0} \quad , \quad w_{\mathrm{t}}^{1}=W_{\mathrm{t}}\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha_0}$$

$$\tau^{1}=T_{\mathrm{t}}\cos\frac{n\pi\varphi}{\alpha_0} \qquad (۳۰)$$

با برابر صفر قراردادن دترمینان موجود در رابطه (۳۱)، ضرایب مسأله کمانش تیر خمیده به صورت یک مسأله مقدار ویژه خواهد بود که در آن فشار بحرانی به صورت مقدار ویژه و شکل مود کمانش یافته تیر به صورت بردار ویژه خواهد بود [۱۶].

$$\left([K]_{\mathrm{e}}-q[K]_{\mathrm{g}}\right)\begin{Bmatrix} W_{\mathrm{t}} \\ W_{\mathrm{b}} \\ U_{\mathrm{t}} \\ U_{\mathrm{b}} \\ T \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (۳۱)$$

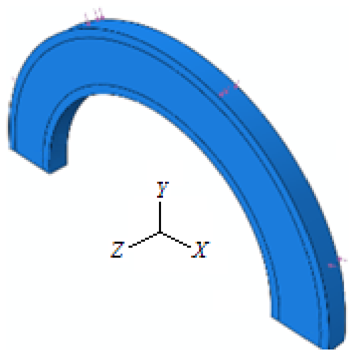
که در رابطه اخیر $[K]_{\mathrm{e}}$ و $[K]_{\mathrm{g}}$ به ترتیب معرف سفتی الاستیک و سفتی هندسی هستند.

۳- نتایج کمانش تیرهای خمیده ساندویچی

در این بخش به بررسی کمانش تیرهای خمیده کامپوزیتی و ساندویچی با شرایط مرزی ساده پرداخته می‌شود. نتایج حاصل ازاین روش با نتایج دقیق بدست آمده از تئوری الاستیسته و نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس صحه‌گذاری شده است.

نمونه ۱. در این مثال به مطالعه بار بحرانی کمانش تیرخمیده کامپوزیتی با هسته انعطاف پذیر و رویه‌های ایزوتروپ مطابق شکل ۶ پرداخته می‌شود. دو سر تیر دارای تکیه‌گاه ساده لولایی بوده و بار بر روی تیر به صورت گسترده یکنواخت می‌باشد. در شکل‌های ۷ تا ۱۰ اثر عوامل مختلف بر روی فشار بحرانی تیر مذکور بررسی شده است. خواص مکانیکی و خواص هندسی تیر مورد نظر به صورت جدول ۱ می‌باشد. همچنین در جداول ۲ تا ۴ صحه‌گذاری نتایج حاصل از حل تحلیلی مسأله با نتایج نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس ارائه می‌شود.

در شکل ۷ مقدار فشار بحرانی به صورت تابعی از زاویه دهانه تیر خمیده ارائه شده است. همان طور که مشاهده می‌شود دو مقدار برای مدول الاستیسته هسته در نظر گرفته شده است. و ضریب پواسون هسته هم برابر ۰/۳می‌باشد. با دقت در این شکل به متغیر بودن شکل کمانش یافته تیر در زوایای مختلف می‌رسیم. در واقع رفتار یک تیر ساندویچی همانند رفتار رویه آن بر روی بستر الاستیک است و به همین دلیل مودهای بالای کمانش نیز در تیر مشاهده می‌شود. در میان دو مدول الاستیسته در نظر گرفته شده برای هسته، بار بحرانی برای مدول الاستیسته۵۰۰ مگاپاسکال از مدول الاستیسته ۲۰۰ مگاپاسکال بیشتر است.



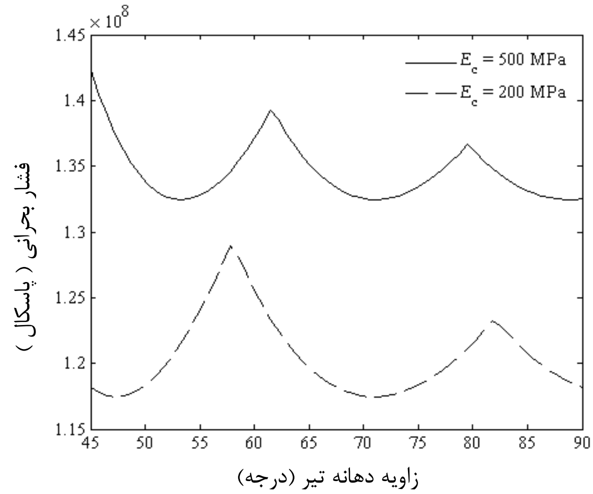
شکل ۶ نمایش مدل سه بعدی تیر خمیده ساندویچی تحت بار یکنواخت فشاری

جدول ۱ نمایش خواص مکانیکی و خواص هندسی تیر

خواص مکانیکی	$E_{\mathrm{t}}=E_{\mathrm{b}}=50$ GPa, $\nu_{\mathrm{b}}=\nu_{\mathrm{t}}=0.25$
خواص هندسی	$r_{\mathrm{t}}=0.915$ m, $r_{\mathrm{b}}=0.685$ m $r_{\mathrm{bc}}=0.7$ m , $r_{\mathrm{tc}}=0.9$ m , $b=0.1$ m

جدول ۲ نمایش بار بحرانی کمانش تیر خمیده متقارن بر واحد طول تحت بار یکنواخت برای مدول‌های مختلف هسته (MN/m)

زاویه دهانه تیر (درجه)	مدول الاستیسته هسته (مگا پاسکال)	مقاله حاضر	المان محدود
۳۰	۲۰۰	۱۰۷/۱۰	۹۹/۷۲
	۵۰۰	۱۱۳/۸۴	۱۰۷/۰۵
۶۰	۲۰۰	۱۰۰/۴۴	۹۳/۶۲
	۵۰۰	۱۰۹/۷۰	۱۰۳/۲۳
۹۰	۲۰۰	۹۴/۵۶	۸۸/۲۵
	۵۰۰	۱۰۶/۰۱	۹۹/۸۶
۱۲۰	۲۰۰	۹۴/۰۲	۸۷/۸۷
	۵۰۰	۱۰۶/۳۱	۱۰۰/۲۸
۱۵۰	۲۰۰	۹۴/۶۶	۸۸/۵۰
	۵۰۰	۱۰۶/۷۴	۱۰۰/۴۷
۱۸۰	۲۰۰	۹۴/۵۶	۸۸/۵۷
	۵۰۰	۱۰۶/۰۱	۹۹/۷۴



شکل ۷ نمایش اثر زاویه دهانه تیر خمیده بر روی فشار بحرانی برای مقادیر مختلف مدول هسته

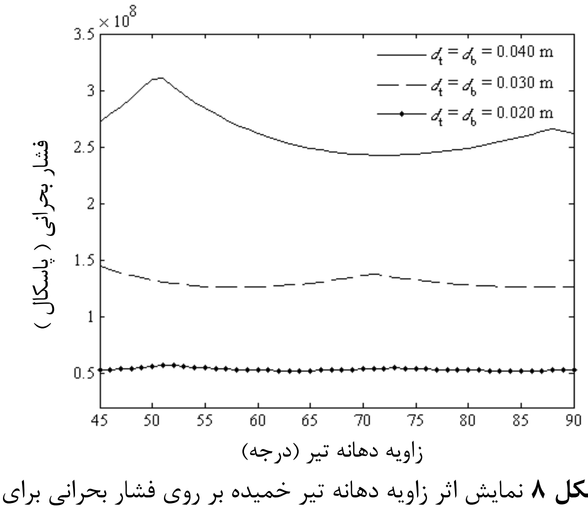
در شکل ۸ اثر ضخامت رویه‌ها بر روی فشار بحرانی مورد بررسی قرار گرفته ومقدار مدول و ضریب پواسون هسته به ترتیب برابر با ۲۰۰ مگاپاسکال و ۰/۳ می‌باشند. هر دو رویه در ضخامت و جنس یکسان بوده و سه ضخامت مختلف برای رویه‌ها در نظر گرفته شده است. با توجه به نتایج نشان داده شده، ضخامت رویه‌ها در شکل مود کمانش سازه بسیار مؤثر است.

در شکل ۹ اثر نامساوی‌بودن ضخامت رویه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. مقدار مدول و ضریب پواسون هسته به ترتیب برابر با ۲۰۰ مگاپاسکال و ۰/۳ می‌باشند.

همان گونه که مشاهده می‌شود بار بحرانی در حالت (d_t=d_b=0.02 m) از دو حالت دیگر کمتر است. این نتیجه قابل پیش‌بینی است زیرا ضخامت سازه بالاتر رفته و سختی سازه نیز بالاتر خواهد رفت. افزایش ضخامت رویه داخلی، سختی سازه را در حالتی که رویه خارجی ضخیم‌تر شده است بیشتر افزایش می‌دهد.

جدول ۳ نمایش بار بحرانی کمانش تیر خمیده متقارن بر واحد طول تحت بار یکنواخت برای ضخامت‌های مختلف رویه (MN/m)

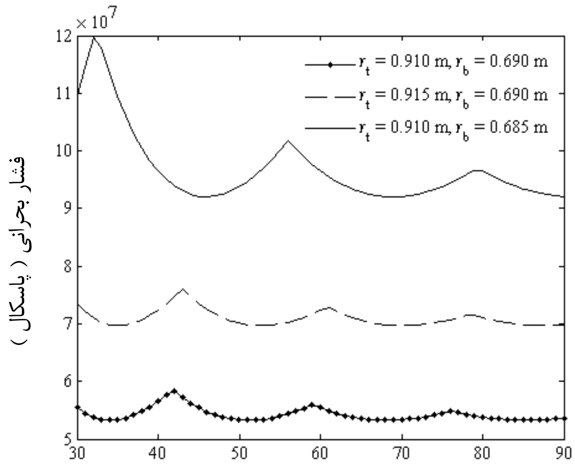
زاویه دهانه تیر (درجه)	ضخامت رویهها d_b=d_t(متر)	مقاله حاضر	المان محدود
	۰/۰۲	۵۳/۶۱	۴۹/۳۸
۳۰	۰/۰۳	۱۰۱/۰۳	۹۴/۴۶
	۰/۰۴	۲۰۹/۴۹	۱۹۷/۱۷
	۰/۰۲	۴۲/۲۳	۳۸/۹۴
۶۰	۰/۰۳	۱۰۱/۰۳	۹۴/۳۳
	۰/۰۴	۲۰۹/۴۹	۱۹۷/۷۰
	۰/۰۲	۳۳/۸۸	۳۹/۲۶
۹۰	۰/۰۳	۱۰۱/۰۳	۹۴/۵۸
	۰/۰۴	۲۰۹/۴۹	۱۹۷/۴۳
	۰/۰۲	۴۲/۲۳	۳۸/۵۸
۱۲۰	۰/۰۳	۱۰۱/۰۳	۹۴/۴۱
	۰/۰۴	۱۹۹/۲۶	۱۸۸/۵۶
	۰/۰۲	۴۱/۹۷	۳۸/۲۲
۱۵۰	۰/۰۳	۱۰۱/۰۳	۹۷/۳۸
	۰/۰۴	۱۹۴/۹۸	۱۸۳/۴۷
	۰/۰۲	۴۲/۲۳	۳۹/۱۰
۱۸۰	۰/۰۳	۱۰۱/۰۳	۹۴/۸۱
	۰/۰۴	۱۹۴/۳۰	۱۸۳/۷۶



شکل ۸ نمایش اثر زاویه دهانه تیر خمیده بر روی فشار بحرانی برای مقادیر مختلف ضخامت رویه‌ها

جدول ۴ نمایش بار بحرانی کمانش تیر خمیده متقارن بر واحد طول (MN/m) تحت بار یکنواخت برای ضخامت‌های مختلف هسته

زاویه دهانه تیر (درجه)	ضخامت رویه‌ها (متر)	مقاله حاضر	المان محدود
	$d_b=d_t=0.02$	۴۴/۳۴	۴۱/۰۲
۳۰	$d_b=0.03$,$d_t=0.02$	۸۷/۸۲	۸۲/۸۵
	$d_b=0.02$,$d_t=0.03$	۵۸/۸۲	۵۴/۷۶
	$d_b=d_t=0.02$	۴۴/۳۴	۴۰/۷۸
۶۰	$d_b=0.03$,$d_t=0.02$	۷۷/۱۹	۷۲/۷۳
	$d_b=0.02$,$d_t=0.03$	۵۷/۸۹	۵۴/۰۱
	$d_b=d_t=0.02$	۴۲/۹۱	۳۹/۶۱
۹۰	$d_b=0.03$,$d_t=0.02$	۷۳/۶۶	۶۹/۳۲
	$d_b=0.02$,$d_t=0.03$	۵۵/۸۵	۵۲/۱۳
	$d_b=d_t=0.02$	۴۲/۶۱	۳۹/۳۳
۱۲۰	$d_b=0.03$,$d_t=0.02$	۷۳/۹۹	۶۹/۷۰
	$d_b=0.02$,$d_t=0.03$	۵۵/۸۳	۵۲/۰۲
	$d_b=d_t=0.02$	۴۲/۶۶	۳۹/۴۵
۱۵۰	$d_b=0.03$,$d_t=0.02$	۷۴/۴۹	۷۰/۲۶
	$d_b=0.02$,$d_t=0.03$	۵۶/۰۹	۵۲/۶۱
	$d_b=d_t=0.02$	۴۲/۷۸	۴۱/۰۲
۱۸۰	$d_b=0.03$,$d_t=0.02$	۷۳/۶۶	۶۹/۴۷
	$d_b=0.02$,$d_t=0.03$	۵۵/۸۵	۵۲/۳۴



شکل ۹ نمایش اثر زاویه دهانه تیر خمیده بر روی فشار بحرانی برای مقادیر مختلف ضخامت رویه‌ها

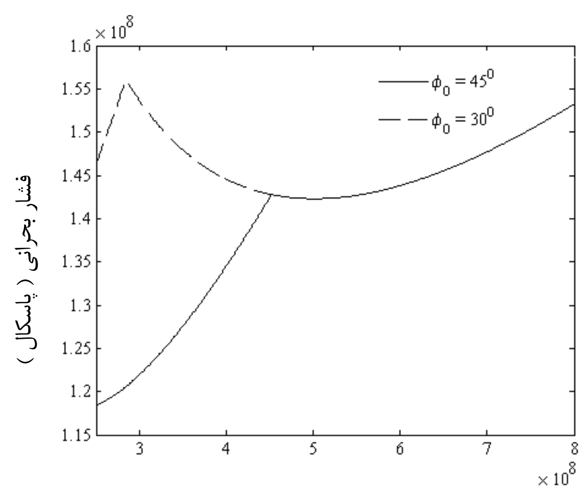
در شکل ۱۰ اثر مدول الاستیسیته هسته برای دو زاویه خاص دهانه تیر مورد بررسی قرار گرفته است. کلیه خواص مربوط به تیر، مشابه خواص به کار رفته در شکل ۶ می‌باشد.

همان گونه که نتایج در حالت زاویه۳۰ درجه نشان می‌دهد، مقدار سختی انعطاف‌پذیر در شکل مود کمانش بسیار مؤثر است. در حالت E_c>500 MPa و برای دو زاویه ۳۰ و ۴۵ درجه، مقدار بار بحرانی تقریباً برای دو حالت زاویه یکسان است.

۳-۱- بررسی بار بحرانی به روش اجزای محدود

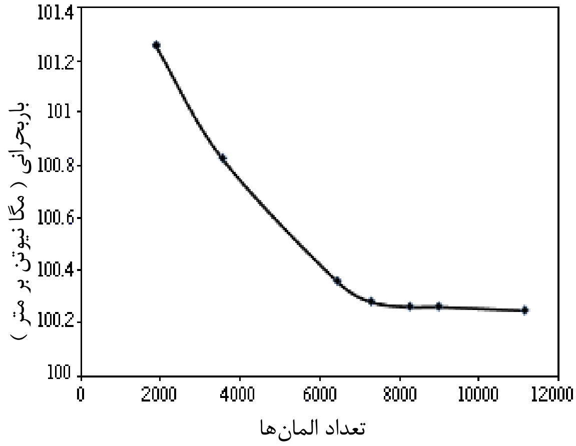
در نمونه ذکر شده، از نرمافزار المان محدود آباکوس برای صحه‌گذاری بر محاسبات انجام گرفته استفاده شده است. برای مدل‌سازی در محیط نرم‌افزار آباکوس از المان *C3D8R* که به صورت المان سالید، سه بعدی، خطی مرتبه اول، به شکل مکعب مستطیل آجری ۸ گرهی و انتگرال‌گیری کاهش یافته می‌باشد، استفاده شده است. با استفاده از جدول ۱ و در شرایط زاویه ۱۲۰ درجه و مدول الاستیسیته ۵۰۰ مگاپاسکال، نمودار همگرایی برای بار بحرانی کمانش به صورت شکل ۱۰ نشان داده شده است.

همان طور که در شکل ۱۱ ملاحظه می‌شود با افزایش تعداد المان‌ها مقادیر بار بحرانی کمانش برای تیر خمیده ساندویچی، در تعداد المان ۷۲۸۰ عدد همگرا شده است. و این همگرایی به آن معنی است که با افزایش تعداد المان و ریزتر شدن مش‌بندی، نتایج تغییری نخواهند کرد. تعداد۷۲۸۰ المان برای تیر خمیده ساندویچی با زاویه ۱۲۰ درجه، مقداری بهینه برای مدل‌سازی این تیر می‌باشد.



شکل ۱۰ نمایش اثر مدول الاستیسیته هسته بر روی فشار بحرانی برای دو زاویه خاص دهانه تیر

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.11.8.0]



شکل ۱۱ نمایش نمودار همگرایی برای بار بحرانی کمانش

تعداد گره‌های خوانده شده از نرم‌افزار آباکوس برای کل تیر مذکور در این زاویه بخصوص، ۳۵۵۰۵ عدد و درجه آزادی آن نیز ۱۰۶۵۱۵ عدد می‌باشد.

۴- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر به کمک حل تحلیلی، معادلات حاکم بر پایداری تیر خمیده ساندویچی با رویه‌های ایزوتروپیک و هسته انعطاف‌پذیر تحت بار فشاری یکنواخت در حالت کلی مطالعه شده است. به علاوه در بخش نتایج با آوردن یک نمونه و بدست آوردن بار بحرانی کمانش بر واحد طول و ارائه جداول و شکل‌های بدست آمده از نرم‌افزار متلب و مقایسه آن جهت صحه‌گذاری با نرم‌افزار آباکوس، نتایج زیر ارائه می‌شود.

۱- در این تحقیق تنها به بررسی شرایط مرزی به صورت تکیه‌گاه ساده متحرک پرداخته شده و از اثرات دوران در تحلیل پیش از کمانش صرف‌نظر شده است.

۲- زاویه لایه چینی و زاویه دهانه تیر، پارامترهای مؤثری در مقدار بار بحرانی و شکل بحرانی تیر هستند.

۳- افزایش ضخامت رویه‌ها باعث افزایش بار بحرانی می‌شود.

۴- افزایش مدول الاستیسته هسته موجب افزایش بار بحرانی می‌شود.

۵- ضخامت و مدول الاستیسته هسته تاثیری در شکل کمانش یافته سازه دارد.

۶- چیدمان و تعداد لایه‌ها نقش مؤثری در مقدار بار بحرانی دارند.

۷- ترتیب لایه‌چینی رویه‌ها تأثیر به‌سزایی در مقدار بار بحرانی و شکل مود بحرانی تیر خواهد داشت.

۵- مراجع

[1] Timoshenko S.P., Gere J.M., "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill, New York, Vol. 29, Issue 1, p. 220, 1961.

[2] Bulson P.S., "The Stability of Flat Plates", Cbatto and Windus, London, England, 1970.

[3] Brush D.O., Almroth B.O., "Buckling of Bars, Plates and Shells", McGraw-Hill, New York, 1975.

[4] Hunt G.E., DaSilva L.S., "Interaction Bending Behavior of Sandwich Beams", *J. Appl. Mech. Trans. ASME,* Vol. 57, No. 1, 1990, pp. 189-196.

[5] Frostig Y., Baruch M. "Bending of Sandwich Beams with Transversely Flexible Core", *AIAA J.,* Vol. 28, No. 3, 1990, pp. 523-531.

[6] Frostig Y., Baruch M., Vilnay O., Sheinman I., "Sandwich Beams with Unsymmetrical Skins and a Flexible Core-Bending Behavior", *J. Engrg. Mech., ASCE*, Vol. 117, No. 9, 1991, pp. 1931-1952.

[7] Frostig Y., Baruch K.P. "High Order Buckling Analysis of Sandwich Beams with Transversely Flexible Core", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 119, No. 3,1993, pp. 476-496.

[8] Smidt C.S., "Application of Folded Plate Analysis to Bending, Buckling and Vibration of Multilyer Orthotropic Sandwich Beams and Panels", *Composite & Structures,* Vol. 22, No. 3, 1984, pp. 491-497.

[9] Cheng S.H., Lin C.C., Wang J.T.S., "Local Buckling of Delaminated Sandwich Beams using Continuous Analysis", *Int. J. Solids Strucrures.* Vol. 34, No. 2, 1995, pp. 275-288.

[10] Bozhevolnaya E., Kildegaard A., "Experimental Study of a Uniformly Loaded Curved Sandwich Beam", *Composite Structures,* Vol. 40, No. 2, 1998, pp. 175-185.

[11] Wang W., Shenoi R.A., "Through-Thickness Stresses in Curved Composite Laminates and Sandwich Beams", *Composites Science and Technology*, Vol. 61, No. 11, 2001, pp. 1501-1512.

[12] Wang W., Shenoi R.A., "Analytical Solutions to Predict Flexural Behavior of Curved Sandwich Beams", *Journal of Sandwich Structuresand Materials*, Vol. 6, No. 3, 2004, pp. 199-216.

[13] Lyckegaard A., Thomsen O.T., "Nonlinear Analysis of a Curved Sandwich Beam Joined with a Straight Sandwich Beam", *Composites: Part B,* Vol. 37, No. 2-3, 2006, pp.101-107.

[14] Wooseok J., Waas A.M., "Global and Local Buckling of a Sandwich Beam", *Journal of Engineering Mechanics,* Vol. 133, No. 2, February 2007, pp. 230-237.

[15] Bozhevolnaya E., Frostig Y., "Free Vibrations of Curved Sandwich Beams with a Transversely Flexible Core", *Journal of Sandwich Structures and Materials,* Vol. 3, No. 4, 2001, pp. 311-342.

[16] Hodges D.H., Simitses G.J., "Fundamentals of Structural Stability", 2006, Elsevier Inc.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.11.8.0]