



ارتعاشات آزاد غیرخطی یک نانوصفحه تک لایه بر مبنای الاستیسیته غیرمحلی

علیرضا شوشتری^{۱*}، داریوش داستانی مبارکه^۲

۱- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه بوعلی سینا، همدان

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه بوعلی سینا، همدان

* همدان، صندوق پستی ۶۵۱۵۷-۴۱۶۱، shooshta@basu.ac.ir

چکیده- در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی یک نانوصفحه مستطیلی شکل بر مبنای تئوری الاستیسیته غیرمحلی پرداخته خواهد شد. بدین منظور ابتدا معادلات حرکت نانوصفحه که به صورت یک محیط پیوسته در نظر گرفته شده است با استفاده از اصل همپلتون و بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها استخراج شده است. سپس با استفاده از این تابع تنش و روش گالرکین معادلات مذکور به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی و یک معادله سازگاری تبدیل شده است. این معادله به کمک روش مقیاس‌های زمانی چندگانه حل شده و روابط تحلیلی جهت فرکانس طبیعی غیرخطی و شکل مود اول بدست آمده است. سپس به عنوان نمونه این روابط برای یک صفحه گرافین، در دو حالت ساختار آرمچیر و زیگزآگ مطالعه شده و اثر پارامترهای هندسی، نسبت منظر و تئوری غیرمحلی بر کمیت‌های فرکانس و تغییر شکل بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد اثر پارامتر تئوری غیرمحلی بر رفتار ارتعاشی این نوع سازه‌ها مشهود است و استفاده از این نوع تئوری در مقیاس نانو لازم می‌باشد.

کلید واژگان: ارتعاشات غیرخطی، نانوصفحه، گرافین.

Nonlinear free vibration of a single layered nanoplate based on the nonlocal elasticity

A. Shooshtari^{1*}, D. Dastani Mobarekeh²

1- Assoc. Prof., Mech. Eng. Dept., Bu-Ali Sina Univ., Hamedan, Iran

2- MSc Student, Mech. Eng. Dept., Bu-Ali Sina Univ., Hamedan, Iran

* P.O.B 65157-4161, Hamedan, Iran. Shooshta@basu.ac.ir

Abstract- In this paper, nonlinear free vibration of a Nanoplates rectangular has been investigated. For this purpose, first, the equations of motion for Nanoplate which is considered as a continuous system have been derived using Hamilton principle based on classical plate theory. Then, by definition a stress function and using Galerkin method the equations converted to an ordinary nonlinear equation and a compatible equation. Using multiple time scale method this equation has been solved and analytical relations for first nonlinear natural frequency and nonlinear mode shaped have been derived. Then for example, these relations have been studied for Graphen sheet in Armchair and Zigzag structure and the effect of aspect ratio and nonlocal elasticity parameter on natural frequency have been investigated.

Keywords: Nonlinear Vibration, Nanoplate, Graphen.

۱- مقدمه

و کاربردی، مورد توجه بسیاری از دانشمندان قرار گرفته‌اند. اما در رأس نانوصفحات، گرافین دارای ویژگی‌های منحصر به فردی

نانوصفحات به دلیل کوچک بودن و داشتن خواص بسیار جالب

است [۱]. به دلیل دارا بودن رفتارهای الکترومکانیکی، این گونه ساختارها را در ارتعاش کننده های الکترومکانیکی بکار می‌برند [۲]. همین کاربرد، اهمیت تحلیل‌های دینامیکی- ارتعاشاتی نانورق‌ها را آشکارتر می‌کند.

پرادهان و فادیکار [۳] ارتعاشات آزاد خطی نانوصفحه‌های تک‌لایه و دولایه ایزوتروپ کلاسیک را که بر روی تکیه‌گاه‌های ساده قرار گرفته‌اند با استفاده از الاستیسیته غیرمحلّی بررسی کرده‌اند. وانگ و همکاران [۴] ارتعاشات آزاد خطی نانورق‌های چندلایه ایزوتروپ را که بر روی تکیه‌گاه‌های ساده و بستر الاستیک قرار گرفته‌اند، بر مبنای الاستیسیته محلّی و با توجه به فرضیات کلاسیک ورق‌ها مطالعه کرده‌اند. بهفر و نقدآبادی [۵] نیز ارتعاشات آزاد و خطی نانوصفحاتی که پیرو نظریه کلاسیک ورق‌ها بوده و بر روی بستری الاستیک قرار داشته و رفتارهایی آنیزوتروپ دارند، بررسی کرده‌اند. جمعه‌زاده و سعیدی [۶] ارتعاشات خطی آزاد نانو ساختارهای ایزوتروپ را به صورت عام مورد بررسی قرار داده‌اند. تحلیل‌های ایشان بر مبنای تئوری الاستیسیته غیرمحلّی استوار بوده که در نهایت نتایج خود را برای نانو ورق‌های کلاسیک و تک‌لایه‌ای که بر روی تکیه‌گاه‌های ساده قرار دارند، بکار برده‌اند. انصاری و همکاران [۷] ارتعاشات آزاد خطی نانوصفحات چندلایه را بر مبنای تئوری الاستیسیته محلّی بررسی کرده‌اند. ایشان فرض کرده‌اند که نانورق‌های موردنظر بر روی بستری الاستیک قرار داشته باشند و مدل‌سازی ورق خود را با توجه به فرضیات FSDT^۱ انجام داده‌اند. مورمو و آدهیکاری [۸] ارتعاشات آزاد خطی نانورق‌های ایزوتروپ و کلاسیک را برای تکیه‌گاه ساده تجزیه و تحلیل کرده‌اند. تحلیل‌های آنها بر مبنای تئوری الاستیسیته غیرمحلّی استوار می‌باشد. ملک‌زاده و همکاران [۹] نانوصفحه‌های تک‌لایه اُرتوتروپ چهارضلعی را بر مبنای تئوری الاستیسیته غیرمحلّی و با در نظر گرفتن فرضیات FSDT که دارای انواع تکیه‌گاه‌ها می‌باشند، بررسی کرده‌اند. انصاری و همکاران [۱۰] با مدل‌سازی یک صفحه گرافین^۲ تک‌لایه به کمک دینامیک مولکولی فرکانس طبیعی خطی مسأله را در حالت شرایط مرزی ساده و گیردار محاسبه کردند. آنها فرض کرده‌اند که ورق‌های مورد مطالعه پیرو تئوری کلاسیک ورق‌ها باشند. وانگ و همکاران [۱۱] تأثیر تغییر دما را بر ارتعاشات

آزاد خطی نانو ورق‌های دولایه ایزوتروپی که پیرو الاستیسیته غیرمحلّی می‌باشند، مطالعه کرده‌اند. مهدوی و همکاران [۱۲] با توجه به فرضیات کلاسیک ورق‌ها و با در نظر گرفتن تئوری الاستیسیته محلّی، ارتعاشات آزاد خطی نانوصفحات ایزوتروپی را که بر روی تکیه‌گاه‌های ساده قرار دارند و با محیطی پلیمری در ارتباط می‌باشند، بررسی کرده‌اند. کیانی [۱۳] ارتعاشات خطی نانوصفحه‌ای ایزوتروپ که بر روی تکیه‌گاهی ساده قرار گرفته است را بررسی می‌کند. در مطالعات ایشان ارتعاشات در اثر حرکت یک نانو ذره بوجود می‌آید که پاسخ‌های بدست آمده بر مبنای تئوری الاستیسیته غیرمحلّی استوار می‌باشد. آکسنیر و آیدوقدو [۱۴] ارتعاشات آزاد اجباری نانو ورق‌های تک‌لایه ایزوتروپی که بر روی تکیه‌گاه‌های ساده قرار داشته باشند را با توجه به فرضیات کلاسیک ورق‌ها و نظریه الاستیسیته غیرمحلّی مطالعه کرده‌اند. مورمو و پرادهان [۱۵] ارتعاشات آزاد خطی داخل صفحه‌ای نانورق‌هایی که پیرو الاستیسیته غیرمحلّی می‌باشند و بر روی تکیه‌گاه‌های ساده قرار دارند را بررسی می‌کنند.

جمعه‌زاده و سعیدی [۱۶] ارتعاشات آزاد غیرخطی نانوصفحات ایزوتروپ تک‌لایه را که پیرو الاستیسیته غیرمحلّی می‌باشند با در نظر گرفتن فرضیات کلاسیک ورق‌ها تجزیه و تحلیل کرده‌اند. شین و همکاران [۱۷] ارتعاشات آزاد غیرخطی نانوصفحات تک‌لایه اُرتوتروپ را با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک ورق‌ها و نظریه الاستیسیته غیرمحلّی، در محیطی با دمای متغیر، بررسی کرده‌اند. شین [۱۸] علاوه بر ارتعاشات آزاد غیرخطی، کمانش نانوصفحات تک‌لایه‌ای که در محیطی با دمای متغیر می‌باشند را با توجه به نظریه کلاسیک ورق‌ها و الاستیسیته غیرمحلّی مطالعه کرده است. ایشان فرض کرده‌اند که نانوصفحه موردنظر اُرتوتروپ بوده و بر روی بستری الاستیک قرار گرفته باشد. هی و همکاران [۱۹] ارتعاشات اجباری غیرخطی نانوصفحات ایزوتروپ و کلاسیکی را بررسی کرده‌اند که بر روی تکیه‌گاه‌های ساده قرار دارند و پیرو نظریه الاستیسیته محلّی می‌باشند.

در این مقاله ارتعاشات آزاد نانوصفحه‌ای مستطیل شکل بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها و با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحلّی بررسی خواهد شد. در ابتدا معادلات حرکت غیرخطی این نانوصفحه به روش همیلتون بدست خواهد آمد. سپس معادلات بدست آمده با استفاده از روش گالرکین و

1. First-order shear deformation plate theory
2. Graphen

شکل شماتیک نانوصفحه مورد بررسی در شکل ۱ نشان داده شده است که L_x ، L_y و h به ترتیب طول، عرض و ضخامت نانورق می‌باشند.

روابط کرنش جابجایی غیرخطی بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها به صورت (۴) است [۲۳].

$$\varepsilon_x = e_x - zw_{0,xx}, \varepsilon_y = e_y - zw_{0,yy}, \gamma_{xy} = 2(e_{xy} - zw_{0,xy}), \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (4)$$

در رابطه (۴) از تعاریف (۵) استفاده شده است.

$$e_x = u_{0,x} + \frac{1}{2}(w_{0,x})^2, e_y = v_{0,y} + \frac{1}{2}(w_{0,y})^2, e_{xy} = \frac{1}{2}(u_{0,y} + v_{0,x} + w_{0,x}w_{0,y}) \quad (5)$$

برای یک نانورق کلاسیک رابطه بین تنش و کرنش بر اساس تئوری غیرمحلّی و بر اساس رابطه (۱) به شکل رابطه (۶) می‌باشد [۲۴].

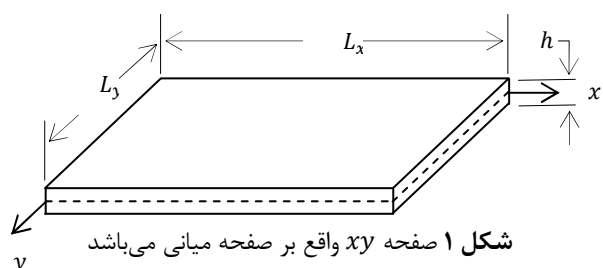
$$(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_{xy} \end{bmatrix}^T = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x & e_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

با جایگذاری (۴) و (۵) در (۶) و انتگرال‌گیری رابطه حاصل بر حسب z و بر بازه $[-h/2, h/2]$ ، روابط نیروها و گشتاورهای داخلی بر حسب جابجایی به صورت (۷) و (۸) بدست خواهد آمد.

$$(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \begin{bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \end{bmatrix}^T = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x & e_y & 2e_{xy} \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

$$(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \begin{bmatrix} M_x & M_y & M_{xy} \end{bmatrix}^T = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{0,xx} & w_{0,yy} & w_{0,xy} \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

$D = Eh/12(1 - \nu^2)$ صلبیت خمشی صفحه می‌باشد.



شکل ۱ صفحه xy واقع بر صفحه میانی می‌باشد

با فرض یک تابع تنش به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل خواهد شد و در نهایت با حل تقریبی این معادله با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه روابط تحلیلی جهت فرکانس طبیعی غیرخطی بدست خواهد آمد. در آخر نیز نتایج بدست آمده برای گرافین مطالعه خواهند شد و اثر پارامترهای مختلف بر فرکانس طبیعی غیرخطی تحقیق خواهد شد.

۲- بیان مسأله و معادلات حرکت

از آنجا که سازه‌های در مقیاس نانو مانند نانولوله‌ها و نانورق‌ها که از مولکول‌های مواد ساخته شده‌اند دارای ساختاری شبکه‌ای هستند، در بسیاری از تحقیقات از روش دینامیک مولکولی برای بیان خواص مکانیکی و دینامیکی آنها استفاده می‌شوند. اما در این تحقیق نانورق به صورت یک محیط پیوسته مدل‌سازی شده است و بنابراین به منظور تقریب بهتر و در نظر گرفتن اثر نیروهای بین مولکولی که در مقیاس‌های بسیار کوچک اثر قابل توجهی در خواص الاستیسیته و مکانیک محیط پیوسته می‌گذارد از تئوری الاستیسیته غیرمحلّی که توسط اِرینگن ارایه شده است و برای ساختارهای پیوسته با ابعاد نانو مناسب است استفاده شده است.

بر اساس این تئوری روابط بین تنش محلّی و غیرمحلّی به صورت (۱) بیان می‌شود [۲۰]:

$$(1 - \varepsilon^2 \nabla^2) t_{ij} = \sigma_{ij} \quad (1)$$

در این رابطه t_{ij} تنش غیرمحلّی، σ_{ij} تنش محلّی و ε پارامتر مثبت غیرمحلّی می‌باشد که به شکل (۲) تعریف می‌شود [۲۱]:

$$\varepsilon = e_0 a \quad (2)$$

که در آن a مشخصه طول داخلی (مانند طول پیوند C-C در نانولوله‌ها و نانوصفحه‌های کربنی) و e_0 ضریب بی‌بعدی می‌باشد که مقدار آن بستگی به جنس و شرایط کارکرد ماده مورد بررسی دارد. جابجایی نقطه‌ای از ورق بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها به صورت (۳) است [۲۲].

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - zw_{0,x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - zw_{0,y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن u ، v و w به ترتیب جابجایی نقطه‌ای دلخواه از ورق به ترتیب در راستای x ، y ، z است. همچنین u_0 ، v_0 و w_0 نیز به ترتیب جابجایی نقاط واقع بر صفحه میانی در راستاهای مذکور است.

$$D\nabla^4 w_0 = (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \times (-I_0 \ddot{w}_0 + w_{0,xx} \phi_{,yy} - 2w_{0,xy} \phi_{,xy} + w_{0,yy} \phi_{,xx} + q) \quad (15)$$

$$\nabla^4 \phi - (e_0 a)^2 \nabla^6 \phi = Eh \left[(w_{0,xy})^2 - w_{0,xx} w_{0,yy} \right] \quad (16)$$

برخلاف رابطه سازگاری که تاکنون برای ارتعاش غیرخطی نانوصفحه‌ها بدست آمده است [۱۸، ۱۷]، در این رابطه پارامتر غیرمحمولی نیز لحاظ شده است. روابط (۱۵) و (۱۶) دو رابطه‌ای هستند که برای بررسی رفتار ارتعاش غیرخطی یک نانورق کلاسیک بکار برده خواهند شد. از آنجا که متغیرهای مجهول از u_0 ، v_0 و w_0 به w_0 و ϕ تقلیل پیدا کرده‌اند می‌توان شرایط مرزی را بر حسب این دو متغیر جدید نوشت. از آنجایی که در تحقیق حاضر نانورق مورد نظر بر روی تکیه‌گاه‌های ساده قرار دارد، بنابراین در مرزهای $x = 0$ و $x = L_x$ رابطه $w_0 = M_x = 0$ (حالت ۳ و ۴ از جدول ۱) و در مرزهای $y = 0$ و $y = L_y$ رابطه $w_0 = M_y = 0$ (حالت ۳ و ۴ از جدول ۱) برقرار می‌باشند.

همچنین به علت ساده بودن شرایط مرزی، برای گوشه‌های ورق رابطه $w_0 = 0$ صادق می‌باشد. دیگر شرایط باقی مانده مربوط به شرایط مرزی داخل صفحه‌ای می‌باشند که برای ادامه روند محاسبات، شرایط (۱۷) تا (۲۰) به عنوان نمونه انتخاب خواهند شد:

برای مرزهای $x = 0$ و $x = L_x$:

$$N_x = \phi_{,yy} = 0 \quad (17)$$

$$v_0 = \phi_{,xx} - (e_0 a)^2 [\phi_{,xxxx} + (1 - \nu) \phi_{,xxyy}] = 0 \quad (18)$$

و برای مرزهای $y = 0$ و $y = L_y$:

$$u_0 = \phi_{,yy} - (e_0 a)^2 [(1 - \nu) \phi_{,xxyy} + \phi_{,yyyy}] = 0 \quad (19)$$

$$N_y = \phi_{,xx} = 0 \quad (20)$$

جهت ادامه روند محاسبات متغیرهای بی بعد، مطابق (۲۱) تعریف می‌شوند.

$$\beta = \left(\frac{L_x}{L_y} \right)^2, \quad \epsilon = \left(\frac{h}{L_y} \right)^2, \quad \mu = \frac{\pi^2 (e_0 a)^2}{L_y^2},$$

$$\tilde{x} = \frac{\pi x}{L_x}, \quad \tilde{y} = \frac{\pi y}{L_y}, \quad \tilde{w}_0 = \frac{w_0 L_y}{h^2},$$

$$\tilde{\phi} = \frac{12 L_y^2 (1 - \nu^2) \phi}{E h^5},$$

شایان ذکر است که در روابط (۷) و (۸) از تعاریف (۹) استفاده شده است:

$$\{N_x, N_y, N_{xy}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{t_x, t_y, t_{xy}\} dz, \\ \{M_x, M_y, M_{xy}\} = \int_{-h/2}^{h/2} z \{t_x, t_y, t_{xy}\} dz \quad (9)$$

با استفاده از اصل همیلتون معادلات حرکت یک ورق مستطیل شکل بر اساس تئوری کلاسیک بصورت روابط (۱۰) تا (۱۲) نوشته می‌شود [۲۵]:

$$-I_0 \ddot{u}_0 + N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \quad (10)$$

$$-I_0 \ddot{v}_0 + N_{y,y} + N_{xy,x} = 0 \quad (11)$$

$$(I_2 \ddot{w}_{0,x})_{,x} + (I_2 \ddot{w}_{0,y})_{,y} - I_0 \ddot{w}_0 + M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + (N_x w_{0,x} + N_{xy} w_{0,y})_{,x} + (N_y w_{0,y} + N_{xy} w_{0,x})_{,y} = 0 \quad (12)$$

که در آن از تعاریف (۱۳) استفاده شده است:

$$\{I_0, I_2\} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \{1, z^2\} dz \quad (13)$$

شرایط مرزی مختلف در جدول ۱ آمده است.

تابع تنش ϕ به صورت رابطه (۱۴) تعریف می‌شود.

$$\{N_x, N_y, N_{xy}\} = \{\phi_{,yy}, \phi_{,xx}, -\phi_{,xy}\} \quad (14)$$

می‌توان معادلات حرکت (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) را به یک معادله دیفرانسیل جزئی و یک معادله سازگاری که تابع تنش باید در آن صدق کند به شکل روابط (۱۵) و (۱۶) کاهش داد [۲۶، ۲۵].

جدول ۱ انواع شرایط مرزی برای ارتعاش غیرخطی یک ورق

کلاسیک [۲۴]

مرز	نوع	شرط مرزی
۱		$N_x = 0$ یا $\delta u_0 = 0$
۲	$x = L_x$	$N_{xy} = 0$ یا $\delta v_0 = 0$
۳	یا $x = 0$	$I_2 \ddot{w}_{0,x} - N_x w_{0,x} - N_{xy} w_{0,y} - M_{x,x} - 2M_{xy,y} = 0$ یا $\delta w_0 = 0$
۴		$\delta(w_{0,x}) = 0$ یا $M_x = 0$
۱		$N_{xy} = 0$ یا $\delta u_0 = 0$
۲	یا $y = L_y$	$\delta v_0 = 0$ یا $N_y = 0$
۳	یا $x = 0$	$-I_2 \ddot{w}_{0,y} + N_y w_{0,y} + N_{xy} w_{0,x} + M_{y,y} + 2M_{xy,x} = 0$ یا $\delta w_0 = 0$
۴		$M_y = 0$ یا $\delta(w_{0,y}) = 0$
۱	گوشه‌ها	$M_{xy} = 0$ یا $\delta w_0 = 0$

خواهد آمد.

$$g_{rs}(\tilde{t}) = 192\beta(1 - \nu^2)(2s^2) \times \{\pi^2 rs(r^2 - 4)(s^2 - 4)(r^2 + \beta s^2)^2 \times [1 + \frac{\mu}{\beta}(r^2 + \beta s^2)]\}^{-1} \times f_{11}^2(\tilde{t})(r^2 s^2 - 2r^2 - 2s^2) \times \{\pi^2 rs(r^2 - 4)(s^2 - 4)(r^2 + \beta s^2)^2 \times [1 + \frac{\mu}{\beta}(r^2 + \beta s^2)]\}^{-1} f_{11}^2(\tilde{t})$$

$$r, s \in \{x|x = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\} \quad (31\text{-الف})$$

$$g_{rs}(\tilde{t}) = 0 \quad r, s \in \{x|x = 2k, k \in \mathbb{N}\} \quad (31\text{-ب})$$

همچنین با قرار دادن (۲۹) و (۳۰) در (۲۳) و بهره‌گیری از روش گالرکین، با توجه به (۳۱)، رابطه (۳۲) منتج خواهد شد.

$$f_{11}'' + \tilde{\omega}_{11}^2 f_{11} = \epsilon \kappa f_{11}^3 \quad (32)$$

که در آن از تعاریف (۳۳) و (۳۴) استفاده شده است.

$$\tilde{\omega}_{11}^2 = (1 + \beta)^2 [1 + \mu\beta^{-1}(1 + \beta)]^{-1} \quad (33)$$

$$\kappa = 6144\beta^4(1 - \nu^2)[\pi^4(\beta + \mu(1 + \beta))]^{-1}$$

$$\times \sum_{m,n=1,3,5,\dots} (m^2 n^2 - 2m^2 - 2n^2) \times [mn(m^2 - 4)(n^2 - 4)^2(m^2 + \beta n^2)^2 \times [\beta + \mu(m^2 + \beta n^2)]]^{-1} \times \{2(mn)^{-1}[m^2 + n^2 + \mu\beta^{-1} \times ((1 + \beta)(m^2 + n^2 + m^2 n^2) + m^4 + \beta n^4)] - 2\mu n(\beta m)^{-1}[\beta(m^2 + n^2) - 2m^2] - 2\mu m(\beta n)^{-1}(m^2 + n^2 - 2\beta n^2) - mn[1 + \mu\beta^{-1}(1 + m^2 + \beta + \beta n^2)]\} \quad (34)$$

بدین ترتیب معادلات حرکت یک نانورق، به مسأله یافتن پاسخ یک معادله غیرخطی مرتبه سه تقلیل پیدا کرد.

۴- ارتعاشات آزاد غیرخطی

در این بخش ارتعاشات آزاد غیرخطی یک نانورق کلاسیک بررسی خواهد شد. بدین منظور رابطه (۳۲) به روش متغیرهای زمانی چندگانه [۲۷] حل خواهد شد. ابتدا تعاریفی مطابق (۳۵) در نظر گرفته می‌شود.

$$\tilde{T}_k = \epsilon^k \tilde{t}, \quad \tilde{D}_k = \partial_{\tilde{T}_k} \quad k \in \{0, 1, 2\} \quad (35)$$

و تابع مجهول f_{11} به صورت (۳۶) بسط داده می‌شود.

$$f_{11}(\tilde{t}; \epsilon) = f_{110}(\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2) + \epsilon f_{111}(\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2) + \epsilon^2 f_{112}(\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2) + O(\epsilon^3) \quad (36)$$

با توجه به (۳۵)، می‌توان رابطه (۳۷) را استنتاج کرد.

$$\frac{d^2}{d\tilde{t}^2} = \tilde{D}_0^2 + 2\epsilon \tilde{D}_0 \tilde{D}_1 + \epsilon^2 (\tilde{D}_1^2 + 2\tilde{D}_0 \tilde{D}_2) \quad (37)$$

$$\tilde{t} = \frac{\pi^2 h t}{L_x^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1 - \nu^2)}} = \frac{\pi^2 t}{L_x^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \quad (21)$$

با این تعاریف ورق موردنظر به مربعی با ابعاد π نگاشته می‌شود. با جایگذاری (۲۱) در روابط (۱۵) و (۱۶)، رابطه سازگاری و معادله حرکت بی‌بعد شده به ترتیب بصورت روابط (۲۲) و (۲۳) در خواهند آمد.

$$\tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + 2\beta \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}} + \beta^2 \tilde{\phi}_{,\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}} - \mu(\beta^{-1} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + 3\tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}} + 3\beta \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}} + \beta^2 \tilde{\phi}_{,\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}}) = 12\beta(1 - \nu^2) [(w_{0,xy})^2 - w_{0,xx} w_{0,yy}] \quad (22)$$

$$\tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + 2\beta \tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}} + \beta^2 \tilde{w}_{0,\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}} = -\ddot{w}_0 + \mu(\beta^{-1} \ddot{w}_{0,\tilde{x}\tilde{x}} + \ddot{w}_{0,\tilde{y}\tilde{y}}) + \epsilon \beta [\tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{x}} \tilde{\phi}_{,\tilde{y}\tilde{y}} - 2\tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{y}} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{y}} + \tilde{w}_{0,\tilde{y}\tilde{y}} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}} - \mu(\Psi_1 - 2\Psi_2 + \Psi_3)] \quad (23)$$

Ψ_1 ، Ψ_2 و Ψ_3 در پیوست آورده شده‌اند.

شرایط مرزی در حالت بدون بعد بصورت رابطه (۲۴) می‌باشد.

$$(\tilde{w}_0)_{\tilde{x}=0,\pi} = (\tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{x}})_{\tilde{x}=0,\pi} = 0, \quad (\tilde{w}_0)_{\tilde{y}=0,\pi} = (\tilde{w}_{0,\tilde{y}\tilde{y}})_{\tilde{y}=0,\pi} = 0 \quad (24)$$

همچنین برای مرزهای $\tilde{x} = 0$ ، $\tilde{x} = \pi$ و $\tilde{y} = 0$ ، $\tilde{y} = \pi$

$$\tilde{\phi}_{,\tilde{y}\tilde{y}} = 0 \quad (25)$$

$$\tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}} - \mu[\beta^{-1} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + (1 - \nu) \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}}] = 0 \quad (26)$$

و برای مرزهای $\tilde{y} = 0$ ، $\tilde{y} = \pi$

$$\tilde{\phi}_{,\tilde{y}\tilde{y}} - \mu[(1 - \nu)\beta^{-1} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}} + \tilde{\phi}_{,\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}}] = 0 \quad (27)$$

$$\tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}} = 0 \quad (28)$$

۳- تبدیل معادلات دیفرانسیل جزئی به معادلات

دیفرانسیل معمولی

برای حل معادلات دیفرانسیل (۲۲) و (۲۳) با توجه به شرایط مرزی (۲۴) تا (۲۸)، می‌توان روابط (۲۹) و (۳۰) را پیشنهاد داد:

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_{mn}(\tilde{t}) \sin(m\tilde{x}) \sin(n\tilde{y}) \quad (29)$$

$$\tilde{w}_0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = f_{11}(\tilde{t}) \sin(\tilde{x}) \sin(\tilde{y}) \quad (30)$$

در (۲۹) و (۳۰)، f_{11} و g_{mn} توابعی نامعلوم بر حسب $\tilde{t}$ می‌باشند. با قرار دادن این دو معادله در (۲۲) و استفاده از روش گالرکین، رابطه بین f_{11} و g_{mn} به شکل رابطه (۳۱) در

بنابراین می‌توان پاسخ f_{111} را با توجه به (۴۴) و (۴۲) به شکل رابطه (۴۹) نوشت.

$$f_{111} = -\frac{1}{8}\kappa A^3 \tilde{\omega}_{11}^{-2} \exp(3i\tilde{\omega}_{11}\tilde{T}_0) + cc \quad (49)$$

به همین ترتیب و با استفاده از رابطه (۴۰) می‌توان رابطه (۵۰) را بدست آورد.

$$f_{112} = -\frac{3}{32}\kappa A^2 \tilde{\omega}_{11}^{-2} (3iA_{\tilde{T}_1} - \kappa A^2 \tilde{A} \tilde{\omega}_{11}^{-1}) \times \exp(3i\tilde{\omega}_{11}\tilde{T}_0) + \frac{3}{64}\kappa^2 A^5 \tilde{\omega}_{11}^{-4} \times \exp(5i\tilde{\omega}_{11}\tilde{T}_0) + cc \quad (50)$$

با جایگذاری (۴۱)، (۴۹) و (۵۰) در (۳۶) و تبدیل نمایش مختلط به صورت حقیقی می‌توان تابع f_{11} را به شکل (۵۱) نوشت.

$$f_{11}(\tilde{t}) = c_1 \left\{ \cos(\tilde{\omega}\tilde{t} + c_2) - \frac{\kappa \epsilon c_1^2}{32\tilde{\omega}_{11}^2} \times \left[1 + 21 \left(\frac{\kappa \epsilon c_1^2}{32\tilde{\omega}_{11}^2} \right) \right] \times \cos(3\tilde{\omega}\tilde{t} + 3c_2) + \left(\frac{\kappa \epsilon c_1^2}{32\tilde{\omega}_{11}^2} \right)^2 \cos(5\tilde{\omega}\tilde{t} + 5c_2) \right\} \quad (51)$$

در رابطه (۵۱) از تعاریف (۵۲) استفاده شده است.

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{11} - \frac{3\kappa \epsilon c_1^2}{8\tilde{\omega}_{11}} - \frac{15\kappa^2 \epsilon^2 c_1^4}{256\tilde{\omega}_{11}^3} \quad (52)$$

در رابطه (۵۲)، $\tilde{\omega}$ فرکانس طبیعی غیرخطی نامیده می‌شود. با استفاده از (۵۲) می‌توان نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی را به صورت (۵۳) بدست آورد.

$$\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_{11}} = 1 - 12 \left(\frac{\kappa \epsilon c_1^2}{32\tilde{\omega}_{11}^2} \right) - 60 \left(\frac{\kappa \epsilon c_1^2}{32\tilde{\omega}_{11}^2} \right)^2 \quad (53)$$

از طرف دیگر با توجه به (۳۰) ملاحظه می‌گردد که بیشترین مقدار $\tilde{w}_0$ در مکان $\tilde{x} = \tilde{y} = \pi/2$ (مرکز ورق) صورت می‌پذیرد و بنابراین مطابق روابط (۲۱) و (۵۱)، رابطه (۵۴) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{w}_0}{h} &= \left\{ \sqrt{\epsilon} \tilde{w}_0 \left(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \tilde{t} \right) = \sqrt{\epsilon} f_{11}(\tilde{t}) \right. \\ &= \sqrt{\epsilon} c_1 \left\{ \cos(\hat{\gamma}) - \frac{\kappa \epsilon c_1^2}{32\tilde{\omega}_{11}^2} \right. \\ &\times \left[1 + 21 \left(\frac{\kappa \epsilon c_1^2}{32\tilde{\omega}_{11}^2} \right) \right] \cos(3\hat{\gamma}) \\ &\left. + \left(\frac{\kappa \epsilon c_1^2}{32\tilde{\omega}_{11}^2} \right)^2 \cos(5\hat{\gamma}) \right\} \end{aligned} \quad (54)$$

در رابطه (۵۴) از تعاریف (۵۵) استفاده شده است.

$$\tilde{w}_0 = w_0 \left(\frac{1}{2}L_x, \frac{1}{2}L_y, t \right), \quad \hat{\gamma} = \tilde{\omega}\tilde{t} + c_2 \quad (55)$$

با قرار دادن (۳۶) و (۳۷) در (۳۲) و پس از برابر قراردادن ضرایب ϵ^0 ، ϵ^1 و ϵ^2 در دو طرف تساوی بوجود آمده، سه معادله (۳۸) تا (۴۰) حاصل خواهد شد.

$$\epsilon^0: \quad \tilde{D}_0^2 f_{110} + \tilde{\omega}_{11}^2 f_{110} = 0 \quad (38)$$

$$\epsilon^1: \quad \tilde{D}_0^2 f_{111} + \tilde{\omega}_{11}^2 f_{111} = -2\tilde{D}_0 \tilde{D}_1 f_{110} + \kappa f_{110}^3 \quad (39)$$

$$\epsilon^2: \quad \tilde{D}_0^2 f_{112} + \tilde{\omega}_{11}^2 f_{112} = -\tilde{D}_1^2 f_{110} - 2\tilde{D}_0 \tilde{D}_2 f_{110} - 2\tilde{D}_0 \tilde{D}_1 f_{111} + 3\kappa f_{110}^2 f_{111} \quad (40)$$

پاسخ (۳۸) را می‌توان بصورت (۴۱) نوشت.

$$f_{110} = A(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2) \exp(i\tilde{\omega}_{11}\tilde{T}_0) + \bar{A}(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2) \exp(-i\tilde{\omega}_{11}\tilde{T}_0) \quad (41)$$

که در آن A تابعی مختلط و مجهول بر حسب $\tilde{T}_1$ و $\tilde{T}_2$ بوده و $\bar{A}$ مزدوج مختلط آن می‌باشد. با جایگذاری (۴۱) در (۳۹) رابطه (۴۲) بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} \tilde{D}_0^2 f_{111} + \tilde{\omega}_{11}^2 f_{111} &= \left(-2i\tilde{\omega}_{11} \frac{\partial A}{\partial \tilde{T}_1} + 3\kappa A^2 \bar{A} \right) \\ &\times \exp(i\tilde{\omega}_{11}\tilde{T}_0) + \kappa A^3 \exp(3i\tilde{\omega}_{11}\tilde{T}_0) + cc \end{aligned} \quad (42)$$

در این رابطه cc بیانگر مزدوج مختلط می‌باشد. جهت حذف جملات منفرد که باعث غیرتناوبی بودن پاسخ می‌شوند، باید ضرایب $\exp(i\tilde{\omega}_0\tilde{T}_0)$ برابر با صفر قرار داده شود.

$$-2i\tilde{\omega}_{11} \frac{\partial A}{\partial \tilde{T}_1} + 3\kappa A^2 \bar{A} = 0 \quad (43)$$

A را می‌توان بصورت نمایی و در مختصات قطبی نوشت:

$$A(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2) = \frac{1}{2} \tilde{\alpha}(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2) \exp[i\tilde{\gamma}(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2)] \quad (44)$$

که در آن $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\gamma}$ توابعی حقیقی و مجهول بر حسب متغیرهای $\tilde{T}_1$ و $\tilde{T}_2$ می‌باشند. با جایگذاری (۴۴) در (۴۳) و برابر قراردادن مقادیر حقیقی و مختلط معادله بدست آمده، روابط (۴۵) تا (۴۶) نتیجه می‌شود.

$$\tilde{\omega}_{11} \tilde{\alpha} \tilde{\gamma}_{,\tilde{T}_1} + \frac{3}{8} \kappa \tilde{\alpha}^3 = 0 \quad (45)$$

$$-\tilde{\omega}_{11} \tilde{\alpha}_{,\tilde{T}_1} = 0 \quad (46)$$

پاسخ معادلات (۴۵) و (۴۶) بصورت معادلات (۴۷) و (۴۸) می‌باشد.

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\tilde{T}_2) \quad (47)$$

$$\tilde{\gamma} = -\frac{3}{8} \kappa \tilde{T}_1 \tilde{\alpha}^2 \tilde{\omega}_{11}^{-1} + K(\tilde{T}_2) \quad (48)$$

که در آن K تابعی حقیقی و مجهول بر حسب $\tilde{T}_2$ می‌باشد.

$$-60 \left[\frac{\kappa}{32\tilde{\omega}_{11}^2} \left(\frac{(\hat{W}_0)_{\max}}{h} \right)^2 \right]^2 \quad (60)$$

در حقیقت رابطه (۵۹) بیانگر رابطه‌ای تقریبی برای فرکانس اصلی غیرخطی یک نانورق، با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحملی می‌باشد.

۵- مثال کاربردی

۵-۱- ارتعاشات خطی گرافین

همچنان که از (۴۸) ملاحظه می‌شود فرکانس طبیعی خطی ارتعاش یک نانورق علاوه بر β ، به μ هم وابسته می‌باشد. این وابستگی در شکل ۲ به وضوح ملاحظه می‌شود، به گونه‌ای که کانتورهای $\tilde{\omega}_{11}$ در صفحه $\beta - \mu$ نشان داده شده‌اند. از این نمودار می‌توان دریافت که اگر برای یک نانوصفحه خاص، عرض ورق ثابت باشد و طول آن افزایش یابد آنگاه فرکانس طبیعی خطی آن نیز افزایش خواهد یافت. همچنین اگر نسبت طول به عرض دو نانورق یکسان باشند آنگاه فرکانس طبیعی خطی بیشتر، متعلق به نانورقی خواهد بود که مقدار (e_0a) بزرگ‌تری داشته باشد. مشخصات فیزیکی دو نوع گرافین آرمچیر و زیگزآگ قرار گرفته بر روی تکیه‌گاه‌های ساده در جدول ۲ ملاحظه می‌گردد [۱۰]. با توجه به این جدول می‌توان مقادیر موجود در روابط (۴۸) و (۴۹) را برای اندازه‌های مختلف انواع گرافین محاسبه کرده و در جدول ۳ گردآوری کرد.

در حقیقت رابطه (۵۰) تابع جابجایی مرکز نانورق، در حوزه زمانی است. از آنجا که نانوصفحه مورد بررسی پیرو نظریه کلاسیک ورق‌ها می‌باشد، بنابراین طبق تعریف $0 < h/L_y \leq 1/20$ است که با توجه به روابط (۳۵) می‌توان به رابطه (۵۶) رسید.

$$0 < \sqrt{\epsilon} \leq \frac{1}{20} \quad (56)$$

بنابراین رابطه (۵۴) را می‌توان با تقریب قابل قبولی مطابق با رابطه (۵۷) نوشت.

$$\frac{\hat{W}_0}{h} = \sqrt{\epsilon} c_1 \cos(\hat{\gamma}) + O\left(\epsilon^{\frac{3}{2}}\right) \quad (57)$$

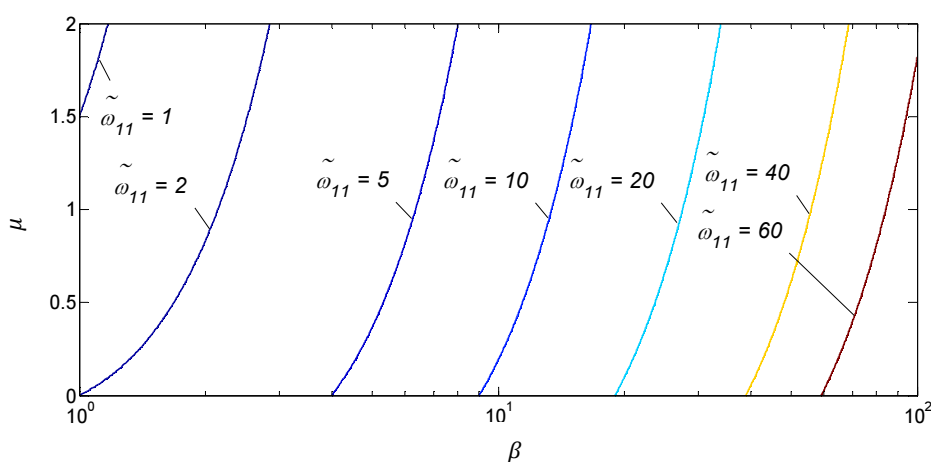
از آنجا که دوره تناوب این رابطه برابر با 2π است، نتیجه (۵۸) دور از انتظار نخواهد بود.

$$|c_1| = \frac{(\hat{W}_0)_{\max}}{h\sqrt{\epsilon}} \quad (58)$$

در رابطه (۵۸) $(\hat{W}_0)_{\max}$ به منزله بیشینه مقدار $\hat{W}_0$ است. با جایگذاری (۵۸) در (۵۲) و (۵۳)، فرکانس طبیعی غیرخطی و نسبت فرکانس‌ها بر حسب $(\hat{W}_0)_{\max}/h$ به ترتیب بصورت روابط (۵۹) و (۶۰) خواهند بود.

$$\hat{\omega} = \tilde{\omega}_{11} \left\{ 1 - 12 \left[\frac{\kappa}{32\tilde{\omega}_{11}^2} \left(\frac{(\hat{W}_0)_{\max}}{h} \right)^2 \right] - 60 \left[\frac{\kappa}{32\tilde{\omega}_{11}^2} \left(\frac{(\hat{W}_0)_{\max}}{h} \right)^2 \right]^2 \right\} \quad (59)$$

$$\frac{\hat{\omega}}{\tilde{\omega}_{11}} = 1 - 12 \left[\frac{\kappa}{32\tilde{\omega}_{11}^2} \left(\frac{(\hat{W}_0)_{\max}}{h} \right)^2 \right]$$



شکل ۲ کانتورهای $\tilde{\omega}_{11}$ در صفحه $\beta - \mu$

جدول ۲ مشخصات فیزیکی گرافین قرار گرفته بر روی تکیه‌گاه‌های ساده [۱۰]

نوع گرافین	$(e_0 a)^2 (10^{-18} \text{ m})$	ضخامت (nm)	چگالی (kg/m^3)	ضریب پواسون	مدول ینگ (TPa)
آرمچیر	۱/۳۴	۰/۳۴	۲۲۵۰	۰/۱۶	۱
زیگزاک	۱/۴۱	۰/۳۴	۲۲۵۰	۰/۱۶	۱

جدول ۳ ثابت های بی‌بعد. اعداد داخل پرانتز مربوط به الاستیسیته غیرمحلّی می‌باشند

	۵	۱۰	۲۰	۴۰	۶۰	۸۰	۱۰۰
μ	۰/۵۲۹۰	۰/۱۳۲۳	۰/۰۳۳۱	۰/۰۰۸۳	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۱۳
$\beta = 1$	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)
κ	-۱/۲۶۷۲	-۱/۶۶۶۱	-۱/۷۶۲۲	-۱/۷۸۳۷	-۱/۷۸۷۸	-۱/۷۸۹۳	-۱/۷۸۹۹
	(-۱/۷۹۱۲)	(-۱/۷۹۱۲)	(-۱/۷۹۱۲)	(-۱/۷۹۱۲)	(-۱/۷۹۱۲)	(-۱/۷۹۱۲)	(-۱/۷۹۱۲)
μ	۰/۵۲۹۰	۰/۱۳۲۳	۰/۰۳۳۱	۰/۰۰۸۳	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۱۳
$\beta = 4$	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)
آرمچیر	-۳/۸۷۹۳	-۴/۶۰۲۲	-۴/۷۵۲۳	-۴/۷۸۵۲	-۴/۷۹۱۲	-۴/۷۹۳۳	-۴/۷۹۴۳
κ	(-۴/۷۹۶۱)	(-۴/۷۹۶۱)	(-۴/۷۹۶۱)	(-۴/۷۹۶۱)	(-۴/۷۹۶۱)	(-۴/۷۹۶۱)	(-۴/۷۹۶۱)
μ	۰/۵۲۹۰	۰/۱۳۲۳	۰/۰۳۳۱	۰/۰۰۸۳	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۱۳
$\beta = 9$	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)
κ	-۵/۵۴۹۴	-۶/۳۹۹۷	-۶/۵۳۵۷	-۶/۵۵۸۱	-۶/۵۶۱۹	-۶/۵۶۳۱	-۶/۵۶۳۷
	(-۶/۵۶۴۷)	(-۶/۵۶۴۷)	(-۶/۵۶۴۷)	(-۶/۵۶۴۷)	(-۶/۵۶۴۷)	(-۶/۵۶۴۷)	(-۶/۵۶۴۷)
μ	۰/۵۵۶۶	۰/۱۳۹۲	۰/۰۳۴۸	۰/۰۰۸۷	۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۱۴
$\beta = 1$	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)
κ	-۱/۲۴۴۱	-۱/۶۵۸۸	-۱/۷۶۰۷	-۱/۷۸۳۳	-۱/۷۸۷۶	-۱/۷۸۹۲	-۱/۷۸۹۹
	(-۱/۷۹۱۲)	(-۱/۷۹۱۲)	(-۱/۷۹۱۲)	(-۱/۷۹۱۲)	(-۱/۷۹۱۲)	(-۱/۷۹۱۲)	(-۱/۷۹۱۲)
μ	۰/۵۵۶۶	۰/۱۳۹۲	۰/۰۳۴۸	۰/۰۰۸۷	۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۱۴
$\beta = 4$	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)
زیگزاک	-۳/۸۳۱۲	-۴/۵۹۰۶	-۴/۷۵۰۰	-۴/۷۸۴۶	-۴/۷۹۰۹	-۴/۷۹۳۲	-۴/۷۹۴۲
κ	(-۴/۷۹۶۱)	(-۴/۷۹۶۱)	(-۴/۷۹۶۱)	(-۴/۷۹۶۱)	(-۴/۷۹۶۱)	(-۴/۷۹۶۱)	(-۴/۷۹۶۱)
μ	۰/۵۵۶۶	۰/۱۳۹۲	۰/۰۳۴۸	۰/۰۰۸۷	۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۱۴
$\beta = 9$	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)	(۰)
κ	-۵/۴۸۸۸۵	-۶/۳۸۷۹	-۶/۵۳۴۰	-۶/۵۵۷۸	-۶/۵۶۱۷	-۶/۵۶۳۰	-۶/۵۶۳۷
	(-۶/۵۶۴۷)	(-۶/۵۶۴۷)	(-۶/۵۶۴۷)	(-۶/۵۶۴۷)	(-۶/۵۶۴۷)	(-۶/۵۶۴۷)	(-۶/۵۶۴۷)

مربوطه و ارتباط تنش‌های غیرمحلّی و محلّی، اثرات نیروهای بین مولکولی را در تنش‌های محلّی لحاظ می‌نماید. این امر باعث می‌شود نتایج حاصل از تئوری محلّی و غیرمحلّی تفاوت پیدا کند که این تفاوت با کاهش ابعاد نانوساختارها مشهودتر می‌شود. با توجه به (۳۵) و (۴۷) رابطه بین فرکانس‌های طبیعی خطی بی‌بعد و بعددار به شکل رابطه (۶۱) می‌باشد.

$$\omega_L = \frac{\pi h}{2L_x^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\nu^2)}} \tilde{\omega}_{11} (\text{Hz}) \quad (61)$$

در جدول ۴ مقایسه‌ای بین فرکانس‌های طبیعی خطی بدست آمده از رابطه (۴۸) صورت گرفته است. از این جدول می‌توان دریافت که هرچه ابعاد نانورق کوچک‌تر باشد لزوم استفاده از الاستیسیته غیرمحلّی پررنگ‌تر می‌نماید. در حقیقت هرچقدر ابعاد سیستم محیط پیوسته کاهش می‌یابد، اثر نیروهای کشش سطحی و نیروهای بین مولکولی نسبت به نیروها و لنگرهای منته‌جه از تنش‌های ناشی از تغییر شکل افزایش می‌یابد. تئوری غیرمحلّی با معرفی پارامتر هندسی

خیلی خوبی با روش دینامیک مولکولی در هر دو حالت زیگزاگ و آرمچیر دارد. بنابراین رابطه تحلیلی (۳۳) می‌تواند نتایج بسیار خوبی را عرضه نماید.

۵-۲- ارتعاشات آزاد غیرخطی گرافین

شکل ۳ مربوط به تغییرات فرکانس طبیعی غیرخطی یک گرافین آرمچیر در مقابل مقادیر مختلف $(\hat{W}_0)_{max}/h$ می‌باشد. نمودارهای این شکل با توجه به جداول ۲، ۳ و رابطه (۵۹) ترسیم شده‌اند.

که در آن ω_L فرکانس طبیعی خطی بعددار می‌باشد. با توجه به این رابطه فرکانس‌هایی از جدول ۴ که بر مبنای تئوری الاستیسیته غیرمحلی بدست آمده‌اند، در جدول ۵ دسته‌بندی شده‌اند. شایان ذکر است که هر چه اندازه ورق کوچک‌تر شود، فرکانس طبیعی خطی بعددار متناظر به مراتب بزرگ‌تر خواهد شد. در جدول ۶ مقایسه‌ای بین نتایج بدست آمده از تحقیقات گذشته [۱۰] که با استفاده از دینامیک مولکولی انجام شده صورت گرفته است. با توجه به این جدول مشاهده می‌شود نتایج بدست آمده از حل تحلیلی و تئوری غیرمحلی انطباق

جدول ۴ مقایسه بین فرکانس‌های طبیعی خطی بی‌بعد

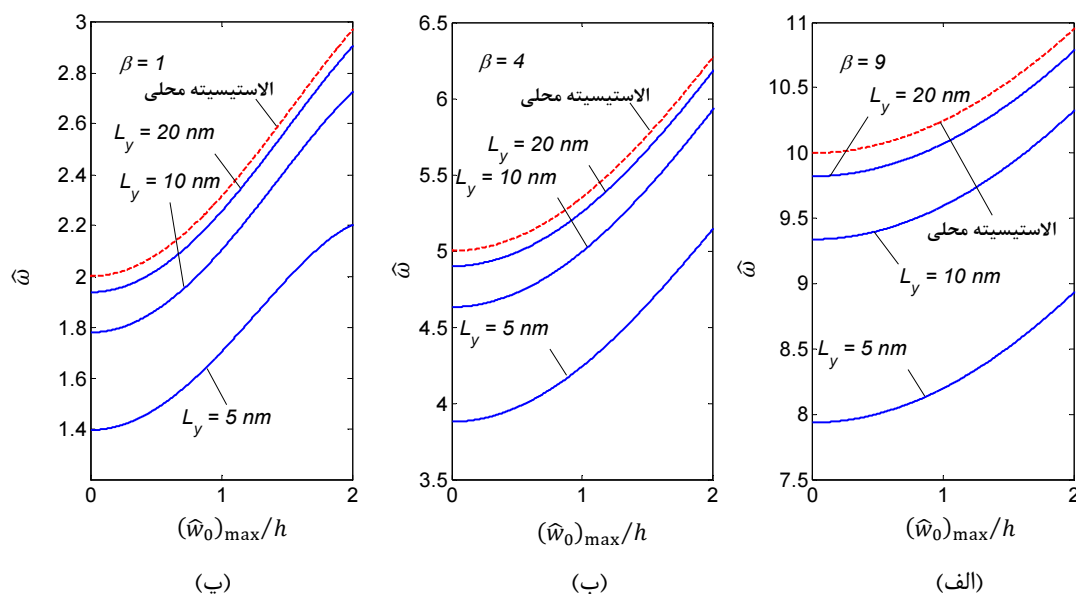
$L_y(\text{nm})$							
۱۰۰	۸۰	۶۰	۴۰	۲۰	۱۰	۵	
۱/۹۹۷۴	۱/۹۹۵۹	۱/۹۹۲۷	۱/۹۸۳۷	۱/۹۳۷۰	۱/۷۷۸۶	۱/۳۹۴۱	الاستیسیته غیرمحلی
۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	$\beta = 1$ الاستیسیته محلی
۰/۱	۰/۲	۰/۴	۰/۸	۳/۲	۱۱/۱	۳۰/۳	درصد خطا
۴/۹۹۵۹	۴/۹۹۳۶	۴/۹۸۸۶	۴/۹۷۴۴	۴/۸۹۹۸	۴/۶۳۱۸	۳/۸۷۹۳	الاستیسیته غیرمحلی
۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	$\beta = 4$ آرمچیر الاستیسیته محلی
۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۵	۲/۰	۷/۴	۲۲/۴	درصد خطا
۹/۹۹۲۷	۹/۹۸۸۵	۹/۹۷۹۷	۹/۹۵۴۴	۹/۸۲۱۲	۹/۳۳۷۴	۷/۹۳۶۰	الاستیسیته غیرمحلی
۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	$\beta = 9$ الاستیسیته محلی
۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۵	۱/۸	۶/۶	۲۰/۶	درصد خطا
۱/۹۹۷۲	۱/۹۹۵۷	۱/۹۹۲۳	۱/۹۸۲۸	۱/۹۳۳۹	۱/۷۶۸۹	۱/۳۷۵۸	الاستیسیته غیرمحلی
۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	$\beta = 1$ الاستیسیته محلی
۰/۱	۰/۲	۰/۴	۰/۹	۳/۳	۱۱/۶	۳۱/۲	درصد خطا
۴/۹۹۵۷	۴/۹۹۳۲	۴/۹۸۸۰	۴/۹۷۳۰	۴/۸۹۴۷	۴/۶۱۴۷	۳/۸۳۹۶	الاستیسیته غیرمحلی
۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	$\beta = 4$ زیگزاگ الاستیسیته محلی
۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۵	۲/۱	۷/۷	۲۳/۲	درصد خطا
۹/۹۹۲۳	۹/۹۸۷۹	۹/۹۷۸۶	۹/۹۵۲۰	۹/۸۱۲۱	۹/۳۰۶۴	۷/۸۶۰۴	الاستیسیته غیرمحلی
۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	$\beta = 9$ الاستیسیته محلی
۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۵	۱/۹	۶/۹	۲۱/۴	درصد خطا

جدول ۵ فرکانس‌های طبیعی خطی بعددار غیرمحلی بر حسب GHz

$L_y(\text{nm})$							
۱۰۰	۸۰	۶۰	۴۰	۲۰	۱۰	۵	
۰/۶۵۷۷	۱/۰۲۶۸	۱/۸۲۲۶	۴/۰۸۲۲	۱۵/۹۴۴۶	۵۸/۵۶۲۳	۱۸۳/۶۱۷۲	$\beta = 1$
۰/۴۱۱۲	۰/۶۴۲۳	۱/۱۴۰۷	۲/۵۵۹۲	۱۰/۰۸۳۳	۳۸/۱۲۳۷	۱۲۷/۷۳۱۸	$\beta = 4$ آرمچیر
۰/۳۶۵۶	۰/۵۷۱۰	۱/۰۱۴۲	۲/۲۷۶۱	۸/۹۸۲۸	۳۴/۱۶۱۳	۱۱۶/۱۳۶۶	$\beta = 9$
۰/۶۵۷۶	۱/۰۲۶۷	۱/۸۲۲۲	۴/۰۸۰۵	۱۵/۹۱۸۸	۵۸/۲۴۴۹	۱۸۱/۲۰۰۲	$\beta = 1$
۰/۴۱۱۲	۰/۶۴۲۲	۱/۱۴۰۵	۲/۵۵۸۵	۱۰/۰۷۲۹	۳۷/۹۸۶۸	۱۲۶/۴۲۴۲	$\beta = 4$ زیگزاگ
۰/۳۶۵۶	۰/۵۷۱۰	۱/۰۱۴۱	۲/۲۷۵۶	۸/۹۷۴۵	۳۴/۰۴۷۵	۱۱۵/۰۲۹۷	$\beta = 9$

جدول ۶ مقایسه نتایج از تحقیق حاضر و سایر محققان

ابعاد نانورق (nm) ($\beta = 1$)	فرکانس طبیعی خطی گرافین زیگزاگ (از طریق دینامیک مولکولی) [۱۰]	فرکانس طبیعی خطی گرافین زیگزاگ (تحقیق حاضر)	فرکانس طبیعی خطی گرافین آرمچیر (از طریق دینامیک مولکولی) [۱۰]	فرکانس طبیعی خطی گرافین آرمچیر (تحقیق حاضر)
۱۰	۵۸/۷۷۲۵	۵۸/۲۴۴۹	۵۹/۵۰۱۴	۵۸/۵۶۲۳
۲۰	۱۶/۴۵۹۳	۱۵/۹۱۸۸	۱۵/۸۱۴۱	۱۵/۹۴۴۶
۴۰	۴/۲۶۰۸	۴/۰۸۰۵	۴/۱۰۱۷	۴/۰۸۲۲

شکل ۳ فرکانس‌های بی‌بعد غیرخطی آرمچیری که دارای الف- $\beta = 9$ ، ب- $\beta = 4$ و پ- $\beta = 1$ می‌باشد

چهار جابجایی اولیه اعمال شده به نانورق بزرگ‌تر باشد، فرکانس طبیعی حرکت از فرکانس طبیعی خطی فاصله خواهد گرفت. این موضوع در شکل ۴ با توجه به رابطه (۶۰) و جداول ۳ و ۴ مشهود است. این شکل برای گرافین آرمچیر و به ازای $\beta = 1$ ، $\beta = 4$ و $\beta = 9$ بر مبنای تئوری الاستیسیته غیرمحلّی ترسیم شده است. شایان ذکر است که در مرجع [۱۷] نیز بر افزایش یافتن فرکانس طبیعی غیرخطی در مقابل افزایش $(\hat{w}_0)_{\max}/h$ صحنه گذارده شده است. همچنان که انتظار می‌رفت در جابجایی‌های بزرگ ورق، دیگر نمی‌توان از تحلیل‌های خطی استفاده کرد و باید از روش‌های غیرخطی برای یافتن مجهولات بهره برد. از شکل ۴ مشخص است که هر چه مقدار β به واحد نزدیک‌تر باشد میزان انحراف از فرکانس طبیعی خطی بیشتر است. همچون رابطه (۶۱) می‌توان فرکانس طبیعی غیرخطی

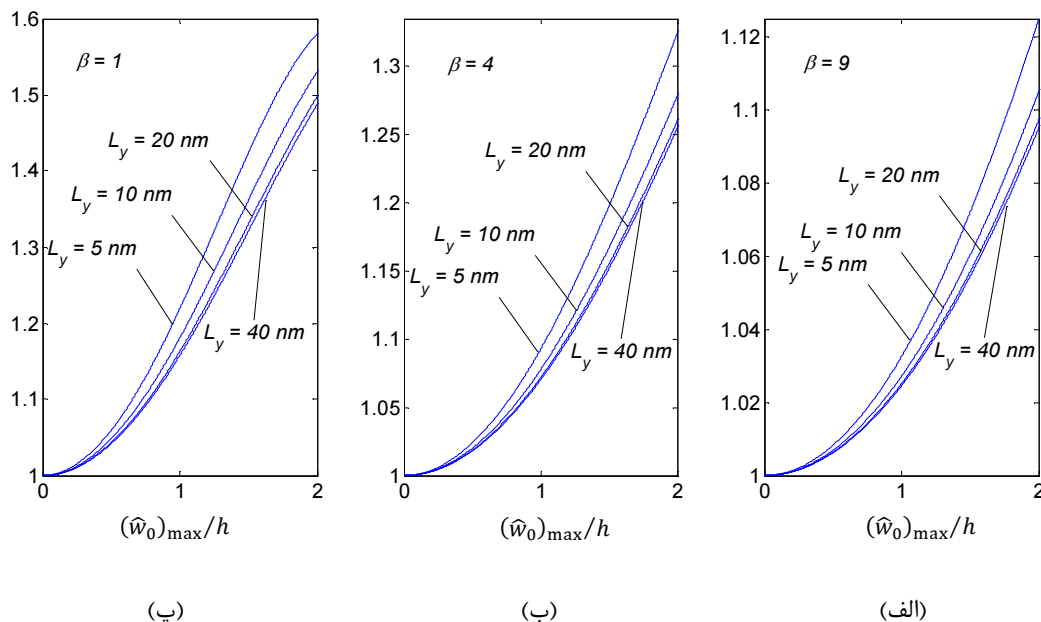
شایان ذکر است که منحنی‌های خطچین و خط‌پر به ترتیب نشان دهنده اطلاعات بدست آمده از الاستیسیته محلّی و غیرمحلّی می‌باشند. همچنان که ملاحظه می‌شود، در حالتی که اندازه ورق کوچک است، بین نتایج حاصل از تئوری‌های الاستیسیته محلّی و غیرمحلّی تفاوت‌های زیادی دیده می‌شود. بنابراین لزوم استفاده از تئوری غیرمحلّی برای تحلیل دقیق‌تر ارتعاشات آزاد نانورق در اینجا به خوبی دیده می‌شود. با توجه به این شکل دیده می‌شود که فرکانس‌های غیرخطی غیرمحلّی مقداری کوچک‌تر از فرکانس مشابهی دارند که از روش محلّی بدست آمده باشند. همچنین می‌توان دریافت که با افزایش ضریب منظر (β)، فرکانس‌های غیرخطی افزایش می‌یابند. به عبارتی دیگر به ازای $(\hat{w}_0)_{\max}/h$ ثابت، فرکانس‌های بیشتر در مقادیر بزرگ‌تری از β روی می‌دهند. شایان ذکر است که هر چه مقدار $(\hat{w}_0)_{\max}/h$ بیشتر باشد، به عبارتی دیگر هر

بُعددار را نیز بشکل (۶۲) بیان کرد:

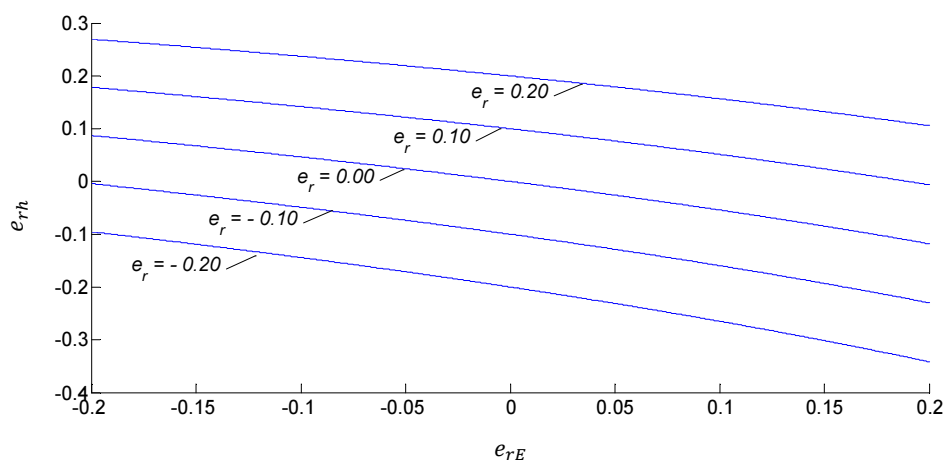
$$\omega_{NL} = \frac{\pi h}{2L_x^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\nu^2)}} \hat{w} \quad (\text{Hz}) \quad (62)$$

که در آن ω_{NL} فرکانس طبیعی غیرخطی بُعددار می‌باشد. بنابراین با توجه به مقادیر جداول ۲، می‌توان فرکانس‌های غیرخطی بُعددار را در جدول ۶ گردآوری کرد. از این جدول می‌توان دریافت که فرکانس‌های طبیعی حرکت آرمچیر اندکی بیش از زیگزاگ متناظر می‌باشند. همچنین برای یک نوع گرافین اگر $(\hat{w}_0)_{\max}/h$ و عرض ثابت باشند، با افزایش طول ورق، فرکانس‌های طبیعی کاهش خواهند یافت. این کاهش به

مراتب کمتر از حالتی می‌باشد که $(\hat{w}_0)_{\max}/h$ و β ثابت بوده و عرض ورق افزایش می‌یابد. جدول ۷ نشان می‌دهد که به ازای β و عرض ثابت، با افزایش $(\hat{w}_0)_{\max}/h$ مقدار فرکانس طبیعی نیز سیر صعودی خواهد یافت. همچنین از رابطه (۶۱) می‌توان به اثر تغییرات مدول الاستیسیته و ضخامت بر فرکانس ارتعاشات غیرخطی نانورق پی برد. شکل ۵ این تغییرات را بصورت نمودار و برحسب میزان درصد تغییرات مدول الاستیسیته (e_{rE}) و میزان درصد تغییرات ضخامت (e_{rh}) نشان می‌دهد.



شکل ۴ نسبت فرکانس‌های غیرخطی به خطی برای آرمچیر به ازای الف- $\beta=9$ ، ب- $\beta=4$ و پ- $\beta=1$



شکل ۵ تغییرات فرکانس طبیعی غیرخطی بر حسب درصد تغییرات مدول الاستیسیته و درصد تغییرات ضخامت نانوصفحه

جدول ۷ فرکانس‌های غیرخطی بُعددار بر حسب GHz

L_y (nm)	$(\hat{w}_0)_{max}/h$	آرمچیر			زیگزاگ		
		$\beta = 1$	$\beta = 4$	$\beta = 9$	$\beta = 1$	$\beta = 4$	$\beta = 9$
۵		۱۹۴/۵۴۴۱	۱۳۰/۷۸۸۲	۱۱۷/۰۹۱۸	۱۹۲/۰۸۱۲	۱۲۹/۴۷۴۴	۱۱۵/۹۸۴۰
۱۰		۶۱/۳۹۵۱	۳۸/۸۸۸۱	۳۴/۳۹۵۶	۶۱/۰۷۹۰	۳۸/۷۴۸۱	۳۴/۲۸۲۶
۲۰	۰/۵	۱۶/۶۳۳۷	۱۰/۲۶۹۰	۹/۰۳۹۷	۱۶/۶۰۹۱	۱۰/۲۵۸۷	۹/۰۳۱۴
۴۰		۴/۲۵۲۷	۲/۶۰۵۳	۲/۲۹۰۲	۴/۲۵۰۸	۲/۶۰۴۶	۲/۲۸۹۷
۶۰		۱/۸۹۸۱	۱/۱۶۱۱	۱/۰۲۰۴	۱/۸۹۷۸	۱/۱۶۱۰	۱/۰۲۰۳
۵		۲۲۳۲/۹۲۷۹	۱۳۹/۵۸۲۹	۱۱۹/۹۲۰۵	۲۲۱/۲۸۰۶	۱۳۸/۲۴۶۱	۱۱۸/۸۰۸۳
۱۰		۶۹/۱۷۹۰	۴۱/۰۹۱۷	۳۵/۰۹۰۷	۶۸/۸۶۲۹	۴۰/۹۵۴۲	۳۴/۹۷۸۴
۲۰	۱/۰	۱۸/۵۴۶۸	۱۰/۸۰۸۸	۹/۲۰۸۶	۱۸/۵۲۲۹	۱۰/۷۹۸۵	۹/۲۰۰۵
۴۰		۴/۷۲۷۰	۲/۷۳۹۲	۲/۳۳۲۱	۴/۷۲۵۴	۲/۷۳۸۵	۲/۳۳۱۵
۶۰		۲/۱۰۸۷	۱/۲۲۰۶	۱/۰۳۹۰	۲/۱۰۸۳	۱/۲۲۰۴	۱/۰۳۸۹
۵		۲۶۱/۴۶۴۴	۱۵۲/۹۹۷۲	۱۲۴/۵۰۲۵	۲۵۸/۴۷۴۶	۱۵۱/۶۱۴۳	۱۲۳/۳۸۱۵
۱۰		۷۹/۷۶۸۲	۴۴/۵۰۷۹	۳۶/۲۲۲۳	۷۹/۴۴۲۳	۴۴/۳۷۲۰	۳۶/۱۱۱۴
۲۰	۱/۵	۲۱/۲۲۰۴	۱۱/۶۵۰۳	۹/۴۸۴۱	۲۱/۱۹۵۷	۱۱/۶۴۰۴	۹/۴۷۶۱
۴۰		۵/۳۹۴۸	۲/۹۴۸۴	۲/۴۰۰۳	۵/۳۹۳۰	۲/۹۴۷۸	۲/۳۹۹۸
۶۰		۲/۴۰۵۴	۱/۳۱۳۴	۱/۰۶۹۳	۲/۴۰۵۰	۱/۳۱۳۳	۱/۰۶۹۲
۵		۲۹۰/۰۰۵۲	۱۶۹/۱۶۴۲	۱۳۰/۶۴۰۰	۲۸۶/۴۶۲۳	۱۶۷/۷۰۲۳	۱۲۹/۵۰۵۹
۱۰		۸۹/۶۰۰۱	۴۸/۷۵۱۳	۳۷/۷۴۹۷	۸۹/۲۱۴۹	۴۸/۶۱۴۶	۳۷/۶۴۰۷
۲۰	۲/۰	۲۳/۸۸۰۹	۱۲/۷۰۷۰	۹/۸۵۷۱	۲۳/۸۵۲۹	۱۲/۶۹۷۴	۹/۸۴۹۳
۴۰		۶/۰۷۱۷	۳/۲۱۱۸	۲/۴۹۲۸	۶/۰۶۹۶	۳/۲۱۱۲	۲/۴۹۲۳
۶۰		۲/۷۰۷۱	۱/۴۳۰۵	۱/۱۱۰۳	۲/۷۰۶۷	۱/۴۳۰۳	۱/۱۱۰۲

با توجه به شکل ۵ می‌توان گفت با افزایش مدول الاستیسیته و ضخامت صلبیت نانوورق افزایش یافته و فرکانس طبیعی غیرخطی افزایش می‌یابد.

۶- بحث و نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج حاصل از مثال عددی می‌توان مشاهده کرد که فرکانس طبیعی نانوورق‌ها، از جمله گرافین‌ها، دارای مقادیر بسیار زیادی و در محدوده گیگاهرتز می‌باشد و می‌توان از این نوع سازه‌ها به عنوان تشدیدکننده‌های فرکانس بالا استفاده کرد. همچنین مشاهده می‌شود که گرافین‌های آرمچیر نسبت به گرافین‌های زیگزاگ دارای فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی بالاتری است. هرچند تفاوت فاحشی بین مقادیر فرکانس‌ها دیده نمی‌شود. از طرف دیگر با افزایش ابعاد و یا نسبت منظر نانوورق مقادیر فرکانس خطی و غیرخطی کاهش می‌یابد. از طرف دیگر فرکانس طبیعی غیرخطی یک نانو ورق ثابت نیست و تابعی از جابجایی اولیه داده شده به سیستم می‌باشد و با

افزایش آن مقدار فرکانس طبیعی غیرخطی به شدت افزایش می‌یابد. همه این نتایج از روابط تحلیلی که برای فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی نانوورق بدست آمده است منتج شده است.

۷- جمع‌بندی

در این مقاله ارتعاشات غیرخطی نانوصفحه‌ای مستطیل شکل و تک لایه که بر روی تکیه‌گاه‌های ساده قرار گرفته است، بررسی شده است. با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحملی و تئوری کلاسیک ورق‌ها معادلات حرکت غیرخطی نانوورق بصورت عمومی بدست آمده و با تعریف یک میدان تنش این معادلات به یک معادله مشتق جزئی و یک معادله سازگاری تبدیل شده است. سپس با تبدیل این معادله به یک معادله مجهول در حوزه زمانی و حل آن به روش مقیاس‌های زمانی چندگانه روابط تحلیلی برای فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی نانوورق مستطیل شکل بدست آمده است. نتایج حاصل از این روابط

- vibration analysis of nano-plates", *Composite Structures*, No. 93, 2011, pp. 1015-1020.
- [7] Ansari R., Arash B. and Rouhi H., "Nanoscale vibration analysis of embedded multi-layered graphene sheets under various boundary conditions", *Computational Materials Science*, No. 50, 2011, pp. 3091-3100.
- [8] Murmu T. and Adhikari S., "Nonlocal vibration of bonded double-nanoplate-systems", *Composites: Part B*, No. 42, 2001, pp. 1901-1911.
- [9] Malekzadeh P., Setoodeh A. R. and Alibeygi Beni A., "Small scale effect on the free vibration of orthotropic arbitrary straight-sided quadrilateral nanoplates", *Composite Structures*, No. 93, 2011, pp. 1631-1639.
- [10] Ansari R. and Sahmani S., "Surface stress effects on the free vibration behavior of nanoplates", *International Journal of Engineering Science*, No. 49, 2011, pp. 1204-1215.
- [11] Wang Y. Z., Li F. M. and Kishimoto K., "Thermal effects on vibration properties of double-layered nanoplates at small scales", *Composites: Part B*, No. 42, 2011, pp. 1311-1317.
- [12] Mahdavi M. H., Jiang L. Y. and Sun X., "Nonlinear vibration and postbuckling analysis of a single layer graphene sheet embedded in a polymer matrix", *Physica E*, No. 44, 2012, pp. 1708-1715.
- [13] Kiani K., "Small-scale effect on the vibration of thin nanoplates subjected to a moving nanoparticle via nonlocal continuum theory", *Journal of Sound and Vibration*, No. 330, 2011, pp. 4896-4914.
- [14] Aksencer T. and Aydogdu M., "Forced transverse vibration of nanoplates using nonlocal elasticity", *Physica E*, No. 44, 2012, pp. 1752-1759.
- [15] Murmu T. and Pradhan S. C., "Small-scale effect on the free in-plane vibration of nanoplates by non-local continuum model", *Physica E*, No. 41, 2009, pp. 1628-1633.
- [16] Jomehzadeh E. and Saidi A. R., "Study of Small Scale Effect on Nonlinear Vibration of Nano-Plates", *Computational and Theoretical Nanoscience*, No. 9, 2012, pp. 864-871.
- [17] Shen L., Shen H. S. and Zhang C. L., "Nonlocal plate model for nonlinear vibration of single layer graphene sheets in thermal environments", *Computational Materials Science*, No. 48, 2010, pp. 680-685.
- [18] Shen H. S., "Nonlocal plate model for nonlinear analysis of thin films on elastic foundations in thermal environments", *Composite Structures*, No. 93, 2011, pp. 1143-1152.
- [19] He X. Q., Wang J. B., Liu B. and Liew K. M., "Analysis of nonlinear forced vibration of multi-layered graphene sheets", *Computational Materials Science*, No. 61, 2012, pp. 194-199.
- [20] Eringen A. C., "Nonlocal continuum field theories", Springer-Verlag, Inc., 2002.

انطباق بسیار خوبی با نتایج حاصل از روشهای عددی و دینامیک مولکولی دارد. همچنین اثر ابعاد نانوورق نسبت منظر و بر فرکانس خطی و غیرخطی مطالعه شده است و نشان داده شده است که استفاده از تئوری غیرمحلی در بررسی رفتار ارتعاشی نانوورقها الزامی است.

۸- پیوست

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \beta^{-1} \tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} \tilde{\phi}_{,\tilde{y}\tilde{y}} + 2\beta^{-1} \tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}} \\ &\quad + \beta^{-1} \tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{x}} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}} \\ &\quad + \tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}} \tilde{\phi}_{,\tilde{y}\tilde{y}} \\ &\quad + 2\tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}} \tilde{\phi}_{,\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}} \\ &\quad + \tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{x}} \tilde{\phi}_{,\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}} \\ \psi_2 &= \beta^{-1} \tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{y}} + 2\beta^{-1} \tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}} \\ &\quad + \beta^{-1} \tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{y}} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}} \\ &\quad + \tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{y}} \\ &\quad + 2\tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}} \\ &\quad + \tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{y}} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}} \\ \psi_3 &= \beta^{-1} \tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}} + 2\beta^{-1} \tilde{w}_{0,\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} \\ &\quad + \beta^{-1} \tilde{w}_{0,\tilde{y}\tilde{y}} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} \\ &\quad + \tilde{w}_{0,\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}} \\ &\quad + 2\tilde{w}_{0,\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}} \\ &\quad + \tilde{w}_{0,\tilde{y}\tilde{y}} \tilde{\phi}_{,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}}\end{aligned}$$

۹- مراجع

- [1] Geim A. K., "Graphene: Status and Prospects", *Science*, No. 324, 2009, pp. 1530-1534.
- [2] Bunch J. S., van der Zande A. M., Verbridge S. S., Frank I. W., Tanenbaum D. M., Parpia J. M., Craighead H. G. and McEuen P. L., "Electromechanical resonators from graphene sheets", *Science*, No. 315, 2007, pp. 490-493.
- [3] Pradhan S. C. and Phadikar J. K., "Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates", *Journal of Sound and Vibration* No. 325, 2009, pp. 206-223.
- [4] Wang J., Tian M. and He X., "Analysis of free vibration of embedded multi-layered graphene sheets", *Procedia Engineering*, No. 31, 2012, pp. 641-646.
- [5] Behfar K. and Naghdabadi R., "Nanoscale vibrational analysis of a multi-layered embedded in an elastic medium", *Composite Science and Technology*, No. 65, 2005, pp. 1159-1164.
- [6] Jomehzadeh E. and Saidi A. R., "Decoupling the nonlocal elasticity equations for three dimensional

- scale effects", *Mechanics Research Communications*, No. 41, 2012, pp. 44-48.
- [25] Nayfeh A. H. and Pai P. F., "*Linear and nonlinear structural mechanics*", John Wiley & Sons, Inc., 2004.
- [26] Raju I. S., Rao G. V. and Raju K. K., "Effect of longitudinal or inplane deformation and inertia on the large amplitude flexural vibrations of slender beams and thin plates", *Journal of Sound and Vibration*, No. 49, 1976, pp. 415-422.
- [27] Nayfeh A. H. and Mook D. T., "*Nonlinear oscillations*", John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [21] Lazar M., Maugin G. A. and Aifantis E. C., "On a theory of nonlocal elasticity of bi-Helmholtz type and some applications", *International Journal of Solid and Structures*, No. 43, 2006, pp. 1404-1421.
- [22] Reddy J. N., "*Mechanics of laminated composite plates and shells, theory and analysis*", 2nd ed., CRC Press, 2004.
- [23] Szilard R., "*Theories and applications of plate analysis: Classical, numerical and engineering methods*", John Wiley & Sons, Inc., 2004.
- [24] Wang Y. Z. and Li F. M., "Static bending behaviors of nanoplate embedded in elastic matrix with small