



میرایی ترموالاستیک در میکروصفحه حلقوی تحت بار الکترواستاتیکی

اردشیر کرمی محمدی^{۱*}، نسیم آل علی^۲

۱- استادیار، دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

۲- دانشجوی دکتری، دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

* شاهرود، صندوق پستی ۳۶۱۵۵، akaramim@yahoo.com

چکیده- در این مقاله، مدل خطی یک میکرو صفحه حلقوی با میرایی ترموالاستیک تحت بار الکترواستاتیکی جهت بدست آوردن ضریب کیفیت این میرایی ارائه شده است. تئوری صفحه کیرشهف-لاو که با معادله هدایت حرارتی یک بعدی کوپل شده، برای مدل کردن این میکروصفحه بکار رفته است. برای محاسبه ضریب کیفیت در هر مود ارتعاشی دو روش بر اساس خطی سازی معادله فرکانس ارائه شده است. همچنین وابستگی این میرایی به بار الکترواستاتیکی و هندسه میکروصفحه حلقوی در دو حالت شرایط مرزی، گیردار-گیردار و آزاد-آزاد بررسی شده است. نتایج نشان می دهد که شعاع و ضخامت بحرانی وجود دارد که در آن میرایی ترموالاستیک به حداکثر می رسد. این میرایی به نوع شرایط مرزی نیز بستگی دارد، به طوری که در حضور بار الکترواستاتیکی، میرایی ترموالاستیک در شرایط مرزی گیردار-آزاد بیشتر از گیردار-گیردار می باشد.

کلیدواژگان: میکروصفحه، میرایی ترموالاستیک، تئوری صفحه کیرشهف-لاو، ضریب کیفیت.

Thermoelastic damping in electrostatically actuated annular microplate

A. Karami Mohammadi^{1*}, N. Ale Ali²

1- Assist. Prof., Dept. of Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran *

2- PhD Student, Dept. of Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran

* P.O.B. 36155 Shahrood, Iran. akaramim@yahoo.com

Abstract- In this paper, a linear model for symmetrical vibrations of electrostatically actuated annular microplate with thermoelastic damping is considered for calculating the quality factor of this damping. The Kirchhoff-Love plate theory is used to model the microplate which is coupled with thermal conduction equation one dimensionally. For calculating the Q-factors in each mode, two methods are compared with respect to linearization of frequency equation. Also the dependency of thermoelastic damping to electrostatic load and geometry of annular microplate is investigated with clamped-clamped and clamped-free boundaries. A silicon annular microplate is considered as an example. The results show that, there are a critical radius and thickness which make the thermoelastic damping to be maximal. Also the results show that the effect of electrostatic load on thermoelastic damping depends on the type of boundary conditions. The effect of electrostatic load on thermoelastic damping for clamped-free boundaries is more than for clamped-clamped boundaries.

Keywords: Microplate, Thermoelastic Damping, Kirchhoff-Love Plate Theory, Quality Factor.

۱- مقدمه

در سیستم‌های میکرو الکترومکانیکی، انواع مختلفی از میرایی‌ها وجود دارند که بر کارایی آنها اثر می‌گذارند. این میرایی‌ها به دو نوع عمده تقسیم می‌شوند: برونی و درونی. میرایی‌های برونی را می‌توان با طراحی مناسب، استفاده از روشهای ساخت یا ایجاد شرایط بهره‌برداری مناسب به حداقل رساند. برای مثال میرایی فیلم فشاری نوعی میرایی برونی است که می‌توان با ایجاد خلأ برای میکرو ادوات مورد نظر آن را به حداقل رساند [۲، ۱].

میرایی ترموالاستیک نوعی میرایی درونی می‌باشد که اثر آن با کوچک شدن اندازه ادوات افزایش می‌یابد [۲]. این میرایی ناشی از شار حرارتی بازگشت‌ناپذیری است که حین ارتعاش سازه ایجاد می‌شود. به این ترتیب که ارتعاش سبب می‌شود که بخشی از سازه فشرده و گرم و بخشی از آن کشیده و سرد شده و بنابراین شار حرارتی از قسمت فشرده شده به قسمت کشیده شده ایجاد شود، تا از این طریق تعادل حرارتی در سازه برقرار شود. انرژی که برای ایجاد این تعادل صرف می‌شود توانایی ذخیره شدن ندارد بنابراین افزایش آنتروپی را سبب می‌شود که این پدیده باعث اتلاف انرژی شده که آن را تحت عنوان میرایی ترموالاستیک می‌شناسیم [۳].

زنر [۵، ۴] اولین کسی بود که میرایی ترموالاستیک را پیش‌بینی کرد او رابطه‌ای برای ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک در تیرها ارائه داد. البلاس [۶] نیز موضوع تبدیل انرژی مکانیکی به گرمایی در تیر الاستیک را مورد بررسی قرار داد و رابطه‌ای برای این تبدیل انرژی پیدا کرد. او همچنین پی برد که این میرایی برای سازه‌های بزرگ مقدار ناچیزی دارد. لیفشیتز و روکاس [۷] میرایی ترموالاستیک یک تیر را محاسبه کرده و نشان دادند که این میرایی برای سازه‌های در حد میکرومتر و نانومتر اهمیت پیدا می‌کند.

کارهای آزمایشگاهی متعددی نیز بر روی این میرایی صورت گرفته است. بری [۸]، روسژارد [۹]، یاسومورا [۱۰]، مچکالف [۱۱] و اکاموتو [۱۲] آزمایشهایی در این زمینه انجام دادند و اهمیت این میرایی را در میکروتیرها نشان دادند. همچنین دول [۱۳] و زو [۱۴] نیز اثر میرایی ترموالاستیک بر ژیرسکوپهای میکرو الکترو مکانیکی بررسی کردند.

برای محاسبه ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک دو روش وجود دارد: روش انرژی و روش فرکانسی. در روش انرژی، انرژی

تلف شده توسط میرایی و انرژی ماکزیمم ذخیره شده، محاسبه می‌شوند (برای مثال به [۱۵-۱۸] رجوع شود) و در روش فرکانسی، قسمت حقیقی و موهومی فرکانس محاسبه می‌شوند. (برای مثال به [۲۰، ۱۹، ۳، ۲] رجوع شود) هر کدام از این روشها را می‌توان به شیوه عددی یا تحلیلی یا ترکیبی از آنها انجام داد. میکرو صفحات در بسیاری از ادوات میکرو الکترومکانیکی نظیر تشدیدگرها، حسگرها، شیرها، میکرو آینه‌ها، میکرو توربو ژنراتورها [۲۱] و میکروپمپها مورد استفاده قرار می‌گیرند که برخی از آنها مثل میکروپمپها تحت بار الکترواستاتیکی نیز هستند [۲]. از طرفی در تشدیدگرها حساسیت و وضوح بالا مورد نیاز است بنابراین میرایی آنها باید کم باشد. بطور کلی برای اینکه عملکرد این ادوات را به درستی بشناسیم باید بدانیم که این میرایی چگونه و تحت تأثیر چه پارامترهایی افزایش یا کاهش می‌یابد.

در این مقاله، میکروصفحه حلقوی تحت بار الکترواستاتیکی با استفاده از تئوری خطی ترموالاستیک مدل شده است. برای این میکروصفحه دو نوع شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد در نظر گرفته و مقایسه شده است. فرکانسها، ضرایب کیفیت و شکل مودها برای هریک از شرایط مرزی در هر مود محاسبه و نشان داده شده است. برای این منظور معادله فرکانسی، هم به شکل خطی و هم به شکل غیرخطی در نظر گرفته شد و معلوم شد که سیلیکون با توجه به خواص خود، در محدود خطی قرار دارد. بنابراین در ادامه از معادله فرکانسی خطی شده استفاده شد. شعاع و ضخامت بحرانی برای میکروصفحه دایره‌ای در [۳] بررسی شده است. در مقاله حاضر، اثر بار الکترواستاتیکی و تأثیر نوع شرایط مرزی نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- معادلات اصلی

میکروصفحه‌ای به ضخامت h ، شعاع داخلی a و شعاع خارجی b در نظر گرفته شده است (شکل ۱). مبدأ سیستم مختصات استوانه‌ای در مرکز میکروصفحه و محورهای (r, ϕ) را در صفحه خنثی تعریف کرده و z محور عمود بر این صفحه می‌باشد. $w(r, \phi, t)$ و $T(r, \phi, z, t)$ را به ترتیب به عنوان جابجایی جانبی صفحه و توزیع دما تعریف می‌کنیم. میکروصفحه تحت بار الکتریکی متشکل از ولتاژ ثابت، V_p و ولتاژ متناوب، $v(t)$ قرار دارد.

$$\kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} - \beta T_0 z \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 w) \quad (4)$$

بار الکتریکی طرف راست معادله (۱) را می‌توان خطی‌سازی کرد:

$$\frac{\varepsilon (V_p + v(t))^2}{2(d-w)^2} = \frac{\varepsilon V_p v(t)}{d^2} + \frac{\varepsilon V_p^2}{d^3} w \quad (5)$$

با جایگذاری رابطه (۵) در (۱) داریم:

$$D \nabla^4 w + D(1+\nu) \alpha_T \nabla^2 M^T + \rho h w_{tt} = \frac{\varepsilon V_p v(t)}{d^2} + \frac{\varepsilon V_p^2}{d^3} w \quad (6)$$

بنابراین معادلات (۴) و (۶) معادلات اصلی ارتعاش خطی میکروصفحه ترموالاستیکی می‌باشند.

خصوصیات الاستیکی و گرمایی سلیکون بستگی به دما دارد، از طرفی تغییرات دما هنگام ارتعاش ترموالاستیکی بسیار کم می‌باشد (کمتر از یک درجه کلوین) [۳]. بنابراین فرض می‌شود که ارتعاشات در دمای ثابتی انجام می‌شود که این دما معمولاً T_0 در نظر گرفته می‌شود.

۳- حل کلی معادلات اصلی

معادلات اصلی (۴) و (۶) را با فرض هارمونیک بودن ارتعاشات می‌توان حل کرد. بنابراین $w(r, \varphi, t)$ و $\theta(r, \varphi, z, t)$ را به شکل (۷) می‌نویسیم:

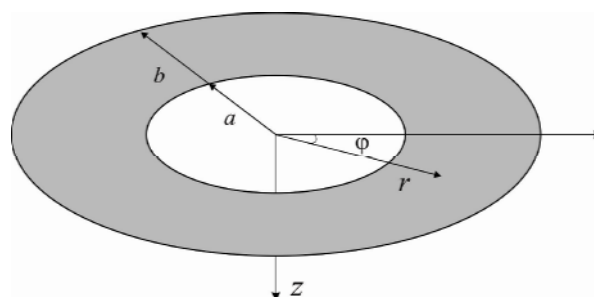
$$w(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} R_{mn}(r) e^{i(\omega_{mn}t + m\varphi)} \quad (7)$$

$\theta(r, \varphi, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Theta_{mn}(r, z) e^{i(\omega_{mn}t + m\varphi)}$ که در آن ω_{mn} فرکانس و $R_{mn}(r) e^{im\varphi}$ و $\Theta_{mn}(r) e^{im\varphi}$ به ترتیب شکل مدهای m م مختلط ارتعاشی صفحه و دما می‌باشند. در این نمادگذاری $m = 0, 1, 2, \dots$ به ترتیب بیانگر عدد گره شعاعی و دایره‌ای $n = 1, 2, 3, \dots$ می‌باشند. ω_{mn} کمیتی مختلط است که قسمت حقیقی آن به میرایی اثر کوپلینگ ترموالاستیکی و قسمت موهومی آن به میرایی ارتعاشات مرتبط می‌شود.

با جایگذاری (۷) در (۴) و (۶) داریم:

$$D \nabla^4 R_{mn} + D(1+\nu) \alpha_T \nabla^2 M_{mn}^T - \rho h \omega_{mn}^2 = \frac{\varepsilon V_p^2}{d^3} R_{mn} \quad (8)$$

$$\kappa \frac{\partial^2 \Theta_{mn}}{\partial z^2} = i \omega_{mn} \rho c_v \Theta_{mn} - i \omega_{mn} \beta T_0 z \nabla^2 R_{mn} \quad (9)$$



شکل ۱ میکروصفحه تاج دایره‌ای، در مختصات استوانه‌ای

با فرض جابجایی‌های کوچک و استفاده از تئوری صفحه کیرشف-لاو، معادله ارتعاشی میکروصفحه را تحت بار الکترواستاتیکی به همراه اثر ترموالاستیک می‌توان نوشت [۲۲،۲].

$$D \nabla^4 w + D(1+\nu) \alpha_T \nabla^2 M^T + \rho h w_{tt} = \frac{\varepsilon (V_p + v(t))^2}{2(d-w)^2} \quad (1)$$

که در آن $\varepsilon, \rho, \nu, \alpha_T, d$ و به ترتیب ثابت دی الکتریک بین دو صفحه، چگالی، ضریب پواسن، ضریب انبساط گرمایی، زمان و فاصله عرضی اولیه بین دو صفحه می‌باشند.

همچنین $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ مدول صلبیت، E مدول یانگ، و ∇^2 اپراتور لاپلاس در مختصات استوانه‌ای است. در اینجا نیز با توجه تعریف $\theta = T - T_0$ که در آن T_0 دمای تنش-آزاد در حالت تعادل می‌باشد، گشتاور گرمایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M^T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \theta z dz \quad (2)$$

معادله هدایت گرمایی را که شامل جمله کوپل شده ترموالاستیکی می‌باشد، می‌توان به شکل رابطه (۳) نوشت.

$$\kappa \nabla^2 \theta + \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} - \beta T_0 z \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 w) \quad (3)$$

که در آن c_v و κ به ترتیب ثابت گرمایی ویژه حجم ثابت و ضریب هدایت گرمایی بوده و $\beta = E \alpha_T / (1 - 2\nu)$ مدول گرمایی می‌باشد. در این مدل از فرض لیفشیتز و روکاس استفاده شده است طبق این فرض گرادیان گرمایی در راستای شعاعی نسبت به گرادیان گرمایی در راستای ضخامت نادیده گرفته می‌شود [۷]. بنابراین جمله $\kappa \nabla^2 \theta$ در معادله (۳) حذف شده و در نهایت معادله (۳) به شکل (۴) ساده می‌شود.

که در آن:

$$\nabla^{*2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \quad (10)$$

$$M_{mn}^T = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Theta_{mn}(r, z) z dz \quad (11)$$

شرایط مرزی برای حل معادله (۹) عبارتند از $\partial \Theta_{mn} / \partial z = 0$ در $z = \pm h/2$ ، زیرا رویه‌های بالا و پایین میکروصفحه ایزوله در نظر گرفته شده و هیچ شار حرارتی از این رویه‌ها عبور نمی‌کند، بنابراین حل (۹) به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\Theta_{mn}(r, z) = \frac{\beta T_0}{\rho c_v} \nabla^{*2} R_{mn} \left(z - \frac{\sin(N_{mn} z)}{N_{mn} \cos(N_{mn} h/2)} \right) \quad (12)$$

که در آن:

$$N_{mn} = (1-i) \sqrt{\frac{\omega_{mn} \rho c_v}{2\kappa}} \quad (13)$$

i جذر ۱- می‌باشد.

M_{mn}^T با به کار بردن (۱۲) در (۱۱) بدست می‌آید:

$$M_{mn}^T = C_{mn}^T \nabla^{*2} R_{mn} \quad (14)$$

که در آن:

$$C_{mn}^T = \frac{\beta T_0}{\rho c_v} (1 + f(\omega_{mn})) \quad (15)$$

$$f(\omega_{mn}) = \frac{24}{N_{mn}^3 h^3} \left(\frac{N_{mn} h}{2} - \tan\left(\frac{N_{mn} h}{2}\right) \right) \quad (16)$$

C_{mn}^T کمیتی مختلط است که دارای دو قسمت حقیقی و موهومی می‌باشد.

متغیر ξ_{mn} برای سهولت به صورت زیر تعریف شده است:

$$\xi_{mn} = h \sqrt{\frac{\omega_{mn} \rho c_v}{2\kappa}} \quad (17)$$

و می‌توان قسمت حقیقی و موهومی را به شکل زیر جدا کرد:

$$C_{mn}^{TR} = \text{Re}\{C_{mn}^T\} = \frac{\beta T_0}{\rho c_v} \left[1 + \left(\frac{6}{\xi_{mn}^3} \right) \frac{\sin \xi_{mn} - \sinh \xi_{mn}}{\cos \xi_{mn} + \cosh \xi_{mn}} \right] \quad (18)$$

$$C_{mn}^{TI} = \text{Im}\{C_{mn}^T\} = \frac{\beta T_0}{\rho c_v} \left(\frac{6}{\xi_{mn}^3} \right) \left[\xi_{mn} - \frac{\sin \xi_{mn} + \sinh \xi_{mn}}{\cos \xi_{mn} + \cosh \xi_{mn}} \right] \quad (19)$$

حال با جایگذاری (۱۴) در (۸) داریم:

$$\nabla^2 \nabla^2 R_{mn} - \gamma_{mn}^4 R_{mn} = 0 \quad (20)$$

که در آن:

$$\gamma_{mn}^4 = \frac{\rho h \omega_{mn}^2 + \frac{\varepsilon V_p^2}{d^3}}{D_{mn}^\omega} \quad (21)$$

$$D_{mn}^\omega = D (1 + \Delta_D (1 + f(\omega_{mn}))) \quad (22)$$

$$\Delta_D = \frac{(1+\nu)\alpha_T \beta T_0}{\rho c_v} \quad (23)$$

حل معادله (۲۰) برای صفحه حلقوی به شکل زیر خواهد بود:

$$R_{mn}(r) = C_1 J_m(\gamma_{mn} r) + C_2 Y_m(\gamma_{mn} r) + C_3 I_m(\gamma_{mn} r) + C_4 K_m(\gamma_{mn} r) \quad (24)$$

که در آن ضرایب C_j ($j = 1, 2, 3, 4$) با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند. همچنین فرکانس ارتعاشی صفحه حلقوی کوپل شده با اثر ترموالاستیک را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\omega_{mn} = \sqrt{\omega_{0mn}^2 [1 + \Delta_D (1 + f(\omega_{mn}))] - \frac{\varepsilon V_p^2}{\rho h d^3}} \quad (25)$$

که در آن ω_{0mn} فرکانس بدون اثر ترموالاستیک می‌باشد.

$$\omega_{0mn} = \gamma_{mn}^4 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (26)$$

دو روش برای حل معادله فرکانسی (۲۵) استفاده شده است. راه حلها بستگی به مقدار Δ_D دارد، چنانچه این مقدار کوچک باشد می‌توان آن را نسبت به ω_{mn} خطی کرد در غیر این صورت باید با نگر داشت ترمهای اصلی از روشهای حل عددی استفاده کرد.

۳-۱- حل معادله فرکانس بدون خطی سازی

حال می‌توان معادله (۲۵) را بر حسب ξ_{mn} نوشت، برای این کار باید روابط (۱۳)، (۱۶) و (۱۷) را در (۲۵) جایگزین کرد:

$$B_1 \xi_{mn}^4 = B_2 + \frac{B_3}{\xi_{mn}^3} \left[\frac{\sin \xi_{mn} - \sinh \xi_{mn}}{\cos \xi_{mn} + \cosh \xi_{mn}} + i \left(\xi_{mn} - \frac{\sin \xi_{mn} + \sinh \xi_{mn}}{\cos \xi_{mn} + \cosh \xi_{mn}} \right) \right] \quad (27)$$

که در آن:

$$B_1 = \left(\frac{2\kappa}{h^2 \rho c_v} \right)^2 \quad (28)$$

$$B_2 = \omega_{0mn}^2 + \omega_{0mn}^2 \Delta_D - \frac{\varepsilon V_p^2}{\rho h d^3} \quad (29)$$

$$Q^{-1} = \frac{\gamma_{mn}^4 \frac{3D\Delta_D}{2\rho h(\gamma_{mn}\Xi)^3} \left[\left(\gamma_{mn}\Xi - \frac{\sin(\gamma_{mn}\Xi) + \sinh(\gamma_{mn}\Xi)}{\cos(\gamma_{mn}\Xi) + \cosh(\gamma_{mn}\Xi)} \right) \right]}{\gamma_{mn}^4 \frac{D}{\rho h} - \frac{\mathcal{E}V_p^2}{\rho h d^3} + \gamma_{mn}^4 \frac{D\Delta_D}{2\rho h} \left(1 + \frac{6}{(\gamma_{mn}\Xi)^3} \frac{\sin(\gamma_{mn}\Xi) - \sinh(\gamma_{mn}\Xi)}{\cos(\gamma_{mn}\Xi) + \cosh(\gamma_{mn}\Xi)} \right)}$$

(۳۹)

شکل ۲ تغییرات میرایی ترموالاستیک نسبت به Δ_D و بدون بار الکتریکی را نشان می‌دهد. این شکل براساس مود اول در شرایط مرزی گیردار-گیردار رسم شده است. بر اساس این شکل و با توجه به این که برای سیلیکون مقدار Δ_D بسیار کوچک است ($\Delta_D = 4.2760 \times 10^{-4}$ در دمای $T_0 = 293K$)، می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از خطی‌سازی برای سیلیکون منطقی خواهد بود.

۴- مطالعه موردی

دو مورد شرایط مرزی بررسی شده که در هر دو آنها لبه داخلی گیردار است. در اولی لبه بیرونی نیز گیردار می‌باشد که آن را گیردار-گیردار می‌نامیم و در دومی لبه بیرونی آزاد می‌باشد که به آن گیردار-آزاد می‌گوییم.

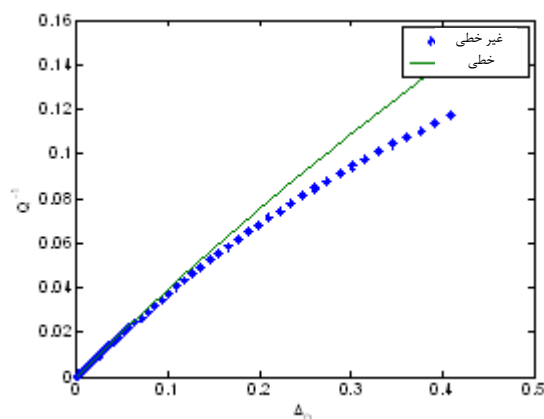
۴-۱- شرایط مرزی گیردار-گیردار

لبه‌های بیرونی و درونی گیردار هستند بنابراین شرایط مرزی زیر را برای آنها در نظر می‌گیریم.

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=a,b} = 0, w|_{r=a,b} = 0 \quad (۴۰)$$

با جایگزین کردن (۷) در (۴۰) داریم:

$$\left. \frac{dR_{mn}}{dr} \right|_{r=a,b} = 0, R_{mn}|_{r=a,b} = 0 \quad (۴۱)$$



شکل ۲ مقایسه حل خطی و غیرخطی میرایی ترموالاستیک

$$B_3 = 6\omega_{0mn}^2 \Delta_D \quad (۳۰)$$

ξ_{mn} یک عدد مختلط است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\xi_{mn} = \xi_{mn}^R + i \xi_{mn}^I \quad (۳۱)$$

سپس با قراردادن از (۳۱) در (۲۷) و جدا کردن قسمت حقیقی و موهومی، دو معادله بدست می‌آید:

$$F_1 T_1 - F_2 T_2 = T_3 - \xi_{mn}^R T_2 - \xi_{mn}^I T_1 + T_6 \quad (۳۲)$$

$$F_1 T_2 + F_2 T_1 = T_4 + \xi_{mn}^R T_1 - \xi_{mn}^I T_2 + T_5 \quad (۳۳)$$

که F_1 و F_2 و $T_i (i=1,2,\dots,6)$ در ضمیمه آورده شده‌اند. با استفاده از رابطه (۱۷) معادلات (۳۲) و (۳۳) حل شده و ω_{mn} و سپس ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک بدست می‌آیند.

$$Q^{-1} = 2 \left| \frac{\text{Im}(\omega_{mn})}{\text{Re}(\omega_{mn})} \right| \quad (۳۴)$$

۳-۲- حل معادله فرکانس از روش خطی‌سازی

اگر Δ_D کوچک شود، معادله (۲۵) را می‌توان با خطی‌سازی ساده کرد. با استفاده از بسط تیلور و نگه داشتن ترمهای اول و دوم معادله از شکل رادیکالی به خطی تبدیل می‌شود.

$$\omega_{mn} = \sqrt{\omega_{0mn}^2 - \frac{\mathcal{E}V_p^2}{\rho h d^3}} + \frac{\omega_{0mn}^2 \Delta_D (1 + f(\omega_{0mn}))}{2 \sqrt{\omega_{0mn}^2 - \frac{\mathcal{E}V_p^2}{\rho h d^3}}} \quad (۳۵)$$

در اینجا قسمتهای حقیقی و موهومی ω_{mn} جدا می‌شوند.

$$\text{Re}(\omega_{mn}) = \sqrt{\omega_{0mn}^2 - \frac{\mathcal{E}V_p^2}{\rho h d^3}} + \frac{\omega_{0mn}^2 \Delta_D}{2 \sqrt{\omega_{0mn}^2 - \frac{\mathcal{E}V_p^2}{\rho h d^3}}} \left(1 + \frac{6}{(\gamma_{mn}\Xi)^3} \frac{\sin(\gamma_{mn}\Xi) - \sinh(\gamma_{mn}\Xi)}{\cos(\gamma_{mn}\Xi) + \cosh(\gamma_{mn}\Xi)} \right) \quad (۳۶)$$

$$\text{Im}(\omega_{mn}) = \frac{\omega_{0mn}^2 \Delta_D}{\sqrt{\omega_{0mn}^2 - \frac{\mathcal{E}V_p^2}{\rho h d^3}}} \frac{3}{(\gamma_{mn}\Xi)^3} \left(\gamma_{mn}\Xi - \frac{\sin(\gamma_{mn}\Xi) + \sinh(\gamma_{mn}\Xi)}{\cos(\gamma_{mn}\Xi) + \cosh(\gamma_{mn}\Xi)} \right) \quad (۳۷)$$

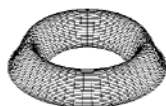
که در آن:

$$\Xi = h \sqrt{\frac{\rho c_v}{2\kappa}} \sqrt[4]{\frac{D}{\rho h}} \quad (۳۸)$$

بنابراین ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک را می‌توان به شکل رابطه (۳۹) نوشت:

جدول ۱ مقادیر Γ_{mn} برای شرط مرزی گیردار-گیردار و $s = 2$

Γ_{m2}	Γ_{m1}	m
۷/۸۴۷۷	۴/۷۲۳۶	۰
۷/۸۶۹۹	۴/۷۴۹۵	۱



(۰,۱)



(۰,۲)



(۱,۱)



(۱,۲)

شکل ۳ مدهای (m,n) در شرایط گیردار-گیردار و $s = 2$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{M^T}{D(1-\nu)} \right]_{r=b} = 0 \quad (51)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) + \frac{(1-\nu)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{D(1-\nu)} \frac{\partial M^T}{\partial r} \right]_{r=b} = 0 \quad (52)$$

با جایگذاری (۷) و (۱۴) در معادلات فوق، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$R_{mn}(a) = 0 \quad (53)$$

$$\left. \frac{dR_{mn}(r)}{dr} \right|_{r=a} = 0 \quad (54)$$

$$\left[\left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D} \right) \frac{d^2 R_{mn}}{dr^2} + \left(\nu + \frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D} \right) \frac{1}{r} \frac{dR_{mn}}{dr} - \left(\nu + \frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D} \right) \frac{m^2}{r^2} R_{mn} \right]_{r=b} = 0 \quad (55)$$

$$\left[\left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D} \right) \frac{d^3 R_{mn}}{dr^3} + \left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D} \right) \frac{1}{r} \frac{d^2 R_{mn}}{dr^2} - \left(1 + m^2(2-\nu) + (m^2+1) \frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D} \right) \frac{1}{r^2} \frac{dR_{mn}}{dr} + \left(m^2(3-\nu) + 2m^2 \frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D} \right) \frac{R_{mn}}{r^3} \right]_{r=b} = 0 \quad (56)$$

با جایگزینی (۲۴) در شرایط فوق و با تعریف پارامترهای (۴۲) و (۴۳)، در زیر آورده شده اند معادلات (۴۴-۴۷) برای شرایط مرزی گیردار-گیردار بدست می‌آیند.

$$\Gamma_{mn} = \gamma_{mn} a \quad (42)$$

$$s = \frac{b}{a} \quad (43)$$

$$C_1 J_m(\Gamma_{mn}) + C_2 Y_m(\Gamma_{mn}) + C_3 I_m(\Gamma_{mn}) + C_4 K_m(\Gamma_{mn}) = 0 \quad (44)$$

$$C_1 \left[-J_{m+1}(\Gamma_{mn}) + \frac{m}{\Gamma_{mn}} J_m(\Gamma_{mn}) \right] \gamma_{mn} + C_2 \left[-Y_{m+1}(\Gamma_{mn}) + \frac{m}{\Gamma_{mn}} Y_m(\Gamma_{mn}) \right] \gamma_{mn} + C_3 \left[I_{m+1}(\Gamma_{mn}) + \frac{m}{\Gamma_{mn}} I_m(\Gamma_{mn}) \right] \gamma_{mn} + C_4 \left[-K_{m+1}(\Gamma_{mn}) + \frac{m}{\Gamma_{mn}} K_m(\Gamma_{mn}) \right] \gamma_{mn} = 0 \quad (45)$$

$$C_1 J_m(s\Gamma_{mn}) + C_2 Y_m(s\Gamma_{mn}) + C_3 I_m(s\Gamma_{mn}) + C_4 K_m(s\Gamma_{mn}) = 0 \quad (46)$$

$$C_1 \left[-J_{m+1}(s\Gamma_{mn}) + \frac{m}{s\Gamma_{mn}} J_m(s\Gamma_{mn}) \right] \gamma_{mn} + C_2 \left[-Y_{m+1}(s\Gamma_{mn}) + \frac{m}{s\Gamma_{mn}} Y_m(s\Gamma_{mn}) \right] \gamma_{mn} + C_3 \left[I_{m+1}(s\Gamma_{mn}) + \frac{m}{s\Gamma_{mn}} I_m(s\Gamma_{mn}) \right] \gamma_{mn} + C_4 \left[-K_{m+1}(s\Gamma_{mn}) + \frac{m}{s\Gamma_{mn}} K_m(s\Gamma_{mn}) \right] \gamma_{mn} = 0 \quad (47)$$

برای محاسبه جواب غیر صفر، داریم:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (48)$$

که ضرایب آن در پیوست آورده شده است.

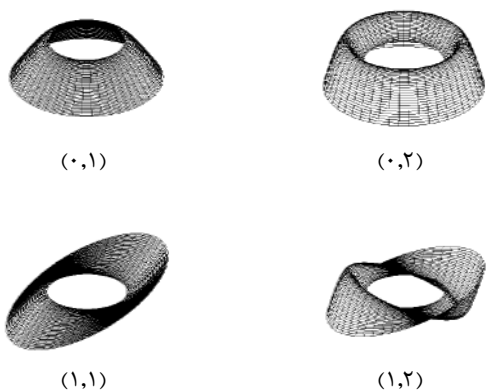
حال با فرض $s = 2$ ، Γ_{mn} از (۴۸) محاسبه شده است که این مقادیر در جدول ۱ درج شده‌اند و شکل مدهای مرتبط با آنها نیز در شکل ۳ آورده شده‌اند.

۴-۲- شرط مرزی گیردار-آزاد

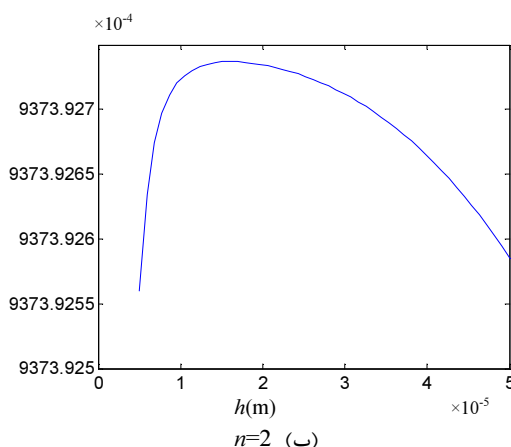
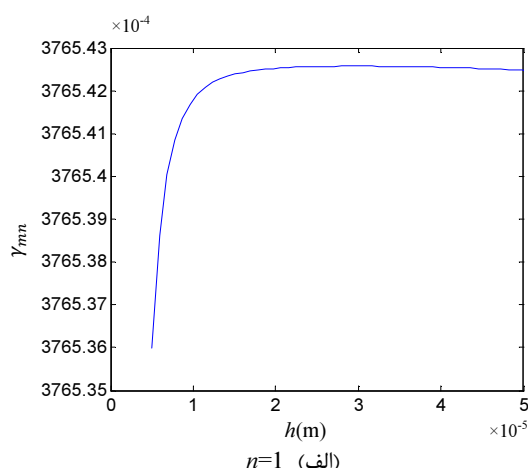
در این حالت شرط مرزی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$w(a, \varphi, t) = 0 \quad (49)$$

$$\left. \frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (50)$$



شکل ۴ مدهای (m,n) گیردار-آزاد، برای $s=2$ ، $h=20\mu m$ و $a=500mm$



شکل ۵ وابستگی γ_{mn} به ضخامت

$$\left. \frac{dR_{mn}(r)}{dr} \right|_{r=a} = 0 \quad (63)$$

$$R_{mn}(b) = 0 \quad (64)$$

رابطه (۲۴) می‌بایست در معادلات فوق جایگزین شود، که در این صورت معادلات حاصل می‌بایست حل غیر صفر داشته باشند و برای این کار، دترمینان زیر که ضرایب آن در ضمیمه آورده شده است، برابر صفر می‌شود.

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (57)$$

حال برای $s=2$ و برای $m=0,1$ و $n=1,2$ ، مقادیر γ_{mn} محاسبه شده‌اند که این مقادیر در جدول ۲ لیست شده‌اند و شکل مدهای مرتبط با آنها نیز در شکل ۴ آورده شده‌اند. در شرط مرزی گیردار-آزاد، چون C_{mn}^{TR} خود تابع ضخامت است، γ_{mn} نیز تابع ضخامت خواهد شد. شکل ۵ وابستگی γ_{mn} به ضخامت را نشان می‌دهد. بر اساس این شکل این وابستگی بسیار کم می‌باشد بنابراین می‌توان از این وابستگی چشم‌پوشی کرد و در تمامی محاسبات مربوطه ضخامت را ثابت گرفت. ضخامتی که در اینجا در نظر گرفته شده است، $h=20\mu m$ می‌باشد.

۴-۳- شرط مرزی گیردار ساده

در این حالت شرط مرزی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$w(a, \varphi, t) = 0 \quad (58)$$

$$\left. \frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (59)$$

$$w(b, \varphi, t) = 0 \quad (60)$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{M^T}{D(1-\nu)} \right]_{r=b} = 0 \quad (61)$$

با جایگذاری (۷) و (۱۴) در معادلات فوق، معادلات (۶۲) - (۶۵) به‌دست می‌آیند:

$$R_{mn}(a) = 0 \quad (62)$$

جدول ۲ مقادیر γ_{mn} برای شرط مرزی گیردار-آزاد، $s=2$ ، $h=20\mu m$ و $a=500\mu m$

γ_{m2}	γ_{m1}	m
۹۳۷۳/۹۳	۳۷۶۵/۴۲	۰
۹۴۳۱/۲۱	۳۷۰۴/۸۸	۱

جدول ۳ مقادیر γ_{mn} برای شرط مرزی گیردار-آزاد

γ_{m2}	γ_{m1}	m
۱۴۱۲۴/۰۸	۷۸۳۵/۱۸	۰
۱۴۱۷۶/۴۵	۷۹۰۷/۶۵	۱

جدول ۴ خواص مکانیکی و گرمایی سیلیکون در دماهای مختلف [۳]

۱۶۰	۲۰۰	۲۹۳	۴۰۰	$T_0(K)$
۱۶۸/۵	۱۶۶/۹	۱۶۵/۹	۱۶۳/۱	$E(GPa)$
۲۳۳۰	۲۳۳۰	۲۳۳۰	۲۳۲۷	$\rho(Kgm^{-3})$
۰/۲۲	۰/۲۲	۰/۲۲	۰/۲۲	ν
۳۷۵	۲۶۶	۱۵۶	۱۰۵	$\kappa(Wm^{-1}K^{-1})$
۴۵۶	۵۵۷	۷۱۳	۷۸۵	$c_p(JKg^{-1}K^{-1})$
۰/۶۸۹	۱/۴۰۶	۲/۵۹	۳/۲۵۳	$\alpha_T(10^{-6}K^{-1})$

میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت، برای $a = 500\mu m$ در سه نوع شرایط مرزی محاسبه شده که نتایج آن در شکل ۷ نمایش داده شده است. مطابق این شکل میرایی اول افزایش و بعد از آن کاهش پیدا می کند بنابراین در اینجا یک میرایی ماکزیمم وجود دارد که در ضخامت بحرانی رخ می دهد. تغییرات ضخامت بحرانی بر حسب m بسیار کوچک است اما با افزایش n نیز افزایش پیدا می کند و دلیل آن به مقدار γ_{mn} بستگی دارد که با m تغییر نمی کند بلکه بیشتر تابع مقدار n می باشد. همچنین ضخامت بحرانی به شرایط مرزی نیز بستگی دارد. با مقایسه ۶- الف، ۶- ب و ۶- ج می توان این تفاوت را دید که در شرط مرزی گیردار-آزاد این میرایی بیشتر است.

در اینجا نیز میرایی ترموالاستیک را بر حسب شعاع a با در نظر گرفتن $h = 10\mu m$ ، $s = 2$ ، $V_p = 5v$ برای سه نوع شرایط مرزی گیردار-گیردار، گیردار-آزاد و گیردار-ساده در شکل ۸ رسم شده است. همان طور که در این شکل دیده می شود در اینجا نیز یک شعاع بحرانی داریم که سبب شده میرایی ماکزیمم شود.

شکل ۹ اثر تغییرات بار الکترواستاتیکی V_p بر میرایی ترموالاستیک را در مد اول نمایش می دهد. بر اساس این شکل، با افزایش بار الکتریکی میرایی ترموالاستیک نیز افزایش پیدا می کند. همچنین این افزایش برای شرایط مرزی گیردار-آزاد بیشتر از دو حالت گیردار-گیردار و گیردار-ساده می باشد. بنابراین نوع شرایط مرزی اهمیت زیادی برای میکروصفحاتی که تحت بار الکتریکی هستند دارد.

$$\left[\left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D} \right) \frac{d^2 R_{mn}}{dr^2} + \left(\nu + \frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D} \right) \frac{1}{r} \frac{dR_{mn}}{dr} - \left(\nu + \frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D} \right) \frac{m^2}{r^2} R_{mn} \right]_{r=b} = 0 \quad (65)$$

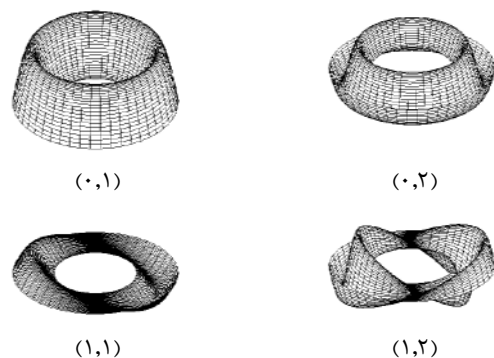
رابطه (۲۴) می بایست در معادلات فوق جایگزین شود، که در این صورت معادلات حاصل می بایست حل غیر صفر داشته باشند و برای این کار، دترمینان زیر که ضرایب آن در ضمیمه آورده شده است، برابر صفر می شود.

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (66)$$

حال برای $s = 2$ و برای $m = 0, 1$ و $n = 1, 2$ مقادیر γ_{mn} محاسبه شده اند که این مقادیر در جدول ۳ لیست شده اند و شکل مدهای مرتبط با آنها نیز در شکل ۶ آورده شده اند.

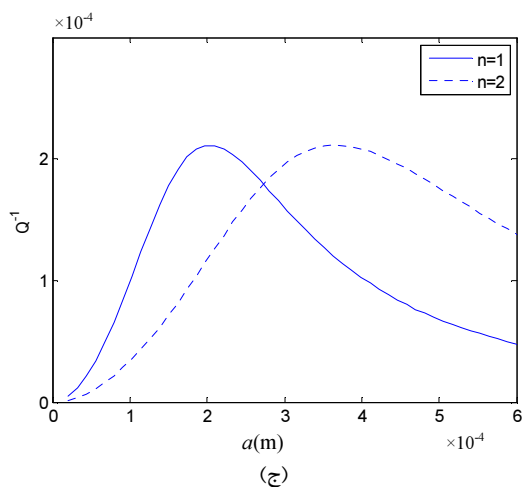
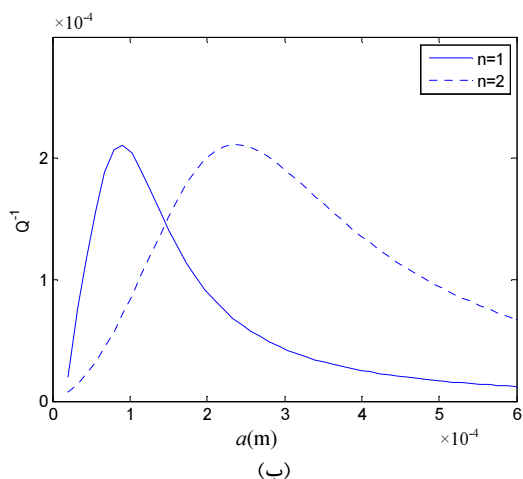
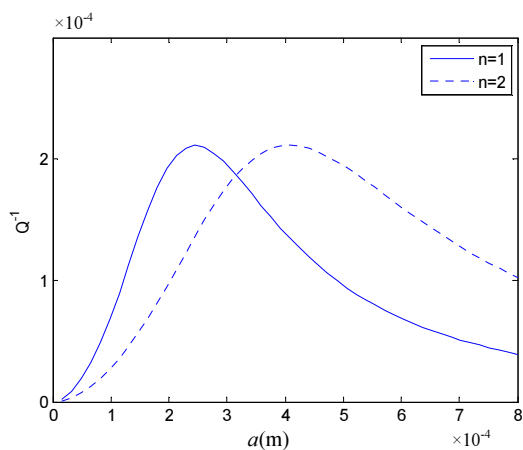
۵- نتایج

در این قسمت، تأثیر برخی پارامترهای هندسی نظیر ضخامت، شعاع، نوع شرط مرزی و بار الکتریکی روی میرایی ترموالاستیک بررسی شده است. در اینجا اثر میرایی ترموالاستیک برای سیلیکون بررسی شده، که خواص آن در جدول ۴ آورده شده است. همچنین مقدار ثابت دی الکتریک و فاصله بین صفحات از مرجع [۲] گرفته شده است $(\epsilon = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{m^2N})$. خواص مکانیکی و گرمایی سیلیکون تابع دما می باشد به همین دلیل این محاسبات در دمای ثابت $T = 293K$ انجام شده است.

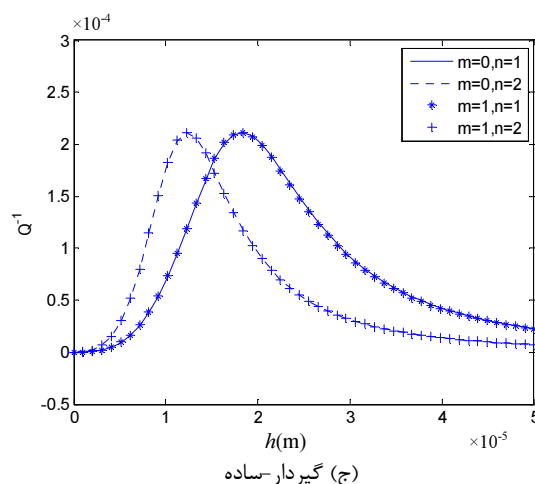
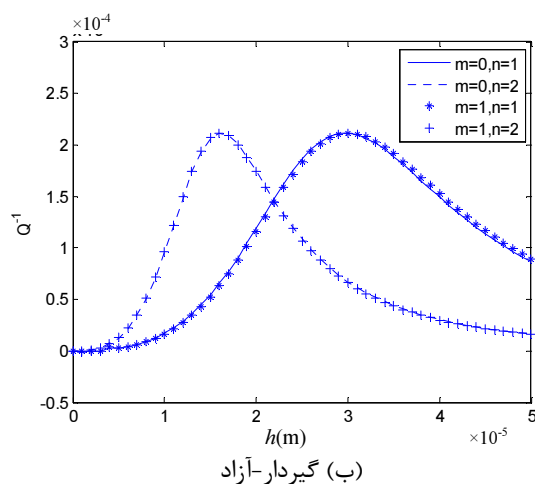
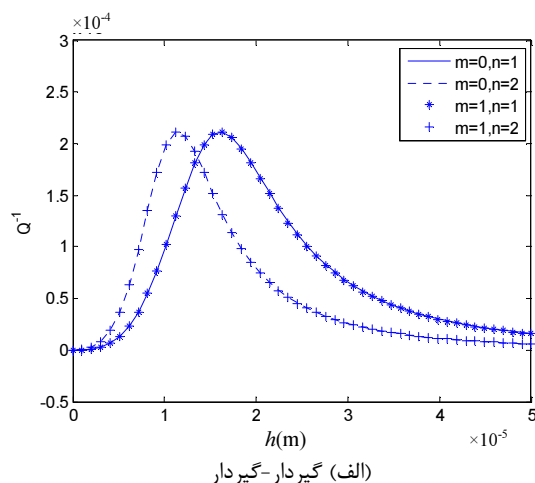


شکل ۶ شکل مدهای (m, n) گیردار-ساده برای $s = 2$ ، $a = 500\mu m$ و $h = 20\mu m$

آمده، شعاع و ضخامت بحرانی بدست آمد که در آنها میرایی ماکزیمم می‌شود. بنابراین بررسی این ابعاد به دلیل تأثیری که میرایی روی کارایی میکروادوات می‌گذارد اهمیت پیدا می‌کند.



شکل ۸ میرایی ترموالاستیک بر حسب شعاع



شکل ۷ میرایی ترموالاستیک با $a = 500\mu\text{m}$ و $V_p = 5\text{v}$

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدلی خطی از میرایی ترموالاستیک در میکروصفحات تحت بار الکتریکی ارائه شد. در نتایج بدست

۷- پیوست‌ها

در این جا توابعی را که در معادلات (۳۲) و (۳۳) آورده شده‌اند، معرفی می‌کنیم:

$$F_1 = \frac{B_1}{B_3} (\xi_{mn}^{R7} - 21\xi_{mn}^{R5}\xi_{mn}^{I2} + 35\xi_{mn}^{R4}\xi_{mn}^{I3} - 7\xi_{mn}^{R}\xi_{mn}^{I6}) - \frac{B_2}{B_3} (\xi_{mn}^{R3} - 3\xi_{mn}^{R}\xi_{mn}^{I2}) \quad (۶۷)$$

$$F_2 = \frac{B_1}{B_3} (7\xi_{mn}^{R6}\xi_{mn}^{I} - 35\xi_{mn}^{R4}\xi_{mn}^{I3} + 21\xi_{mn}^{R2}\xi_{mn}^{I5} - \xi_{mn}^{I7}) - \frac{B_2}{B_3} (3\xi_{mn}^{R2}\xi_{mn}^{I} - \xi_{mn}^{I3}) \quad (۶۸)$$

$$T_1 = \cos(\xi_{mn}^R) \cosh(\xi_{mn}^I) + \cosh(\xi_{mn}^R) \cos(\xi_{mn}^I) \quad (۶۹)$$

$$T_2 = \sin(\xi_{mn}^R) \sinh(\xi_{mn}^I) + \sinh(\xi_{mn}^R) \sin(\xi_{mn}^I) \quad (۷۰)$$

$$T_3 = \sin(\xi_{mn}^R) \cosh(\xi_{mn}^I) - \sinh(\xi_{mn}^R) \cos(\xi_{mn}^I) \quad (۷۱)$$

$$T_4 = \cos(\xi_{mn}^R) \sinh(\xi_{mn}^I) - \cosh(\xi_{mn}^R) \sin(\xi_{mn}^I) \quad (۷۲)$$

$$T_5 = \sin(\xi_{mn}^R) \cosh(\xi_{mn}^I) + \sinh(\xi_{mn}^R) \cos(\xi_{mn}^I) \quad (۷۳)$$

$$T_6 = \cos(\xi_{mn}^R) \sinh(\xi_{mn}^I) + \cosh(\xi_{mn}^R) \sin(\xi_{mn}^I) \quad (۷۴)$$

ضرایب دترمینان (۴۸) در زیر آورده شده‌اند:

$$A_{11} = J_m (\Gamma_{mn}) \quad (۷۵)$$

$$A_{12} = Y_m (\Gamma_{mn}) \quad (۷۶)$$

$$A_{13} = I_m (\Gamma_{mn}) \quad (۷۷)$$

$$A_{14} = K_m (\Gamma_{mn}) \quad (۷۸)$$

$$A_{21} = -J_{m+1} (\Gamma_{mn}) + \frac{m}{\Gamma_{mn}} J_m (\Gamma_{mn}) \quad (۷۹)$$

$$A_{22} = -Y_{m+1} (\Gamma_{mn}) + \frac{m}{\Gamma_{mn}} Y_m (\Gamma_{mn}) \quad (۸۰)$$

$$A_{23} = I_{m+1} (\Gamma_{mn}) + \frac{m}{\Gamma_{mn}} I_m (\Gamma_{mn}) \quad (۸۱)$$

$$A_{24} = -K_{m+1} (\Gamma_{mn}) + \frac{m}{\Gamma_{mn}} K_m (\Gamma_{mn}) \quad (۸۲)$$

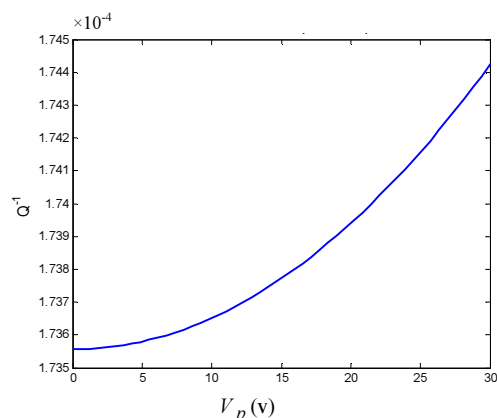
$$A_{11} = J_m (s\Gamma_{mn}) \quad (۸۳)$$

$$A_{12} = Y_m (s\Gamma_{mn}) \quad (۸۴)$$

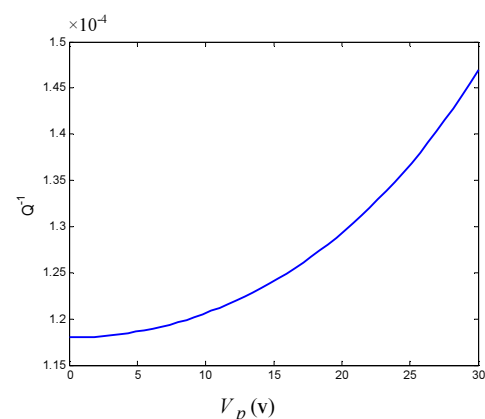
$$A_{13} = I_m (s\Gamma_{mn}) \quad (۸۵)$$

$$A_{14} = K_m (s\Gamma_{mn}) \quad (۸۶)$$

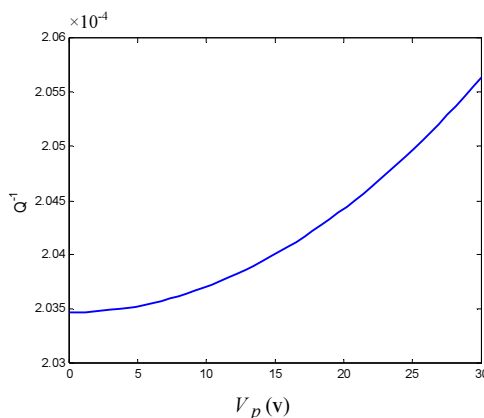
$$A_{21} = -J_{m+1} (s\Gamma_{mn}) + \frac{m}{s\Gamma_{mn}} J_m (s\Gamma_{mn}) \quad (۸۷)$$



(الف) گیردار-گیردار



(ب) گیردار-آزاد



(ج) گیردار-ساده

شکل ۹ میرایی ترموالاستیک برحسب بار الکتریکی با در نظر گرفتن

$$h = 20\mu\text{m} \text{ و } a = 500\mu\text{m}$$

شعاع بحرانی و ضخامت بحرانی میکروصفحه حلقوی به نوع ماده، ابعاد میکروصفحه و شرایط مرزی بستگی دارد. بار الکتریکی نیز بر این میرایی اثر می‌گذارد به طوری که تغییرات میرایی در حالت گیردار-آزاد بیشتر از دو حالت دیگر می‌باشد.

$$-\frac{m^2}{(\alpha s)^2} \left(\nu + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)} \right) I_m(\gamma_{mn} \alpha s) \quad (101)$$

$$B_{34} = \left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)} \right) \left[\begin{aligned} & -P_5 \gamma_{mn} - \frac{m K_m(\gamma_{mn} \alpha s)}{\gamma_{mn} (\alpha s)^2} \\ & + \frac{m P_4}{\alpha s} \end{aligned} \right] \gamma_{mn} \\ + \frac{\gamma_{mn}}{\alpha s} \left(\nu + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)} \right) P_4 \\ - \frac{m^2}{(\alpha s)^2} \left(\nu + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)} \right) K_m(\gamma_{mn} \alpha s) \quad (102)$$

$$B_{41} = \left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)} \right) \gamma_{mn} \left[\begin{aligned} & -\gamma_{mn} \left(\gamma_{mn} P_{13} + \frac{(m+1)P_{12}}{\gamma_{mn} (\alpha s)^2} \right. \\ & \left. - \frac{(m+1)P_{14}}{\alpha s} \right) \\ & + 2 \frac{m J_m(\gamma_{mn} \alpha s)}{\gamma_{mn} (\alpha s)^3} - 2 \frac{m P_{13}}{(\alpha s)^2} \\ & + \frac{m}{\alpha s} \left(-\gamma_{mn} P_{14} - \frac{m J_m(\gamma_{mn} \alpha s)}{\gamma_{mn} (\alpha s)^2} + \frac{m P_{13}}{\alpha s} \right) \\ & + \frac{\gamma_{mn}}{\alpha s} \left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)} \right) \left(-\gamma_{mn} P_{14} - \frac{m J_m(\gamma_{mn} \alpha s)}{\gamma_{mn} (\alpha s)^2} \right. \\ & \left. + \frac{m P_{13}}{\alpha s} \right) \\ & - \frac{\gamma_{mn}}{(\alpha s)^2} P_4 P_{13} + \frac{P_1 J_m(\gamma_{mn} \alpha s)}{(\alpha s)^3} \end{aligned} \right] \quad (103)$$

$$B_{42} = \left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)} \right) \gamma_{mn} \left[\begin{aligned} & -\gamma_{mn} \left(\gamma_{mn} P_{10} + \frac{(m+1)P_{12}}{\gamma_{mn} (\alpha s)^2} \right. \\ & \left. - \frac{(m+1)P_{11}}{\alpha s} \right) \\ & + 2 \frac{m Y_m(\gamma_{mn} \alpha s)}{\gamma_{mn} (\alpha s)^3} - 2 \frac{m P_{10}}{(\alpha s)^2} \\ & + \frac{m}{\alpha s} \left(-\gamma_{mn} P_{11} - \frac{m Y_m(\gamma_{mn} \alpha s)}{\gamma_{mn} (\alpha s)^2} + \frac{m P_{10}}{\alpha s} \right) \\ & + \left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)} \right) \left(-\gamma_{mn} P_{11} - \frac{m Y_m(\gamma_{mn} \alpha s)}{\gamma_{mn} (\alpha s)^2} \right. \\ & \left. + \frac{m P_{10}}{\alpha s} \right) \end{aligned} \right] \quad (104)$$

$$A_{22} = -Y_{m+1}(s \Gamma_{mn}) + \frac{m}{s \Gamma_{mn}} Y_m(s \Gamma_{mn}) \quad (88)$$

$$A_{23} = I_{m+1}(s \Gamma_{mn}) + \frac{m}{s \Gamma_{mn}} I_m(s \Gamma_{mn}) \quad (89)$$

$$A_{24} = -K_{m+1}(s \Gamma_{mn}) + \frac{m}{s \Gamma_{mn}} K_m(s \Gamma_{mn}) \quad (90)$$

حال ضرایب معادله (۵۷) را در اینجا معرفی می‌کنیم:

$$B_{11} = J_m(\gamma_{mn} a) \quad (91)$$

$$B_{12} = Y_m(\gamma_{mn} a) \quad (92)$$

$$B_{13} = I_m(\gamma_{mn} a) \quad (93)$$

$$B_{14} = K_m(\gamma_{mn} a) \quad (94)$$

$$B_{21} = -J_{m+1}(\gamma_{mn} a) + \frac{m}{\gamma_{mn} a} J_m(\gamma_{mn} a) \quad (95)$$

$$B_{22} = -Y_{m+1}(\gamma_{mn} a) + \frac{m}{\gamma_{mn} a} Y_m(\gamma_{mn} a) \quad (96)$$

$$B_{23} = I_{m+1}(\gamma_{mn} a) + \frac{m}{\gamma_{mn} a} I_m(\gamma_{mn} a) \quad (97)$$

$$B_{24} = -K_{m+1}(\gamma_{mn} a) + \frac{m}{\gamma_{mn} a} K_m(\gamma_{mn} a) \quad (98)$$

$$B_{31} = \left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)} \right) \left[\begin{aligned} & -P_{14} \gamma_{mn} - \frac{m J_m(\gamma_{mn} \alpha s)}{\gamma_{mn} (\alpha s)^2} \\ & + \frac{m P_{13}}{\alpha s} \end{aligned} \right] \gamma_{mn} \\ + \frac{\gamma_{mn}}{\alpha s} \left(\nu + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)} \right) P_{13} \\ - \frac{m^2}{(\alpha s)^2} \left(\nu + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)} \right) J_m(\gamma_{mn} \alpha s) \quad (99)$$

$$B_{32} = \left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)} \right) \left[\begin{aligned} & -P_{11} \gamma_{mn} - \frac{m Y_m(\gamma_{mn} \alpha s)}{\gamma_{mn} (\alpha s)^2} \\ & + \frac{m P_{10}}{\alpha s} \end{aligned} \right] \gamma_{mn} \\ + \frac{\gamma_{mn}}{\alpha s} \left(\nu + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)} \right) P_{10} \\ - \frac{m^2}{(\alpha s)^2} \left(\nu + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)} \right) Y_m(\gamma_{mn} \alpha s) \quad (100)$$

$$B_{33} = \left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)} \right) \left[\begin{aligned} & P_8 \gamma_{mn} - \frac{m I_m(\gamma_{mn} \alpha s)}{\gamma_{mn} (\alpha s)^2} \\ & + \frac{m P_7}{\alpha s} \end{aligned} \right] \gamma_{mn}$$

$$P_5 = -K_m (\gamma_{mn} as) - \frac{(m+1)P_2}{\gamma_{mn} as} \quad (111)$$

$$P_6 = I_{m+1} (\gamma_{mn} as) \quad (112)$$

$$P_7 = I_{m+1} (\gamma_{mn} as) + \frac{mI_m (\gamma_{mn} as)}{\gamma_{mn} as} \quad (113)$$

$$P_8 = -I_m (\gamma_{mn} as) - \frac{(m+1)P_6}{\gamma_{mn} as} \quad (114)$$

$$P_9 = Y_{m+1} (\gamma_{mn} as) \quad (115)$$

$$P_{10} = -Y_{m+1} (\gamma_{mn} as) + \frac{mY_m (\gamma_{mn} as)}{\gamma_{mn} as} \quad (116)$$

$$P_{11} = Y_m (\gamma_{mn} as) - \frac{(m+1)P_9}{\gamma_{mn} as} \quad (117)$$

$$P_{12} = J_{m+1} (\gamma_{mn} as) \quad (118)$$

$$P_{13} = -J_{m+1} (\gamma_{mn} as) + \frac{mJ_m (\gamma_{mn} as)}{\gamma_{mn} as} \quad (119)$$

$$P_{14} = J_m (\gamma_{mn} as) - \frac{(m+1)P_{12}}{\gamma_{mn} as} \quad (120)$$

ضرایب دترمینان (۶۶) در زیر آورده شده‌اند:

$$C_{ij} = B_{ij} \quad (i = 1, 2, 4), (j = 1, 2, 3, 4) \quad (121)$$

$$C_{31} = -J_{m+1} (\gamma_{mn} as) + \frac{m}{\gamma_{mn} a} J_m (\gamma_{mn} as) \quad (122)$$

$$C_{32} = -Y_{m+1} (\gamma_{mn} as) + \frac{m}{\gamma_{mn} a} Y_m (\gamma_{mn} as) \quad (123)$$

$$C_{33} = I_{m+1} (\gamma_{mn} as) + \frac{m}{\gamma_{mn} a} I_m (\gamma_{mn} as) \quad (124)$$

$$C_{34} = -K_{m+1} (\gamma_{mn} as) + \frac{m}{\gamma_{mn} a} K_m (\gamma_{mn} as) \quad (125)$$

۸- فهرست علائم

شعاع داخلی صفحه حلقوی	a
شعاع خارجی صفحه حلقوی	b
ثابت گرمایی ویژه حجم ثابت	c_v
فاصله عرضی اولیه بین دو صفحه	d
متغیر تعریف شده در معادله (۱۶)	$f(\omega_{mn})$
ضخامت صفحه حلقوی	h
عدد موهومی	i
عدد گره شعاعی	m
عدد گره دایره‌ای	n

$$-\frac{\gamma_{mn}}{(as)^2} P_4 P_{10} + \frac{P_1 Y_m (\gamma_{mn} as)}{(as)^3} \quad (104)$$

$$B_{43} = \left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)}\right) \gamma_{mn} \left[\gamma_{mn} \left(\gamma_{mn} P_7 + \frac{(m+1)P_6}{\gamma_{mn} (as)^2} - \frac{(m+1)P_8}{as} \right) + 2 \frac{mI_m (\gamma_{mn} as)}{\gamma_{mn} (as)^3} - 2 \frac{mP_7}{(as)^2} + \frac{m}{as} \left(\gamma_{mn} P_8 - \frac{mI_m (\gamma_{mn} as)}{\gamma_{mn} (as)^2} + \frac{mP_7}{as} \right) \right] + \frac{\gamma_{mn}}{as} \left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)}\right) \left[\gamma_{mn} P_8 - \frac{mI_m (\gamma_{mn} as)}{\gamma_{mn} (as)^2} + \frac{mP_7}{as} \right] - \frac{\gamma_{mn}}{(as)^2} P_4 P_7 + \frac{P_1 I_m (\gamma_{mn} as)}{(as)^3} \quad (105)$$

$$B_{44} = \left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)}\right) \gamma_{mn} \left[-\gamma_{mn} \left(-\gamma_{mn} P_3 + \frac{(m+1)P_2}{\gamma_{mn} (as)^2} - \frac{(m+1)P_5}{as} \right) + 2 \frac{mK_m (\gamma_{mn} as)}{\gamma_{mn} (as)^3} - 2 \frac{mP_3}{(as)^2} + \frac{m}{as} \left(-\gamma_{mn} P_5 - \frac{mK_m (\gamma_{mn} as)}{\gamma_{mn} (as)^2} + \frac{mP_3}{as} \right) \right] + \frac{\gamma_{mn}}{as} \left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)}\right) \left[-\gamma_{mn} P_5 - \frac{mK_m (\gamma_{mn} as)}{\gamma_{mn} (as)^2} + \frac{mP_3}{as} \right] - \frac{\gamma_{mn}}{(as)^2} P_4 P_3 + \frac{P_1 K_m (\gamma_{mn} as)}{(as)^3} \quad (106)$$

که در آن:

$$P_1 = m^2 (3-\nu) + \frac{2m^2 C_{mn}^{TR}}{D(1-\nu)} \quad (107)$$

$$P_2 = K_{m+1} (\gamma_{mn} as) \quad (108)$$

$$P_3 = -K_{m+1} (\gamma_{mn} as) + \frac{mK_m (\gamma_{mn} as)}{\gamma_{mn} as} \quad (109)$$

$$P_4 = 1 + m^2 (2-\nu) + \frac{C_{mn}^{TR} (1+m^2)}{D(1-\nu)} \quad (110)$$

r	محور شعاعی مختصات استوانه‌ای	ξ_{mn}^R	قسمت حقیقی ξ_{mn}
s	متغیر تعریف شده در معادله (۲۲)	ξ_{mn}^I	قسمت موهومی ξ_{mn}
t	زمان	ρ	چگالی
$v(t)$	ولتاژ دینامیکی بار الکتریکی	φ	محور زاویه‌ای مختصات استوانه‌ای
w	خیز صفحه حلقوی	ω_{mn}	فرکانس
z	محور عمودی مختصات استوانه‌ای	ω_{0mn}	فرکانس صفحه در حالت بدون میرایی
$A_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4)$	ضرایب معادله (۴۸)	Γ_{mn}	متغیر تعریف شده در معادله (۲۲)
$B_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4)$	ضرایب معادله (۵۷)	Δ_D	متغیر تعریف شده در معادله (۲۳)
$B_j (j = 1, 2, 3)$	متغیرهای تعریف شده در معادلات (۲۸) تا (۳۰)	Θ_{mn}	شکل مد مختلط دمای صفحه
$C_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4)$	ضرایب معادله (۶۶)	Ξ	متغیر تعریف شده در معادله (۲۲)
$C_j (j = 1, 2, 3, 4)$	ضرایب تعریف شده در معادله (۲۴)	∇^2	اپراتور لاپلاس در مختصات استوانه‌ای
C_{mn}^T	متغیر تعریف شده در معادله (۱۵)	∇^{*2}	اپراتور تعریف شده در معادله (۱۰)

۹- مراجع

- [1] Nayfeh A. H. and Younis M. I., "A New Approach to the Modeling and Simulation of Flexible Microstructures under the Effect of Squeeze-Film Damping", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 14, 2004, pp. 170–181.
- [2] Nayfeh A. H. and Younis M. I., "Modeling and Simulations of Thermoelastic Damping in Microplates", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 14, 2004, pp. 1711–1717.
- [3] Yuxin S., Masumi S., "Thermoelastic Damping in Micro-Scale Circular Plate Resonators", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, 2010, pp. 328–337.
- [4] Zener C., "Internal Friction in Solids I. Theory of Internal Friction in Reeds", *Physical Review*, Vol. 52, 1937, pp. 230-235.
- [5] Zener. C., "Internal Friction in Solids II. General Theory of Thermoelastic Internal Friction", *Physical Review*, Vol. 53, 1938, pp. 90-99.
- [6] Alblas. J. B., "A Note on the Theory of Thermoelastic Damping", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 4, Issue 3-4, 1981, pp. 333-355.
- [7] Lifshitz R. and Roukes M. L., "Thermoelastic Damping in Micro and Nano Mechanical Systems", *Physical Review B*, Vol. 61, Num. 8, 1999, pp. 5600-5609.
- [8] Berry B. S., "Precise Investigation of the Theory of Damping by Transverse Thermal Currents", *Journal of Applied Physics*, Vol. 26, No. 10, 1955, pp. 1221-1224.
- [9] Roszhardt R.V., "The Effect of Thermoelastic Internal Friction on the Q of Micromachined Silicon Resonators", *IEEE Solid State Sensor and Actuator Workshop*, Hilton Head Island, SC, USA, 1990, pp. 13–16.

C_{mn}^{TR}	قسمت حقیقی C_{mn}^T
C_{mn}^{TI}	قسمت موهومی C_{mn}^T
D_{mn}^o	متغیر تعریف شده در معادله (۲۲)
D	مدول صلبیت
E	مدول الاستیسیته
F_1	متغیر تعریف شده در معادله (۶۷)
F_2	متغیر تعریف شده در معادله (۶۸)
M^T	گشتاور گرمایی
N_{mn}	متغیر تعریف شده در معادله (۱۳)
Q^{-1}	میرایی ترموالاستیک
R_{mn}	شکل مد مختلط ارتعاشی صفحه
T	دمای صفحه حلقوی
T_0	دمای تنش-آزاد در حالت تعادل
$T_i (i = 1, 2, \dots, 6)$	متغیرهای تعریف شده در معادلات (۶۹) تا (۷۴)
V_p	ولتاژ استاتیکی بار الکتریکی
α_T	ضریب انبساط گرمایی
β	مدول گرمایی
γ_{mn}	متغیر تعریف شده در معادله (۲۱)
ε	ثابت دی الکتریک بین دو صفحه
θ	اختلاف دما صفحه با دمای تعادل
κ	ضریب هدایت گرمایی
ν	ضریب پواسن
ξ_{mn}	متغیر تعریف شده در معادله (۱۷)

- [16] Prabhakar S. and Vengallatore S., "Theory of Thermoelastic Damping in Micromechanical Resonators with Two-Dimensional Heat Conduction", *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 17, No. 2, 2008, pp. 494-502.
- [17] Enrico S. and Michele B., "A Finite Element Formulation for Thermoelastic Damping Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, No. 78, 2009, pp. 671-691.
- [18] Guo F. L. and Rogerson G. A., "Thermoelastic Coupling Effect on a Micro-Machined Beam Resonator", *Mechanics Research Communications*, Vol.30, 2003, pp. 513-518.
- [19] Yun-Bo Y. and Martin M. A., "Eigenvalue Solution of Thermoelastic Damping in Beam Resonators Using a Finite Element Analysis", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 129, 2007, pp. 478-483.
- [20] Jinbok C., Maenghyo C. and Jaewook R., "Efficient Prediction of the Quality Factors of Micromechanical Resonators", *Journal of Sound and Vibration*, No. 329, 2010, pp. 84-95.
- [21] Wiegele T. G., "Micro-Turbo-Generator Design and Fabrication: A Preliminary Study", *Proceedings of the 31st Intersociety energy Conversion Engineering Conference, IECEC'96*, Washington, District of Columbia, August 11-16, Vol. 4, 1996, pp. 2308-2313.
- [22] Nayfeh A. H. and Frank P. P., *linear and Nonlinear Structural Mechanics*, New Jersey, John Wiley & Sons, 2004, pp. 382-388.
- [10] Yasumura K. Y., Stowe T. D., Kenny T. W. and Rugar D., "Thermoelastic Energy Dissipation in Silicon Nitride Microcantilever Structures", *Bulletin of the American Physical Society* Vol. 44, 1999, 540.
- [11] Metcalf T. H., Bradford B. P., Douglas M. P. and Brian H. H., "Thermoelastic Damping in Micromechanical Resonators", *Applied Physics Letters*, Vol. 12, 2009, pp. 54-58.
- [12] Hajime O., Daisuke I., Koji O., and Hiroshi Y., "Thermoelastic Damping in GaAs Micromechanical Resonators", *Physica Status Solidi (c)*, No. 9, 2008, pp. 2920-2922.
- [13] Duwel A., Weinstein M., Gorman J., Borenstein J. and Ward P., "Quality Factors of Mems Gyros and the Role of Thermoelastic Damping", *Proceedings of the 15th IEEE International Conference on Microelectromechanical Systems (MEMS) Las Vegas, NV, January 20-25, 2002*, pp. 214-219.
- [14] Yang X., Ren W., Shiva K. D., Zhili H. and Linda V., "Numerical Models and Experimental Investigation of Energy Loss Mechanisms in SOI-Based Tuning-Fork Gyroscopes", *Sensors and Actuators A*, Vol. 152, Issue 1, 2009, pp. 63-74.
- [15] Sudipto K. D. and Aluru N. R., "Theory of Thermoelastic Damping in Electrostatically Actuated Microstructures", *Physical Review B*, No. 74, Issue 144305, 2006, pp. 1-13.