



# مدلسازی و کنترل ربات متحرک چرخ‌دار مجهز به تریلی با چرخ کروی غیرفعال

اصغر خان‌پور<sup>1</sup>، علی کیماسی خلجی<sup>2</sup>، سید علی اکبر موسویان<sup>3\*</sup>

1- دانش آموخته کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- دانش آموخته دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

\* تهران، صندوق پستی 19395-1999، moosavian@kntu.ac.ir

## اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 25 فروردین 1394

پذیرش: 15 خرداد 1394

ارائه در سایت: 07 تیر 1394

کلیدواژگان:

ربات‌های متحرک چرخ‌دار تراکتور-تریلی

تعقیب مسیرهای حرکت زمانی

سیستم‌های غیرهولونومیک

کمبود عملگر

لیاپانوف

## چکیده

کنترل ربات‌های متحرک چرخ‌دار براساس مسیرهای زمانی، یکی از مسائل مطرح در زمینه ربات‌های متحرک می‌باشد. همچنین، کنترل سیستم‌هایی که با کمبود عملگر مواجه هستند از پیچیدگی خاص و اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مقاله، این دو موضوع مهم کنترل توأم در یک ربات متحرک تراکتور-تریلی؛ که در آن تراکتور یک ربات دو چرخ دیفرانسیلی و تریلی مجهز به دو چرخ کروی غیرفعال می‌باشد؛ مورد مطالعه قرار گرفته است. استفاده از چرخ‌های کروی به جای چرخ‌های استاندارد در تریلی، ربات را به شدت کم‌عملگر و غیرخطی می‌کند. کمبود عملگر سیستم، علاوه بر وجود تراکتور دیفرانسیلی، ناشی از تریلی با چرخ‌های کروی غیرفعال است که برای حذف قید درجات آزادی سیستم و قابلیت مانور در سیستم به کار رفته است. در این مقاله پس از معرفی ربات، مدل سینماتیکی و سینتیکی آن استخراج و مدل دینامیکی با ترکیب و تلفیق سینماتیک و سینتیک سیستم ارائه می‌شود. سپس، یک الگوریتم کنترل جدید، که براساس یک مفهوم کاملاً فیزیکی سامان داده شده تحت عنوان الگوریتم کنترلی لیاپانوف - PID ارائه می‌شود. سپس اجتناب از ایجاد تکینگی در الگوریتم کنترلی پیشنهاد شده مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد و پایداری آن اثبات می‌شود. نتایج شبیه‌سازی حاکی از عملکرد مطلوب الگوریتم کنترلی پیشنهادی است. در پایان، نتایج پیاده‌سازی تجربی الگوریتم کنترلی پیشنهادی بر روی یک سیستم آزمایشگاهی ارائه می‌شود که کارایی قانون کنترلی پیشنهاد شده را نشان می‌دهد.

## Dynamics and Control of a Wheeled Mobile Robot Attached by a Trailer with Passive Spherical Wheels

Asghar Khanpoor, Ali Keymasi Khalaji, Seyed Ali Akbar Moosavian\*

Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

\* P.O.B. 19395-1999 Tehran, Iran, moosavian@kntu.ac.ir

## ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 14 April 2015  
Accepted 05 June 2015  
Available Online 28 June 2015

### Keywords:

Tractor-Trailer Wheeled Mobile Robots  
Trajectory Tracking  
Nonholonomic Systems  
Underactuation  
Lyapunov Method

## ABSTRACT

Trajectory tracking is one of the main control problems in the context of Wheeled Mobile Robots (WMRs). On the other hand, control of underactuated systems possesses a particular complexity and importance; so it has been the focus of many researchers in recent years. In this paper, these two important control subjects have been discussed for a Tractor-Trailer Wheeled Mobile Robot (TTWMR), which includes a differential drive wheeled mobile robot towing a passive spherical wheeled trailer. The use of spherical wheels instead of standard wheels in trailer makes the robot highly underactuated and nonlinear. Spherical wheels have been used for the trailer to increase robots' maneuverability. In fact, standard wheels create nonholonomic constraints by means of pure rolling and nonslip conditions, and reduce robot maneuverability. In this paper, after introducing the robot, kinematics and kinetics models have been obtained for the system. Then, based on physical intuition a new controller has been developed for the robot, named Lyapunov-PID control algorithm. Then, singularity avoidance of the proposed algorithm has been analyzed and the stability of the algorithm has been discussed. Simulation results reveal the suitable performance of the proposed algorithm. Finally, experimental implementation results have been presented which verify the simulation results.

## 1- مقدمه

در میان ربات‌های متحرک، ربات‌های متحرک چرخ‌دار<sup>1</sup> جایگاه ویژه‌ای دارند. چرخ به عنوان یکی از روش‌های جابه‌جایی ربات، علاوه بر طراحی ساده، روابط ساده، ساخت ساده، دارای بازدهی بالایی است. همچنین تعادل در طرح‌های

ربات چرخ‌دار معمولاً مشکل اساسی محسوب نمی‌شود و در ربات‌های سه چرخ این تضمین همواره وجود دارد که ربات در تعادل است [1]. از این رو مدلسازی و کنترل این سیستم‌ها مورد مطالعه‌ی بسیاری از محققان قرار گرفته است [2-7]. مدل‌سازی سینماتیکی، دینامیکی و ویژگی‌های ساختاری انواع ربات‌های متحرک چرخ‌دار در [8] بررسی شده است.

1- Wheeled Mobile Robots (WMRs)

Please cite this article using:

A. Khanpoor, A. Keymasi Khalaji, S.A.A. Moosavian, Dynamics and Control of a Wheeled Mobile Robot Attached by a Trailer with Passive Spherical Wheels, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 8, pp. 216-226, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

استاندارد در تریلی می‌باشد. چرخ‌های کروی بر خلاف چرخ‌های استاندارد با غلتش در دو راستا، قابلیت مانور و درجات آزادی بیشتری را برای ربات فراهم می‌کنند. به طور کلی یک ارتباط معکوس بین مانورپذیری<sup>14</sup> و کنترل‌پذیری<sup>15</sup> وجود دارد [1]، با توجه به تغییر در ساختار ربات و استفاده از چرخ کروی در تریلی ربات به شدت کم‌عملگر و غیرخطی می‌شود که کنترل سیستم را با پیچیدگی‌های بسیاری روبرو می‌کند. الگوریتم کنترلی که برای فائق آمدن بر این پیچیدگی‌ها پیشنهاد شده است، الگوریتم جدیدی است که لیاپانوف-PID نامگذاری شده است و دستاوردهای زیر را به همراه داشته است:

- مدلسازی ربات و ارائه مدل ترکیبی<sup>16</sup> که تلفیقی از مدل سینماتیکی و سینتیکی سیستم است.

- ارائه الگوریتم کنترلی جدید، به عنوان یک دستاورد کاملاً فیزیکی و قابل کاربرد برای سیستم‌های کم‌عملگر با ساختار مشابه

- طراحی قانون کنترلی بر مبنای الگوریتم لیاپانوف-PID<sup>17</sup> برای ربات تراکتور-تریلی موردنظر، که یک سیستم به شدت غیرخطی، کم‌عملگر و غیرهولونومیک می‌باشد.

- بررسی اجتناب از ایجاد تکینگی<sup>18</sup> در الگوریتم کنترلی

- تحلیل پایداری الگوریتم کنترلی

- پیاده‌سازی الگوریتم کنترلی بر روی یک سیستم آزمایشگاهی و ارائه نتایج تجربی در این مقاله ابتدا ساختار ربات معرفی شده و مدل سینماتیکی و سینتیکی استخراج می‌شود. سپس به دلیل عدم فراهم نمودن اطلاعات مکفی در هر مدل و ناکارآمدی کنترل بر مبنای آن‌ها، مدل ترکیبی که تلفیقی از سینماتیک و سینتیک است، معرفی می‌شود که هم بیان مشخصی از سیستم در اختیار قرار می‌دهد و هم از مزایای دو مدل استفاده می‌کند. در ادامه الگوریتم کنترلی جدیدی که لیاپانوف-PID نامگذاری شد، ارائه می‌شود. در پایان با بررسی اجتناب از ایجاد تکینگی در سیستم کنترلی و اثبات پایداری الگوریتم کنترلی، نتایج پیاده‌سازی ارائه می‌شود.

## 2- توصیف و مدلسازی سیستم

ربات تراکتور-تریلی شکل 1، یک ربات دو چرخ دیفرانسیلی به همراه یک تریلی می‌باشد. تراکتور از دو چرخ استاندارد فعال<sup>19</sup> (هم محور با عملگرهای جداگانه) و یک چرخ کروی غیرفعال<sup>20</sup> تشکیل شده است. چرخ‌های استاندارد به دلیل ساختار ویژه خود یک قید غیرهولونومیکی به سیستم اعمال می‌کنند ولی چرخ کروی صرفاً به عنوان تکیه‌گاه بوده و برای حفظ تعادل ربات به کار رفته است و هیچ گونه قیدی به سیستم اعمال نمی‌کند. تریلی در نقطه  $P$  (مرکز محور دو چرخ) به تراکتور لولا شده که در شکل 2 نشان داده شده است. برای افزایش مانورپذیری سیستم، تریلی به دو چرخ کروی غیرفعال مجهز شده است. چرخ‌های کروی با غلتش در دو راستا علاوه بر افزایش قابلیت مانور و درجات آزادی ربات، هیچ‌گونه قیدی ایجاد نمی‌کنند، که این سیستم مورد نظر را به شدت کم‌عملگر می‌کند.

فرض می‌شود که هیچ‌گونه لغزشی در چرخ‌ها وجود ندارد و حرکت صرفاً براساس غلتش خالص اتفاق می‌افتد، همچنین حرکت سیستم صفحه‌ای در نظر گرفته شده است. تمامی پارامترهای ربات در شکل 2 قابل مشاهده می‌باشند.

ربات‌های متحرک چرخ‌دار به دلیل ساختار و استفاده از چرخ‌های استاندارد در آن، مقید به قیود غیرهولونومیک<sup>1</sup> می‌باشند، این قیود به دلیل غلتش خالص چرخ‌ها در حرکت رو به جلو و عدم لغزش جانبی ایجاد می‌شوند. قیود غیرهولونومیک در رده‌ی سرعت و شتاب بیان می‌شوند، به عبارت دیگر این قیود سرعت‌ها و شتاب‌های سیستم را محدود می‌کنند و از درجات آزادی موقعیت نمی‌کاهند و قیود به‌صورت ضمنی در کنار معادلات دینامیکی سیستم در نظر گرفته می‌شوند. قیود غیرهولونومیک علاوه بر افزایش پیچیدگی مدلسازی و کنترل این ربات‌ها به جذابیت این مسائل می‌افزایند [9]. در [10] خلاصه‌ای از روش‌های کنترلی در سیستم‌های غیرهولونومیک، در [12,11] تعقیب مسیر در فضای کارترین<sup>2</sup>، در [15-13] پایدارسازی حول وضعیت معین<sup>3</sup> و در [17-16] تعقیب مسیرهای حرکت زمانی<sup>4</sup> مورد مطالعه قرار گرفته است. در [18] برای یک ربات دو چرخ دیفرانسیلی، ورودی‌های کنترل بر مبنای لیاپانوف<sup>5</sup> طراحی و به کمک الگوریتم ژنتیک بهینه‌سازی شده است. در [19] سینماتیک، کنترل و پایدارسازی ربات متحرک با یک تریلی مورد مطالعه قرار گرفته است. در [20] مدلسازی تعقیب مسیرهای حرکت زمانی برای یک ربات متحرک شبه‌خودرو<sup>6</sup> که دارای دو قید غیرهولونومیک است بررسی شده است. در [21] نیز سینماتیک و کنترل یک ربات متحرک چرخ‌دار با دو تریلی که دارای سه قید غیرهولونومیک است، مورد مطالعه قرار گرفته است. در [22] یک الگوریتم کنترلی غیر مدل مبنای<sup>7</sup> با استفاده از خطاهای فیلتر شده مشتقی-تناسبی<sup>8</sup> برای کنترل ربات متحرک چرخ‌دار (دو چرخ دیفرانسیلی) ارائه شده است. در [9] برای کنترل یک ربات تراکتور-تریلی از کنترل سینماتیکی فیدبک خروجی و یک کنترل مود لغزشی فازی<sup>9</sup> استفاده شده است که ربات را به‌صورت مجانبی حول مسیرهای حرکت زمانی مرجع پایدار می‌سازد. در [23] با استفاده از روش غیر مدل مبنای ترانهاده ماتریس ژاکوبین<sup>10</sup>، تعقیب مسیر حرکت زمانی مرجع توسط ربات تراکتور-تریلی انجام شده است.

در [27-24] کنترل سیستم‌های مکانیکی کم‌عملگر<sup>11</sup> مورد بحث قرار گرفته است. یک سیستم مکانیکی به دلایل مختلفی با کمبود عملگر مواجه می‌شود. مشهودترین دلیل، طراحی ذاتی اینگونه ربات‌ها است؛ مانند آکروبات<sup>12</sup>، همچنین کمبود عملگر در ربات‌های متحرک بوجود می‌آید؛ به عنوان مثال زمانی که یک بازوی مکانیکی ماهر بر روی یک پایه‌ی متحرک، یک پایه‌ی فضایی و یا یک پایه‌ی زیردریایی نصب شود، دلیل دیگری که باعث ایجاد کمبود عملگر می‌شود، مدل ریاضی است که استفاده می‌شود؛ به عنوان مثال زمانی که انعطاف‌پذیری مفصل در مدل در نظر گرفته شود [24]. همانطور که اشاره شد، ربات‌های متحرک چرخ‌دار تراکتور-تریلی<sup>13</sup> پیش‌تر مورد مطالعه‌ی محققان قرار گرفته است [28,23,21,19,15,9]. ربات متحرک دارای تریلی (تریلی مجهز به چرخ استاندارد) یک سیستم غیرخطی، کم‌عملگر و مقید به قیود غیرهولونومیک می‌باشد. تفاوت اساسی این پژوهش، به منظور افزایش مانور سیستم، استفاده از چرخ کروی به جای چرخ

- 1- Nonholonomic Constraints
- 2- Path Following
- 3- Point Stabilization
- 4- Trajectory Tracking
- 5- Lyapunov Based
- 6- Car-Like
- 7- Non-Model Based
- 8- PD-action Filtered Errors
- 9- Fuzzy Sliding Mode Control
- 10- Transpose Jacobian Matrix
- 11- Undeactuated Mechanical Systems
- 12- Acrobot
- 13- Tractor-Trailer Wheeled Mobile Robots (TTWMRs)

- 14- Maneuverability
- 15- Controllability
- 16- Hybrid Model
- 17- Lyapunov-PID
- 18- Singularity Avoidance
- 19- Active
- 20- Passive

ورودی‌های سیستم نیز سرعت دورانی چرخ‌های تراکتور  $(\omega_r, \omega_l)$  می‌باشد، که با تغییر متغیر (8) و (9) ورودی‌های سینماتیکی به  $(\dot{s})$  سرعت خطی نقطه‌ی  $P$  (سرعت رو به جلوی تراکتور) و سرعت زاویه‌ای تراکتور  $(\dot{\theta}_1)$  تبدیل می‌شوند.

$$u = [u_1 \quad u_2]^T \quad (7)$$

$$u_1 = \dot{s} = \frac{r}{2}(\omega_r + \omega_l) \quad (8)$$

$$u_2 = \dot{\theta}_1 = \frac{r}{2b}(\omega_r - \omega_l) \quad (9)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1 \cos \theta_1 \\ \dot{y} &= u_1 \sin \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 &= u_2 \\ \dot{\theta}_2 &= \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (10)$$

از مدل سینماتیکی (10) مشخص است هیچ رابطه‌ی سینماتیکی بین  $\dot{\theta}_2$  و دیگر متغیرها و ورودی‌های سینماتیکی وجود ندارد، و این ناشی از استفاده از چرخ کروی و نبودن قید برای تریلی است که کمبود عملگر را ایجاد نموده است.

## 2-2- مدل سینتیکی

فرمولاسیون لاگرانژ برای یک سیستم مقید به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \right) = f_k - \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{jk} \quad (11)$$

که  $\lambda_j$ ها ضرایب لاگرانژ،  $m$  تعداد معادلات قیدی و  $a_{jk}$  برابر با  $k$ -امین ضریب از معادله‌ی قیدی  $j$ -ام است. همچنین لاگرانژین  $\mathcal{L}$  اختلاف بین انرژی جنبشی  $T$  و پتانسیل  $U$  می‌باشد.  $f_k$  نیروی تعمیم یافته  $k$ -ام می‌باشد.

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} - U(q) \quad (12)$$

$B(q)$  ماتریس اینرسی مثبت معین سیستم مکانیکی است. انرژی جنبشی سیستم برابر است با:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \{ (\dot{x} - a_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 + (\dot{y} + a_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 \} \\ &+ \frac{1}{2} m_2 \{ (\dot{x} + l \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 + (\dot{y} - l \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 \} \\ &+ \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \quad (13)$$

با توجه به حرکت صفحه‌ای ربات و عدم تغییر انرژی پتانسیل گرانشی، لاگرانژین برابر با انرژی جنبشی می‌باشد. با انجام محاسبات، نتایج بدست آمده در روابط (14-17) آورده شده است.

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{x} - m_1 a_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l \sin \theta_2 \ddot{\theta}_2 \\ - m_1 a_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ = f \cos \theta_1 + \lambda_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{y} + m_1 a_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 - m_2 l \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 \\ - m_1 a_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ = f \sin \theta_1 - \lambda_1 \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (15)$$

$$m_1 a_1 (-\ddot{x} \sin \theta_1 + \ddot{y} \cos \theta_1) + (J_1 + m_1 a_1^2) \ddot{\theta}_1 = \tau \quad (16)$$

$$m_2 l (\ddot{x} \sin \theta_2 - \ddot{y} \cos \theta_2) + (J_2 + m_2 l^2) \ddot{\theta}_2 = 0 \quad (17)$$

که  $\lambda_1$  مضرب لاگرانژ،  $f$  نیروی رانش تراکتور و  $\tau$  گشتاور جهت‌گیری تراکتور می‌باشد. فرم ماتریسی معادلات به شکل (18) است:

$$M(q) \ddot{q} + V(q, \dot{q}) = E(q) \tau + A^T(q) \lambda \quad (18)$$

برای حذف مضارب لاگرانژ، طرفین رابطه‌ی (3) در ماتریس ژاکوبین ضرب می‌شود که رابطه‌ی (19) نتیجه می‌شود.

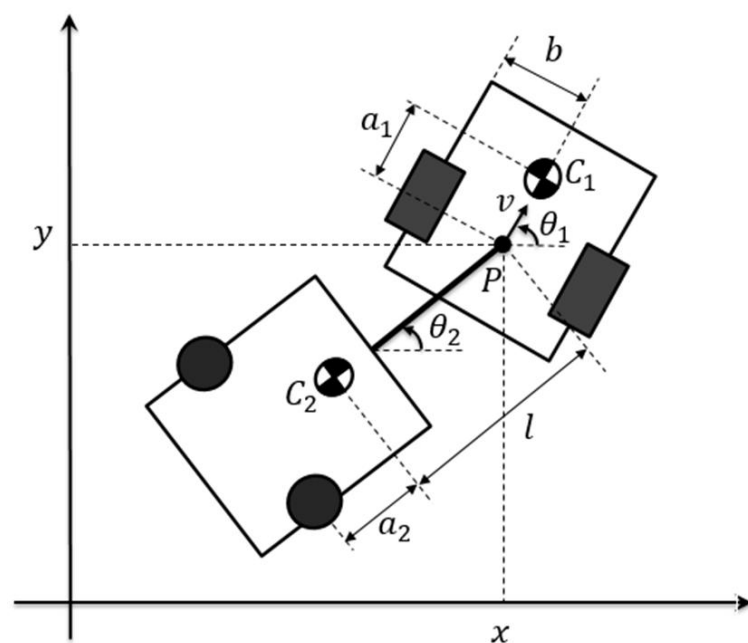
$$S(q) A(q) \dot{q} = 0 \rightarrow S^T(q) A^T(q) = 0 \quad (19)$$

با توجه به رابطه‌ی (19) با ضرب ترانهاده ماتریس ژاکوبین در رابطه‌ی (18)، رابطه‌ی مزبور به فرم (20) تبدیل می‌شود.

$$S^T(q) M(q) \ddot{q} + S^T(q) V(q, \dot{q}) = S^T(q) E(q) \tau \quad (20)$$



شکل 1 ربات ساخته شده در آزمایشگاه



شکل 2 ساختار ربات متحرک چرخ‌دار با تریلی مجهز به چرخ‌های کروی

## 2-1- مدل سینماتیکی

استفاده از چرخ‌های استاندارد در ربات‌های متحرک، به دلیل ساختار اینگونه چرخ‌ها (غلتش بدون لغزش و عدم حرکت جانبی) قیود غیرهولونومیک را در اینگونه ربات‌ها ایجاد می‌کنند. این قیود به صورت رابطه (1) تعریف می‌شوند.

$$A(q) \dot{q} = 0 \quad (1)$$

که در آن  $A(q)$  ماتریس قیدی  $(m \times n)$ ،  $m$  تعداد قیود،  $n$  تعداد مختصات تعمیم یافته و  $q$  مختصات تعمیم یافته<sup>1</sup> می‌باشد.

$$q = [x \quad y \quad \theta_1 \quad \theta_2]^T \quad (2)$$

قید غیرهولونومیک مربوط به تراکتور به صورت رابطه‌ی (3) می‌باشد.

$$A(q) \dot{q} = \dot{x} \sin \theta_1 - \dot{y} \cos \theta_1 = 0 \quad (3)$$

بنابراین ماتریس قیود به صورت (4) خواهد بود.

$$A(q) = [\sin \theta_1 \quad -\cos \theta_1 \quad 0 \quad 0] \quad (4)$$

با توجه به اینکه میدان برداری  $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  اگر  $X = 0$  فضای تهی ماتریس  $A$  را افزای می‌کند، با باز آرایی روابط، مدل سینماتیکی به صورت رابطه‌ی (5) خواهد بود.

$$\dot{q} = S(q) \dot{\zeta} \quad (5)$$

که در آن  $S(q)$  ماتریس ژاکوبین سیستم و یک نگاشت از مختصات تعمیم یافته  $\dot{q}$  به متغیرهای فضای کاری  $\dot{\zeta}$  است.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

1- Generalized coordinates

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (5) خواهیم داشت:

$$\ddot{q} = \dot{S}(q)\dot{\zeta} + S(q)\ddot{\zeta} \quad (21)$$

و جایگذاری (21) در (20) رابطه (22) نتیجه می‌شود.

$$S^T(q) M(q) (\dot{S}(q)\dot{\zeta} + S(q)\ddot{\zeta}) + S^T(q) V(q, \dot{q}) = S^T(q) E(q)\tau \quad (22)$$

در نهایت معادلات دینامیکی به فرم ماتریسی زیر خواهند بود:

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 & m_2 l \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ 0 & J_1 + m_1 a_1^2 & 0 \\ m_2 l \sin(\theta_2 - \theta_1) & 0 & J_2 + m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_1 a_1 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2 \\ m_1 a_1 \dot{\theta}_1 \\ -m_2 l \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

کمبود عملگر از مدل دینامیکی بدست آمده نیز مشهود است.

### 3-2- مدل ترکیبی

کنترل ربات‌های متحرک چرخ‌دار عمدتاً بر مبنای کنترل سینماتیک انجام می‌شود، اما نبودن روابط و اطلاعات کافی و همچنین عدم وجود الگوریتم کنترلی مناسب برای سیستم‌های با کمبود عملگر، هم کنترل بر مبنای مدل سینماتیکی و هم مدل سینتیکی را با مشکل مواجه می‌نماید. بنابراین داشتن یک مدل که سیستم را به خوبی معرفی نماید، از اهمیت بالایی برخوردار است. بدین منظور مدل ترکیبی پیشنهاد می‌شود و معادلات فضای حالت سیستم بر مبنای ترکیب معادلات سینماتیک و سینتیکی تشکیل می‌شود. بنابراین رابطه‌ی (17) به روابط (10) اضافه می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1 \cos \theta_1 \\ \dot{y} &= u_1 \sin \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 &= u_2 \\ \dot{\theta}_2 &= \dot{\theta}_2 \\ \ddot{x} \sin \theta_2 - \ddot{y} \cos \theta_2 + k \ddot{\theta}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن  $k = J_2/m_2 l + l$  می‌باشد.

بر خلاف روش‌های معمول کنترل ربات‌های متحرک چرخ‌دار، که  $\theta_1$  یکی از مختصات تعمیم‌یافته سیستم در نظر گرفته می‌شود، با افزودن  $\dot{x}$  و  $\dot{y}$  به مختصات تعمیم‌یافته سیستم، بردار متغیرهای حالت به صورت (25) در نظر گرفته می‌شود، هدف از این کار نیز اعمال و استفاده از تغییر متغیر (27) و (28) می‌باشد که معادلات سیستم را به (29) تغییر می‌دهد.

$$z = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta_2, \dot{\theta}_2]^T \quad (25)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x} = z_2 \\ \dot{z}_2 &= \ddot{x} = \dot{u}_1 \cos \theta_1 - u_1 u_2 \sin \theta_1 \\ \dot{z}_3 &= \dot{y} = z_4 \\ \dot{z}_4 &= \ddot{y} = \dot{u}_1 \sin \theta_1 + u_1 u_2 \cos \theta_1 \\ \dot{z}_5 &= \dot{\theta}_2 = z_6 \\ \dot{z}_6 &= \ddot{\theta}_2 = \frac{1}{k} (-\ddot{x} \sin z_5 + \ddot{y} \cos z_5) \end{aligned} \quad (26)$$

با اعمال تغییر متغیرهای (23) و (24) به سیستم داریم:

$$v_1 = \dot{u}_1 \cos \theta_1 - u_1 u_2 \sin \theta_1 \quad (27)$$

$$v_2 = \dot{u}_1 \sin \theta_1 + u_1 u_2 \cos \theta_1 \quad (28)$$

فرم فضای حالت (29) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v_1 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= v_2 \\ \dot{z}_5 &= z_6 \\ \dot{z}_6 &= \frac{1}{k} (-v_1 \sin z_5 + v_2 \cos z_5) \end{aligned} \quad (29)$$

### 3- طراحی الگوریتم کنترلی

کنترل‌های ربات‌های متحرک را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد، برخی کنترلرها سینماتیک سیستم را کنترل می‌کنند و ورودی‌هایشان سرعت‌ها می‌باشند و برخی دیگر دینامیک سیستم را کنترل می‌کنند و ورودی‌های کنترلی آن‌ها نیروها و گشتاورهای تولید شده توسط عملگرها می‌باشند. بیشتر کارهایی که در زمینه‌ی ربات‌های متحرک چرخ‌دار انجام شده است از نوع کنترلر سینماتیکی بوده‌اند. دلایل اصلی این موضوع عبارتند از:

- مدل سینماتیکی ساده‌تر از مدل دینامیکی می‌باشد.
- بسیاری از ربات‌ها عملگرهایشان موتورهای الکتریکی می‌باشند، این موتورها اغلب دارای حلقه‌های کنترل سرعت با ورودی سرعت دورانی مطلوب می‌باشند که سرعت دورانی موتور را روی مقداری مشخص پایدار می‌سازند.
- مسئله‌ی کنترل ربات با گشتاور موتورها را می‌توان به مسئله‌ای با ورودی‌های کنترلی شتاب تبدیل نمود.

در واقع هدف اصلی از بدست آوردن مدل ترکیبی، هم استفاده از مزایای مذکور بوده و همچنین مشخص کردن وضعیت کامل ربات و رفع نقص مدل سینماتیکی به دلیل عدم وجود رابطه سینماتیکی متغیر غیرفعال  $\theta_2$  (جهت-گیری تریلی) با سایر متغیرها می‌باشد.

در ادامه یک الگوریتم کنترلی جدید که دارای یک مفهوم کاملاً فیزیکی است، معرفی می‌شود. برای تبیین بهتر و درک مفهوم فیزیکی این الگوریتم، دقت به روند دست‌یابی به الگوریتم اهمیت ویژه‌ای دارد.

یکی از روش‌های متداول در کنترل سینماتیک ربات دو چرخ دیفرانسیلی یا شبه‌خودرو طراحی ورودی‌های کنترلی بر مبنای لیاپانوف می‌باشد. همانطور که پیشتر گفته شد، جهت‌گیری تریلی هیچ‌گونه رابطه‌ی سینماتیکی با سایر متغیرها یا ورودی‌ها ندارد. بنابراین در ابتدا برای کنترل ربات، از کنترل آن صرف‌نظر می‌شود. در واقع هدف کنترل متغیرهای فعال سیستم، یعنی کنترل تراکتور، بر مبنای لیاپانوف می‌باشد. در این حالت هیچ‌گونه کنترلی بر وضعیت تریلی وجود ندارد و تریلی صرفاً به دلیل اتصال به تراکتور و روابط موجود حرکت نامعلومی را طی می‌کند.

### 3-1- توصیف فیزیکی الگوریتم کنترلی

برای شروع طراحی الگوریتم کنترلی ابتدا بردار خطای (30) را تعریف نموده که بر مبنای آن معادلات فضای حالت به (31) تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases} e_1 = x - x_d \\ e_2 = \dot{x} - \dot{x}_d \\ e_3 = y - y_d \\ e_4 = \dot{y} - \dot{y}_d \end{cases} \quad (30)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= v_1 - v_{1d} \\ \dot{e}_3 &= e_4 \\ \dot{e}_4 &= v_2 - v_{2d} \\ \dot{z}_5 &= z_6 \\ \dot{z}_6 &= \frac{1}{k} (-v_1 \sin z_5 + v_2 \cos z_5) \end{aligned} \quad (31)$$

در ادامه تابع لیاپانوف پیشنهادی (32) معرفی می‌شود و براساس آن ورودی‌های کنترلی که بتواند سیستم را پایدار نماید استخراج می‌شود. در واقع این تابع لیاپانوف پیشنهادی شامل متغیرهای مفصلی تراکتور بوده و فعلاً، هدف پایداری تراکتور است.

$$V(e) = \frac{1}{2} (\alpha_1 e_1^2 + \alpha_2 e_2^2 + \alpha_3 e_3^2 + \alpha_4 e_4^2) \quad (32)$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 > 0$$

که مشتق تابع لیاپانوف پیشنهادی به‌صورت (33) خواهد بود.

قرار دادن یک فنر و دمپر پیچشی در محل اتصال تریلی به تراکتور (نقطه P) استفاده می‌شود تا بتوان نوسانات ایجاد شده را مهار نمود. بنابراین معادله (17) که به دلیل قرار گرفتن فنر و دمپر پیچشی تغییر نموده، بازیابی می‌شود تا تأثیرات آن مشخص شود. هدف از اضافه کردن فنر و دمپر در ساختار سیستم، از بین بردن نوسانات تریلی حول مسیر مرجع زمانی می‌باشد. پس از انجام محاسبات فنر و دمپر، معادله (17) را به صورت معادله (41) تبدیل می‌کند. اضافه کردن فنر و دمپر هیچ تأثیر در انرژی جنبشی سیستم ندارد. فرمولاسیون کلی لاگرانژ به صورت (37) می‌باشد.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = f_k - \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{jk} \quad (38)$$

انرژی پتانسیل سیستم به صورت (38) و انرژی جنبشی طبق (13) خواهد بود. و  $F$  در آن به صورت (39) است.

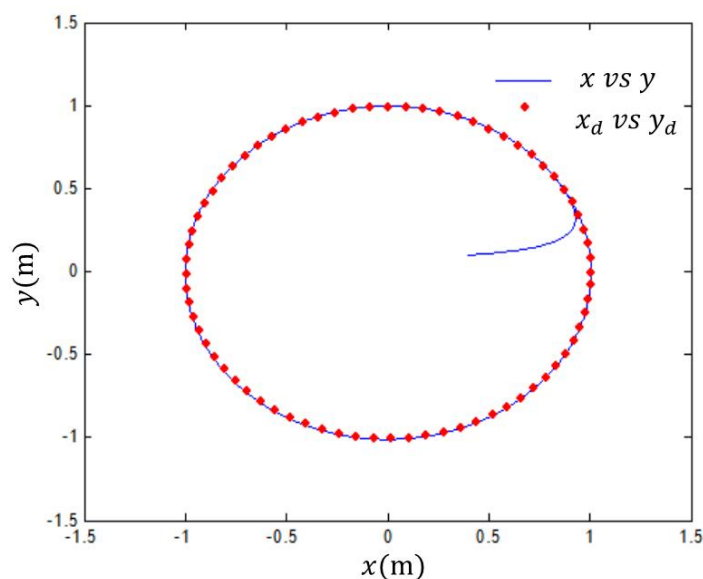
$$U = \frac{1}{2} k_t (\theta_1 - \theta_2)^2 \quad (39)$$

$$F = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s = \frac{1}{2} c_t (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2 \quad (40)$$

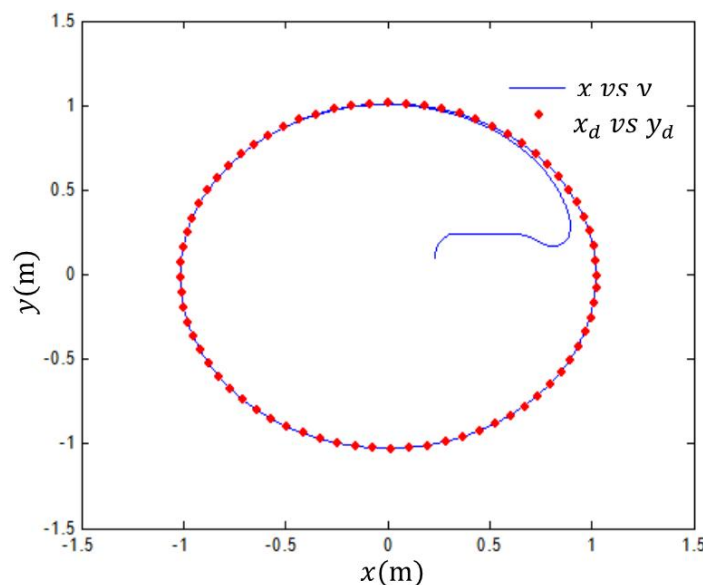
بنابراین معادلات دینامیکی سیستم به شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{k} (-\ddot{x} \sin \theta_2 + \ddot{y} \cos \theta_2 + k_t (\theta_1 - \theta_2) + c_t (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)) \quad (41)$$

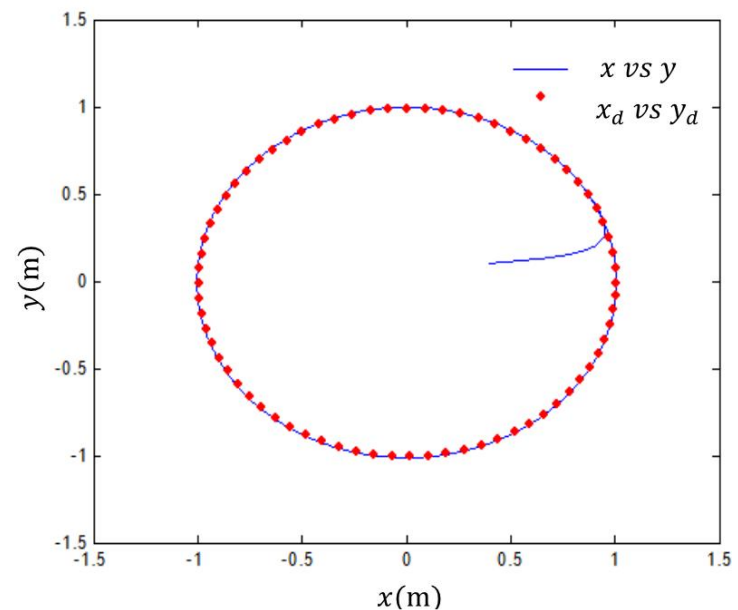
بنابراین با جایگذاری رابطه (41) در معادلات فضای حالت سیستم (31) و اعمال ورودی‌های طراحی شده بر مبنای تابع لیپانوف پیشنهادی (32) و شبیه‌سازی مجدد برای مسیر مرجع زمانی (37)، نتایج حاصله در شکل 5 و 6 نشان داده شده است.



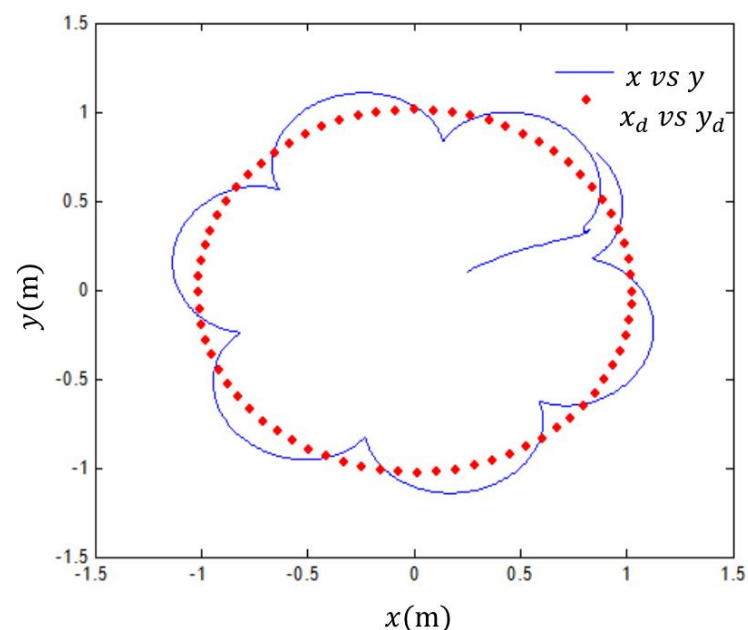
شکل 5 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارترین توسط تراکتور (با قرار دادن فنر و دمپر پیچشی در محل اتصال تریلی به تراکتور نقطه P)



شکل 6 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارترین توسط تریلی (با قرار دادن فنر و دمپر پیچشی در محل اتصال تریلی به تراکتور نقطه P)



شکل 3 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارترین توسط تراکتور



شکل 4 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارترین توسط تریلی

$$\dot{V}(e) = (\alpha_1 e_1 \dot{e}_1 + \alpha_2 e_2 \dot{e}_2 + \alpha_3 e_3 \dot{e}_3 + \alpha_4 e_4 \dot{e}_4) \quad (33)$$

با جایگذاری از معادلات فضای حالت (31) در (33) خواهیم داشت:

$$\dot{V}(e) = \alpha_1 e_1 e_2 + \alpha_2 e_2 (v_1 - v_{1d}) + \alpha_3 e_3 e_4 + \alpha_4 e_4 (v_2 - v_{2d}) \quad (34)$$

ورودی‌های کنترلی را به صورت (35) تعریف می‌کنیم.

$$\begin{cases} v_1 = v_{1d} - \alpha_2 e_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (e_1 + \frac{e_1^2}{e_2}) \\ v_2 = v_{2d} - \alpha_4 e_4 - \frac{\alpha_3}{\alpha_4} (e_3 + \frac{e_3^2}{e_4}) \end{cases} \quad (35)$$

با جایگذاری ورودی‌های کنترلی (35) در مشتق تابع لیپانوف (33) خواهیم داشت:

$$\dot{V}(e) = -\alpha_1 e_1^2 - (\alpha_2 e_2)^2 - \alpha_3 e_3^2 - (\alpha_4 e_4)^2 \leq 0 \quad (36)$$

از رابطه (36) مشخص است که مشتق تابع لیپانوف یک تابع منفی معین می‌باشد. به عبارت دیگر متغیرهای موجود در تابع لیپانوف (متغیرهای فعال تراکتور) در صورت عدم وجود ناپایداری داخلی، پایدار می‌باشند. بنابراین ورودی‌های (35)، ورودی‌های مناسبی به نظر می‌رسند. برای بررسی دقیق‌تر، شبیه‌سازی برای مسیر مرجع زمانی دایره‌ای (37) انجام شده است، شکل 3 و 4 به ترتیب نمایشگر تعقیب مسیر مرجع زمانی دایره‌ای در فضای کارترین توسط تراکتور و تریلی می‌باشند.

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\omega t) \\ y &= r \sin(\omega t) \\ r &= 1, \omega = 0.5 \end{aligned} \quad (37)$$

همانطور که پیش‌بینی می‌شد، تراکتور به خوبی کنترل شده و مسیرهای زمانی موردنظر را به خوبی تعقیب می‌نماید، اما هیچ‌گونه کنترلی بر تریلی وجود نداشته و حول مسیر مطلوب نوسان می‌کند. برای رفع این مشکل از

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{k} \{ (-v_1 \sin \theta_2 + v_2 \cos \theta_2) - (\alpha_4 e_4 \sin \theta_2 + \alpha_2 e_2 \cos \theta_2) \gamma \} \quad (51)$$

با مقایسه رابطه (51) با زمانی که در سیستم فنر و دمپر پیچشی وجود داشت، یعنی رابطه (40) و با توجه به اینکه قرار است ترم پایانی معادله (51) که به دلیل اضافه کردن ترم‌های اصلاحی در مسأله ایجاد شده است، یعنی  $(\alpha_4 e_4 \sin \theta_2 + \alpha_2 e_2 \cos \theta_2) \gamma$ ، عملکرد فنر و دمپر را داشته باشد، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$-(\alpha_4 e_4 \sin \theta_2 + \alpha_2 e_2 \cos \theta_2) \gamma = k_t (\theta_1 - \theta_2) + c_t (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \quad (52)$$

بنابراین  $\gamma$  به شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$\gamma = -\frac{k_t (\theta_1 - \theta_2) + c_t (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)}{(\alpha_4 e_4 \sin \theta_2 + \alpha_2 e_2 \cos \theta_2)} \quad (53)$$

حال پس از درک مفهوم آن می‌توان فراتر عمل کرد و به کمک خطی‌سازی فیدبک در رابطه (51)، و استفاده از کنترلر PID،  $\gamma$  به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\gamma = \frac{1}{\alpha_4 e_4 \sin \theta_2 + \alpha_2 e_2 \cos \theta_2} \left\{ (-v_1 \sin \theta_2 + v_2 \cos \theta_2) - k (\ddot{\theta}_{2d} + k_d (\dot{\theta}_{2d} - \dot{\theta}_2) + k_p (\theta_{2d} - \theta_2) + k_i \int (\theta_{2d} - \theta_2) dt) \right\} \quad (54)$$

حال کفایت بهره‌های کنترلی در رابطه (54) محاسبه شود، با جایگذاری رابطه‌ی (54) در رابطه‌ی (51) خواهیم داشت:

$$\ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_{2d} + k_d (\dot{\theta}_{2d} - \dot{\theta}_2) + k_p (\theta_{2d} - \theta_2) + k_i \int (\theta_{2d} - \theta_2) dt \quad (55)$$

خطای مربوط به  $\theta_2$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$e_5(t) = \theta_2 - \theta_{2d} \quad (56)$$

با جایگذاری رابطه‌ی خطا در رابطه (55) به معادله زیر می‌رسیم:

$$\ddot{e}_5 + k_d \dot{e}_5 + k_p e_5 + k_i \int e_5 dt = 0 \quad (57)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس خواهیم داشت:

$$E_5(s) (s^3 + k_d s^2 + k_p s + k_i) = 0 \quad (58)$$

با جانشانی قطب‌ها، به عنوان مثال در 1- بهره‌های کنترلی محاسبه می‌شود.

$$(s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0 \quad (59)$$

$$\begin{cases} k_d = 3 \\ k_p = 3 \\ k_i = 1 \end{cases} \quad (60)$$

اکنون هدف مورد نظر محقق گردید، ورودی‌های کنترلی طبق رابطه (48) محاسبه می‌شوند، که  $v_1$  و  $v_2$  در آن از رابطه (35) و  $\gamma$  از رابطه (53) یا (54) مشخص می‌گردد.

### 3-3- اجتناب از ایجاد تکینگی در الگوریتم کنترلی

برای جلوگیری از ایجاد انفراد و تکینگی در سیستم باید تمهیداتی اندیشید. در صورت وقوع انفراد، علت اصلی قرار گرفتن مقادیر خطا در مخرج رابطه (54) می‌باشد، اگر قرار باشد خطاها به سمت صفر میل کنند، عبارت مورد نظر به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، بنابراین باید به سراغ رفع این مشکل رفت. از آنجایی که مقادیر خطا به سمت صفر میل می‌کنند و تغییرات ناچیزی دارند، عبارت (60) مقداری کوچک با تغییرات ناچیز خواهد بود.

$$\alpha_4 e_4 \sin \theta_2 + \alpha_2 e_2 \cos \theta_2 = \text{const} + \varepsilon \quad (61)$$

مقدار تغییرات  $\varepsilon$  ناچیز است، بنابراین قابل صرف نظر است. حال با توجه به اینکه این مقدار کوچک در مخرج واقع شده، مقدار بزرگی را تولید می‌نماید، بنابراین این مقدار بزرگ نیز عدد ثابت در نظر گرفته می‌شود.

$$\frac{1}{\alpha_4 e_4 \sin \theta_2 + \alpha_2 e_2 \cos \theta_2} = \frac{1}{\text{const} + \varepsilon} = \rho \quad (62)$$

نتایج بدست آمده از تحلیل صورت گرفته مبنی بر قرار دادن فنر و دمپر پیچشی در محل اتصال تریلی به تراکتور تأیید می‌کند که نوسانات تریلی مهار شده و سیستم به خوبی کنترل می‌شود، اما نکته‌ای که باید بدان توجه داشت، این است که هدف اصلی کنترل ربات بدون قرار دادن چنین فنر و دمپری می‌باشد، حال این ایده شکل می‌گیرد که الگوریتم کنترلی به نحوی تغییر کند که نقش فنر و دمپر پیچشی را نیز خود در سیستم ایفا نماید. در واقع مرحله‌ی بعدی تغییر الگوریتم کنترلی و قرار دادن فنر و دمپر مجازی در دل آن است، به عبارت دیگر یک الگوریتم کنترلی بر مبنای لیاپانوف مجهز به فنر و دمپر مجازی بدست خواهد آمد.

### 3-2- الگوریتم کنترلی لیاپانوف PID

برای نیل به این هدف همان تابع لیاپانوف (32) برای پایداری متغیرهای فعال معرفی می‌شود، سپس به ورودی‌های کنترلی طراحی شده (35) که تابع لیاپانوف مزبور را پایدار می‌سازد، ترمی اضافه می‌شود به گونه‌ای که در پایداری تابع لیاپانوف تأثیری نداشته باشد و صرفاً متغیر غیرفعال یعنی جهت‌گیری تریلی را کنترل نماید. در واقع قرار است این ترم جدید نقش فنر و دمپر را ایفا کند. بنابراین ورودی‌های کنترلی جدید را به شکل (42) تعریف می‌کنیم.

$$\begin{cases} \bar{v}_1 = v_1 + \beta_1 \gamma_1 \\ \bar{v}_2 = v_2 + \beta_2 \gamma_2 \end{cases} \quad (42)$$

که  $\beta_1 \gamma_1$  و  $\beta_2 \gamma_2$  در آن دو ترم اصلاحی اضافه شده نامعلوم می‌باشد و باید به گونه‌ای مشخص شوند که علاوه بر اینکه در پایداری و کنترل تراکتور تأثیر نداشته باشند مانند یک فنر و دمپر پیچشی مجازی در محل اتصال تریلی به تراکتور عمل کنند. با جایگذاری این ورودی‌های کنترلی جدید در مشتق تابع لیاپانوف (43) خواهیم داشت:

$$\dot{V}(e) = \alpha_1 e_1 e_2 + \alpha_2 e_2 (\bar{v}_1 - v_{1d}) + \alpha_3 e_3 e_4 + \alpha_4 e_4 (\bar{v}_2 - v_{2d}) \quad (43)$$

با جایگذاری (42) در (43) خواهیم داشت:

$$\dot{V}(e) = \alpha_1 e_1 e_2 + \alpha_2 e_2 (v_1 + \beta_1 \gamma_1 - v_{1d}) + \alpha_3 e_3 e_4 + \alpha_4 e_4 (v_2 + \beta_2 \gamma_2 - v_{2d}) \quad (44)$$

با جایگذاری  $v_1$  و  $v_2$  از رابطه (35) در (43) و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\dot{V}(e) = -e_1^2 - (\alpha_2 e_2)^2 - e_3^2 - (\alpha_4 e_4)^2 + \alpha_2 e_2 \beta_1 \gamma_1 + \alpha_4 e_4 \beta_2 \gamma_2 \leq 0 \quad (45)$$

هدف این است که دو ترم پایانی رابطه (45)، در مشتق تابع لیاپانوف تغییری ایجاد نکنند، به عبارت دیگر رابطه (46) باید صفر شود

$$\alpha_2 e_2 \beta_1 \gamma_1 + \alpha_4 e_4 \beta_2 \gamma_2 = 0 \quad (46)$$

از رابطه‌ی (46) نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \beta_1 = +\alpha_4 e_4 \\ \beta_2 = -\alpha_2 e_2 \\ \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \end{cases} \quad (47)$$

حال کفایت که  $\gamma$  در رابطه زیر مشخص شود:

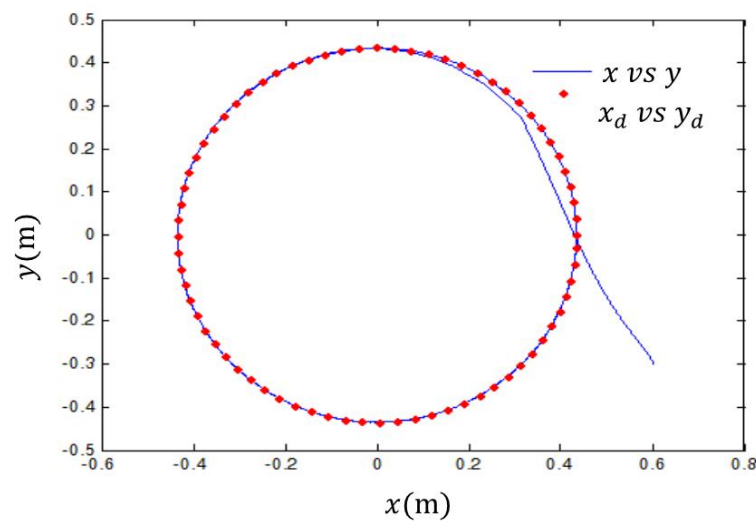
$$\begin{cases} \bar{v}_1 = v_1 + \alpha_4 e_4 \gamma \\ \bar{v}_2 = v_2 - \alpha_2 e_2 \gamma \end{cases} \quad (48)$$

برای این منظور، با جایگذاری ورودی‌های جدید (48) در رابطه‌ی متغیر غیرفعال (جهت‌گیری تریلی) یعنی رابطه آخر از معادلات فضای حالت (29)، خواهیم داشت:

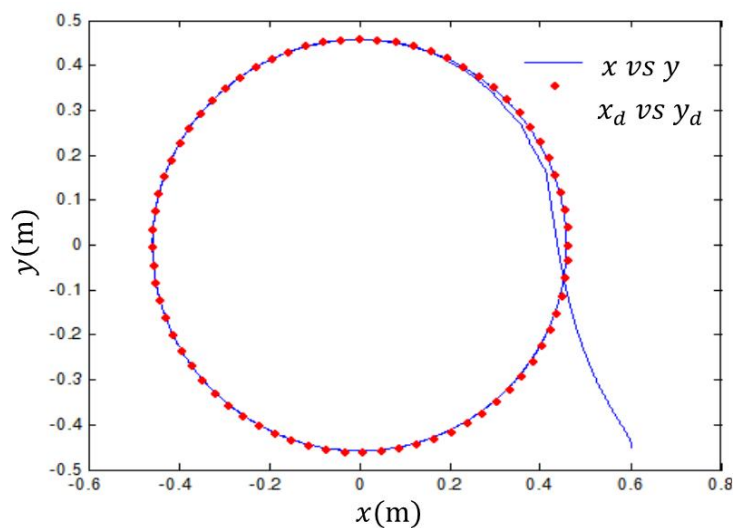
$$\dot{z}_6 = \frac{1}{k} (-v_1 \sin z_5 + v_2 \cos z_5) \quad (49)$$

با توجه به اینکه  $z_5 = \theta_2$  و  $z_6 = \theta_2$  می‌باشد، خواهیم داشت:

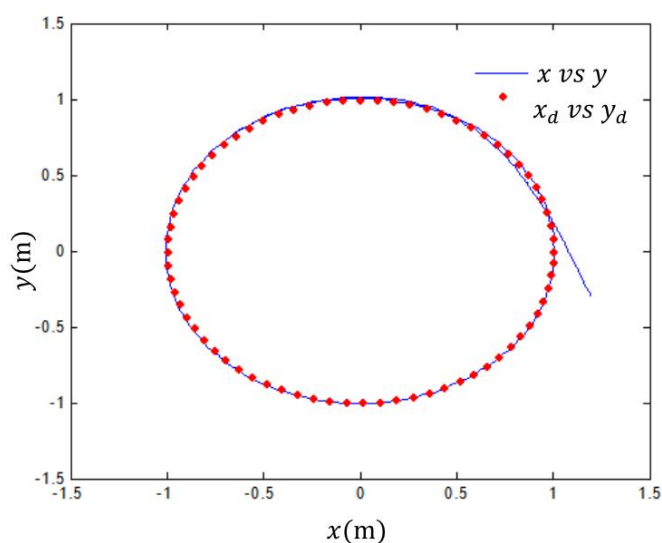
$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{k} (-(v_1 + \alpha_4 e_4 \gamma) \sin \theta_2 + (v_2 - \alpha_2 e_2 \gamma) \cos \theta_2) \quad (50)$$



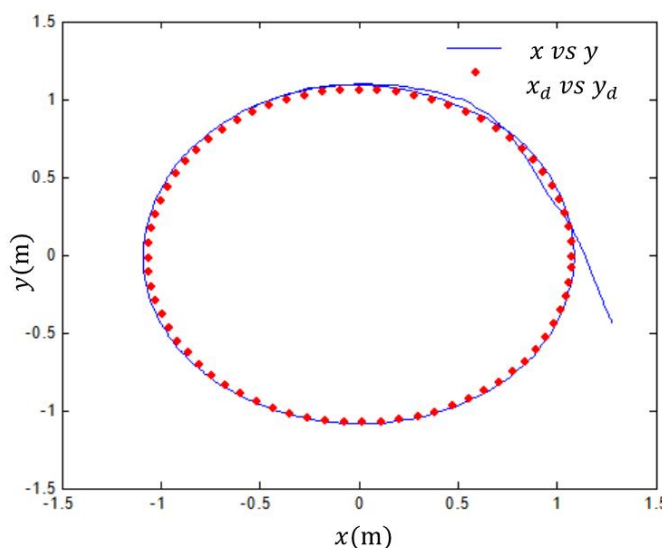
شکل 7 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارترین توسط تراکتور (نتایج شبیه‌سازی با استفاده از الگوریتم لیاپانوف-PID)



شکل 8 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارترین توسط تریلی (نتایج شبیه‌سازی با استفاده از الگوریتم لیاپانوف-PID)



شکل 9 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارترین توسط تراکتور (نتایج شبیه‌سازی با استفاده از الگوریتم لیاپانوف-PID)



شکل 10 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارترین توسط تریلی (نتایج شبیه‌سازی با استفاده از الگوریتم لیاپانوف-PID)

به عبارت دیگر  $\gamma$  در ورودی کنترلی (48) به صورت زیر می‌باشد.

$$\gamma = \rho \left[ (-v_1 \sin \theta_2 + v_2 \cos \theta_2) - k \left( \ddot{\theta}_{2d} + k_d (\dot{\theta}_{2d} - \dot{\theta}_2) + k_p (\theta_{2d} - \theta_2) + k_i \int (\theta_{2d} - \theta_2) dt \right) \right] \quad (63)$$

که در آن  $\rho$  مقدار ثابت و بزرگی است و  $v_1, v_2$  طبق رابطه (35) محاسبه می‌شوند.

### 3-4- اثبات پایداری الگوریتم کنترلی

قضیه پایدار مجانبی لیاپانوف (کاملاً پایداری) [29]: اگر یک تابع لیاپانوف در ناحیه  $S$  اطراف مبدأ وجود داشته باشد و اگر مشتق تابع لیاپانوف  $\frac{d}{dx}V(x)$  در طول مسیر منفی معین باشد، در این صورت مبدأ کاملاً پایدار است.

معادلات سیستم (64) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= v_1 - v_{1d} \\ \dot{e}_3 &= e_4 \\ \dot{e}_4 &= v_2 - v_{2d} \\ \dot{z}_5 &= z_6 \\ \dot{z}_6 &= \frac{1}{k} (-v_1 \sin z_5 + v_2 \cos z_5) \end{aligned} \quad (64)$$

ورودی‌های کنترلی طراحی شده، مطابق (64) می‌باشد.

$$\begin{cases} \bar{v}_1 = v_{1d} - \alpha_2 e_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left( e_1 + \frac{e_1^2}{e_2} \right) + \alpha_4 e_4 \gamma \\ \bar{v}_2 = v_{2d} - \alpha_4 e_4 - \frac{\alpha_3}{\alpha_4} \left( e_3 + \frac{e_3^2}{e_4} \right) - \alpha_2 e_2 \gamma \end{cases} \quad (65)$$

که در آن از رابطه (62) محاسبه می‌شود.

تابع لیاپانوف پیشنهادی به صورت (66) است:

$$V(e) = \frac{1}{2} (\alpha_1 e_1^2 + \alpha_2 e_2^2 + \alpha_3 e_3^2 + \alpha_4 e_4^2) \quad (66)$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 > 0$$

که مشتق تابع لیاپانوف پیشنهادی به صورت (66) خواهد بود.

$$\dot{V}(e) = (\alpha_1 e_1 \dot{e}_1 + \alpha_2 e_2 \dot{e}_2 + \alpha_3 e_3 \dot{e}_3 + \alpha_4 e_4 \dot{e}_4) \quad (67)$$

با جایگذاری از معادلات فضای حالت (63) در مشتق تابع لیاپانوف (66) خواهیم داشت:

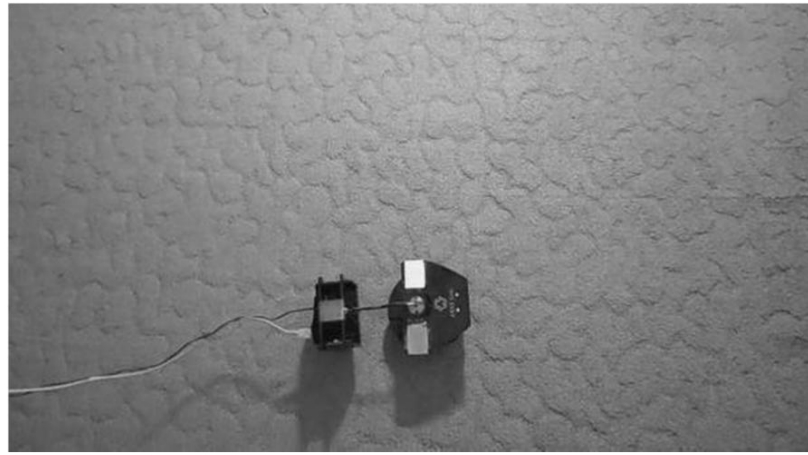
$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \alpha_1 e_1 e_2 + \alpha_2 e_2 \left( v_{1d} - \alpha_2 e_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left( e_1 + \frac{e_1^2}{e_2} \right) + \alpha_4 e_4 \gamma - v_{1d} \right) + \alpha_3 e_3 e_4 \\ &+ \alpha_4 e_4 \left( v_{2d} - \alpha_4 e_4 - \frac{\alpha_3}{\alpha_4} \left( e_3 + \frac{e_3^2}{e_4} \right) - \alpha_2 e_2 \gamma - v_{2d} \right) \end{aligned} \quad (68)$$

$$\dot{V}(e) = -\alpha_1 e_1^2 - (\alpha_2 e_2)^2 - \alpha_3 e_3^2 - (\alpha_4 e_4)^2 \leq 0 \quad (69)$$

طبق قضیه فوق و با توجه به اینکه مشتق تابع لیاپانوف منفی معین می‌باشد، مبدأ مختصات کاملاً پایدار است، فقط باید به این نکته توجه نمود که به دلیل حذف  $\gamma$  به واسطه روابط موجود، احتمال ایجاد ناپایداری داخلی وجود دارد. بنابراین اگر  $\gamma$  مقداری محدود و پایدار باشد، پایداری سیستم تضمین می‌گردد. با توجه به اینکه  $\gamma$  خود کنترلر PID (فتر و دمپر مجازی) می‌باشد، اگر به صورت پایدار طراحی شود (بهره‌های کنترلی به گونه‌ای انتخاب شوند که کنترلر پایدار باشد)، پایداری سیستم تضمین می‌شود.

### 3-5- شبیه‌سازی

با شبیه‌سازی مجدد برای مسیر مرجع زمانی (70) و (71)، نتایج حاصله حاکی از آن است که الگوریتم کنترلی علاوه بر کنترل تراکتور به خوبی تریلی را نیز کنترل می‌کند. شکل 7 و 8 به ترتیب نشان‌دهنده تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارترین برای تراکتور و تریلی می‌باشند.



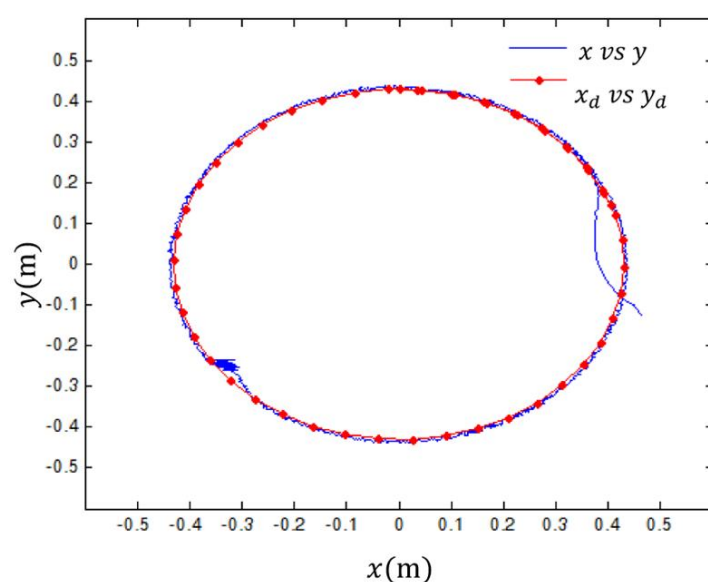
شکل 12 تصویر ربات از دید دوربین در حالت خاکستری

در شکل 12 نمونه‌ای از تصویر گرفته شده توسط دوربین در حالت خاکستری<sup>1</sup> برای استفاده در الگوریتم پردازش تصویر مشاهده می‌شود. در ذیل برخی از اقدامات انجام شده لازم به منظور به دست آوردن دقت بالاتر در پردازش تصویر آورده شده است.

- دستگاه جمع آوری تصویر<sup>2</sup>؛ برای تصویربرداری از یک دوربین با نرخ فریم 30 فریم بر ثانیه استفاده شده است. نرخ فریم دوربین یک عامل مهم در دقت زمان واقعی بودن مازول پردازش تصویر می باشد.
- کالیبراسیون دوربین<sup>3</sup>؛ به منظور تخمین موقعیت یک رنگ خاص نسبت به یک چارچوب اینرسی، کالیبراسیون دوربین انجام شده است.
- ترمیم تصویر<sup>4</sup>؛ هدف از بازسازی تصویر حذف نویز (نویز سنسور، تاری حرکت، و غیره) از تصاویر می باشد. ساده ترین روش ممکن برای حذف نویز استفاده از انواع مختلفی از فیلترها می باشد. هدف استفاده از ترمیم تصویر حذف مناطق رنگ کوچکتر یا بزرگتر از برجسب های رنگی می باشد.
- تشخیص<sup>5</sup>؛ تشخیص برجسب های رنگی توسط محاسبات نسبتاً ساده و سریع برای پیدا کردن یک برجسب رنگی خاص در میان چند منطقه رنگی مورد انتظار انجام شده است تا نتایج درست تری را تولید نماید.
- تعقیب<sup>6</sup>؛ دنبال کردن حرکت نقاط رنگی در دنباله تصاویر نیز برای حصول اطمینان از عدم اشتباه.

همچنین به منظور افزایش سرعت الگوریتم پردازش تصویر، از MEX-فایل در محیط سیمولینک/متلب استفاده شده است.

با توجه به موارد ذکر شده، نتایج پیاده سازی در شکل های 13 تا 20 قابل مشاهده می باشند. نتایج پیاده سازی تأیید کننده ی نتایج شبیه سازی می باشند.



شکل 13 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارتیزین توسط تراکتور؛ نتایج تجربی

- 1- Gray scale
- 2- Image Acquisition Device
- 3- Camera Calibration
- 4- Image Restoration
- 5- Detection
- 6- Tracking

$$x_d = 0.43 \cos\left(\frac{t}{8} + 0.35\right) \quad (70)$$

$$y_d = 0.43 \sin\left(\frac{t}{8} + 0.35\right) \quad (71)$$

برای بررسی بیشتر عملکرد الگوریتم کنترلی در سرعت های بالاتر، شبیه سازی مجدداً برای مسیر مرجع زمانی (72) و (73) انجام شد، که نتایج بدست آمده در شکل (9) و (10) قابل مشاهده می باشد.

$$x_d = \cos(t) \quad (72)$$

$$y_d = \sin(t) \quad (73)$$

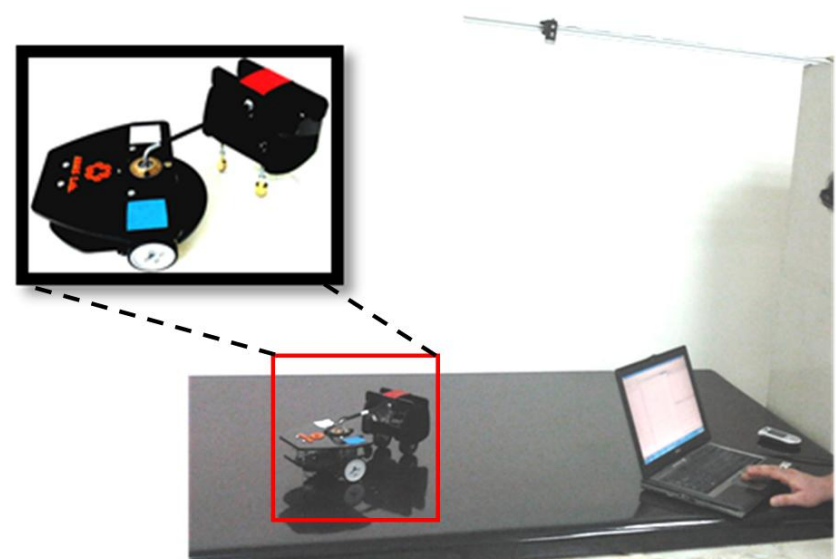
همانطور که از نتایج بدست آمده مشخص است، الگوریتم کنترلی در سرعت های بالا نیز عملکرد قابل قبولی دارد.

#### 4- پیاده سازی و نتایج تجربی

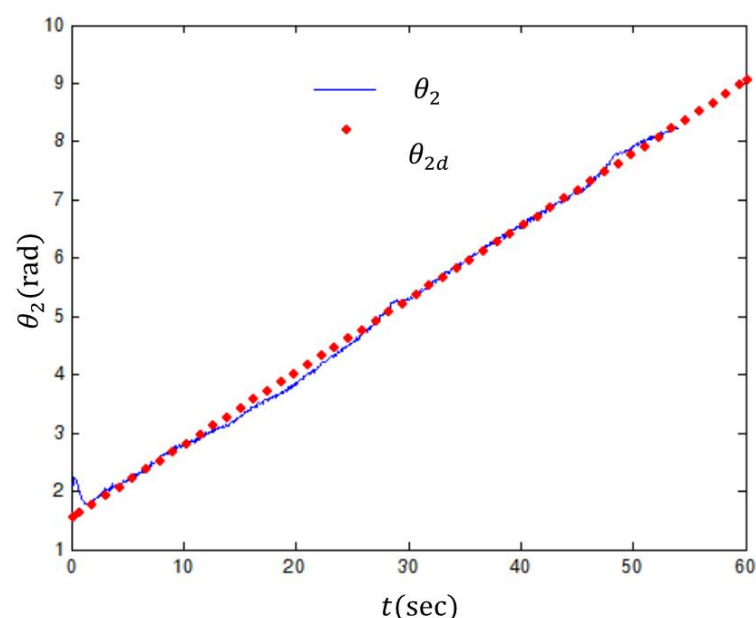
در این بخش، الگوریتم کنترلی لیاپانوف-PID بر روی سیستم آزمایشگاهی (ربات شکل 1) پیاده سازی می شود. برای پیاده سازی الگوریتم کنترلی بر روی ربات، از پردازش تصویر و تشخیص سه رنگ سفید، آبی و قرمز (همانطور که در شکل (1) نشان داده شده است) استفاده می شود تا موقعیت تراکتور و تریلی و متغیرهای آن ها بدست آید. مسیر مرجع به شکل دایره ای تعریف می شود که  $x_d$  و  $y_d$  به ترتیب در معادله (70) و (71) مشخص می باشند.

سیستم آزمایشگاهی همانگونه که در شکل 1 نشان داده شده است از یک ربات چرخ دار به همراه یک تریلی تشکیل می شود. تراکتور از طریق دو چرخ دارای عملگر حرکت می کند و از یک چرخ کروی به منظور حفظ پایداری آن استفاده شده است.

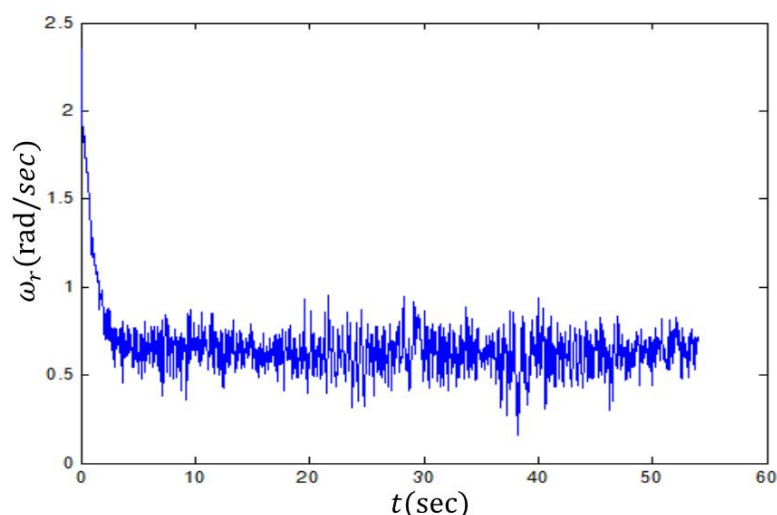
حرکت چرخ های دارای عملگر از طریق موتورهای جریان مستقیم دارای ولتاژ عملکردی 12 ولت و گشتاور نگهدارنده 1/62 نیوتن-متر شکل می گیرد. برای اندازه گیری وضعیت ربات (شامل مختصات تعمیم یافته ی سیستم) از یک دوربین نصب شده بالای صفحه حرکت و پردازش تصویر به هنگام، استفاده شده است. دوربین استفاده شده دارای تفکیک پذیری 640x480 پیکسل و نرخ تصویر برداری 30 تصویر در ثانیه است. اطلاعات از طریق اتصال یونیورسال به کامپیوتر انتقال می گردد. کامپیوتر مورد استفاده دارای ویژگی های (پردازش گر اینتل 2 گیگا هرتز، 32 بیت، حافظه با دسترسی تصادفی 2 گیگا بایت) می باشد و به منظور پردازش تصویر، تولید ورودی های کنترلی و انتقال اطلاعات استفاده شده است. فرکانس سیستم حلقه بسته 30 هرتز انتخاب شده است. حد بالای فرکانس سیستم تجربی، به نرخ تصویر برداری دوربین استفاده شده (30 تصویر در ثانیه) محدود می باشد. کنترل سیستم از طریق نرم افزار متلب پیاده سازی شده است. شکل 11 تصویری از سیستم آزمایشگاهی را نشان می دهد.



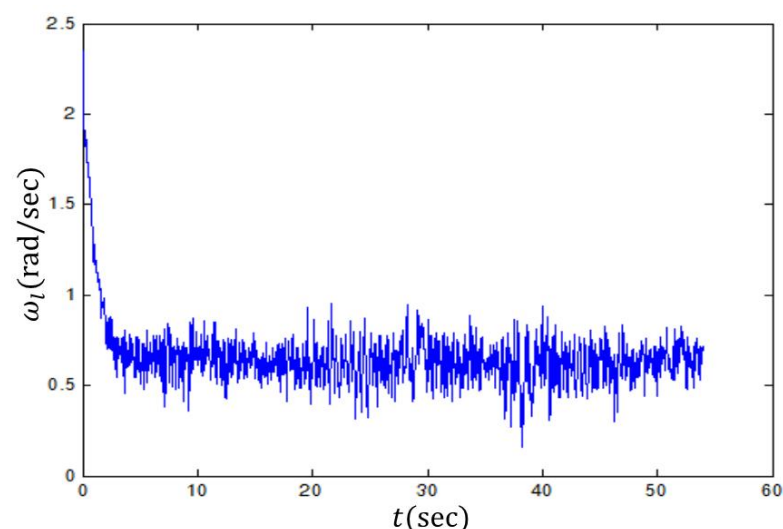
شکل 11 سیستم آزمایشگاهی



شکل 18 تعقیب مسیر مرجع زمانی برای متغیر  $\theta_2$ ، زاویه تریلی نسبت به افق؛ نتایج تجربی



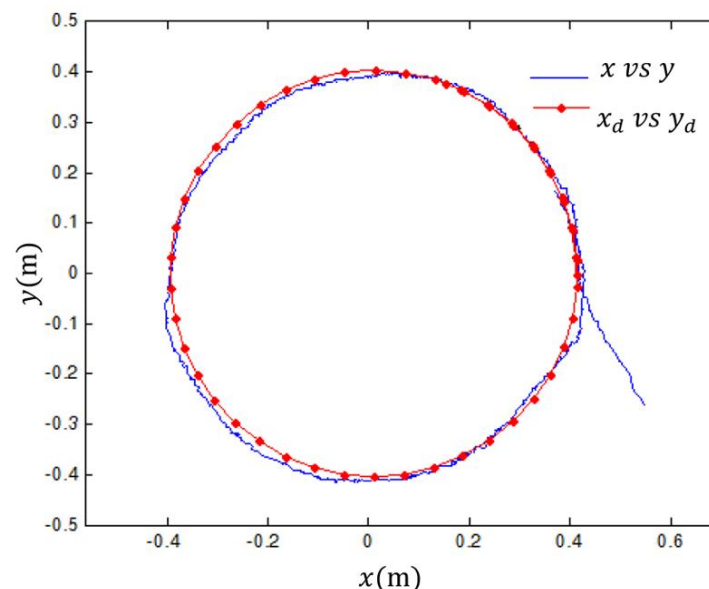
شکل 19 ورودی سینماتیکی؛ سرعت زاویه‌ای چرخ راست تراکتور (rad/sec) بر حسب زمان (sec)



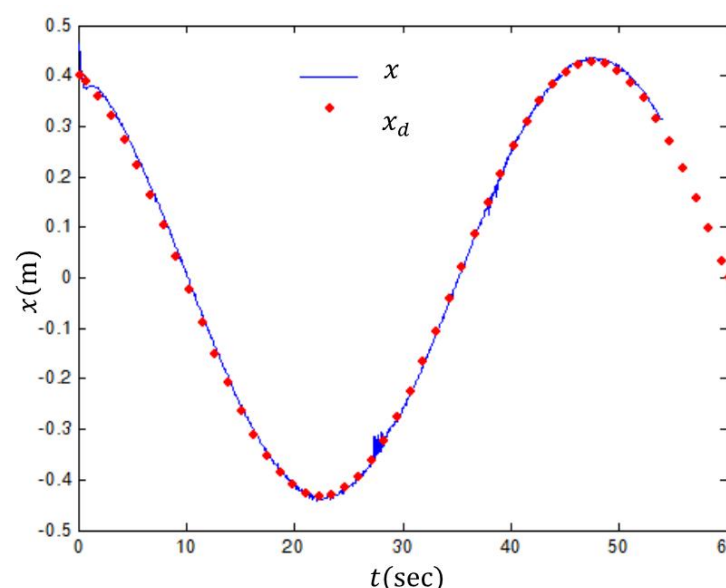
شکل 20 ورودی سینماتیکی؛ سرعت زاویه‌ای چرخ چپ تراکتور (rad/sec) بر حسب زمان (sec)

## 5- نتیجه‌گیری

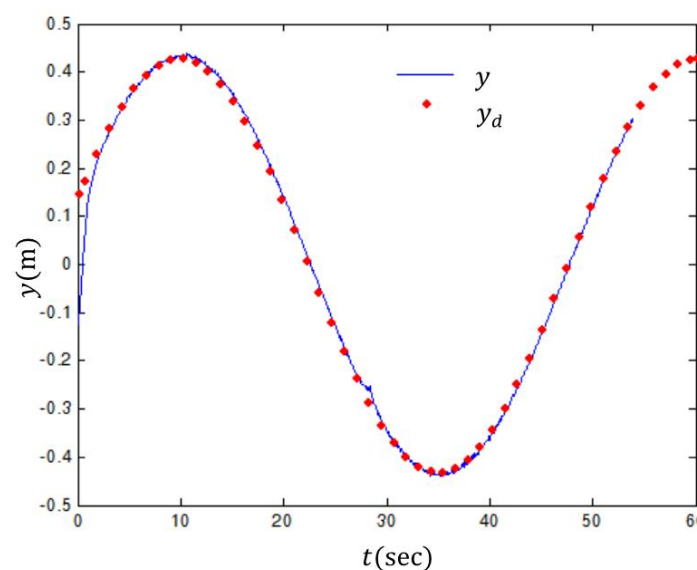
در این مقاله مسئله‌ی کنترل و تعقیب مسیرهای مرجع زمانی توسط ربات دو چرخ دیفرانسیلی با تریلی مجهز به چرخ کروی مورد بررسی قرار گرفته است. ربات مزبور، یک سیستم به شدت کم‌عملگر، غیرخطی، چند متغیره و غیرهولونومیک می‌باشد. نخست با معرفی ربات، معادلات سینماتیکی و سینتیکی آن استخراج گردید و به دلیل محدودیت‌های موجود مدل ترکیبی معرفی شد. سپس یک الگوریتم کنترلی جدید تحت عنوان لیاپانوف-PID، برای کنترل ربات طراحی گردید. این الگوریتم را می‌توان برای سیستم‌های کم‌عملگر دیگر با ساختاری مشابه نیز استفاده نمود. در پایان با پیاده‌سازی الگوریتم کنترلی مزبور بر روی نمونه آزمایشگاهی ربات، نتایج تجربی ارائه گردید. نتایج تجربی بدست آمده، کارآمدی الگوریتم کنترلی را تأیید می‌کند.



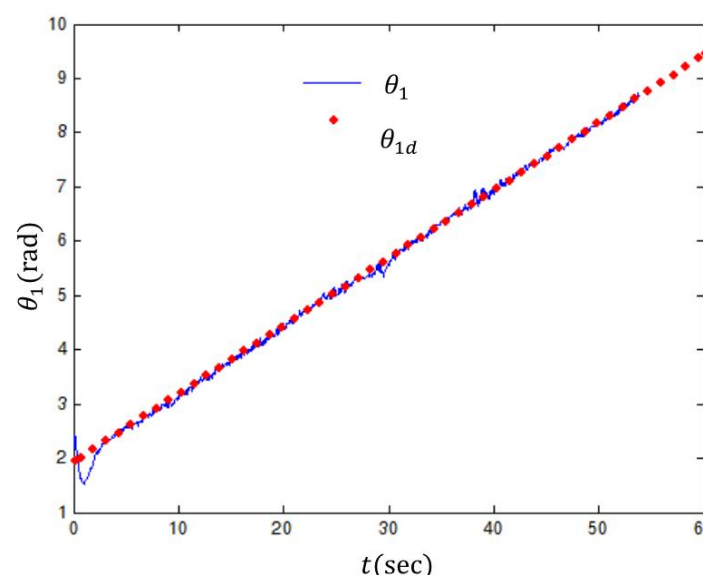
شکل 14 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارترین توسط تریلی؛ نتایج تجربی



شکل 15 تعقیب مسیر مرجع زمانی برای متغیر  $x$ ، موقعیت افقی تراکتور؛ نتایج تجربی



شکل 16 تعقیب مسیر مرجع زمانی برای متغیر  $y$ ، موقعیت عمودی تراکتور؛ نتایج تجربی



شکل 17 تعقیب مسیر مرجع زمانی برای متغیر  $\theta_1$ ، زاویه تراکتور نسبت به افق؛ نتایج تجربی

## 6- فهرست علائم

|                 |                                                         |
|-----------------|---------------------------------------------------------|
| $A(q)$          | ماتریس قیدی                                             |
| $a_1$           | فاصله مرکز جرم تراکتور تا نقطه‌ی میانی محور تراکتور $P$ |
| $a_2$           | فاصله مرکز جرم تریلی تا چرخ‌های تریلی                   |
| $a_{jk}$        | $k$ -امین ضریب از معادله قیدی $z$ -ام                   |
| $c_i$           | مرکز جرم تراکتور و تریلی                                |
| $c_t$           | ضریب دمپر پیچشی                                         |
| $E(q)$          | ماتریس تبدیل ورودی                                      |
| $e$             | بردار خطای متغیرهای حالت                                |
| $f$             | نیروی رانش تراکتور                                      |
| $G(q)$          | ماتریس گرانش                                            |
| $J_i$           | ممان اینرسی تراکتور و تریلی                             |
| $k_t$           | ضریب فنر پیچشی                                          |
| $k_p$           | بهره تناسبی کنترلر                                      |
| $k_i$           | بهره انتگرالی کنترلر                                    |
| $k_d$           | بهره مشتق‌گیر کنترلر                                    |
| $l$             | فاصله مرکز جرم تریلی تا نقطه‌ی میانی محور تراکتور $P$   |
| $m_i$           | جرم تراکتور و تریلی                                     |
| $M(q)$          | ماتریس اینرسی                                           |
| $P$             | نقطه‌ی میانی محور چرخ‌های تراکتور                       |
| $q$             | بردار مختصات تعمیم یافته ربات                           |
| $r$             | شعاع چرخ‌های تراکتور                                    |
| $\dot{s}$       | سرعت خطی نقطه میانی محور تراکتور $P$                    |
| $S(q)$          | ماتریس ژاکوبین                                          |
| $T(q, \dot{q})$ | انرژی جنبشی سیستم                                       |
| $u$             | بردار ورودی سینماتیکی                                   |
| $U(q)$          | انرژی پتانسیل سیستم                                     |
| $V(q, \dot{q})$ | ماتریس کریولیس                                          |
| $V(e)$          | تابع لیاپانوف                                           |
| $x, y$          | موقعیت نقطه میانی محور تراکتور $P$                      |
| $z$             | بردار متغیرهای حالت                                     |

## علائم یونانی

|                           |                                   |
|---------------------------|-----------------------------------|
| $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ | لاگرانژین                         |
| $\lambda$                 | مضارب لاگرانژ                     |
| $\beta_i \gamma_i$        | ترم اصلاح کننده ورودی‌ها          |
| $\tau$                    | گشتاور جهت‌گیری تراکتور           |
| $\theta_i$                | زاویه تراکتور و تریلی نسبت به افق |
| $\omega_l$                | سرعت زاویه‌ای چرخ چپ تراکتور      |
| $\omega_r$                | سرعت زاویه‌ای چرخ راست تراکتور    |
| $\zeta$                   | بردار مختصات فضای کاری ربات       |

## 7- مراجع

- [1] R. Siegwart and I. R. Nourbakhsh, Introduction to Autonomous Mobile Robots, Massachusetts: The MIT Press, 2004.
- [2] P. Zarafshan and S. A. A. Moosavian, "Adaptive Hybrid Suppression Control of a Wheeled Mobile Robot With Flexible Solar Panels," *Modares Mechanical Engineering*, vol. 18, no. 5, pp. 130-143, 2013 (In persian).
- [3] K. Alipour and S. A. A. Moosavian, "Effect of Terrain Traction, Suspension Stiffness and Grasp Posture on the Tip-over Stability of Wheeled Robots with Multiple Arms," *Journal of Advanced Robotics*, vol. 26, no. 8-9, pp. 817-842, 2012.
- [4] K. Alipour and S. A. A. Moosavian, "How to Ensure Stable Motion of Suspended Wheeled Mobile Robots," *Journal of Industrial Robot*, vol. 38, no. 2, pp. 139-152, 2011.
- [5] K. Alipour, S. A. A. Moosavian and Y. Bahramzadeh, "Dynamics of Wheeled Mobile Robots with Flexible Suspension: Analytical Model and Verification," *International Journal of Robotics and Automation*, vol. 23, no. 4, pp. 242-250, 2008.
- [6] S. A. A. Moosavian and A. Mirani, "Dynamics and Motion Control of Wheeled Robotic Systems," *Esteghlal Journal of Robotics and Automation*, vol. 24, no. 2, pp. 193-214, 2006.
- [7] R. Rastegari and S. A. A. Moosavian, "Multiple Impedance Control of Non-Holonomic Wheeled Mobile Robotic Systems Performing Object Manipulation Tasks," *Journal of Engineering Faculty, Tehran University*, vol. 39, no. 1, pp. 15-30, 2005 (In Persian).
- [8] G. Campion, G. Bastin and B. Danrea Novel, "Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, no. 1, pp. 47-62, 1996.
- [9] A. Keymasi Khalaji and S. A. A. Moosavian, "Design and implementation of a fuzzy sliding mode control law for a wheeled robot towing a trailer," *Modares Mechanical Engineering*, vol. 14, no. 4, pp. 81-88, 2014 (In Persian).
- [10] I. Kolmanovsky and N. H. McClamroch, "Developments in nonholonomic control problems," *IEEE Control Systems*, vol. 15, no. 6, pp. 20-36, 1995.
- [11] L. Lapiere, R. Zapata and P. Lepinay, "Combined path-following and obstacle avoidance control of wheeled robot," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 26, no. 4, pp. 361-375, 2007.
- [12] S. Sun and P. Cui, "Path tracking and a partical point stabilization of mobile robot," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 20, no. 1, pp. 29-34, 2004.
- [13] C. Prieur and A. Astolfi, "Robust stabilization of chained systems via hybrid control," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 48, no. 10, pp. 1768-1772, 2003.
- [14] C. Wang, "Semiglobal practical stabilization of nonholonomic wheeled mobile robots with saturated inputs," *Automatica*, vol. 44, no. 3, pp. 816-822, 2008.
- [15] A. Keymasi Khalaji and S. A. A. Moosavian, "Regulation of differential driven wheeled robot towing a trailer," in *Proceeding of RSJ/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM 2013)*, Sharif University of Technology, Tehran, Iran, 2013.
- [16] C. Y. Chen, T. H. S. Li, Y. C. Yeh and C. C. Chang, "Design and implementation of an adaptive sliding-mode dynamic controller for wheeled mobile robots," *Mechatronics*, vol. 19, no. 2, pp. 156-166, 2009.
- [17] F. N. Matins, W. C. Celeste, R. Carelli, M. Sarcinelli-Filho and T. F. Bastosfilho, "An adaptive dynamic controller for autonomous mobile robot trajectory tracking," *Control Engineering Practice*, vol. 16, no. 11, pp. 1354-1363, 2008.
- [18] A. Keymasi khalaji and S. A. A. Moosavian, "Optimal control of trajectory tracking of a mobile robot," in *PROceeding of the ISME National Conference on Mechanics*, Tehran University, Tehran, Iran, 2009 (In Persian).
- [19] A. Keymasi and S. A. A. Moosavian, "Modeling and tracking control of a wheeled mobile robot towing a trailer," in *Proc. of the Mechanical Engineering*, Tehran, Iran, 2010.
- [20] G. A. De Luca and C. Samson, Feedback control of nonholonomic car-like robot, J. P. Laumond, Ed, Springer, 1998.
- [21] S. A. A. Moosavian, M. Rahimi Bidgoli and A. Keymasi Khalaji, "Tracking control of a wheeled mobile robot towing two trailer," in *Proc. ISME Int. Conf. on Mechanical Engineering*, Iran, Tehran, 2013.
- [22] R. Rahimi Bidgoli, A. Keymasi Khalaji and S. A. A. Moosavian, "Trajectory Tracking control of a wheeled mobile robot by a non-model-based algorithm using PD-action filtered errors," *Modares Mechanical Engineering*, vol. 14, no. 12, pp. 171-178, 2014 (In Persian).
- [23] A. Keymasi and S. A. A. Moosavian, "Modified transpose jacobian for control of a tractor-trailer wheeled robot," in *Proc. of RSJ/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICROM 2013)*, Tehran, Iran, 2013.
- [24] M. W. Spong, "Underactuated mechanical systems," in *Control Problems in Robotics and Automation*, Berlin Heidelberg, Springer, 1998, pp. 135-150.
- [25] K. Y. Wichuland, O. J. S. rDalen and O. Egeland, "Control of vehicles with second-order nonholonomic constraints: Underactuated vehicles," in *European Control Conference*, 1995.
- [26] M. Spong, "Modeling and control of eleastic joint robots," *Transaction of the ASME, J. Dynamic Systems, Measurment and Control*, pp. 310-319, 1987.

[29] E. Slotine and W. Li, Applied Nonlinear control, Massachusett: Prentice Hall, 1991.

[27] M. Karimi and S. A. A. Moosavian, "Control and manipulability management of underactuated manipulators," *Journal of Advanced Robotics*, vol. 24, no. 4, pp. 605-626, 2010.

[28] A. Keymasi Khalaji and S. A. A. Moosavian, "Robust adaptive controller for a Tractor-Trailer mobile robot," *IEEE-ASME Transaction on mechatronics*, vol. 19, no. 3, pp. 943-953, 2014.