

مدل مکانیک غیرخطی اندرکنش سازه نامتقارن با جداساز لرزه‌ای تحت بارهای هارمونیک و زلزله و مطالعه پدیده‌های غیرخطی آن

مجید امین افشار^{۱*}، سپهر آقایی‌پور^۲

۱- استادیار، مهندسی عمران-سازه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین
 ۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی عمران-سازه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین
 * قزوین، صندوق پستی ۳۴۱۴۹-۱۶۸۱۸

چکیده

امروزه، تجهیز ساختمان با جداساز لرزه‌ای از روش‌های متداول مقاوم‌سازی لرزه‌ای ساختمان‌هاست. هدف اصلی این روش، کاهش جابه‌جایی نسبی طبقات سازه و در عوض ایجاد حرکت جسم صلب در آن از طریق نصب مصالحی نرم و انعطاف‌پذیر به نام الاستومر در پای ساختمان است. با توجه به کرت اجرای ساختمان‌های دارای پلان نامنظم و نیز شدت خسارت‌های ناشی از زلزله به این نوع سازه‌ها، در این مقاله، مکانیک اندرکنشی سازه نامتقارن جداسازی شده طالعه می‌شود و معادلات حرکت آن در دو دستگاه مختصات، یکی نصب شده بر پایه ساختمان (مختصات کلی) و دیگری نصب شده بر کف طبله جداساز در حال دوران (مختصات محلی)، ارائه می‌شود. در دیدگاه متداول، معادلات حرکت در سیستم مختصات نخست به فرم خطی بدست می‌آیند، حال آنکه در نگرش جدید پیشنهادی این تحقیق، بررسی مکانیک حرکت در سیستم مختصات دومی، به معادلاتی از نوع غیرخطی منجر می‌شود. سه نوع سازه با نسبت‌های فرکانس طبیعی هم‌بسته پیچشی-جانبی به فرکانس طبیعی جهت نمتقارن معرفی می‌شود. پاسخ‌های دو مدل خطی و غیرخطی برای ۳ نوع سازه، تحت اثر تحریکات هارمونیک و زلزله در تحلیل تاریخچه زمانی و محتواهای فرکانسی با یکدیگر مقایسه می‌شوند. مشاهده می‌شود که در برخی موارد، تفاوت‌هایی بین دو مدل خطی و غیرخطی وجود دارد. سپس، بروز برخی از پدیده‌های غیرخطی نظیر اشباع، انتقال انرژی بین مدها و جابه‌جایی صلب در این نوع سازه‌ها بررسی می‌شود.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: ۱۹ مرداد ۱۳۹۳

پذیرش: ۱۵ شهریور ۱۳۹۳
ارائه در سایت: ۱۰ آبان ۱۳۹۳

کلید واژگان:
مکانیک غیرخطی
جداساز لرزه‌ای
سازه نامتقارن
پدیده‌های غیرخطی

Nonlinear Mechanic Model of Asymmetric Base-Isolated Structures Interaction against Harmonic Loads and Earthquake, and Study of Related Nonlinear Phenomena

Majid Amin Afshar^{1*}, Sepehr Aghaei Pour²

۱- Department of Technology and Engineering, Emam Khomeini International University, Qazvin, Iran

۲- Department of Technology and Engineering, Emam Khomeini International University, Qazvin, Iran

* P.O.B. 34149-16818 Qazvin, Iran, mafshar@eng.ikiu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
 Received 10 August 2014
 Accepted 06 September 2014
 Available Online 01 November 2014

Keywords:
 Nonlinear Mechanics
 Base Isolator
 Asymmetric Structure
 Nonlinear Phenomena

ABSTRACT

Today, base isolation of buildings is a conventional approach to earthquake resistance. The main objective is to reduce displacement of the structure by movement of elastomeric bearings installed on the base of structures on the ground. Considering widespread construction of asymmetric buildings as well as the intensity of their damages resulting from earthquake, the present research covers study of interaction mechanics of asymmetric base-isolated structures, where the equations of motion are presented in two coordinates, one fixed on the building base (global coordinate) and the other on the torsional isolation level (local coordinate). In this conventional approach, the equations of motion are calculated on linear form in the initial coordinate system, whereas in the new approach proposed in this research, the motion mechanics analysis in the secondary coordinate system will lead to non-linear equations. Three types of structures are proposed with ratio of torsional-lateral correlated natural frequency on asymmetric natural frequency. Responses of both linear and nonlinear methods for the three types of structures under harmonic effects and earthquake are compared while analyzing time history and frequency solutions. Some differences are observed between the linear and nonlinear methods. Then, some non-linear phenomena such as saturation, energy transfer between modes, and rigid displacement in such structures are also analyzed.

مخرب زلزله در ساختمان با پلان نامتقارن بسیار بیشتر از ساختمان‌های منظم است. لذا، مطالعه بیشتر در بررسی رفتار سازه‌های نامتظم تحت زلزله الزامی به نظر می‌رسد. از طرفی، در مدت ۴۰ سال گذشته مبحث جداساز

بسیاری از خسارت‌های ساختمان‌ها تحت تاثیر زلزله، ناشی از تحریکات زلزله و پیچشی به واسطه نامنظمی پلان است. بسیاری از تحقیق‌ها نشان داده که اثر

۱- مقدمه

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Amin Afshar, S. Aghaei Pour, Nonlinear Mechanic Model of Asymmetric Base-Isolated Structures Interaction against Harmonic Loads and Earthquake, and Study of Related Nonlinear Phenomena, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 16, pp. 152-162, 2015 (In Persian)

واقعیت، حتی کوچکترین پاسخ‌ها و تحریکات به بروز پدیده‌های غیرعادی و عجیب منجر خواهد شد. انتقال انرژی بین مدهای طبیعی، چرخه، اشباع، پرش و غیره از پدیده‌های غیرخطی هستند که در مدل خطی مشاهده نمی‌شوند. کنکاش و برسی این پدیده‌ها در حوزه اندرکنشن‌های غیرخطی، به عنوان شاخه‌ای از علم مکانیک غیرخطی، صورت می‌گیرد [10].

تحقیق‌های بسیاری نیز به بررسی رفتار دینامیکی در سیستم‌های مکانیک غیرخطی پرداختند. به عنوان مثال، می‌توان به همبستگی غیرخطی مدهای چرخشی و غلتشی در حرکت کشته‌ها به واسطه امواج بزرگ [11]، آونگ صلب با یک جرم متمرکز تحت اثر نیروی بازگرداننده جاذبه یا یک فنر پیچشی [12]، حرکات اجباری همکام در دو نوسانگر همبسته مرتبه دوم [13]، سیستم‌های آونگ-فنر تحت اثر بار هارمونیک [14-16]، اتصال انعطاف‌پذیر میله با مکانیسم لغزنده [17]، ارتعاشات آزاد یک نانو صفحه تکلایه بر مبنای الاستیسیته غیرمحلی [18] و یک تیر مایل تحت اثر بار متحرک [19] اشاره کرد.

تا به حال در تمام تحقیق‌های صورت گرفته در زمینه دینامیک سازه‌های نامتقارن جداسازی شده، درجات آزادی سیستم در امتداد محورهای ثابت دستگاه مختصات کلی تعریف شده‌اند. نتیجه این نگرش متداول، ارائه معادلات حاکم بر حرکت سازه جداسازی شده به فرم خطی است. این در حالی است که راستای محورهای معرف پارامترهای سختی سازه، ثابت نبوده و امتداد آن‌ها با زاویه پیچش کف جداساز دوران می‌کند. این نگرش جدید به مشخصات سازه‌ای، منجر به تغییرات چشمگیر در معادلات دینامیکی حاکم بر رفتار همبسته پیچشی-جانبی سازه‌های جداسازی شده نامنظم (فرم غیرخطی) خواهد شد. هدف در این تحقیق ارائه مدل غیرخطی معادلات حرکت برای سازه جداسازی شده نامتقارن یک طرفه و مقایسه آن با مدل خطی متداول است. در تحلیل عددی، 3 نوع سازه انتخاب می‌شود، که در یکی از آن‌ها تفاضل اولین و دومین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی سازه و جداساز برای فرکانس اول جهت نامتقارن است و در دیگری فرکانس اول پیچشی-جانبی جهت نامتقارن 2 برابر فرکانس اول جهت نامتقارن است و حال آنکه هیچ یک از دو شرط فوق در سازه آخر فراهم نیست. از این‌رو، پاسخ‌های دو مدل در این 3 نوع سازه، تحت اثر تحریکات هارمونیک و زلزله کوبه، با یکدیگر مقایسه می‌شوند و برخی پدیده‌های غیرخطی به واسطه غیرخطی بودن اینترسی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

2- معادلات حرکت مدل

یک سازه یک طبقه جداسازی شده با پلان نامتقارن یک‌طرفه مورد بررسی قرار می‌گیرد. اساس مقاله بر پایه یک مدل سازه‌ای با دو جرم قرار دارد. جرم m_s نماینده روسازه (S) ساختمان و m_b جرم کف پایه (B) در بالای سیستم جداجر است. پارامترهای سازه‌ای نظیر سختی و میرایی جهت متقاضن (X) در سازه با k_{xs} و c_{xs} و در جداجر با K_{xb} و C_{xb} نشان داده می‌شود (شکل 1). همان‌طور که در شکل 2 نشان داده شده، پیکربندی فرضی پلان نامتقارن یک‌جهته سازه و جداساز را تحت بارهای تحریکات زمین لرزه r_g در دو امتداد X و Z، درنظر بگیرید. این ساختمان دارای دیافراگم کف صلب با توزیع پکنواخت جرم و قاب‌های مسطح قرار گرفته در دو امتداد متعامد، است. در این تحقیق دو دستگاه مختصات تعریف می‌شود. دستگاه مختصات اول نصب شده در پایه ساختمان [20]. دستگاه مختصات کلی XYZ است و دومی نصب شده برک جداساز، دستگاه مختصات محلی $x_0y_0z_0$ است. مبدأ این دستگاه مختصات چرخان مرکز جرم جداساز است. دستگاه مختصات چرخان با زاویه

لرزه‌ای به صورت یک واقعیت علمی و کاربردی در آمده است و این به واسطه تکیه‌گاه‌های چند لایه استومریک نصب شده در پای ساختمان هاست. به گونه‌ای که خسارات ناشی از زلزله در ساختمان‌های نامنظم را به طور قابل توجهی کاهش می‌دهد [1].

در بیشتر تحقیقات گذشته، مدل خطی سازه جداسازی شده در سیستم مختصات کلی مورد بررسی قرار گرفته است. تنا کولنگا و گومز ساپرون [2]، به بررسی پاسخ‌های یک سازه جداسازی شده نامتقارن با خروج از مرکزیت جرم در روسازه تحت زلزله پرداختند. ایشان در تحقیق خود روی یک ساختمان 3 طبقه با پلان نامتقارن در سختی المان‌های مقاوم همراه با خروج از مرکزیت جرم، تأثیر جداجر لرزه‌ای LRB¹ را در کاهش اثرات پیچشی بررسی نمودند. همچنین، تأثیر مقادیر مختلف نسبت فرکانس پیچشی به جانشی در روسازه را مورد تحلیل قرار دادند. تنا کولنگا در کار دیگر خود به همراه کروز [3]، بر روی مدل قلبی تحقیق خود [2]، کارهای گسترده‌ای انجام داد. به این ترتیب که تأثیرات خروج از مرکزیت جرم روسازه و خروج از مرکزیت در سیستم جداجر را مورد تحلیل قرار داد و محدوده زمان تناوب را بین 1/5 تا 3 ثانية در نظر گرفت و مقادیر مختلف پاسخ را بدست آورد. همچنین، تنا کولنگا و کروز [4] ضمن بررسی کارهای صورت گرفته در مطالعات قبلی خود، تأثیر خروج از مرکزیت سختی در روسازه را نیز بررسی کردند. آقای داللیرا و همکارانش [5]، نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی از سازه نامتقارن خطی، با دمپرهای اصطکاکی و ویسکوالاستیک را بررسی نمودند. نتایج براساس جرم و سختی مدل 6 طبقه نامتقارن همراه با دمپرهای اصطکاکی ارائه شد که البته با دمپرهای ویسکوالاستیک نیز نتایج یکسانی بدست آمد. آقای داللیرا و همکاران در فعالیتی دیگر [6]، پاسخ زلزله را برای سازه جداسازی شده و با همبستگی پیچشی-جانبی بررسی کردند. هدف انسانی ارائه روند ساده برای تخمین جابه‌جاوی لبه سازه و جداساز بود. همچنین، آن‌ها [7] سازه را به صورت دو بخش مجزا جداساز و سازه رو بنا در نظر گرفتند. سازه رو بنا به صورت یک جسم صلب تحت پاسخ شتاب عمل می‌کرد که این ساده‌سازی نیز نتایج خوبی در تخمین پاسخ سیستم به همراه داشت. آقایان کیلار و کورن [8]، سعی در درک بهتر رفتار سازه جدا شده نامتقارن داشتند. آن‌ها حالات مختلفی از سازه بتن آرمه 4 طبقه جداسازی شده با پراکنده‌گاهی ایجاد کردند. آن‌ها مشاهده کردند، هنگامی که مرکز جرم منطبق بر مرکز پراکنده‌گی جداساز باشد، اثرات پیچشی را در سیستم جداسازی کاهش می‌دهد و همچنین خسارت بیشتری در المان‌های مقاوم جهت انتعاف‌پذیرتر (دور از مرکز سختی) ایجاد می‌شود. آقای شربتدار و همکاران [9] به ارائه پاسخ لرزه‌ای سازه جداسازی شده با جداجرهای LRB² تحت حرکت زمین نزدیک گسل پرداختند. آنها مشاهده کردند که جابه‌جاوی‌های بزرگ و ضربه‌های سرعتی در ثبت حرکت زمین نزدیک به گسل نتایج پاسخ لرزه‌ای سازه جداسازی شده را تغییر می‌دهند. وجه مشترک تمام این تحقیقات بررسی دینامیکی مدل‌ها برای همبستگی پیچشی-جانبی در سیستم مختصات کلی است.

به هر حال، اغلب محققان در حوزه مهندسی سازه، تاکنون به غیرخطی بودن اینترسی به واسطه همبستگی پیچشی-جانبی توجه نداشتند. یک باور غلط در مورد غیرخطی هندسی بودن (اینرسی)، چشم‌پوشی از پاسخ‌ها و تحریکات کوچک تحت تأثیر عبارات غیرخطی در معادلات حاکم بر حرکت سیستم غیرخطی، به کمک فرایند خطی سازی آن‌ها است، حال آنکه در

1- Lead-rubber bearing

2- Friction pendulum system

زاویه پیچش کف جداساز دوران می‌کند؛ به تعبیر دیگر بهتر آن است که پارامترهای سازه‌ای نظیر سختی و میرائی به صورت متغیرهای محلی و در امتداد محورهای دستگاه مختصات چرخان $X_{yb}Y_{yb}Z_b$ نصب شده در مرکز جرم جداساز تعريف شوند (شکل ۲-ب). به عبارت دیگر، در نگرش متداول، عناصر مقاوم سازه‌ای به صورت فنرها و میراگرهایی با راستای بدون تغییر در دستگاه مختصات زمین در نظر گرفته می‌شوند. لیکن در واقعیت امر، نیروهای فر و میراگر در سازه نامتقارن جداسازی شده، به سبب پیچش ایجاد شده در آن هنگام وقوع زلزله و باد، ناگریز از تعییر جهت و راستا در امتداد جدید طبقه پیچش یافته‌اند، چراکه این نیروها ناشی از مقاومت عناصر مقاوم سازه‌ای همان تیرها و ستون‌ها در قاب‌های مسطح یا سطح‌های ساختمانی یا صفحات موازی فولاد و لاستیک الاستومر در عنصر جداساز) آرایش یافته در امتدادهای متعامد و مقید به راستای کف طبقات سازه‌اند و در پی دوران طبقات سازه، این عناصر در امتداد جدید قرار خواهند گرفت. در واقعیت امر، این عناصر مقاوم نظیر تیرها و ستون‌ها در قاب‌های مسطحی در دو امتداد متعامد که در راستای کف طبقات مقید شده‌اند، قرار می‌گیرند. هنگام وقوع زلزله و باد، مقید شدن عناصر مقاوم سازه‌ای سبب تعییر و پیچش آن‌ها حین پیچش کف طبقات قاب‌های مقاوم صفحه‌ای می‌شود.

لذا، در نگرش جدید، با در نظر گرفتن ماهیت غیرثابت راستای نیروهای فنرها و میراگرهای پارامترهای سازه‌ای نظیر سختی و میرائی در امتداد محورهای دستگاه مختصات محلی متصل به مرکز جرم زیرسازه (جداساز) و به صورت تابعی از زاویه پیچش کف زیرسازه (θ_b) تعريف شده‌اند.

جهت دست‌یابی به معادلات مدل‌های خطی و غیرخطی، روش لاغرانژی ارائه می‌شود [22,21]. در روش لاغرانژی با در نظر گرفتن مولفه‌های دستگاه مختصات کلی و محلی به عنوان مولفه‌های تعیین یافته و نوشتن انرژی‌های پتانسیل و جنبشی و در پی تشکیل تابع لاغرانژ می‌توان به معادلات حاکم بر حرکت در دستگاه مختصات چرخان دست یافت. معادلات حرکت سازه جداسازی شده در دستگاه مختصات کلی و محلی از رابطه (3) به دست می‌آید.

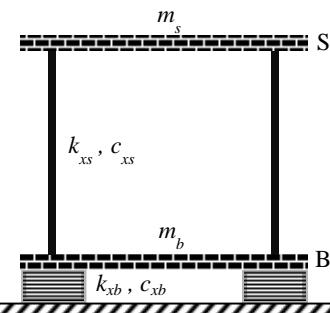
$$F_{qi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (3)$$

که در آن q_i مولفه‌های مختصات تعیین یافته هستند، که همان مولفه‌های جابه‌جایی‌های کلی U_{xs} , U_{ys} , U_{zs} , U_{yb} , U_{ob} و U_{bs} یا محلی U_{xs} , U_{ys} , U_{zs} , U_{yb} , U_{ob} و U_{bs} به ترتیب در دستگاه مختصات کلی و چرخان هستند و L نیروهای ناپایستار خارجی F_{qi} و محرك هستند و L تابع لاغرانژی بوده و به صورت تفاضل انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم سازه‌ای (یعنی $L=T-V$) تعريف می‌شود. از این‌رو، نخست باید انرژی پتانسیل ذخیره شده در عناصر مقاوم طبق رابطه (4) محاسبه شود.

$$V = \frac{1}{2} k_{xb} U_{xb}^2 + \frac{1}{2} k_{yb} (U_{yb} + e_{xb} U_{ob})^2 + \frac{1}{2} k_{ob} U_{ob}^2 + \frac{1}{2} k_{xs} (U_{xs} - U_{xb})^2 + \frac{1}{2} k_{ys} [(U_{ys} - U_{yb}) + e_{xs} (U_{os} - U_{ob})]^2 + \frac{1}{2} k_{ob} (U_{os} - U_{ob})^2 \quad (4)$$

که در آن k_{xb} سختی پیچشی جداساز و k_{ob} سختی پیچشی سازه حول محور سختی هستند و به صورت رابطه (5) و (6) تعريف می‌شوند.

$$k_{ob} = \sum_{i=1}^M k_{xib} Y_{ib}^2 + \sum_{i=1}^N k_{yib} (X_{ib} - e_{xb})^2 \quad (5)$$



شکل ۱ سازه یک طبقه جداسازی شده و پارامترهای سازه‌ای در جهت متقارن

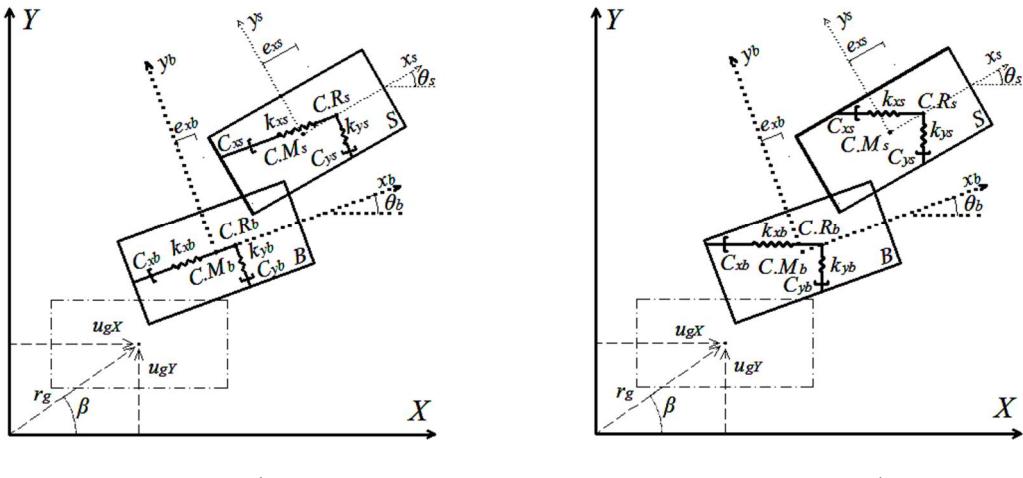
پیچش θ_b دوران پیدا می‌کند و تمام جابه‌جایی‌ها، سختی‌ها و میرائی‌های سازه و جداساز در راستای این دستگاه تعريف می‌شود. دوران سازه θ_b از مرتبه کوچکتری نسبت به دوران جداساز θ_b ، قرار دارد و تقریباً، به علت بزرگ بودن سختی‌های سازه نسبت به جداساز، سازه به صورت یک جسم صلب بر روی یک لایه نرم قرار گرفته است، به همین دلیل، توصیف امتدادهای فنرها سازه تقریباً در راستای موقعیت جدید زیرسازه (جداساز) در نظر گرفته شده که به تقریب نزدیک‌تر بوده و دستگاه دوران یافته‌ای با زاویه پیچش θ_b حول مرکز جرم سازه در نظر گرفته نشده است. حرکت جرم سازه و جداساز توسط ۶ درجه آزادی توصیف می‌شود: U_{xs} , U_{ys} , U_{zs} در درجات آزادی سازه و U_{yb} , U_{ob} و U_{bs} در درجات آزادی جداساز در امتداد محورهای دستگاه مختصات کلی و همین‌طور U_{xs} , U_{ys} , U_{zs} و U_{ob} در امتداد محورهای دستگاه مختصات محلی. مرکز جرم و مرکز سختی عناصر مقاوم در سازه به ترتیب با $C.M.s$ و $C.R.s$ و در جداساز به ترتیب با $C.M.b$ و $C.R.b$ نشان داده شده‌اند. مرکز جرم سازه و جداساز در یک امتداد حول محور قائم (Z) قرار می‌گیرد. به سبب توزیع نامتقارن سختی، صرفاً حول محور Z ، مرکز سختی در سازه و جداساز به ترتیب به فاصله e_{xs} و e_{ob} در امتداد محور X از مرکز جرم قرار دارد. خروج از مرکزیت‌های e_{yb} و e_{xs} توسط روابط (1) و (2) تعیین می‌شوند.

$$e_{yb} = \frac{\sum_{j=1}^N X_{jb} K_{yjb}}{\sum_{j=1}^N K_{yjb}} \quad (1)$$

$$e_{xs} = \frac{\sum_{i=1}^M X_{is} K_{yis}}{\sum_{i=1}^M K_{yis}} \quad (2)$$

که در آن‌ها K_{yjb} سختی امین عنصر مقاوم جداساز موazی با محور Z X_{jb} فاصله آن تا محور Z و N تعداد عناصر مقاوم جهت Z جداساز است. همچنین، K_{yis} سختی امین عنصر مقاوم سازه موazی با محور Z و M فاصله آن تا محور Z و M تعداد عناصر مقاوم جهت Z سازه است.

در شکل ۲-(الف)، درجات آزادی بیان شده در امتداد محورهای ثابت دستگاه مختصات کلی XYZ تعريف شدند. همچنین، مشخصات استاتیکی و دینامیکی سازه و جداساز، شامل سختی (K_{xs} , K_{ys} , K_{zs} , K_{yb} , K_{ob} و K_{bs}) و میرائی (C_{xs} , C_{ys} , C_{zs} , C_{yb} , C_{ob} و C_{bs}) عناصر مقاوم سازه‌ای، به صورت متغیرهای کلی و در امتداد محورهای این دستگاه مختصات کلی نصب شده بر پایه ساختمن تعريف می‌شوند. این بدین معنی است که این پارامترها مستقل از دوران θ_b ، ناشی از پیچش کف جداساز فرض شدند. این در حالی است که محورهای معرف پارامترهای سختی سازه ثابت نبوده و امتداد آن‌ها با



شکل 2 دستگاه مختصات کلی $X_bY_bZ_b$ و محلی $x_by_bz_b$ ، و امتداد مشخصات استاتیکی و دینامیکی سازه و جداساز شامل سختی و میرای در مدل، الف) خطی، و ب) غیرخطی

$$\begin{aligned} & \left(e_{xb} c_{yb} + e_{xs} c_{ys} \right) \dot{u}_{ob} - c_{ys} \dot{u}_{ys} - e_{xs} c_{ys} \dot{u}_{os} + \\ & \left(e_{xb} k_{yb} + e_{xs} k_{ys} \right) u_{ob} - k_{ys} u_{ys} - e_{xs} k_{ys} u_{os} = -m_b \ddot{u}_{gy} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} m_b r_b^2 \ddot{u}_{ob} + (c_{ob} + c_{os}) \dot{u}_{ob} + (k_{ob} + k_{os}) u_{ob} + \\ (e_{xb} c_{yb} + e_{xs} c_{ys}) \dot{u}_{yb} - e_{xs} c_{ys} \dot{u}_{ys} - c_{os} \dot{u}_{os} + \\ (e_{xb} k_{yb} + e_{xs} k_{ys}) u_{yb} - e_{xs} k_{ys} u_{ys} - k_{os} u_{os} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} m_s \ddot{u}_{ys} + c_{ys} \dot{u}_{ys} + k_{ys} u_{ys} - \\ c_{ys} \dot{u}_{yb} - e_{xs} c_{ys} \dot{u}_{ob} + e_{xs} c_{ys} \dot{u}_{os} - \\ k_{ys} u_{yb} - e_{xs} k_{ys} u_{ob} + e_{xs} k_{ys} u_{os} = -m_s \ddot{u}_{gy} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} m_s r_s^2 \ddot{u}_{os} + c_{os} \dot{u}_{os} + k_{os} u_{os} - \\ e_{xs} c_{ys} \dot{u}_{yb} - c_{os} \dot{u}_{ob} + e_{xs} c_{ys} \dot{u}_{ys} - \\ e_{xs} k_{ys} u_{yb} - k_{os} u_{ob} + e_{xs} k_{ys} u_{ys} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

روابط (8) تا (13) را در رابطه (7) جایگذاری نموده و رابطه (3) با جانشینی مولفه‌های مختصات محلی در مولفه تعیین یافته q_i ، به کار برده می‌شود و بدین ترتیب معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر حرکت دیافراگم صلب سازه یک طبقه جداسازی شده نامتناصرن یک طرفه، با توجه به شکل 2-ب براساس روابط (20) تا (25) حاصل می‌شود.

- دو معادله غیرخطی همبسته سازه و جداساز در جهت متقاضان:

$$\begin{aligned} m_b \ddot{u}_{xb} + (c_{xb} + c_{xs}) \dot{u}_{xb} + (k_{xb} + k_{xs}) u_{xb}^b - c_{xs} \dot{u}_{xs}^b - k_{xs} u_{xs}^b = \\ -m_b (-2\dot{u}_{yb}^b \dot{u}_{ob} - u_{yb}^b \dot{u}_{ob} - u_{yb}^b \dot{u}_{ob}^2 + \ddot{u}_{gx} \cos \theta_b + \ddot{u}_{gy} \sin \theta_b) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} m_s \ddot{u}_{xs}^b + c_{xs} \dot{u}_{xs}^b + k_{xs} u_{xs}^b - c_{xs} \dot{u}_{xb}^b - k_{xs} u_{xb}^b = \\ -m_s (-2\dot{u}_{ys}^b \dot{u}_{ob} - u_{ys}^b \dot{u}_{ob} - u_{ys}^b \dot{u}_{ob}^2 + \ddot{u}_{gx} \cos \theta_b + \ddot{u}_{gy} \sin \theta_b) \end{aligned} \quad (21)$$

- چهار معادله غیرخطی همبسته سازه و جداساز در جهت نامتناصرن:

$$\begin{aligned} m_b \ddot{u}_{yb}^b + (c_{yb} + c_{ys}) \dot{u}_{yb}^b + (k_{yb} + k_{ys}) u_{yb}^b + \\ (e_{xb} c_{yb} + e_{xs} c_{ys}) \dot{u}_{ob} - c_{ys} \dot{u}_{ys}^b - e_{xs} c_{ys} \dot{u}_{os} + \\ (e_{xb} k_{yb} + e_{xs} k_{ys}) u_{ob} - k_{ys} u_{ys}^b - e_{xs} k_{ys} u_{os} = \\ -m_b (2\dot{u}_{xb}^b \dot{u}_{ob} + u_{xb}^b \dot{u}_{ob} - u_{yb}^b \dot{u}_{ob}^2 - \ddot{u}_{gx} \sin \theta_b + \ddot{u}_{gy} \cos \theta_b) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} m_s r_b^2 \ddot{u}_{ob} + (c_{ob} + c_{os}) \dot{u}_{ob} + (k_{ob} + k_{os}) u_{ob} + \\ (e_{xb} c_{yb} + e_{xs} c_{ys}) \dot{u}_{yb}^b - e_{xs} c_{ys} \dot{u}_{ys}^b - c_{os} \dot{u}_{os} + \\ (e_{xb} k_{yb} + e_{xs} k_{ys}) u_{yb}^b - e_{xs} k_{ys} u_{ys}^b - k_{os} u_{os} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$K_{\theta RS} = \sum_{i=1}^p K_{xis} y_{is}^2 + \sum_{i=1}^q K_{yis} (x_{is} - e_{xs})^2 \quad (6)$$

K_{xs} ، y_b ، x_b و k_{yb} برابر مجموع سختی عناصر مقاوم جداساز در جهات x_b و y_b هستند. سپس، ارزی جنبشی کل به صورت رابطه (7) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} m_b \left(\frac{du_{xb}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_b \left(\frac{du_{yb}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_b r_b^2 \left(\frac{du_{ob}}{dt} \right)^2 + \\ \frac{1}{2} m_s \left(\frac{du_{xs}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_s \left(\frac{du_{ys}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_s r_s^2 \left(\frac{du_{os}}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن r_b شعاع ژیراسیون جداساز حول مرکز جرم و r_s شعاع ژیراسیون سازه حول مرکز جرم هستند. حال این متغیرهای کلی با متغیرهای محلی با دوران محورهای محلی به مقدار θ_b در جهت ساعتگرد و با استفاده از ماتریس دوران نظیر آن به یکدیگر توسط روابط (8) تا (13) مرتبط می‌شوند.

$$U_{xs} = U_{xs}^b \cos \theta_b - U_{ys}^b \sin \theta_b + U_{gx} \quad (8)$$

$$U_{ys} = U_{xs}^b \sin \theta_b + U_{ys}^b \cos \theta_b + U_{gy} \quad (9)$$

$$U_{os} = \theta_s \quad (10)$$

$$U_{xb} = U_{xb}^b \cos \theta_b - U_{yb}^b \sin \theta_b + U_{gx} \quad (11)$$

$$U_{yb} = U_{xb}^b \sin \theta_b + U_{yb}^b \cos \theta_b + U_{gy} \quad (12)$$

$$U_{ob} = \theta_b \quad (13)$$

اکنون با توجه به شکل 2-الف و جایگذاری روابط (4) و (7) در رابطه (3) و بررسی روابط موجود تنها در مختصات کلی، معادلات دیفرانسیل خطی حاکم بر حرکت دیافراگم صلب سازه یک طبقه جداسازی شده نامتناصرن یک طرفه با جانشینی مولفه‌های مختصات کلی در مولفه تعیین یافته q_i طبق روابط (14) تا (19) حاصل می‌شود.

- دو معادله خطی همبسته سازه و جداساز در جهت متقاضان:

$$\begin{aligned} m_b \ddot{u}_{xb} + (c_{xb} + c_{xs}) \dot{u}_{xb} + (k_{xb} + k_{xs}) u_{xb} - \\ c_{xs} \dot{u}_{xs} - k_{xs} u_{xs} = -m_b \ddot{u}_{gx} \end{aligned} \quad (14)$$

$$m_s \ddot{u}_{xs} + c_{xs} \dot{u}_{xs} + k_{xs} u_{xs} - c_{xs} \dot{u}_{xb} - k_{xs} u_{xb} = -m_s \ddot{u}_{gx} \quad (15)$$

- چهار معادله خطی همبسته سازه و جداساز در جهت نامتناصرن:

$$m_b \ddot{u}_{yb} + (c_{yb} + c_{ys}) \dot{u}_{yb} + (k_{yb} + k_{ys}) u_{yb} +$$

پاسخ‌های تاریخچه زمانی و محتوای فرکانسی دو مدل خطی و غیرخطی برای 3 نوع سازه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حالت اول نسبت فرکانس پیچشی جداساز به فرکانس جانبی نامتقارن سازه برابر با $\Omega_{\theta b} = 0.15$ ($\Omega_{\theta b} = 0.15$) و خروج از مرکزیت جداساز برابر با $0/6$ ($e_{xb} = 0.6$) در نظر گرفته می‌شود. در حالت دوم نسبت فرکانس پیچشی جداساز به فرکانس جانبی نامتقارن سازه برابر با $0/8$ هستند و در حالت برابر با $0/105$ و خروج از مرکزیت جداساز برابر با $0/8$ هستند. سایر نسبت‌ها کاملاً سوم این مقادیر به ترتیب برابر با $0/15$ و $1/03$ هستند. سایر نسبت‌ها کاملاً یکسان و مشابه یکدیگرند که در جدول 1 ارائه شده است. انتخاب مشخصات هندسی و دینامیکی 3 نوع سازه بر طبق ضوابط طراحی جداساز (منظور بزرگ سختی‌های سازه نسبت به سختی جدآگر) به گونه‌ای بوده است که فرکانس طبیعی همبسته اول جهت نامتقارن (ω_{x1}) نزدیک به فرکانس جداساز (ω_{yb}) است، حال آنکه دومین فرکانس طبیعی همبسته (ω_{x2}) نزدیک به فرکانس سازه (ω_{xs}) است. بدیهی است اگر نسبت‌های فرکانسی سازه و جدآگر (10) به 1 کمتر باشد، طبیعتاً سازه و جداساز فرکانس‌های همبسته نزدیک به هم پیدا می‌کنند. این امر در چهار فرکانس‌های طبیعی همبسته در جهات نامتقارن و پیچشی نیز قابل مشاهده است. فرکانس‌های اول و دوم ($\omega_{y\theta 1}$ و $\omega_{y\theta 2}$) نزدیک به فرکانس پیچشی-جانبی جداساز ($\omega_{y\theta 1}$ و $\omega_{y\theta 2}$) و دو فرکانس دیگر ($\omega_{y\theta 3}$ و $\omega_{y\theta 4}$) نزدیک به فرکانس پیچشی-جانبی سازه ($\omega_{y\theta 3}$ و $\omega_{y\theta 4}$) است. این گونه می‌توان برداشت کرد که در جهت پیچشی و جانبی نیز عملکرد جداساز مستقل از سازه است. به عبارت دیگر، در بررسی رفتار دینامیکی، سازه به صورت یک جسم صلب بدون تغییر و جداساز به صورت یک سازه نرم و متأثر از تحريكات زلزله است. هدف از انتخاب این 3 نوع سازه، تخصیص نسبت‌های فرکانسی همبسته طبیعی مشخص به آن‌ها بوده است. نسبت‌ها در سازه دوم به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که حداقل یکی از نسبت‌های فرکانسی طبیعی همبسته پیچشی-جانبی سازه و جداساز برابر $0/5$ شود و همچنین این نسبت‌ها در سازه سوم به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که تفاضل اولین و دومین نسبت فرکانسی طبیعی همبسته پیچشی-جانبی سازه و جداساز برابر 1 شوند که هیچ کدام از این دو ویژگی در سازه اول فراهم نشد. فرکانس‌های همبسته طبیعی و نسبت‌های فرکانسی 3 نوع سازه به ترتیب در جدول‌های 2 و 3 ارائه شده‌اند.

جدول 1 مشخصات سازه‌ای 3 نوع سازه

e_{xs}/r	e_{xb}/r	Ω_{ys}	$\Omega_{\theta s}$	Ω_{yb}	$\Omega_{\theta b}$	Ω_{xb}	سازه
0/2	0/6	0/5	0/7	0/1	0/15	0/1	1
0/2	0/8	0/5	0/7	0/1	0/105	0/1	2
0/2	1/03	0/5	0/7	0/1	0/15	0/1	3

جدول 2 فرکانس‌های طبیعی 3 نوع سازه

$\omega_{y\theta 4}$	$\omega_{y\theta 3}$	$\omega_{y\theta 2}$	$\omega_{y\theta 1}$	ω_{x2}	ω_{x1}	سازه
110/98	76/42	9/70	5/40	154/47	6/25	1
110/06	76/25	8/38	3/12	154/47	6/25	2
111/14	76/20	10/30	4/04	154/47	6/25	3

جدول 3 نسبت‌های فرکانسی همبسته طبیعی 3 نوع سازه

Ω_2	Ω_1	Ω_{xs}	سازه
1/552	0/863	1	1
1/340	0/5	1	2
1/646	0/646	1	3

$$m_s \ddot{U}_{ys}^b + c_{ys} \dot{U}_{ys}^b + k_{ys} U_{ys}^b - \\ c_{ys} \dot{U}_{yb}^b - e_{xs} c_{ys} \dot{U}_{\theta b} + e_{xs} c_{ys} \dot{U}_{\theta s} - \\ k_{ys} U_{yb}^b - e_{xs} k_{ys} U_{\theta b} + e_{xs} k_{ys} U_{\theta s} = \\ -m_s (2U_{xs}^b \dot{U}_{\theta b}^2 + U_{xs}^b \dot{U}_{\theta s}^2 - \dot{U}_{gx} \sin \theta_b + \dot{U}_{gy} \cos \theta_b) \quad (24)$$

$$m_s r_s^2 \ddot{U}_{\theta s} + c_{\theta s} \dot{U}_{\theta s} + k_{\theta s} U_{\theta s} - \\ e_{xs} c_{ys} \dot{U}_{yb}^b - c_{\theta s} \dot{U}_{\theta b} + e_{xs} c_{ys} \dot{U}_{ys}^b - \\ e_{xs} k_{ys} U_{yb}^b - k_{\theta s} U_{\theta b} + e_{xs} k_{ys} U_{ys}^b = 0 \quad (25)$$

که در آن \dot{U}_{gx} و \dot{U}_{gy} شتاب‌های انتقالی حرکت زمین در جهات X و Y ، C_{xs} ، C_{ys} ، C_{yb} و $C_{\theta s}$ ضرایب میرای سازه و جداساز هستند. $k_{\theta b}$ سختی جداساز و k_{yb} سختی عناصر مقاوم جداساز در جهات x_b و y_b ، r_s و k_{xs} برابر مجموع سختی عناصر مقاوم سازه در جهات x_b و y_b تعریف می‌شوند.

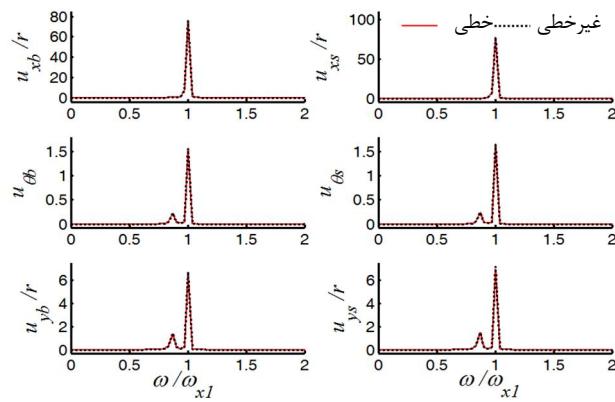
مشاهده می‌شود که عبارت‌های سمت چپ روابط (14) تا (19) با عبارت‌های سمت چپ روابط (20) تا (25) کاملاً مشابه است. البته، بردارهای جایه‌جایی، سرعت و شتاب در روابط (14) تا (19) در امتداد محورهای دستگاه مختصات کلی تعریف شده‌اند. تفاوت چشمگیر معادلات خطی و غیرخطی در عبارات سمت راست آن‌هاست. وجود جملات همبسته غیرخطی اینرسی بین درجات آزادی پیچشی و جانبی سازه و جداساز در روابط (20) تا (25)، عملکرد غیرخطی را در مدل پیشنهاد شده ایجاد می‌کند، در حالی که وجود جملات خطی شامل شتاب‌های انتقالی و تکانش زمین در روابط (14) تا (19) سبب بروز رفتار خطی شده است. بدیهی است که در تحلیل عددی، باید پاسخ‌های مدل غیرخطی به دست آمده از روابط (20) تا (25) توسط ماتریس دوران به دستگاه مختصات کلی انتقال یابد و یا به عبارتی محورهای محلی باید به مقدار θ_b و در جهت ساعتگرد دوران پیدا کنند و سپس با پاسخ‌های خطی به دست آمده از روابط (14) تا (19)، مقایسه شوند.

3- تحلیل عددی

از زیبایی و مقایسه عملکرد مدل خطی و غیرخطی، با مطالعه پارامتری بر روی تحريكات هارمونیک و زوایای مختلف ورود زلزله کوبه به سازه صورت می‌گیرد. دوره‌ی تناوب روسازه برابر با پریود طبیعی نوسان جانبی نامتقارن سازه تقریباً برابر $T_{xs} = 0.15$ است، یعنی فرکانس طبیعی نوسان آن برابر 20π (rad/s) فرض می‌شود. توزیع جرم پلان جداساز و سازه با هم پیکسان است، با به عبارتی شاعع ژیرایسون در پلان سازه و در پلان جداساز با یکدیگر برابر است. جرم سازه m_s به جرم طبقه جداسازی شده دارای m_b نسبت 5 به 1 در نظر گرفته شده است. تمام فرکانس‌های سازه و جداساز نسبت به فرکانس پیچشی و جانبی سازه و جداساز نسبت به فرکانس جهت متقارن سازه به صورت رابطه (26) بیان می‌شود.

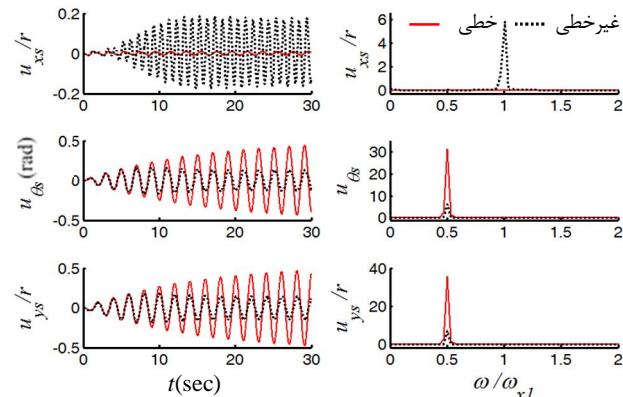
$$\Omega_{xb} = \frac{\omega_{xb}}{\omega_{xs}}, \Omega_{\theta b} = \frac{\omega_{\theta b}}{\omega_{xs}}, \Omega_{yb} = \frac{\omega_{yb}}{\omega_{xs}} \\ \Omega_{xs} = \frac{\omega_{xs}}{\omega_{xs}}, \Omega_{\theta s} = \frac{\omega_{\theta s}}{\omega_{xs}}, \Omega_{ys} = \frac{\omega_{ys}}{\omega_{xs}} \quad (26)$$

که در آن فرکانس‌های غیرهمبسته انتقالی ω_{xs} ، ω_{ys} و ω_{yb} و $\omega_{\theta b}$ هستند. بدیهی است که به سبب سختی یکسانه هر جداساز، یا الاستومر، در دو امتداد X و Y ، فرکانس‌های طبیعی غیر همبسته جانبی در امتداد X و Y در پلان جداساز، یعنی فرکانس‌های ω_{xb} و ω_{yb} و از $\omega_{\theta b}$ رونسبت‌های فرکانسی آن‌ها برابر است ($\Omega_{xb} = \Omega_{yb}$).

شکل 4 پاسخ فرکانسی سازه نوع 1 تحت تحریک تناوبی با فرکانس تحریک $\Omega = 1$

شده است همان گونه که بیان شد، این مقادیر پیک، معرف میزان جذب انرژی تحریک ورودی به سیستم سازه‌ای توسط فرکانس نظری تحریک است. در این تحقیق مشاهده شد که اطباق پاسخ‌های دو مدل در سازه نوع 1 برای مقادیر بیشتر دامنه تحریک نیز محقق می‌شود و به عبارت دیگر این اطباق مستقل از اندازه دامنه تحریک است. همچنین، مشاهده شد این اطباق از فرکانس و زوایای ورود تحریک نیز مستقل است.

سازه 2 تحت تحریک هارمونیک با فرکانس تحریک برابر با نخستین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی و فرکانس مدل اول جهت متقارن قرار داده شد. در شکل‌های 5 و 6، پاسخ‌های زمانی و فرکانسی ارتعاش و ادراحته سازه نوع 2 تحت این دو فرکانس تحریک ارائه شده‌اند که مشاهده می‌شود، در نمودارهای تاریخچه زمانی، در جهت x ، مدل غیرخطی از یک لحظه مشخص مقدار متفاوتی نسبت به مدل خطی نشان می‌دهد که در جهات y و θ نیز این موضوع مشهود است. در شکل 5، در پاسخ فرکانسی جهت x ، فقط مدل غیرخطی دارای پیک پاسخ در فرکانس مدل اول جهت متقارن است، ولی در پیچشی-جانبی هستند که مدل خطی مقدار بیشتری را نسبت به غیرخطی نشان می‌دهد. در شکل 6، در پاسخ فرکانسی جهت x ، مدل خطی و غیرخطی دارای پیک پاسخ در فرکانس مدل اول جهت متقارن است که این مقدار در مدل غیرخطی بسیار کمتر است، ولی در جهات y و θ مدل غیرخطی دارای پیک پاسخ در نخستین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی است که این پیک در مدل خطی مشاهده نمی‌شود.

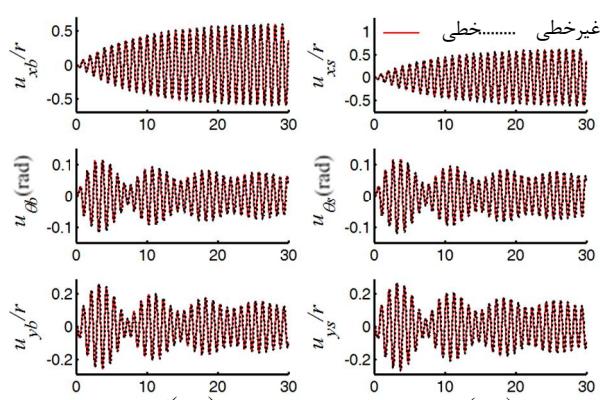
شکل 5 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 2 تحت تحریک تناوبی با فرکانس تحریک $\Omega = \Omega_1$

پاسخ‌های این 3 نوع سازه، تحت تحریکات نیروهای هارمونیک با توجه به تغییر دامنه تحریک A و فرکانس تحریک Ω و همچنین تحت زلزله کوبه با زوایای مختلف ورود تحریک β نسبت به محور X مورد بررسی قرار می‌گیرد. این پاسخ‌ها برای 6 درجه آزادی حرکت موازن کف طبقه سازه و جداسازی U_{xs} , U_{ys} , $U_{θs}$, $U_{θb}$, U_{yb} در دو حوزه زمان و فرکانس بررسی می‌شوند. پاسخ‌های حوزه فرکانسی با استفاده از جذب انرژی تحریک به دست (FFT) جهت تعیین مشارکت مدهای سازه در جذب انرژی تحریک به دست آمده‌اند. مقادیر فرکانس نظری بیشینه یا پیک پاسخ‌ها در نمودارهای محتوای فرکانسی پاسخ‌های ارتعاش و ادراحته این سازه‌ها، معرف فرکانس‌های طبیعی مدهای غالب سازه و یا فرکانس نظری تحریک است و مقادیر پیک معرف میزان جذب انرژی تحریک ورودی به سیستم سازه‌ای توسط مدهای طبیعی نظیر آن‌ها و یا توسط فرکانس نظری تحریک است.

3-1- پاسخ به تحریک هارمونیک

بردار نیروی تحریک یا شتاب تکانش زمین \vec{g} را به صورت نیروی هارمونیک $A\omega^2 \sin(\omega t)$ تعریف می‌شود، که در آن ω فرکانس تحریک و A نسبت دامنه جابه‌جایی تکانش زمین بر شاعع ژیراسیون هستند. در ادامه مطالعات به جای فرکانس تحریک ω ، از پارامتر بی بعد Ω برابر نسبت فرکانسی ω/ω_{x1} استفاده می‌شود، که در آن ω_{x1} فرکانس طبیعی مدل اول جهت متقارن است. همچنین، زاویه ورود شتاب هارمونیک به سازه، برابر β نسبت به امتداد X است که منجر به دو مولفه شتاب تکانش زمین $\ddot{u}_{gy} = A(\Omega\omega_{x1})^2 \sin(\Omega\omega_{x1}t) \sin\beta$ و $\ddot{u}_{gx} = A(\Omega\omega_{x1})^2 \sin(\Omega\omega_{x1}t) \cos\beta$ می‌شود. دامنه تحریک برابر با $0.05/\text{sec}$ زاویه ورود تحریک β و نسبت میرای سازه به ترتیب برابر با 60 درجه نسبت به محور X و 2% در نظر گرفته شده است، مگر آنکه مقادیر غیر از این به صراحت ذکر شود.

در شکل‌های ارائه شده، پاسخ مدل خطی به صورت خط ممتد (قرمز رنگ) و پاسخ مدل غیرخطی با خطچین (مشکی رنگ) نشان داده شده است. در ابتدا سازه 1 تحت تحریک هارمونیک با فرکانس تحریک برابر فرکانس مدل اول جهت متقارن قرار داده شد ($\Omega = 1$). در شکل‌های 3 و 4، پاسخ‌های زمانی و فرکانسی ارتعاش و ادراحته سازه نوع 1 ارائه شده‌اند که مشاهده می‌شود پاسخ‌های دو مدل خطی و غیرخطی دقیقاً بهم منطبق است. در شکل 4، مقادیر پیک پاسخ‌ها در سازه و جداساز در فرکانس مدل اول جهت متقارن، در جهات x , y و θ رخ داده و علاوه‌بر آن در جهات y و θ پیک کوچک‌تری نیز در نخستین نسبت فرکانسی همبسته پیچشی-جانبی ایجاد

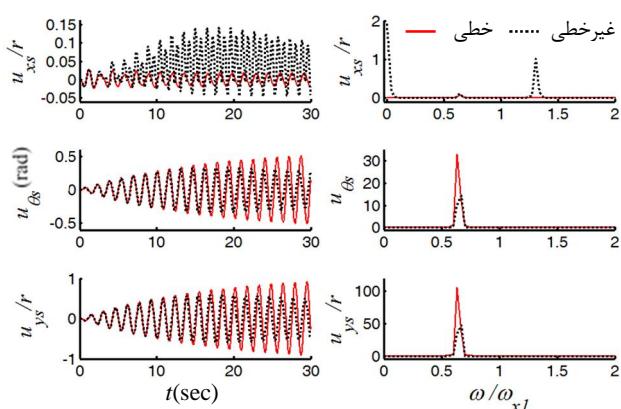
شکل 3 پاسخ زمانی سازه نوع 1 تحت تحریک تناوبی با فرکانس تحریک $\Omega = 1$

جدیدی غیر از نقطه تعادل استاتیکی (موقعیت اولیه مرکز جرم طبقه) است، به گونه‌ای که ارتعاش یا نوسان مرکز جرم سازه حول این نقطه جدید رخ می‌دهد، درحالی که طبق تئوری خطی، تمامی نوسانات سازه باید حول نقطه تعادل استاتیکی رخ دهد. همچنین، پیک‌های پاسخ دیگری در هر دو مدل در این جهت مشاهده می‌شود، ولی در جهات α و θ هر دو مدل دارای پیک پاسخی در نخستین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی هستند که مدل خطی مقدار بیشتری را نسبت به غیرخطی نشان می‌دهد.

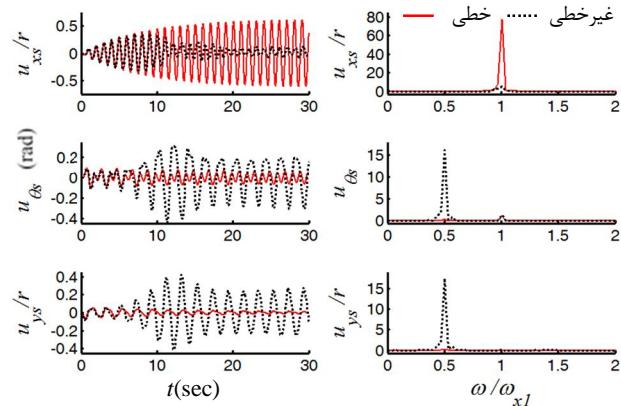
در شکل 8، بررسی پاسخ فرکانسی سازه نتیجه می‌دهد که انرژی مدل غیرخطی در جهات α و θ ، از دومین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی به اولین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی و نیز فرکانس مد اول جهت متقارن منتقل می‌شود. همچنین، در این جهات مدل خطی برخلاف شکل 7، تنها در دومین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی تحریک شده است.

از ابتدای تحریک سازه، تمامی درجات آزادی در مدل غیرخطی برخلاف مدل خطی به طور همبسته عمل می‌کنند، به گونه‌ای که تحت تحریک هارمونیک با فرکانس $\Omega = \Omega_1$ ، بخشی از انرژی تحریک جذبی توسط درجات آزادی α و θ به صورت پاسخ هارمونیک با فرکانس طبیعی پایین تر $\Omega = \Omega_2$ ، در همین درجات آزادی روز می‌کند و مابقی انرژی تحریک جذبی به درجه آزادی جهت α ، تحت پاسخ هارمونیک با فرکانس طبیعی بالاتر منتقل می‌شود. این رفتار مدل غیرخطی را پدیده انتقال انرژی³ می‌نامند که در شکل 7 مشهود است. همچنین، پیک پاسخ مدل غیرخطی در نسبت فرکانسی بین 1 و $1/5$ ، که نظیر هیچ یک از فرکانس‌های طبیعی سازه نیست، قابل مشاهده است. در شکل 8، پدیده انتقال انرژی با انتقال انرژی از فرکانس طبیعی $\Omega = \Omega_2$ به فرکانس‌های طبیعی دیگر، $\Omega = \Omega_1$ و $\Omega = 1$ همراه است.

شکل 9 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 3 را تحت تحریک تناوبی با دامنه تحریک $\Omega = 0/1$ و فرکانس تحریک برابر فرکانس مد اول جهت متقارن نشان می‌دهد که مجدداً تفاوت بین دو مدل خطی و غیرخطی مشهود است. تمام پدیده‌های ایجاد شده در مدل غیرخطی ناشی از حضور جملات همبسته اینرسی غیرخطی در معادلات (20) تا (25) هستند. بررسی پاسخ‌های زمانی و فرکانسی جداساز نیز در سازه نوع 2 و 3 نتایج مشابهی را با سازه به همراه داشت. همچنین تفاوت بین دو مدل خطی و غیرخطی در زوایای مختلف ورود تحریک مشهود است و نیز این تفاوت با افزایش دامنه تحریک افزایش یافته و باعث بروز بی‌نظمی‌هایی در ارتعاشات سازه می‌شود.



شکل 7 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 3 تحت تحریک تناوبی فرکانس تحریک $\Omega = \Omega_1$



شکل 6 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 2 تحت تحریک تناوبی با فرکانس تحریک $\Omega = 1$

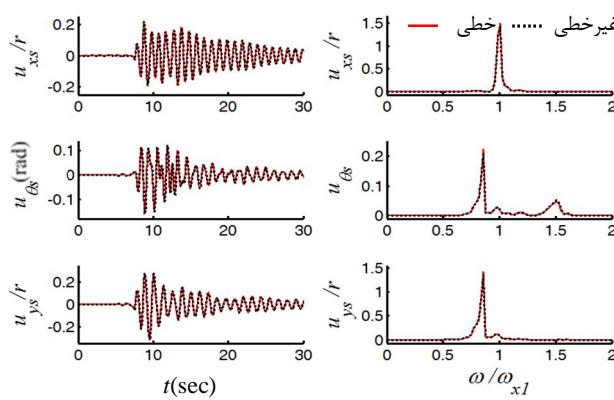
بر مبنای تئوری خطی، دامنه پاسخ سازه با میرایی در جهت متقارن،⁴ نخست با زمان به طور یکنوا افزایش یافته و سپس به سبب میرایی در مقدار مشخصی ثابت می‌ماند و این مقدار دامنه پاسخ سازه می‌شود. ثابت بودن دامنه پاسخ هارمونیک با نسبت فرکانسی $\Omega = 1$ در جهات پیچشی و نامتقارن نیز برقرار است.

در زمان‌های نخست دو مدل خطی و غیرخطی عملکرد مشابهی دارند، بدین معنی که درجه آزادی جهت متقارن به طور مستقل و غیرهمبسته با درجات آزادی دیگر سازه رفتار می‌نماید، تا اینکه در یک لحظه معین، پاسخ جهت متقارن مقدار مشخصی از انرژی تحریک را جذب می‌کند، از آن لحظه به بعد عملکرد دو مدل متفاوت از یکدیگر خواهد بود. در مدل غیرخطی، برخلاف مدل خطی، تمامی درجات آزادی به طور همبسته عمل می‌کنند، به گونه‌ای که در لحظه یاد شده، که آن را لحظه اشباع شده و از توسط پاسخ جهت متقارن در حد مشخصی ثابت و اصطلاحاً اشباع شده و از آن لحظه به بعد مابقی انرژی تحریک جذبی جهت متقارن به جهات نامتقارن و پیچشی منتقل می‌شود. این انتقال انرژی در شکل 6 از فرکانس طبیعی $\Omega = \Omega_1$ (جهت α) به فرکانس طبیعی $\Omega = \Omega_2$ (جهات θ) صورت گرفته است. این رفتار مدل غیرخطی را پدیده اشباع² می‌نامند که در شکل 6 مشهود است. لیکن در شکل 5، پدیده اشباع رخ نمی‌دهد، یعنی انتقال انرژی بین مدها، و به عبارت دیگر، لحظه بروز رفتار غیرخطی، با نقطه شروع یا آستانه، همراه نیست، بلکه از همان ابتدای نوسان، انتقال انرژی از فرکانس طبیعی $\Omega = \Omega_1$ به فرکانس طبیعی $\Omega = \Omega_2$ بیشتر است. این می‌شود.

شکل‌های 7 و 8، پاسخ‌های زمانی و فرکانسی ارتعاش و اداشته سازه نوع 3 را تحت اولین و دومین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی نشان می‌دهند. تمایز بین پاسخ‌های مدل خطی و غیرخطی از لحظات ابتدایی در تحلیل تاریخچه زمانی در درجات آزادی مختلف قابل مشاهده است؛ بدین معنی که برخلاف پدیده اشباع، لحظه مشخصی نظیر لحظه اشباع به عنوان لحظه شروع تغییر وجود ندارد. در شکل 7، بررسی پاسخ فرکانسی جهت α نشان می‌دهد که مدل غیرخطی دارای پیک پاسخ در $\Omega = 0$ است که با افزایش دامنه تحریک به مقدار این پیک نیز افزوده می‌شود. این به معنی جابه‌جایی یا انتقال خالص مرکز جرم دیاگرام صلب سازه در جهت متقارن، به نقطه

1- Primary resonance

2- Saturation phenomenon



شکل 11 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 1 تحت زلزله کوبه تحت زاویه ورود
تحریک 60 درجه نسبت به محور X

شکل‌های 12، 13 و 14 پاسخ‌های زمانی و فرکانسی سازه نوع 2 را تحت زاویای تحریک به ترتیب 0، 60 و 90 درجه برای دو مدل خطی و غیرخطی نشان می‌دهند.

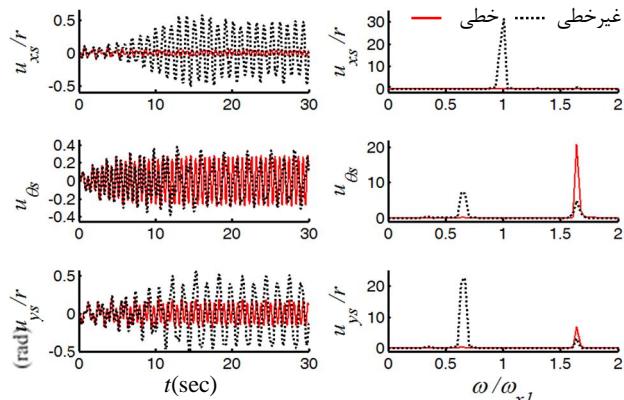
در شکل 12 مشاهده می‌شود، هنگامی که تحریک کاملاً در جهت متقارن سازه است، جابه‌جایی u_{xs} نسبت به جابه‌جایی‌های $u_{\theta s}$ و u_{ys} مقادیر بیشتری را از خود نشان می‌دهد. جابه‌جایی پیچشی و جانبی سازه در مدل خطی مقدار صفر را نشان می‌دهد، حال آنکه در مدل غیرخطی این جابه‌جایی تا لحظه 9/8 ثانیه صفر است و از آن لحظه به بعد افزایش می‌یابد. همچنین، مشاهده می‌شود پاسخ مدل خطی و غیرخطی برای درجات آزادی جهت متقارن کاملاً برهمن منطبق است. بررسی محتوای فرکانسی نشان می‌دهد که جذب انرژی در جهت متقارن مقدار بیشتری را نشان می‌دهد و در این جهت بیک پاسخ‌ها در مدل خطی و غیرخطی با یکدیگر برابر است که در فرکانس مد اول جهت متقارن رُخ می‌دهد. همچنین، مشاهده می‌شود که پیک جابه‌جایی پیچشی و جانبی در نخستین فرکانس همبسته پیشی-جانبی در مدل غیرخطی رُخ می‌دهد، این در حالی است که مدل خطی در این جهات همواره مقدار صفر را نشان می‌دهد و دارای هیچ پیک پاسخی نیست.

شکل 13 نشان می‌دهد جابه‌جایی درجات آزادی سازه تقریباً در یک محدوده هستند، که دلیل این امر زاویه ورود تحریک 60 درجه است، از طرفی پاسخ‌های مدل خطی و مدل غیرخطی در درجات آزادی مختلف برهمن منطبق نیست.

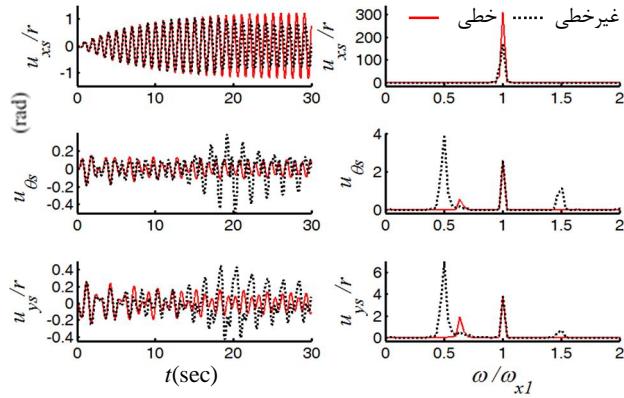
در شکل 14 مشاهده می‌شود، هنگامی که تحریک کاملاً در جهت نامتقارن سازه است، جابه‌جایی‌های $u_{\theta s}$ و u_{ys} نسبت به جابه‌جایی u_{xs} مقادیر بیشتری را نشان می‌دهند و جابه‌جایی جهت متقارن سازه در مدل خطی مقدار صفر را نشان می‌دهد، حال آنکه در مدل غیرخطی جابه‌جایی جهت متقارن سازه تا لحظه 9/8 ثانیه صفر است و از آن لحظه به بعد افزایش می‌یابد. همچنین، مشاهده می‌شود پاسخ‌های زمانی و فرکانسی مدل خطی سازه برای درجات آزادی θ و y مقادیر بیشتری نسبت به مدل غیرخطی نشان می‌دهند، درحالی که پیک پاسخ مدل غیرخطی در جهت متقارن در فرکانس نظیر این جهت قابل توجه است.

شکل‌های 15، 16 و 17 پاسخ‌های زمانی و فرکانسی سازه نوع 3 را تحت زاویای تحریک به ترتیب 0، 60 و 90 درجه برای دو مدل خطی و غیرخطی نشان می‌دهند.

در شکل 15 مشاهده می‌شود جابه‌جایی پیچشی و جانبی سازه در مدل خطی مقدار بیشتری را نشان می‌دهد تا در زمان‌های



شکل 12 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 3 تحت تحریک تناوبی با فرکانس تحریک $\Omega = \Omega_2$

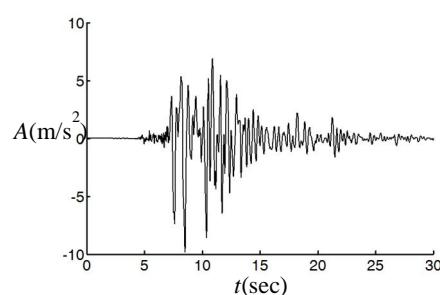


شکل 13 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 3 تحت تحریک تناوبی با دامنه تحریک 0/1 و فرکانس تحریک $\Omega = 1$

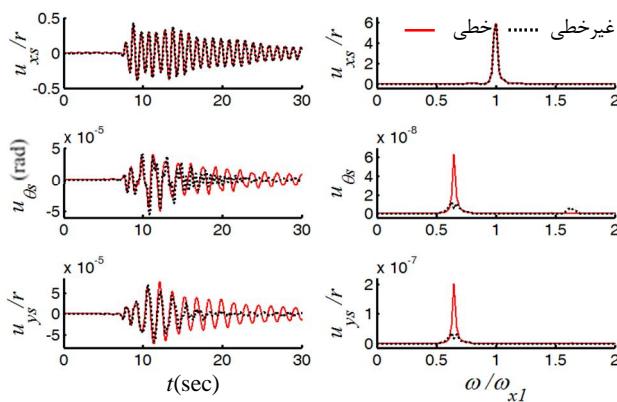
3-2- پاسخ به تحریک زلزله

پاسخ‌های لرزه‌ای دو مدل خطی و غیرخطی تحت زلزله کوبه 1995 و با زاویه‌های مختلف ورود تحریک β نسبت به محور X مقایسه می‌شوند. مقدار بیشینه شتاب زلزله کوبه به مقیاس شده است (شکل 10). زاویه ورود تحریک β به ترتیب برابر با 0، 60 و 90 درجه نسبت به محور X و نسبت میرای سازه 2% در نظر گرفته شده است.

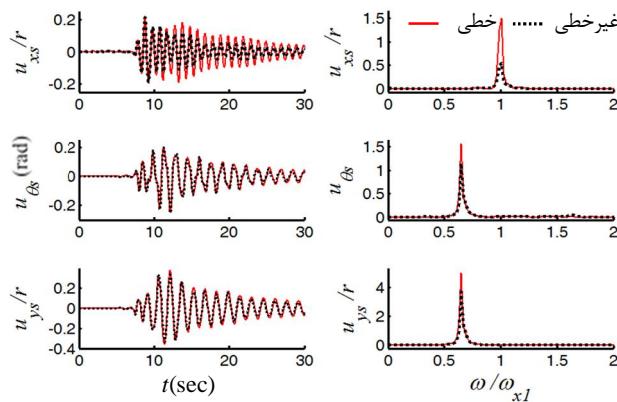
شکل 11 پاسخ‌های زمانی و فرکانسی سازه نوع 1 را تحت زاویه تحریک 60 درجه برای دو مدل خطی و غیرخطی نشان می‌دهد و مشاهده می‌شود، پاسخ‌های دو مدل برای درجات آزادی مختلف در سازه نوع 1 برهمن منطبق است. انتطاق پاسخ‌های دو مدل در سازه نوع 1 برای مقادیر دیگر زاویه تحریک نیز محقق می‌شود و به عبارت دیگر این انتطاق مستقل از زاویه ورود تحریک است.



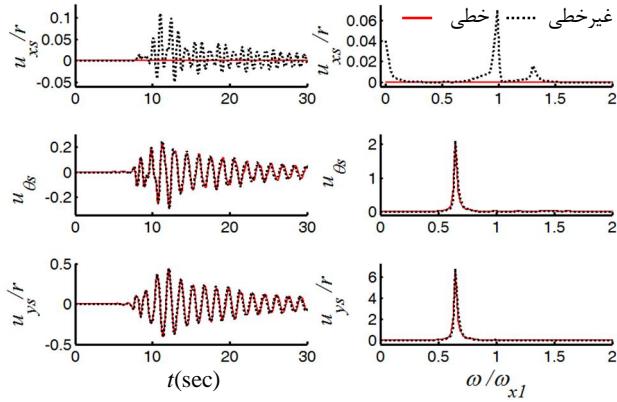
شکل 14 شتاب نگاشت به مقیاس در آمده زلزله کوبه



شکل ۱۵ پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع ۳ تحت زلزله کوبه تحت زاویه ورود
تحریک ۰ درجه نسبت به محور X



شکل ۱۶ پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع ۳ تحت زلزله کوبه تحت زاویه ورود
تحریک ۶۰ درجه نسبت به محور X



شکل ۱۷ پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع ۳ تحت زلزله کوبه تحت زاویه ورود
تحریک ۹۰ درجه نسبت به محور X

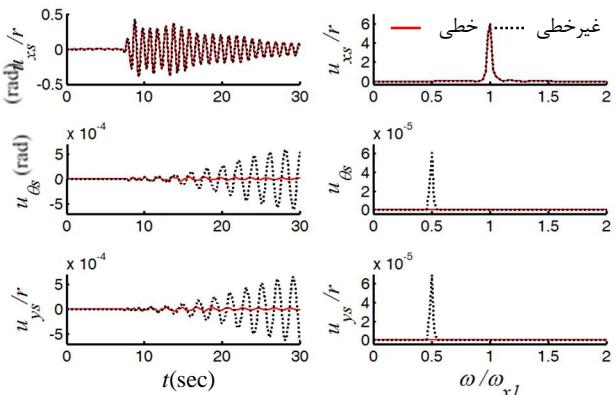
می‌دهد که مدل خطی تحریک نشده، حال آنکه در مدل غیرخطی، دیافراگم صلب طبقه جابه‌جایی خالص و بدون ارتعاش داشته که البته مقدار آن، با توجه به اینکه تحریک در جهت نامتقارن است، ناچیز است.

پاسخ‌های زمانی و فرکانسی جداساز نیز برای ۳ نوع سازه، تحت زلزله کوبه تحت زاویه ورود تحریک ۰.۰، ۶۰ و ۹۰ بررسی شد که نتایج مشابهی را با سازه بهمراه داشت.

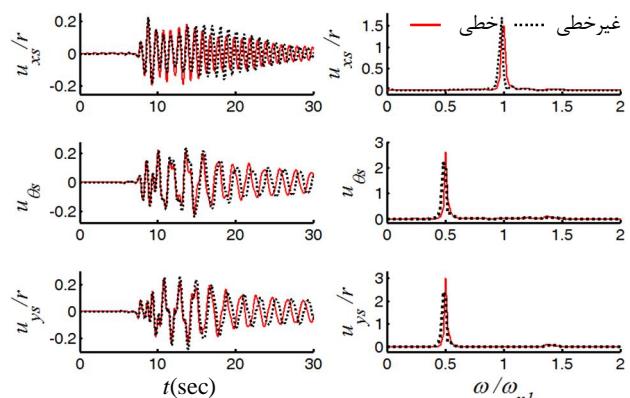
طبق مدل خطی، جابه‌جایی در امتداد نامتقارن، مستقل و غیرهمبسته با درجات آزادی دیگر سیستم است. از این‌رو، هنگامی که سازه تحت تحریک اولیه در جهت نامتقارن قرار گیرد، در جهت نامتقارن هیچ تحریکی به آن وارد

بزرگ این مقدار در مدل غیرخطی به صفر می‌رسد و همچنین پیک جابه‌جایی پیچشی و جانبی مدل خطی در نخستین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی ($\Omega = \Omega_1$)، بیشتر از مدل غیرخطی است.

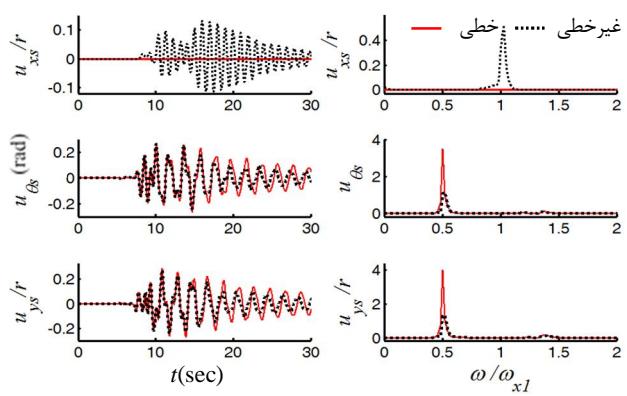
در شکل ۱۶، جابه‌جایی جهت نامتقارن سازه در مدل خطی از یک لحظه مشخص به بعد دارای مقدار بیشتری نسبت به مدل غیرخطی است. پیک پاسخ‌های فرکانسی در مدل خطی دارای مقدار بیشتری نسبت به مدل غیرخطی بوده و این اختلاف در جهت نامتقارن به حداقل مقدار می‌رسد. در شکل ۱۷، پاسخ‌های زمانی و فرکانسی دو مدل خطی و غیرخطی در درجات آزادی y و θ برابر است. بررسی محتوای فرکانسی جهت نامتقارن نتیجه



شکل ۱۲ پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع ۲ تحت زلزله کوبه تحت زاویه ورود
تحریک ۰ درجه نسبت به محور X



شکل ۱۳ پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع ۲ تحت زلزله کوبه تحت زاویه ورود
تحریک ۶۰ درجه نسبت به محور X



شکل ۱۴ پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع ۲ تحت زلزله کوبه تحت زاویه ورود
تحریک ۹۰ درجه نسبت به محور X

- با افزایش دامنه تحریک، اختلاف پاسخ‌های دو مدل خطی و غیرخطی در سازه‌های نوع 2 و 3 چشمگیرتر بوده و در دامنه‌های بزرگتر، بی‌نظمی‌هایی در ارتعاشات مدل غیرخطی سازه رخ می‌دهد که دیگر از پاسخ‌های هارمونیک تبعیت نمی‌کند.
- در سازه 2 با اعمال تحریک زلزله در جهت متقارن، هر دو مدل خطی و غیرخطی در فرکانس اول مد ارتعاشی متقارن تحریک می‌شود، ولی در مدل غیرخطی علاوه بر آن فرکانس اول جهت نامتقارن نیز تحریک شده است. با اعمال تحریک در جهت نامتقارن، هر دو مدل در فرکانس اول نامتقارن تحریک شده، ولی پیک پاسخ مدل خطی بیشتر است. همچنین، مد فرکانسی جهت متقارن نیز در مدل غیرخطی برخلاف مدل خطی، به سبب انتقال انرژی از جهت پیچشی-جانبی به جهت متقارن، تحریک شده است.
- در سازه 3 با اعمال تحریک زلزله در جهت متقارن، هر دو مدل خطی و غیرخطی در فرکانس اول جهت نامتقارن تحریک شده که مدل خطی دارای مقدار بیشتری است. با اعمال تحریک در جهت نامتقارن، هر دو مدل در فرکانس اول نامتقارن تحریک شده و دارای پیک پاسخ‌های برابر هستند و دیافراگم صلب طبقه در جهت متقارن جابه‌جایی خالص و بدون ارتعاش داشته است.
- دلیل اختلاف پاسخ‌های مدل خطی با مدل غیرخطی وجود عبارت‌های غیرخطی اینرسی در معادلات حرکت مدل غیرخطی است که باعث می‌شود درجات آزادی جهات متقارن و نامتقارن به طور همبسته با یکدیگر عمل کنند.
- به سبب بزرگ بودن سختی سازه نسبت به جداساز، می‌توان رفتار اندرکنشنی سازه و جداساز را به صورت یک طبقه شامل یک جسم صلب هم وزن سازه بر روی لایه نرم زیرسازه یا همان جداساز درنظر گرفت. بنابراین، این تحقیق، با ارائه نگرش جدید و معادلات غیرخطی حاصل شده از آن و به کمک بررسی پدیده‌های غیرخطی ممکن، علاوه بر نمایش قابلیت‌های دیگر رفتار اندرکنشنی سازه و جداساز، بر لزوم مطالعات بیشتر بر این نوع تکنیک و روش کنترل سازه‌ها جهت اصلاح روش‌های تحلیل و طراحی متداول و حتی تغییر ضوابط و تجویزهای آینده‌هایی نظیر UBC8، تأکید دارد.

5- مراجع

- [1] J. M. Kelly, F. Naeim, Design of seismic isolated structures: From theory to practice, *Nueva York, John Wiley & Sons*, 1999.
- [2] A. Tena-Colunga, L. Gomez-Sobron, Torsional response of base-isolated structures due to asymmetries in the superstructure, *Engineering structures*, Vol. 24, No. 12, pp. 1587-1599, 2002.
- [3] A. Tena-Colunga, C. Zambrana-Rojas, Dynamic torsional amplifications of base-isolated structures with an eccentric isolation system, *Engineering structures*, Vol. 28, No. 1, pp. 72-83, 2006.
- [4] A. Tena-Colunga, J. L. Escamilla-Cruz, Torsional amplifications in asymmetric base-isolated structures, *Engineering structures*, Vol. 29, No. 2, pp. 237-247, 2007.
- [5] J. C. De La Llera, J. L. Almazan, I. Vial, V. Ceballos, M. Garcia, Analytical and experimental response of asymmetric structures with friction and visco-elastic dampers, in *Proceeding of 13th world conference on earthquake engineering*, pp. 516-531, Vancouver, British Columbia, Canada, 2004.
- [6] C. E. Seguin, J. C. de la Llera, J. L. Almazán, Base-structure interaction of linearly isolated structures with lateral-torsional coupling, *Engineering Structures*, Vol. 30, No. 1, pp. 110-125, 2008.
- [7] C. E. Seguin, J. L. Almazán, J. C. De la Llera, Torsional balance of seismically isolated asymmetric structures, *Engineering Structures*, Vol. 46, pp. 703-717, 2013.
- [8] V. Kilar, D. Koren, Seismic behaviour of asymmetric base isolated structures with various distributions of isolators, *Engineering Structures*, Vol. 31, No. 4, pp. 910-921, 2009.
- [9] M. Sharbatdar, S. Vaee, G. G. Amiri, H. Naderpour, Seismic response of base-isolated structures with LRB and FPS under near fault ground motions, *Procedia Engineering*, Vol. 14, pp. 3245-3251, 2011.

نمی‌شود. همان‌طور که مشاهده شد پاسخ جابه‌جایی مدل خطی در جهت متقارن صفر شد. اما، بر مبنای معادلات حرکت مدل غیرخطی ارائه شده در این مقاله، درجات آزادی سیستم برای سازه و جداساز نامتقارن یک طرفه، به-طور خطی و غیرخطی با یکدیگر همبسته‌اند. به عبارت دیگر اگرچه جهت X به‌طور خطی با درجات آزادی جهات u و θ همبسته نیست، ولی به سبب عبارت غیرخطی اینرسی در معادلات غیرخطی با آن‌ها همبسته می‌شوند. بنابراین، طبق مدل غیرخطی پیشنهادی، انتظار می‌رود که به سبب تحریک اولیه در امتداد نامتقارن سازه، یعنی محور Z ، پاسخ جابه‌جایی در جهت متقارن، یعنی محور X ، غیر صفر باشد، همان‌طور که مشاهده شد پاسخ جابه‌جایی در مدل غیرخطی در جهت متقارن برابر صفر نشد.

همان‌طور که در نمودارهای پاسخ فرکانسی مشاهده شد، پیک‌های پاسخ اندرکنشنی سازه و جداساز بر روی فرکانس‌های اول جهات متقارن، نامتقارن و پیچشی بروز می‌کنند. همان‌گونه که قبلاً بیان شد، این فرکانس‌ها تقریباً نزدیک به فرکانس جداساز هستند و در نتیجه سازه اصلی هیچ‌گونه اثری در رفتار اندرکنشنی سازه و جداساز نداشته و به صورت یک جسم صلب عمل می‌کند، از این‌رو، به‌دلیل بزرگ بودن نسبت سختی‌های سازه به زیرسازه، می‌توان این رفتار اندرکنشنی را به صورت یک طبقه مورد تحلیل قرار داد. نتایج این تحلیل ساده شده با داده‌های به‌دست آمده در مراجع [22,21] برای سازه نامتقارن یک طبقه و نیز با نتایج تحقیق حاضر منطبق خواهد بود.

4- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

حرکت سازه جداسازی شده نامتقارن توسط 6 درجه آزادی توصیف شد که 3 درجه آزادی مربوط به سازه و 3 درجه آزادی دیگر مربوط به جداساز است. معادلات حرکت دو مدل خطی و غیرخطی با توجه به دستگاه‌های مختصات نصب شده در پایه ساختمان (دستگاه مختصات کلی)، و برکف جداساز (دستگاه مختصات محلی) برای این درجات آزادی ارائه شد. اختلاف این دو مدل، تفاوت در عبارت‌های غیرخطی اینرسی آن‌ها بود که تنها در مدل غیرخطی ظاهر شد. سپس، 3 نوع سازه خاص تعریف شد پاسخ‌های این 3 نوع سازه، تحت تحریکات نیروهای هارمونیک با توجه به تغییر دامنه تحریک A و فرکانس تحریک Ω ، و همچنین تحت زلزله کوبه با زوایای مختلف ورود تحریک β نسبت به محور X مورد بررسی قرار گرفتند. به بررسی پاسخ‌های سازه و جداساز در دو حوزه زمان و فرکانس برای دو مدل خطی و غیرخطی پرداخته و مشاهدات نتایج برای 3 نوع سازه به موارد زیر خلاصه می‌شود:

- پاسخ‌های زمانی و فرکانسی دو مدل خطی و غیرخطی در سازه نوع 1 دقیقاً برهم منطبق است و این انطباق مستقل از اندازه دامنه و فرکانس تحریک، تحت بار هارمونیک و زوایای ورود تحریک، تحت بار هارمونیک و زلزله است.

- در پدیده اشباع، در لحظه‌ای مشخص، انرژی جذبی توسط پاسخ یک جهت، اشباع شده و از آن لحظه به بعد مابقی انرژی تحریک جذبی، که حاوی پاسخ هارمونیک با فرکانس طبیعی بیشتر است، به درجات آزادی جهت دیگر، تحت پاسخ هارمونیک با فرکانس طبیعی کمتر، منتقل می‌شود. این رفتار مدل غیرخطی در سازه 2 قابل مشاهده است.

- در پدیده انتقال انرژی مشابه پدیده اشباع، انتقال انرژی از یک جهت به جهت دیگر صورت می‌گیرد، با این تفاوت که این انتقال از لحظات نخستین تحریک آغاز می‌شود و دارای یک لحظه خاص نیست. این پدیده در سازه 3 مشهود است.

- [16] G. Gorelik, A. Witt, Swing of an elastic pendulum as an example of two parametrically bound linear vibration systems, *J. Tech. Phys.(USSR)*, Vol. 3, No. 2-3, pp. 294-307, 1933.
- [17] S. R. Hsieh, S. W. Shaw, The dynamic stability and non-linear resonance of a flexible connecting rod: single-mode model, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 170, No. 1, pp. 25-49, 1994.
- [18] A. Shooshtari, D. Dastanl Mobarakeh, Nonlinear free vibration of a single layered nanoplate based on the nonlocal elasticity, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 15, pp. 223-236, 2014. (In Persian)
- [19] A. Mamandi, M. H. Kargarnovin, D. Younesian, Nonlinear dynamics of an inclined beam subjected to a moving load, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 60, No. 3, pp. 277-293, 2010.
- [20] A. K. Chopra, *Dynamics of structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, 4th Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [21] F. Amini, M. A. Afshar, Saturation in asymmetric structures under internal resonance, *Acta mechanica*, Vol. 221, No. 3-4, pp. 353-368, 2011.
- [22] M. Amin Afshar, F. Amini, Non-linear dynamics of asymmetric structures under 2: 2: 1 resonance, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 47, No. 7, pp. 823-835, 2012.
- [10] A. Nayfeh, D. Mook, *Nonlinear Oscillations*, New York: John Wiley and Sons, 1979.
- [11] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, L. R. Marshall, Nonlinear coupling of pitch and roll modes in ship motions, *Journal of Hydraulics*, Vol. 7, No. 4, pp. 145-152, 1973.
- [12] H. Hatwal, A. Mallik, A. Ghosh, Non-linear vibrations of a harmonically excited autoparametric system, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 81, No. 2, pp. 153-164, 1982.
- [13] J. Miles, Resonantly forced motion of two quadratically coupled oscillators, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 13, No. 1, pp. 247-260, 1984.
- [14] W. K. Lee, H. D. Park, Chaotic dynamics of a harmonically excited spring-pendulum system with internal resonance, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 14, No. 3, pp. 211-229, 1997.
- [15] P. Bayly, L. Virgin, An empirical study of the stability of periodic motion in the forced spring-pendulum, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 443, No. 1918, pp. 391-408, 1993.