مجله مهندسی مکانیک مدرس، فروردین 1394، دوره 15، شماره 1، ص ص 390-396

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مقایسه تأثیر سطوح تسلیم مختلف در پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی آلیاژ Ti64 تیتانیوم

علی‌اکبر اله دادیان[1]، کورش حسن‌پور[2]*

1- دانشجوی کارشناسی‌ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

2- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

* اصفهان، صندوق پستی 7344-86746، hasanpour@eng.ui.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 24 مرداد 1393

پذیرش: 15 آبان 1393

ارائه در سایت: 26 آذر 1393

کلید واژگان:

نمودار حد شکل‌دهی

آلیاژ تیتانیوم

ناهمسانگردی پلاستیک

چکیده

مدل‌سازی ریاضی مرحله‌ای مهم در طراحی و بهینه‌سازی ابزار و پارامترهای عملیات شکل‌دهی فلزات است. در این بین، نمودار حد شکل‌دهی فلزات به عنوان یک ابزار کارآمد در تولید بهینه قطعات به روش شکل‌دهی، مورد توجه محققان قرار گرفته است. با توجه به شکل‌پذیری اندک آلیاژهای تیتانیوم و کاربردهای فراوان این آلیاژها در صنایع پیشرفته نظیر هوا و فضا، مطالعه رفتار این آلیاژها در شکل‌دهی اهمیت فراوانی پیدا کرده است. با توجه به هزینه‌های بالای روش‌های تجربی تعیین حد شکل‌دهی مخصوصاً در دماهای بالا، روش عددی توجه محققان زیادی را جلب کرده است. روش عددی تحت تأثیر مدل‌سازی دقیق رفتار الاستیک-پلاستیک ماده است. در آلیاژ Ti-64 تیتانیوم، رفتار نامعمول مکانیکی از قبیل ناهمسانگردی پلاستیک و عدم تقارن کشش و فشار در جهت‌های مختلف مشاهده می‌شود. در این مقاله روش عددی مارشینیاک به همراه سطوح تسلیم کازاکا و هیل در محاسبه حد شکل‌دهی آلیاژ Ti64 به‌کار رفته است. ملاحظه می‌گردد که پیش‌بینی حد شکل‌دهی با استفاده از سطح تسلیم کازاکا به نتایج تجربی موجود نزدیک‌تر است. علت این موضوع در پیش‌بینی بهتر سطح تسلیم کازاکا از رفتار آلیاژ تیتانیوم از قبیل ناهمسانگردی در ضرایب لانکفورد و تنش‌های تسلیم است. پیش‌بینی سطوح تسلیم هیل و کازاکا از ضرایب لانکفورد و تنش‌های تسلیم مقایسه شده است.

Comparison of the Effect of Different Yield loci to Prediction of Ti64 Titanium Alloy Forming Limit Diagram

Ali Akbar Allahdadian, Kourosh Hasanpour*

Department of Mechanical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran.
* P.O.B. 86746-7344Isfahan, Iran, hasanpor@eng.ui.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 15 August 2014
Accepted 06 November 2014
Available Online 17 December 2014

Keywords:
Forming Limit Diagram
Titanium Alloy
Plastic Anisotropy

ABSTRACT

Mathematical modeling is an important step in the design and optimization of process parameters for metal forming. Researchers consider the metal forming limit diagram an efficient tool to optimize the production of components using forming methods. Due to the low ductility of titanium alloys and wide applications of these alloys in advanced industries such as aerospace, researchers have focused on studying the forming behavior of these alloys. Because of the high cost of experimental methods, especially at high temperatures, numerical methods have attracted the attention of many researchers. Accuracy of the numerical method is affected by modeling elastic-plastic material behavior. Unusual mechanical behavior of Ti-64 titanium alloys such as high in-plane anisotropy/asymmetry of yield stress and hardening response has been observed. In this paper, the Marciniak model with Cazacu and Hill yield criterions has been used for forming limit prediction. It is observed that the prediction of forming limit using the Cazacu criterion is closer to the experimental results. This is due to the better prediction of the behavior of the titanium alloy, especially Lankford and stress anisotropy coefficients by Cazacu criterion. Cazacu and Hill criterions prediction of Lankford coefficients and yield stresses have been compared.

1- مقدمه

مدل‌سازی ریاضی مرحله‌ای مهم در طراحی و بهینه‌سازی ابزار و پارامترهای عملیات شکل‌دهی فلزات است. یکی از موارد مهم این رویه، پیش‌بینی صحیح مودهای ناپایداری فرآیند شکل‌دهی است. در طول سالیان گذشته، مفهوم نمودار حد شکل‌دهی که به‌وسیله کیلر 1966 و گودوین 1968 معرفی شد، مورد توجه محققان و صنعت‌گران قرار گرفته است. در این نمودار، کرنش درون صفحه بیشینه بر حسب کرنش درون صفحه کمینه در لحظه گلویی‌شدن رسم می‌شود. محاسبه نمودار حد شکل‌دهی به‌وسیله روش‌های تجربی و عددی انجام می‌شود. از روش‌های تجربی می‌توان به آزمون اریکسون و ناکازیما اشاره نمود. محاسبه نمودار حد شکل‌دهی به روش تجربی، اغلب پرهزینه و در دماهای بالا با مشکلات فراوانی همراه است. بنابراین مدل‌های تئوری مختلفی برای محاسبه حد شکل‌دهی ارائه شده است. از نخستین آن‌ها می‌توان به مدل سوئیف و هیل در سال 1952 اشاره نمود. در سال 1967، مارشینیاک معیاری را در حالت تنش دومحوره ارائه نمود که از سوی محققان

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

A. A. Allahdadian, K. Hasanpour, Comparison of the Effect of Different Yield loci to Prediction of Ti64 Titanium Alloy Forming Limit Diagram, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 390-396, 2015 (In Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.1.15.1]

تا به حال بیشتر مورد استفاده قرار گرفته است. در این مدل ناهمگونی ماده به‌وسیله یک باریکه با ضخامت کم‌تر مدل‌سازی می‌شود. زمانی که نسبت تغییر کرنش در جهت ضخامت در دو ناحیه از حدی بالاتر رود، حد شکل‌دهی رخ می‌دهد. این مدل با سطوح تسلیم مختلفی مورد استفاده قرار گرفته است. در سال 2003 و 2005، بنابیک و همکارانش مدل سطح تسلیم خود را در مدل مارشینیاک پیاده‌سازی نموده‌اند[۱،2]. در سال 2007 عاصم‌پور و همکارانش اثر سطوح تسلیم مختلف را در مدل مارشینیاک مورد مطالعه قرار داده‌اند[3]. ایشان با اضافه نمودن معادله انرژی و حل معادله‌های چهارگانه به روش نیوتن-رافسون، محاسبه تنش و نمو کرنش انباشته را در ناحیه شیار بهبود بخشیده‌اند. محققان بسیاری با استفاده از تحلیل اجزاء محدود و مدل مارشینیاک حد شکل‌دهی را محاسبه کرده‌اند. در سال 2010، بنابیک و همکارانش مدل مارشینیاک و سطح تسلیم خود را در نرم‌افزار آباکوس پیاده‌سازی نموده‌اند[4]. در سال 2008 فایلینگن و همکارانش با ایجاد تغییراتی در مدل مارشینیاک، نمودار حد شکل‌دهی را با استفاده از تحلیل اجزاء محدود تصادفی محاسبه کرده‌اند[5]. ایشان تغییر ضخامت مدل مارشینیاک را به‌صورت یک میدان تصادفی در نظر گرفته‌اند.

آلیاژهای تیتانیوم به‌دلیل نسبت استحکام به وزن بالا، مقاومت در برابر خزش و مقاومت در برابر خوردگی کاربردهای بسیار زیادی در صنعت هوا و فضا دارد. در صنایع پزشکی به‌دلیل سازگاری با بدن انسان و در صنایع پتروشیمی به‌دلیل مقاومت چشم‌گیر در برابر خوردگی، از تیتانیوم استفاده فراوانی می‌شود. به‌دلیل این‌که بسیاری از قطعات با شکل‌دهی ورق تولید می‌شود و تیتانیوم دارای کاربردهای فراوان است، پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی ورق آلیاژ تیتانیوم دارای اهمیت فراوان می‌باشد. با این وجود، افزایش دقت پیش‌بینی، مستلزم توصیف دقیق رفتار مکانیکی است. در آلیاژهای تیتانیوم رفتار نامعمولی بروز می‌کند که علت آن را باید در ریزساختار بررسی نمود.

تیتانیوم در شکل بلوری معمولاً به دو صورت آلفا و بتا وجود دارد. شکل آلفا دارای بلورهای شش-وجهی[1]است. تعداد اندک سیستم‌های لغزش در این بلور سبب اهمیت یافتن مود تغییرشکل دوقلوشدن[2] می‌شود. علی‌رغم لغزش، دوقلوشدن تنها در یک جهت اتفاق می‌افتد. علاوه بر این، دوقلو شدن سبب تغییر جهت بلورها در طول فرآیند تغییر شکل و تکامل و دگرشکلی بافت چندبلوره[3] نیز می‌شود. به دلایل ذکر شده، فلزاتی با بلور شش-وجهی علاوه بر ناهمسانگردی پلاستیک، رفتاری متفاوت در کشش و فشار در راستاهای مختلف دارند.

برای مدل‌سازی این رفتار، محققان سطوح تسلیم متفاوتی ارائه نموده‌اند. نخستین بار در سال 1979، هاسفرد با اضافه کردن جمله‌های خطی به معادله تسلیم هیل، تلاشی برای مدل‌سازی عدم تقارن کشش و فشار کرده است[6]. در سال 1991، بارلات و همکارانش با استفاده از ایده هاسفرد، یک تبدیل خطی بر تانسور تنش کوشی معرفی نمودند[7]. با معرفی شش پارامتر ماده در این تبدیل، از تانسور تنش تبدیل یافته در معادله سطح تسلیم استفاده می‌شود. بارلات، کازاکا و همکارانش با استفاده از همین ایده در سال‌های 2004، 2006 و 2008 معادله سطح تسلیم خودشان را بهبود بخشیده‌اند[10،۹،8]. در سال 2012، خان و همکارانش با استفاده از این ایده که می‌توان ناهمسانگردی پلاستیک و عدم تقارن کشش و فشار را با دو تابع مجزا در سطح تسلیم در نظرگرفت، اصلاحاتی را در سطح تسلیم هیل 1948 انجام داده و سطح تسلیم جدیدی ارائه کرده‌اند[11].

در این پژوهش، روش مارشینیاک که در مقاله عاصم‌پور با اضافه نمودن معادله انرژی تعمیم یافته[3]، در پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی آلیاژ Ti64 تیتانیوم به‌کار رفته است. به‌منظور مطالعه‌ی اثر مدل سطح تسلیم در پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی، سطوح تسلیم کازاکا[9] و هیل 1948 در مدل مارشینیاک پیاده‌سازی شده است. نمودار حد شکل‌دهی در دمای 400°C محاسبه و با نتایج تجربی[12] مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد حد تسلیم کازاکا نسبت به سطوح تسلیم دیگر، تطابق بهتری با نتایج تجربی دارد. همچنین مشاهده شد استفاده از الگوریتم عددی لونبرگ-مارکوآت[4] در حل دستگاه معادله‌های غیرخطی، روند هم‌گرایی بهتری را نتیجه می‌دهد.

2- معادله‌های ساختاری

معادله‌های ساختاری در فاز پلاستیک شامل معادله‌ی سطح تسلیم، مدل کارسختی و قانون جریان می‌باشد. در ذیل به بیان مدل‌های سطح تسلیم و کارسختی به‌کار برده شده در این مقاله اشاره می‌شود. در این مقاله از قانون جریان همراه استفاده شده است.

2-1- سطح تسلیم

مفهوم تابع سطح تسلیم، یک تابع اسکالر در فضای شش بعدی تنش کوشی (یا 9 بعدی تنش پیولا) است که وضعیت یک نقطه مادی را از لحاظ تغییر شکل پلاستیک و الاستیک مشخص می‌کند. در این مقاله از مدل هیل 1948 و کازاکا 2006 در پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی استفاده شده است. با توجه به اینکه مدل مارشینیاک در حالت تنش صفحه‌ای تعریف می‌شود، در ادامه به بیان مختصر این دو مدل در حالت تنش صفحه‌ای پرداخته می‌شود.

2-1-1- هیل 1948

طبق این معادله سطح تسلیم در حالت تنش صفحه‌ای، تنش مؤثر در جهت نورد ورق طبق معادله‌ی (1) محاسبه می‌شود[13].

$$\bar{\sigma} = (\sigma_{11}^2 - 2P\sigma_{11}\sigma_{22} + Q\sigma_{22}^2 + 2R\sigma_{12}^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

در معادله‌ی (1)، ضرایب بر حسب ضرایب لانکفورد و یا با استفاده از تنش‌های تسلیم در آزمون کشش تک‌محوره و تنش تسلیم در آزمون کشش دومحوره برابر طبق رابطه‌های(2) و (3) قابل محاسبه است.

$$P = \left(\frac{R_0}{1 + R_0}\right)$$
$$Q = \left(\frac{R_0(1 + R_{90})}{R_{90}(1 + R_0)}\right)$$
$$R = \left(\frac{R_0 + R_{90}}{2R_{90}(1 + R_0)}\right)(2R_{45} + 1) \qquad (2)$$

$$P = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{90}}\right)^2$$
$$Q = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{90}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_b}\right)^2\right)$$
$$R = 2\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{45}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_b}\right)^2 \qquad (3)$$

R_0، R_{45} و R_{90} به‌ترتیب ضرایب لانکفورد در آزمون‌های کشش ساده در زوایای صفر، 45 و 90 درجه نسبت به جهت نورد و σ_0، σ_{45}، σ_{90} و σ_b به‌ترتیب تنش تسلیم آزمون کشش تک‌محوره در راستاهایی با زاویه‌های صفر، 45 و 90 درجه و تنش تسلیم در آزمون کشش دومحوره برابر می‌باشد. در این مقاله هرگاه ضرایب سطح تسلیم با ضرایب لانکفورد محاسبه شود، سطح تسلیم هیل 1 و در غیر این صورت هیل 2 نامیده می‌شود.

1- Hexagonal Closed Packed
2- Twinning Deformation
3- Poly-crystal
4- Levenberg-Marquardt

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.1.15.1]

2-1-2- کازاکا 2006

در این معیار، برای توصیف عدم تقارن کشش و فشار و ناهمسانگردی پلاستیک، طبق معادله‌ی (4) تبدیل خطی بر تانسور تنش انحرافی انجام می‌شود[9].

$$\Sigma_{ij} = L_{ijkl}S_{kl} \qquad (4)$$

در معادله‌ی(4)، Σ، S و L به‌ترتیب تانسور تنش تبدیل یافته، تانسور تنش انحرافی و تانسور تبدیل می‌باشد. تانسور تبدیل متقارن است، لذا در شکل نمایش ماتریسی ویت[1] و درحالت تنش صفحه‌ای به شکل رابطه(5) قابل نمایش است.

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & 0 \\ l_{12} & l_{22} & l_{23} & 0 \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

با استفاده از مقادیر اصلی تانسور تنش تبدیل‌یافته، تنش مؤثر در جهت نورد ورق به شکل معادله (6) توصیف می‌شود.

$$\bar{\sigma} = B[(|\Sigma_1| - k\Sigma_1)^a + (|\Sigma_2| - k\Sigma_2)^a + (|\Sigma_3| - k\Sigma_3)^a]^{\frac{1}{a}} \qquad (6)$$

در معادله (6)، متغیر B با توجه به معادله‌های (7) و (8) محاسبه می‌شود.

$$B = [(|\emptyset_1| - k\emptyset_1)^a + (|\emptyset_2| - k\emptyset_2)^a + (|\emptyset_3| - k\emptyset_3)^a]^{\frac{1}{a}} \qquad (7)$$

$$\emptyset_i = \frac{2}{3}L_{i1} - \frac{1}{3}L_{i2} - \frac{1}{3}L_{i3}\,,\ i = 1,2,3 \qquad (8)$$

بمنظور ارضای شرایط تحدب سطح تسلیم و تراکم‌ناپذیری پلاستیک، ضریب a باید عدد صحیح بزرگتر از یک و ضریب k باید در محدوده‌ی [1,1-] باشد[10]. ثوابت ماتریس تبدیل و ثابت k با توجه به آزمون‌های کشش و فشار تک‌محوره در زاویه‌های مختلف نسبت به جهت نورد و ضرایب لانکفورد در این آزمون‌ها قابل محاسبه است. ضرایب مدل با حل مسأله‌ی کمینه‌سازی مجموع مربعات خطا، طبق معادله (9) به‌دست می‌آید. شرایط تحدب باید در یافتن این ضرایب لحاظ شود.

$$\min f = \sum_{i=1}^{m} w^i \left(1 - \frac{\sigma_{pr}^i}{\sigma_{exp}^i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} w^i \left(1 - \frac{R_{pr}^i}{R_{exp}^i}\right)^2$$
$$-1 \le k \le 1\,,\ a = 4 \qquad (9)$$

برای حل معادله کمینه‌سازی از روش الگوریتم ژنتیک با جمعیت اولیه 200 و انتخاب 10 استعداد برتر در هر گام استفاده شده است.

2-2- کارسختی

در این مقاله، برای توصیف سطوح تسلیم ثانویه از کارسختی همسانگرد به شکل رابطه (10) استفاده شده است.

$$F(\sigma, \bar{\varepsilon}_p) = \bar{\sigma}(\sigma) - Y(\bar{\varepsilon}_p) \qquad (10)$$

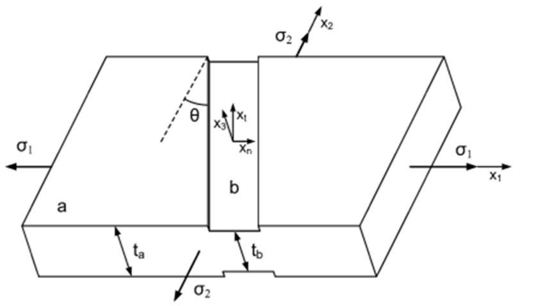
در معادله‌ی (9)، Y از تقریب منحنی تنش-کرنش آزمون کشش تک‌محوره در جهت نورد به‌دست می‌آید. برای تقریب این منحنی از معادله کارسختی سوئیف و وک به‌صورت معادله‌های (11)و (12)استفاده شده است[3].

$$Y(\bar{\varepsilon}_p) = p(q + \bar{\varepsilon}_p)^r \qquad (11)$$

$$Y(\bar{\varepsilon}_p) = p - (p - q)\exp(-r\bar{\varepsilon}_p) \qquad (12)$$

3- مدل مارشینیاک

در مدل مارشینیاک، ناهمگونی‌های ماده از قبیل اندازه و جهت‌گیری مختلف ریزدانه‌ها و ناخالصی‌ها به‌صورت یک ناهمگونی هندسی معادل در نظر گرفته می‌شود. این ناهمگونی هندسی به‌صورت یک شیار با ضخامت کم‌تر فرض می‌شود. همان‌طور که در شکل 1 مشاهده می‌گردد، ورق مستطیلی شکل به دو ناحیه همگن و غیرهمگن که به‌ترتیب با اندیس a و b نمایه شده‌اند، تقسیم‌بندی می‌شود.



شکل 1 ورق مستطیلی تحت بارگذاری دو محوره در مدل مارشینیاک

ناحیه a دارای ضخامت t_a و ناحیه b دارای ضخامت t_b می‌باشد. دستگاه مختصات $x_1x_2x_3$ در جهت نورد ورق، عمود بر جهت نورد و در جهت ضخامت تعریف می‌شود. شیار ناهمگن با محور x_2 زاویه θ می‌سازد. دستگاه مختصات $x_nx_tx_3$به نحوی تعریف می‌شود که x_n عمود بر دیواره شیار باشد.

این دو ناحیه با اعمال گام‌به‌گام کشش دو محوره به ناحیه همگن، تغییر شکل پلاستیک می‌دهند. به‌دلیل تفاوت ضخامت در این دو ناحیه، نمو کرنش پلاستیک متفاوت است. حد شکل‌دهی بر اساس این معیار زمانی رخ می‌دهد که در طول گام‌های اعمال بار، نسبت نمو کرنش انباشته در ناحیه b به نمو کرنش انباشته در ناحیه a از حدی فراتر رود. با توجه به شرایط تعادل در دیواره‌ی شیار و استفاده از تنش عمودی و برشی در مرز شیار، معادله‌های (13) و (14) برقرار است.

$$\sigma_{nn}^a t^a = \sigma_{nn}^b t^b \qquad (13)$$

$$\sigma_{nt}^a t^a = \sigma_{nt}^b t^b \qquad (14)$$

شرایط سازگاری هندسی ایجاب می‌کند که در جهت t طبق معادله (15) نمو کرنش برابر باشد.

$$d\varepsilon_{tt}^a = d\varepsilon_{tt}^b \qquad (15)$$

ابتدا نمو کرنش انباشته در ناحیه a، $d\bar{\varepsilon}^a$ مقدار اندکی فرض می‌شود. این مقدار در بیشتر موارد 0/0001 فرض شده است. انتخاب مقدار مناسب در روند همگرایی حل مؤثر است.

بدین‌ترتیب مقدار کرنش انباشته به‌صورت معادله‌ی(16) تصحیح می‌شود.

$$\bar{\varepsilon}_{new}^a = \bar{\varepsilon}_{old}^a + d\bar{\varepsilon}^a \qquad (16)$$

در معادله‌های سطح تسلیم همگن از درجه اول، نسبت تنش ثابت موجب ایجاد مسیرکرنش خطی می‌شود. معادله‌ی سطح تسلیمی که در رابطه‌ی (17) صدق کند، همگن از درجه اول نامیده می‌شود.

$$\sigma : \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} = \bar{\sigma} \qquad (17)$$

بنابراین مقدار $\alpha = \frac{\sigma_2^a}{\sigma_1^a}$ ثابت فرض می‌شود. با داشتن مقدار $\bar{\varepsilon}_{new}^a$، مقدار σ_y از معادله‌ی کارسختی قابل محاسبه است. بنابراین در معادله‌ی سطح تسلیم با توجه به نسبت ثابت $\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ مقدار σ_1 با توجه به سطح تسلیم همگن از درجه اول به‌صورت $\sigma_1^a = \frac{\sigma_y}{\bar{\sigma}_\alpha}$ به‌دست می‌آید. مقدار $\bar{\sigma}_\alpha$ با جایگزینی $\sigma_1^a = \alpha$ و $\sigma_2^a = 1$ در معادله سطح تسلیم محاسبه می‌شود. با محاسبه‌ی تانسور تنش، نمو کرنش با استفاده از قانون جریان پلاستیک همراه در جهت‌های 1 و 2 طبق رابطه‌های (18) و (19) قابل محاسبه است.

$$d\varepsilon_1^a = d\bar{\varepsilon}^a \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \qquad (18)$$

$$d\varepsilon_2^a = d\bar{\varepsilon}^a \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \qquad (19)$$

تانسور تنش و کرنش ناحیه a در دستگاه مختصات $x_1x_2x_3$مشخص شد. با استفاده از رابطه‌های (20)، (21) و (22)، تانسور تنش و کرنش ناحیه a در دستگاه مختصات $x_nx_tx_3$ تعیین می‌شود.

1- Voigt notation

$$\begin{bmatrix}\varepsilon^a_{nn} & \varepsilon^a_{nt}\\ \varepsilon^a_{nt} & \varepsilon^a_{tt}\end{bmatrix} = R\begin{bmatrix}\varepsilon^a_1 & 0\\ 0 & \varepsilon^a_2\end{bmatrix}R^T \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix}\sigma^a_{nn} & \sigma^a_{nt}\\ \sigma^a_{nt} & \sigma^a_{tt}\end{bmatrix} = R\begin{bmatrix}\sigma^a_1 & 0\\ 0 & \sigma^a_2\end{bmatrix}R^T \quad (21)$$

$$R = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \quad (22)$$

محاسبه کمیت‌های تنش و کرنش در ناحیه b به راحتی ناحیه a نیست، برای این منظور، باید دستگاه معادله‌های غیرخطی را که از شرایط تعادل و سازگاری نتیجه می‌شود، حل نمود. دو معادله اول از شرایط تعادل (معادله‌های (13) و (14)) طبق معادله‌های (23) و (24) حاصل می‌شود.

$$f\frac{\sigma^b_{nn}}{\sigma_y}-\frac{\sigma^a_{nn}}{\sigma_y} = 0 \quad (23)$$

$$f\frac{\sigma^b_{nt}}{\sigma_y}-\frac{\sigma^a_{nt}}{\sigma_y} = 0 \quad (24)$$

$$f = f_0\exp(\varepsilon^b_3-\varepsilon^a_3) \quad (25)$$

در معادله (25)، $f_0=\frac{t^b_0}{t^b_0}$ نسبت ضخامت اولیه ناحیه b به ناحیه a است. این پارامتر در پیش‌بینی حد شکل‌دهی مؤثر است و باید با استفاده از یک نقطه تجربی در نمودار حد شکل‌دهی کالیبره شود.

معادله سوم، با توجه به شرایط سازگاری هندسی طبق معادله (26) می‌باشد.

$$\frac{d\varepsilon^b_{tt}}{d\varepsilon^a_{tt}}-1 = 0 \quad (26)$$

با توجه به قانون جریان پلاستیک، نموهای کرنش طبق رابطه‌های (27)، (28) و (29) محاسبه می‌شود.

$$d\varepsilon^b_{tt} = d\bar\varepsilon^b\frac{\partial\bar\sigma}{\partial\sigma_{tt}} \quad (27)$$

$$d\varepsilon^b_{nn} = d\bar\varepsilon^b\frac{\partial\bar\sigma}{\partial\sigma_{nn}} \quad (28)$$

$$d\varepsilon^b_{tn} = d\bar\varepsilon^b\frac{\partial\bar\sigma}{\partial\sigma_{tn}} \quad (29)$$

بنابراین در معادله‌های (23)، (24) و (26)، $d\bar\varepsilon^b$، σ^b_{tt}، σ^b_{nt} و σ^b_{nn} مجهول است.

با محاسبه‌ی مجهول‌ها، در صورتی که $\frac{d\bar\varepsilon^b}{d\bar\varepsilon^a}\ge 10$ برقرار باشد، حد شکل‌دهی رخ داده است.در شکل 2 روند حل در روش مارشیناک آمده است.

حل دستگاه معادله‌های غیرخطی، روش‌های موجود در جعبه ابزار بهینه‌سازی نرم‌افزار متلب نظیر لونبرگ-مارکوآت، گوس-نیوتن، الگوریتم ژنتیک و ناحیه اعتماد[1] بررسی شده است. در دستگاه معادله‌های غیرخطی، مشتق سطح تسلیم نسبت به مؤلفه‌های تنش وجود دارد. در سطح تسلیم کازاکا، مشتق سطح تسلیم کازاکا با استفاده از قاعده زنجیره‌ای مطابق با معادله‌ی (30) محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial\bar\sigma}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{\partial\bar\sigma}{\partial\Sigma_m}\frac{\partial\Sigma_m}{\partial\Sigma_{kl}}\frac{\partial\Sigma_{kl}}{\partial\sigma_{ij}} \quad (30)$$

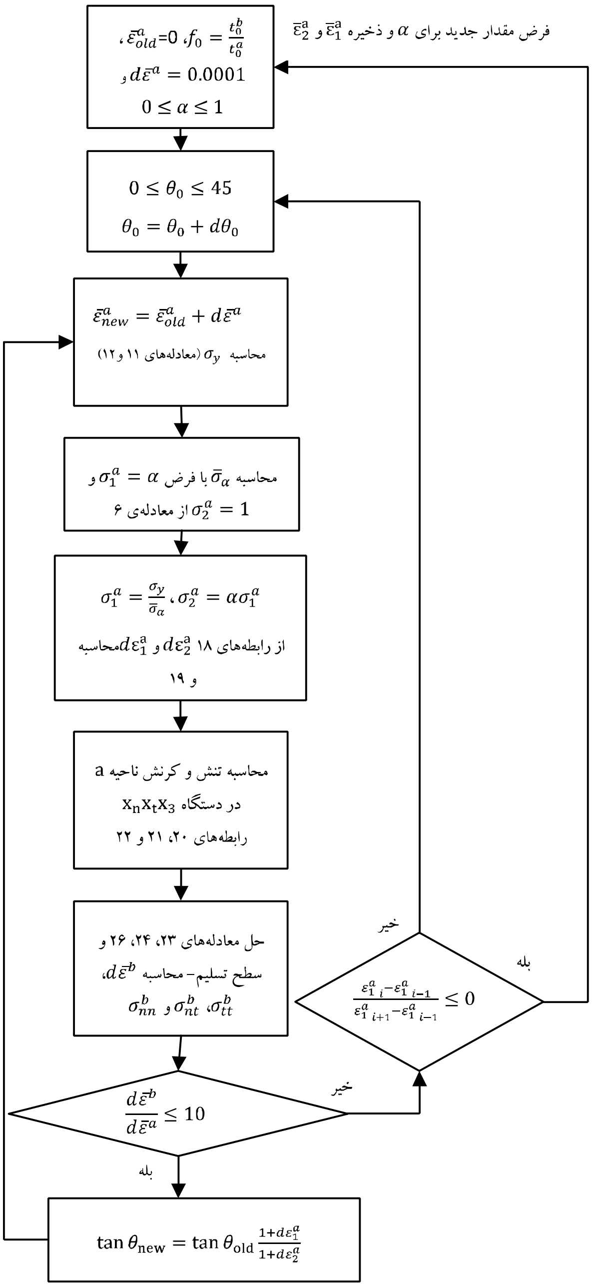
$\frac{\partial\bar\sigma}{\partial\Sigma_m}$، $\frac{\partial\Sigma_m}{\partial\Sigma_{kl}}$ و $\frac{\partial\Sigma_{kl}}{\partial\sigma_{ij}}$ به‌ترتیب مشتق تنش مؤثر نسبت به مقدارهای ویژه تانسور تنش تبدیل‌یافته، مشتق مقدارهای ویژه تانسور تنش تبدیل‌یافته نسبت به مؤلفه‌های تانسور تنش تبدیل‌یافته و مشتق مؤلفه‌های تناسور تنش تبدیل یافته نسبت به مؤلفه‌های تانسور تنش است. در حالت تنش صفحه‌ای، $\frac{\partial\Sigma_m}{\partial\Sigma_{kl}}$ مثلاً برای $m = 1$ طبق معادله‌ی (31)، (32) و (33) محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial\Sigma_1}{\partial\Sigma_{xx}} = \frac{1}{2}+\frac{\Sigma_{xx}-\Sigma_{yy}}{2\sqrt{(\Sigma_{xx}-\Sigma_{yy})^2+4{\Sigma_{xy}}^2}} \quad (31)$$

$$\frac{\partial\Sigma_1}{\partial\Sigma_{yy}} = \frac{1}{2}-\frac{\Sigma_{xx}-\Sigma_{yy}}{2\sqrt{(\Sigma_{xx}-\Sigma_{yy})^2+4{\Sigma_{xy}}^2}} \quad (32)$$

$$\frac{\partial\Sigma_1}{\partial\Sigma_{xy}} = \frac{\Sigma_{xy}}{\sqrt{(\Sigma_{xx}-\Sigma_{yy})^2+4{\Sigma_{xy}}^2}} \quad (33)$$

1- Trust regien



شکل 2 روند حل در روش مارشینیاک

برای همان‌طور که در معادله‌های (31) تا (33) مشاهده می‌شود، به ازای $\Sigma_{xx}=\Sigma_{yy}$ و $\Sigma_{xy}=0$ ابهام و ناپیوستگی در مشتق‌های سطح تسلیم وجود دارد، بدین ترتیب در مشتق مرتبه‌های بالاتر نیز ابهام و ناپیوستگی وجود خواهد داشت. این موضوع و شدت غیرخطی بودن مسأله منجر به عدم تعریف مناسب و یا تکین بودن ژاکوبین در روش‌های عددی حل دستگاه معادله‌های غیرخطی نظیر نیوتن-رافسون و بروز واگرایی می‌شود. طبق شکل 2 در روش مارشینیاک با حل گام‌به‌گام نیاز به چندین مرتبه حل دستگاه معادله‌های غیرخطی می‌باشد. در بین روش‌های موجود در جعبه ابزار متلب، با استفاده از روش لونبرگ-مارکوآت نتایج بهتری به‌دست آمده است.

به ازای مقادیر $0\le\theta\le90$، طبق شکل 2 روند حل انجام می‌شود. مقادیر کمینه ε^a_1 و ε^a_2 به عنوان نقاط نمودار حدشکل‌دهی گزارش می‌شود. نقاط مختلف نمودار حد شکل‌دهی به ازای مقدارهای مختلف $0\le\alpha\le1$ به‌دست می‌آید.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.1.15.1]

جدول 1 مقادیر تجربی تنش‌های تسلیم بر حسب مگاپاسکال و ضرایب لانکفورد[12]

کمیت* / دما	25°C - دمای اتاق	400°C
σ_0^T	1000/00	681/00
σ_{90}^T	1020/00	691/00
σ_{45}^T	972/00	591/00
σ_b^T	1093/80	744/90
σ_0^C	1106/30	753/40
R_0	0/40	0/60
R_{90}	0/61	0/51
R_{45}	1/19	1/26
R_b	1/00	1/00

* C ،T و b به‌ترتیب نمایانگر آزمون کشش ساده، فشار ساده و کشش دو محوره است. زوایا نسبت به جهت نورد می‌باشد.

جدول 2 ثابت‌های سطح تسلیم کازاکا a=4

کمیت / دما	25°C - دمای اتاق	400°C
L_{11}	0/7535	-0/0655
L_{12}	-0/1555	0/3831
L_{13}	0/1714	0/2971
L_{22}	0/6193	0/0178
L_{23}	-0/4482	0/5392
L_{33}	-0/9965	0/8012
L_{44}	-1/0000	0/5313
k	-0/0574	0/05594

4- آلیاژ Ti-6AL-4V

دمای استحاله آلیاژ Ti-6AL-4V از فاز آلفا به فاز بتا در حدود 980°C است[12]. تنش‌های تسلیم و ضرایب لانکفورد این آلیاژ در دمای اتاق و دمای 400°C برای ورق با ضخامت 2 میلی‌متر در جدول 1 آمده است.

ورق، مطابق با استاندارد AMS 4911 به مدت 30 دقیقه در دمای 788°C (1450°F) عملیات حرارتی شده است[12].

اودنبرگر و همکارانش، پارامترهای سطح تسلیم کازاکا 2006 را به ازای a=2 و a=8 محاسبه نموده‌اند[14]. به‌دلیل بالا رفتن دقت پیش‌بینی ضرایب لانکفورد و در عین حال کاهش شدت غیرخطی بودن مسأله، در این مقاله از ضریب a=4 استفاده شده است. بر اساس داده‌های جدول 1، پارامترهای سطح تسلیم کازاکا 2006 در جدول 2 به ازای a=4 آمده است. جهت 1، 2 و 3 به‌ترتیب جهت نورد ورق، جهت عمود بر نورد ورق و جهت ضخامت در نظر گرفته شده است. ضرایب مدل با حل مسأله‌ی کمینه‌سازی مجموع مربعات خطا، طبق معادله (9) به‌دست می‌آید.

ضرایب کارسختی سوئیف و وک با استفاده از تقریب منحنی کشش در جهت نورد ورق در جدول3 و 4 آمده است.

5- نتایج

ابتدا پیش‌بینی مدل‌های سطح تسلیم از تنش‌های تسلیم و ضرایب لانکفورد مقایسه می‌شود. در شکل 3 و 4 سطح تسلیم در حالت تنش دومحوره آمده است. عدم تقارن کشش و فشار در سطح تسلیم کازاکا قابل مشاهده است. ضرایب لانکفورد در بردار یکه عمود بر سطح تسلیم مؤثر است. تفاوت بردار یکه عمود بر سطح تسلیم کازاکا و سطح تسلیم هیل 2 که در شکل‌های 3 و 4 به‌طور مثال در حالت کشش تک محوره در راستای نورد ورق (σ_2 = 0) و کشش تک محوره در راستای عمود بر جهت نورد (σ_1 = 0) مشاهده می‌گردد، ناشی از پیش‌بینی بهتر سطح تسلیم کازاکا از ضرایب لانکفورد است.

در شکل‌های 5 و 6 پیش‌بینی سطوح تسلیم کازاکا و هیل از ضریب لانکفورد در آزمون کشش تک محوره در راستایی با زاویه θ نسبت به جهت نورد در دماهای 25°C و 400°C با مقادیر تجربی مقایسه شده است، پیش‌بینی سطح تسلیم هیل 2 که با مقادیر تنش‌های تسلیم محاسبه شده است، از ضریب لانکفورد نسبت به مقادیر تجربی فاصله زیادی دارد، در مقابل پیش‌بینی سطح تسلیم هیل 1 و کازاکا به مقادیر تجربی نزدیک‌تر است.

در شکل‌های 7 و 8 پیش‌بینی سطوح تسلیم از تنش تسلیم در آزمون کشش تک محوره در راستایی با زاویه θ نسبت به جهت نورد در دماهای 25°C و 400°C با مقادیر تجربی مقایسه شده است. پیش‌بینی سطح تسلیم هیل 1 که با مقادیر ضرایب لانکفورد محاسبه شده، از تنش‌های تسلیم نسبت به مقادیر تجربی فاصله دارد. در دمای اتاق، سطح تسلیم هیل 1 قادر به پیش‌بینی صحیح ناهمسانگردی در مقدار تنش تسلیم در زاویه‌های 22/5 و 67/5 نیست. در مقابل سطح تسلیم کازاکا پیش‌بینی نزدیک‌تری از این رفتار ناهمسانگرد فلز تیتانیوم دارد.

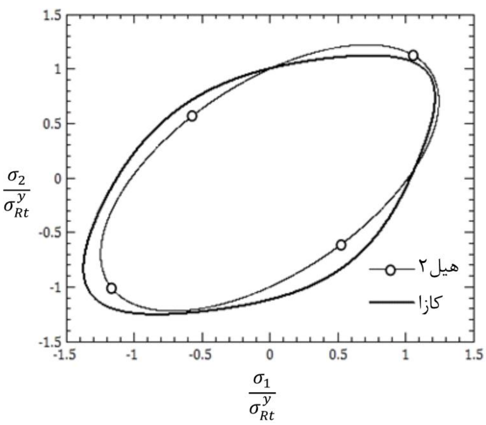
در مجموع، با توجه به شکل‌های 3 تا 8، سطح تسلیم هیل قادر به توصیف هم‌زمان ناهمسانگردی در ضرایب لانکفورد و تنش‌های تسلیم نیست، با توجه به اینکه در این سطح تسلیم فقط 4 ثابت در صفحه تعریف شده است، این نقیصه توجیه می‌شود.

جدول 3 ثابت‌های معادله کارسختی سوئیف

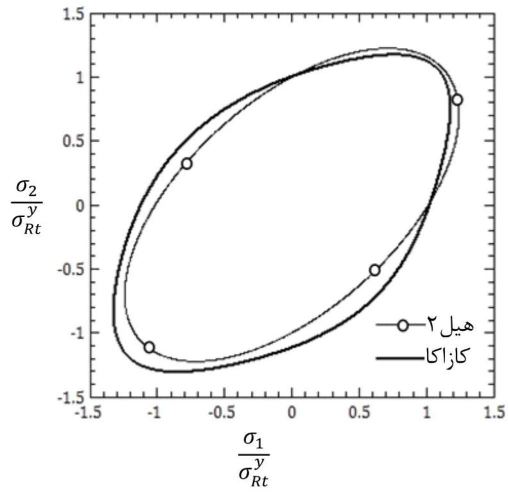
کمیت / دما	25°C - دمای اتاق	400°C
p	1362	883/6
q	0/0324	0/0136
r	0/0913	0/0608

جدول 4 ثابت‌های معادله کارسختی وک

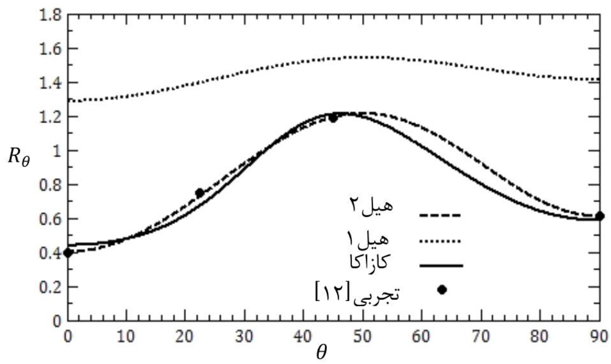
کمیت / دما	25°C-اتاق	400°C
p	1185	798/9
q	1374	915/7
r	12/77	16/65



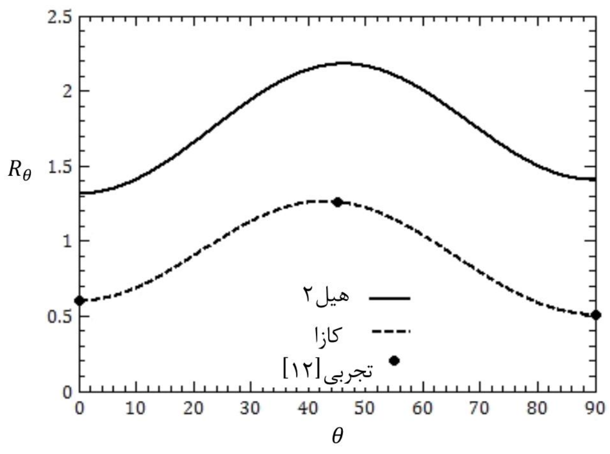
شکل 3 مقایسه سطح تسلیم کازاکا و هیل در حالت تنش دومحوره آلیاژ تیتانیوم در دمای اتاق



شکل 4 مقایسه سطح تسلیم کازاکا و هیل در حالت تنش دومحوره آلیاژ تیتانیوم در دمای 400°C



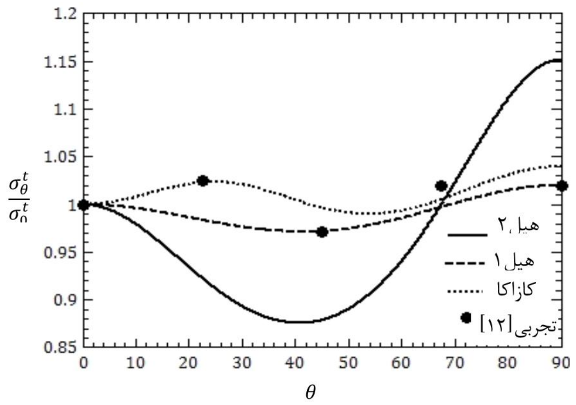
شکل 5 ضریب لانکفورد در آزمون کشش تک‌محوره با زاویه θ نسبت به جهت نورد ورق در دمای اتاق



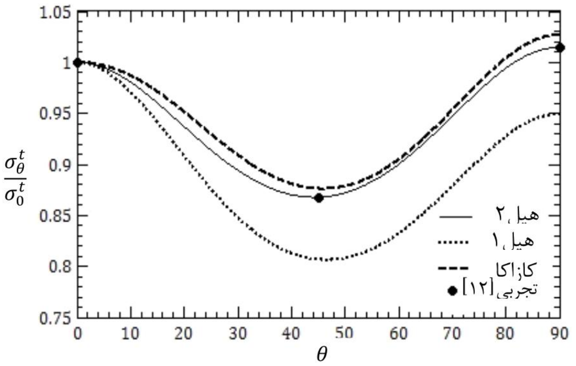
شکل 6 ضریب لانکفورد در آزمون کشش تک‌محوره با زاویه θ نسبت به جهت نورد ورق در دمای 400°C

علاوه بر این در سطح تسلیم هیل رابطه $(\frac{\sigma_0^T}{\sigma_{90}^T}-1)(\frac{R_0}{R_{90}}-1) \geq 0$ برقرار است، در برخی مواد مانند آلیاژ تیتانیوم Ti-6AL-4V در دمای 400°C طبق جدول 1 این رابطه برقرار نیست. سطح تسلیم هیل در این شرایط پیش‌بینی دقیقی از ناهمسانگردی فلز ندارد.

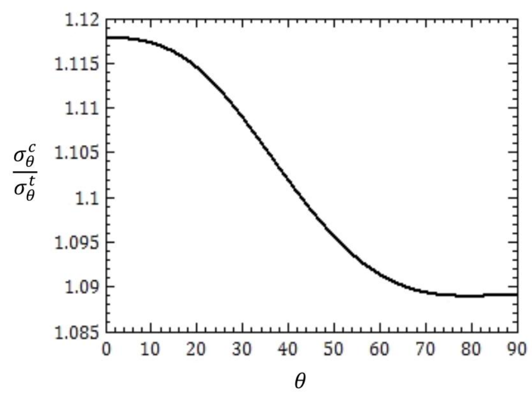
در شکل 9، پیش‌بینی سطح تسلیم کازاکا از نسبت تنش تسلیم فشاری به کششی در آزمون تک‌محوره در راستایی با زاویه θ نسبت به جهت نورد در دمای 400°C آمده است.



شکل 7 نسبت تنش تسلیم در آزمون کشش تک‌محوره با زاویه θ نسبت به جهت نورد ورق به تنش تسلیم در جهت نورد ورق در دمای اتاق



شکل 8 نسبت تنش تسلیم در آزمون کشش تک‌محوره با زاویه θ نسبت به جهت نورد ورق به تنش تسلیم در جهت نورد ورق در دمای 400°C

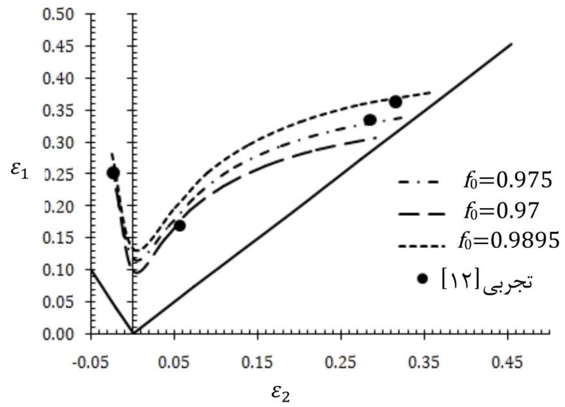


شکل 9 نسبت تنش تسلیم فشاری به کششی در آزمون تک‌محوره با زاویه θ نسبت به جهت نورد ورق به تنش تسلیم در جهت نورد ورق در دمای 400°C (سطح تسلیم کازاکا)

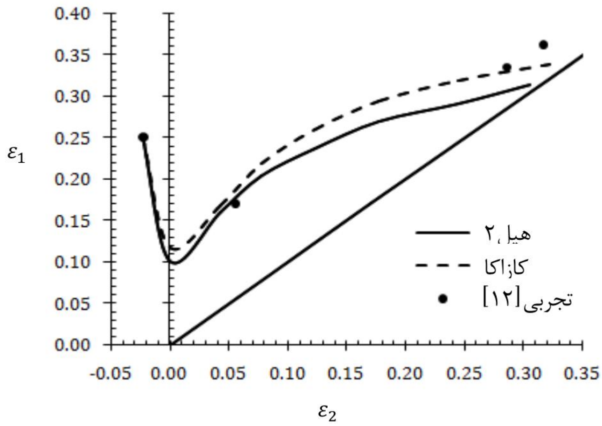
سطح تسلیم هیل قادر به پیش‌بینی این عدم تقارن کشش و فشار نیست. در شکل 10، تأثیر پارامتر f_0 در پیش‌بینی حد شکل‌دهی ورق تیتانیوم در دمای 400°C و با سطح تسلیم کازاکا نشان داده شده است.

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، این پارامتر با توجه به روابط تجربی و یا با داشتن یک نقطه تجربی از نمودار حد شکل‌دهی تنظیم می‌شود. به عنوان مثال در شکل 10 مقدار بهینه f_0 برابر با 0/975 می‌باشد.

در شکل 11، پیش بینی نمودار حد شکل‌دهی در دمای 400°C به‌وسیله سطوح تسلیم کازاکا و هیل با هم مقایسه شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، سطح تسلیم کازاکا تطابق بهتری با نتایج تجربی دارد. علت این امر را باید در بیان بهتر و دقیق‌تر این سطح تسلیم از ضرایب لانکفورد و تنش‌های تسلیم جویا شد.



شکل 10 تأثیر پارامتر f_0 در پیش‌بینی حد شکل‌دهی ورق تیتانیوم در دمای 400°C و سطح تسلیم کازاکا



شکل 11 مقایسه پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی به‌روش مارشینیاک با سطح تسلیم کازاکا و هیل 2 در دمای 400°C

در شکل‌های قبل، توصیف صحیح‌تر سطح تسلیم کازاکا از ضرایب لانکفورد و تنش‌های تسلیم نشان داده شده است.

بررسی پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی به‌روش مارشینیاک با معادله‌های کارسختی سوئیفت و وک نشان می‌دهد که به‌کارگیری این دو معادله تأثیر چندانی در پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی ندارد، در این پژوهش، نتایج یکسانی با استفاده از این دو معادله کارسختی به‌دست آمد.

6- نتیجه گیری

در این مقاله، نمودار حد شکل‌دهی ورق آلیاژ تیتانیوم در دمای 400°C به‌روش مارشیناک پیش‌بینی شد، در پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی از سطح تسلیم هیل و کازاکا استفاده شد، پیش‌بینی با استفاده از سطح تسلیم کازاکا در مقایسه با سطح تسلیم هیل تطابق بهتری با نتایج تجربی دارد، با توجه به اینکه سطح تسلیم کازکا دارای ثابت‌های درون صفحه بیشتری نسبت به سطح تسلیم هیل است، پیش‌بینی سطح تسلیم کازاکا از ناهمسانگردی تنش‌های تسلیم و ضرایب لانکفورد در مقایسه با سطح تسلیم هیل بهتر است، بنابراین دقت بالاتر پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی ورق تیتانیوم با استفاده از سطح تسلیم کازاکا را می‌توان در توصیف بهتر این سطح تسلیم از رفتار ماده و به‌خصوص ناهمسانگردی در ضرایب لانکفورد توجیه نمود.

7- فهرست علائم

$\bar{\sigma}$	تنش مؤثر
$d\bar{\varepsilon}^a$	نمو کرنش پلاستیک انباشته در ناحیه همگن
$d\bar{\varepsilon}^b$	نمو کرنش پلاستیک انباشته در ناحیه غیر همگن
$\bar{\varepsilon}_p$	کرنش پلاستیک

8- مراجع

[1] D. Banabic, S. Comsa, P. Jurco,G. Paraianu, L. Julean,FLD theoretical model using a new anisotropic yield criterion, *Journal of Material Processing Technology,* Vol. 157, No. 1, pp. 23-27, 2004.

[2] D. Banabic, H. Aretz, L. Paraianu, P.Jurco, Application of various FLD modelling approaches,*Journal of Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering,* Vol. 13, No. 5, pp.759-769, 2005.

[3] M. Ganjiani, A. Assempour, An improved analytical approach for determination of forming limit diagrams considering the effects of yield functions, *Journal of Materials Processing Technology,* Vol. 182, No. 1–3, pp. 598-607, 2007.

[4] Banabic, D., *Advanced Methods in Material Forming,* First Edittion,pp. 151-165, New York: Springer Berlin Heidelberg, 2010.

[5] Fyllingen, O.S. Hopperstad, O. G. Lademo, M. Langseth, Estimation of forming limit diagrams by the use of the finite element method and Monte Carlo simulation, *Computers & Structures,* Vol. 87, No. 1–2, pp. 128-139, 2009.

[6] W. Hosford, On the yield loci of anisotropic cubic metals, *Proceedings of the Seventh North American Metal working Conference SME,* Dearborn, United States, 1979, pp. 191–197 .

[7] F. Barlat, D.J. Lege, J.C. Brem, A six-component yield function foanisotropic materials, *International Journal of Plasticity,* Vol. 7, No. 7, pp. 693–712, 1991.

[8] O. Cazacu, F. Barlat,A criterion for description of anisotropy and yield differential effects in pressure-insensitive metals, *International Journal of Plasticity,* Vol. 20, No. 11, pp. 2027-2045, 2004.

[9] O. Cazacu, B. Plunkett, F. Barlat, Orthotropic yield criterion for hexagonal closed packed metals, *International Journal of Plasticity,* Vol. 22, No. 7, pp. 1171-1194, 2006.

[10] B. Plunkett, O. Cazacu, F. Barlat,Orthotropic yield criteria for description of the anisotropy in tension and compression of sheet metals, *International Journal of Plasticity,* Vol. 24, No. 5, pp. 847-866, 2008.

[11] A.S. Khan, SH. Yu,Deformation induced anisotropic responses of Ti–6Al–4V alloy. Part I: Experiments, *International Journal of Plasticity,* Vol. 38, pp. 1-13, 2012.

[12] E.L. Odenberger, J. Hertzman, P. Thilderkvist, M. Merklein, A. Kuppert, T. Stöhr, J. Lechler, M. Oldenburg, Thermo-mechanical sheet metal forming of aero engine components in Ti-6Al-4V PART 1: Material characterisation, *International Journal of Material Forming,* Vol. 6, No. 3, pp. 391-402, 2012.

[13] D. Banabic, *Metal Forming Processes: Constitutive Modelling and Numerical Simulation,* First Edittion, pp. 45-52, Berlin: Springer, 2010.

[14] E.L. Odenberger, M. Schill, M. Oldenburg, Thermo-mechanical sheet metal forming of aero engine components in Ti-6Al-4V PART 2: constitutive modelling and validation, *International Journal of Material Forming,* Vol. 6, No. 3, pp. 403-416, 2012.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.1.15.1]