



بررسی عددی اثر میدان مغناطیسی بر انتقال حرارت اجباری نانوسیال در یک کانال سینوسی شکل

رضا نوری^۱، مفید گرجی^{۲*}، داوود دومیری گنجی^۳

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

۲- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

۳- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

* بابل، صندوق پستی ۰۱۱۱۳۲۳۴۲۰۵، gorji@nit.ac.ir

چکیده- در این مقاله انتقال حرارت جابجایی در یک کانال سینوسی شکل حاوی نانوسیال تحت میدان مغناطیسی بررسی شده است. میدان مغناطیسی عمود بر کانال اعمال شده است. آب به عنوان سیال پایه در نظر گرفته شده است و نانو ذره مس به آن افزوده می شود. از مدل ماکسول-گرنانت برای ضریب رسانش حرارتی و مدل برینکمن برای ویسکوزیته دینامیکی استفاده می شود. تغییر پارامترهایی نظیر اثر شکل هندسی $0 \leq \alpha \leq 0.3$ ، درصد حجمی نانوسیال $0 \leq \phi \leq 0.05$ ، عدد بی بعد هارتمن $0 \leq Ha \leq 20$ و عدد بی بعد رینولدز $100 \leq Re \leq 500$ در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می دهند با افزایش تمام پارامترهای ذکر شده، عدد ناسلت افزایش می یابد. درصد حجمی نانوسیال، بیشتر بر مقادیر ماکزیمم ناسلت محلی در هر طول موج کانال و مقادیر هارتمن، هم بر مینیمم و هم بر ماکزیمم مقدار ناسلت محلی، تأثیر گذار هستند. **کلیدواژگان:** مگنتوهیدرودینامیک، نانوسیال، میدان مغناطیسی، انتقال حرارت، کانال سینوسی.

Numerical investigation of magnetic field effect on forced convection heat transfer of nanofluid in a sinusoidal channel

R. Nouri¹, M. Gorji^{2*}, D. Domiri Ganji³

1- MSc Student, Mech. Eng., Babol Noshirvani Univ. of Tech., Babol, Iran

2- Prof., Mech. Eng., Babol Noshirvani Univ. of Tech., Babol, Iran.

3- Assoc. Prof., Mech. Eng., Babol Noshirvani Univ. of Tech., Babol, Iran

* P.O.B. 01113234205 Babol, Iran. gorji@nit.ac.ir

Abstract- In this paper, heat transfer in a sinusoidal channel filled with nanofluid under magnetic field effect is investigated numerically. The magnetic field transversely applied to the channel. Water as a base fluid and copper as nano particles were considered. The Maxwell-Garnetts model and Brinkman model for heat conduction coefficient and dynamic viscosity were used respectively. The effects of changing some parameters such as shape $0 \leq \alpha \leq 0.3$, volume fraction $0 \leq \phi \leq 0.05$, Hartmann number $0 \leq Ha \leq 20$ and Reynolds number $100 \leq Re \leq 500$ were considered. The results show that increasing in all mentioned parameters lead to increasing in Nusselt number. Volume fraction is mainly affect on maximum local Nusselt number in each channel's wave while Hartmann number is affected minimum and maximum Nusselt number.

Keywords: Magnetohydrodynamics (MHD), Nanofluid, Magnetic Field, Heat Transfer, Sinusoidal Channel.

۱- مقدمه

با توجه به استفاده زیاد از مبدل‌های حرارتی در زمینه‌های مهندسی، افزایش انتقال حرارت در آن‌ها همواره مسأله مهمی بوده و محققان به دنبال راه‌هایی برای این افزایش بوده‌اند. اگرچه با پیشرفت تکنولوژی، مبدل‌ها از مواد بهتر و با تکنولوژی بهتری ساخته می‌شوند، اما تحقیق بر روی نوع سیال بکار رفته و شکل مبدل‌ها باعث ایجاد روش‌های بهتر برای انتقال حرارت بیشتر می‌شود. از روش‌های افزایش انتقال حرارت می‌توان موج‌دار کردن^۱ دیواره‌ها، استفاده از نانوذرات و قرار دادن سیال تحت میدان مغناطیسی را نام برد. بررسی جابجایی اجباری در کانال از مهمترین مسائل مورد بحث در کانال‌ها است. انتقال حرارت اجباری کاربردهای فراوانی در صنعت دارد. برای نمونه می‌توان به مبدل‌های گرمایی، کولکتورهای خورشیدی، بویلرها، مبدل‌های قدرت، برخی راکتورهای شیمیایی، میکرو مبدل‌های حرارتی^۲، خنک کننده‌های وسایل الکترونیکی^۳، مبدل‌های کاتالستی و حتی رادیاتور ماشین اشاره کرد. سیالاتی مانند آب، هوا، روغن و اتیلن گلیکول که از گذشته‌ها در انتقال حرارت استفاده می‌شوند دارای ضریب رسانش حرارتی پایینی می‌باشند. برای افزایش انتقال حرارت در این سیالات می‌توان ذراتی با ضریب رسانش حرارتی زیاد و در اندازه نانو را به آنها اضافه کرد. این سیال حاوی ذرات معلق بدست آمده را نانوسیال می‌نامند.

اولین بار واژه نانوسیال را چوی [۱] برای نامیدن سیالی که شامل ذرات معلق بود بکار برد. کانال‌های با صفحات غیر مسطح به دلیل آن که سطح انتقال حرارت را افزایش می‌دهند، مورد استفاده قرار می‌گیرند. کانال‌های سینوسی شکل از جمله کانال‌هایی هستند که باعث افزایش انتقال حرارت می‌شوند و در عین حال تأثیر کمتری بر گرادیان فشار نامطلوب در طول کانال دارند. کانال‌های موج‌دار در بسیاری از کاربردهای مهندسی دیده می‌شوند. تحقیقات آزمایشگاهی زیادی بر روی این گونه کانال‌ها انجام شده است. از مهمترین کاربردهای کانال‌های موجی، افزایش راندمان انتقال حرارت در فرآیندهای انتقال صنعتی^۴ است [۳، ۲]. اولین بار گلدستین و اسپارو [۴] در سال

۱۹۷۷ آزمایش‌هایی را بر روی مشخصه‌های انتقال حرارت در جریان داخل یک کانال موجی انجام دادند. آن‌ها جریان را آرام در نظر گرفتند و مشخصه‌ها را در اعداد رینولدز پایین بررسی کردند. راش و همکاران [۵] جریان سیال و انتقال حرارت را در یک کانال موج‌دار بررسی کردند. آنها با تغییر در نحوه موج دار کردن کانال، به بررسی تغییر فاز در موج دار کردن دیواره‌های بالا و پایین کانال پرداختند. وانگ و چن [۲] جابجایی اجباری در یک کانال موجی را بررسی و تأثیر پارامترهای مختلف بر افزایش انتقال حرارت را مورد مطالعه قرار دادند. احمد و همکاران [۶] جریان نانوسیال را در یک کانال موج‌دار مورد بررسی قرار دادند. آنها با استفاده از روش‌های عددی و تغییر عدد رینولدز (بین ۱۰۰ تا ۴۰۰) و تغییر درصد حجمی نانوذرات (از صفر تا ۵ درصد)، به بررسی اثر این پارامترها بر روی انتقال حرارت پرداختند. لیانگ‌گنگ و همکاران [۷] به بررسی انتقال حرارت در یک کانال موج‌دار پرداختند. تحقیقات زیادی بر روی نانوسیال صورت گرفته است.

لی و همکاران [۸] و ایستمن و همکاران [۹] نشان دادند که اضافه کردن درصد حجمی تا ۵ درصد ذرات نانو می‌تواند انتقال حرارت را تا ۲۰ درصد افزایش دهد. حیدری و کرمانی [۳] به بررسی جریان نانوسیال در یک کانال سینوسی پرداختند. آنها با بررسی اعداد رینولدز بین ۵ تا ۱۵۰۰ و در صد حجمی نانوذرات تا ۲۰ درصد، نتیجه گرفتند که به کمک ذرات نانو و موج‌دار کردن کانال، می‌توان انتقال حرارت را تا ۵۰ درصد افزایش داد. چوآن و لی [۱۰] بصورت آزمایشگاهی، به بررسی نانوسیال آب-مس در یک تیوب پرداختند. آنها اعداد رینولدز بین ۱۰۰۰ تا ۲۵۰۰۰ را بررسی کردند. سانترا و همکاران [۱۱] به بررسی انتقال حرارت در یک کانال دوبعدی حاوی نانوسیال پرداختند. آنها شرط دمایی ثابت را برای دیواره کانال اعمال کردند و نتیجه گرفتند که با افزایش عدد رینولدز و همچنین افزایش درصد حجمی نانوسیال، انتقال حرارت افزایش می‌یابد. فابری [۱۲] و فابری و روسی [۱۳] به بررسی انتقال حرارت در کانال‌های صاف و موج‌دار پرداختند. آن‌ها بررسی‌های خود را در جریان آرام انجام دادند. گازمن و آمون [۱۵، ۱۴] بصورت آزمایشگاهی به بررسی جریان در رینولدزهای بالا و در کانال‌های همگرا-واگرا (کانال‌های موجی متقارن) پرداختند.

میدان مغناطیسی هم بر جابجایی اجباری و هم بر جابجایی

1. Corrugation
2. Micro Heat Exchangers
3. Electronic Devices
4. Industrial Transport Process

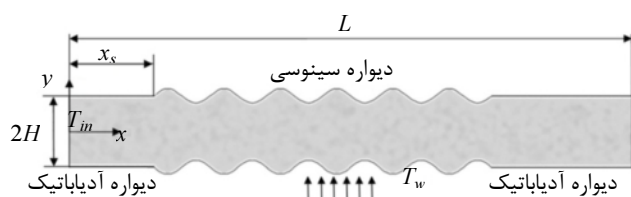
۲- معادلات حاکم

یک کانال دوبعدی سینوسی شکل با ارتفاع ورودی $2H$ و طول L که شامل نانوذرات است و تحت میدان مغناطیسی قرار گرفته در نظر گرفته می‌شود.

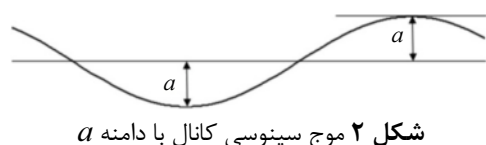
فرض می‌شود که جریان آرام و غیر قابل تراکم باشد و از ترم‌های اتلاف حرارتی نیز صرف‌نظر می‌شود. میدان مغناطیسی بصورت عمود بر کانال اعمال می‌گردد. همچنین فرض می‌شود ذرات نانو و ذرات سیال در تعادل حرارتی هستند و اندازه ذرات نانو به قدری کوچک است که بتوان از سرعت لغزشی بین ذرات نانو و ذرات سیال صرف‌نظر کرد. ابتدا و انتهای قسمت موجی شکل کانال دو صفحه آدیاباتیک به طول $3H$ برای ابتدا و $5H$ برای انتها وجود دارد. دیواره‌های بالا و پایین کانال در دمای ثابت نگه داشته می‌شوند. شماتیک مسأله در شکل ۱ نمایش داده شده است [۴]. پروفیل قسمت سینوسی شکل کانال برای دیواره پایینی بصورت رابطه (۱) است.

$$S(x) = -H - \alpha \sin\left(\frac{\pi(x - x_s)}{H}\right) \quad (1)$$

قسمت موجی کانال از ۶ موج سینوسی تشکیل شده است که طول موج آنها برابر $2H$ و دامنه موج برابر a است (شکل ۲). معادلات حاکم شامل معادله بقای جرم، معادلات مومنتم در جهت‌های x و y و همچنین معادله انرژی است. نیروی لورنتس^۳ نیروی ناشی از میدان مغناطیسی است که به معادلات مومنتم اضافه می‌شود. معادلات ۲ تا ۵ به ترتیب معادلات بقای جرم، بقای مومنتم در جهت‌های x و y و در نهایت معادله انرژی را نشان می‌دهند [۲۲].



شکل ۱ کانال سینوسی تحت میدان مغناطیسی



شکل ۲ موج سینوسی کانال با دامنه a

آزاد اثر گذار است. استفاده از میدان مغناطیسی در جابجایی آزاد، باعث کاهش سرعت در نزدیکی دیواره شده و انتقال حرارت را کاهش می‌دهد [۱۶]. ملک‌پور و قاسمی [۱۷] به بررسی تأثیر میدان مغناطیسی بر جابجایی آزاد در یک محفظه مثلثی پرداختند. آنها اعداد هارتمن تا ۸۰ را بر محفظه اعمال کردند و نشان دادند که افزایش عدد هارتمن باعث کاهش سرعت سیال در محفظه مثلثی شده و انتقال حرارت جابجایی آزاد را کاهش می‌دهد. بر خلاف جابجایی آزاد، در جابجایی اجباری، میدان مغناطیسی باعث تخت شدن پروفیل سرعت می‌شود، این امر موجب افزایش سرعت در نزدیکی دیواره‌های کانال شده و به نوبه خود، ضریب انتقال حرارت را افزایش می‌دهد. در بسیاری از صنایع حرارتی، در ایجاد حرکت در پمپ‌ها برای ایجاد جریان‌های چرخشی و شناوری و در صنعت ریخته‌گری از میدان مغناطیسی استفاده می‌شود. میدان مغناطیسی باعث جهت‌گیری منظم ذرات نانوسیال می‌شود و این موجب ارتباط بیشتر بین ذرات نانو می‌گردد. در نتیجه در یک جریان نانو سیال، اعمال میدان مغناطیسی مطلوب می‌تواند انتقال حرارت را بطور چشم‌گیری افزایش دهد.

نورآذر و همکاران [۱۸] با استفاده از روش تحلیلی اغتشاشی هوموتوبی^۱ به بررسی و تحلیل جریان نانوذرات تحت میدان مغناطیسی بر روی یک صفحه تخت پرداختند. برهان و همکاران [۱۹] به بررسی جریان تحت تأثیر میدان مغناطیسی بر روی یک صفحه موج‌دار پرداختند. پروین و همکاران [۲۰] اثر میدان مغناطیسی در جریان جابجایی آزاد در یک کانال عمودی موج‌دار را بررسی کردند. سلیک [۲۱] به بررسی اثر میدان مغناطیسی بر جریان در یک کانال با سطح مقطع مستطیل پرداخت. او به کمک چند جمله‌ی چیشیف^۲ جریان سیال را بررسی کرد و اعداد هارتمن تا ۱۰۰۰ را مورد مطالعه قرار داد.

مطالعه زیادی در رابطه با یک کانال موجی که تحت میدان مغناطیسی بوده و نانوسیال در آن جریان داشته باشد، صورت نگرفته است. در این مقاله سعی شده است با بررسی شکل هندسی، اعداد رینولدز مختلف، درصد حجمی مختلف نانوذره و مقادیر متفاوت میدان مغناطیسی، تأثیر همه پارامترهای مهم در انتقال حرارت در یک کانال سینوسی مورد بررسی قرار گیرد.

1. Homotopy Perturbation Method
2. Chebyshev

$$+\frac{1}{\text{Re}} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{(1-\phi)^{2.5}} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial Y^2} \right) - \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} \frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} u^* \quad (10)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial X} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial Y} = -\frac{\partial p^*}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{(1-\phi)^{2.5}} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial Y^2} \right) \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \theta}{\partial X} + v^* \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{(\rho C_p)_f}{(\rho C_p)_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (12)$$

متغیرهای بدون بعد بصورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شوند.

$$X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad u^* = \frac{u}{U_{in}}, \quad v^* = \frac{v}{U_{in}}, \quad t^* = t \frac{U_{in}}{H}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu_f}{\alpha_f}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_f U_{in} H}{\mu_f}, \quad \text{Ha} = BH \sqrt{\frac{\sigma_f}{\mu_f}}, \quad p^* = \frac{p}{\rho_{nf} U_{in}^2}, \quad \theta = \frac{T - T_{in}}{T_w - T_{in}} \quad (13)$$

در جدول ۱ خواص سیال و نانوذره مس برای دمای اتاق آورده شده است.

فرضیات استفاده شده برای حل جریان عبارتند از: سیال غیرقابل تراکم، عدم واکنش شیمیایی، اتلاف حرارتی ناچیز، انتقال حرارت تابشی ناچیز و عدم وجود لغزش بین نانوذرات و سیال پایه. برای بدست آوردن چگالی مؤثر و ظرفیت گرمایی ویژه مؤثر نانوسیال از روابط (۱۴) و (۱۵) استفاده می‌شود [۱۶].

$$\rho_{nf} = (1-\phi)\rho_f + \phi\rho_p \quad (14)$$

$$(\rho C_p)_{nf} = (1-\phi)(\rho C_p)_f + \phi(\rho C_p)_p \quad (15)$$

جدول ۱ خواص فیزیکی برای سیال آب و نانوذره مس [۲۳]

σ	k	C_p	μ	ρ	
$\text{m}^{-1}\Omega^{-1}$	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$	$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$	$\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$	kgm^{-3}	
۰/۰۵	۰/۶۱۳	۴۱۷۹	۰/۰۰۰۸۹	۹۹۷/۱	آب
$۵/۹۶ \times ۱۰^۷$	۴۰۱	۳۸۵	-	۸۹۳۳	مس

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_{nf} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\sigma_{nf}}{\rho_{nf}} u B^2 \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_{nf} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{nf} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

اگر $\vec{U}$ بردار کلی سرعت باشد که مولفه افقی آن u و مولفه عمودی آن v باشد، آنگاه می‌توان معادلات ۲ تا ۵ را به فرم بسته معادلات (۶) و (۷) نوشت.

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \nabla p + \nu_{nf} \Delta \vec{U} + \frac{1}{\rho_{nf}} \vec{j} \times \vec{B} \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) T = \alpha_{nf} \Delta T \quad (7)$$

در معادله (۶)، $\vec{j}$ چگالی جریان الکتریکی است و از قانون اهم محاسبه می‌شود. رابطه (۸) قانون اهم را نمایش می‌دهد.

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B}) \quad (8)$$

در این رابطه $\vec{E}$ میدان الکتریکی اعمالی، $\vec{B}$ میدان مغناطیسی اعمالی و $\vec{U}$ میدان سرعت هستند. میدان مغناطیسی اعمال شده یکنواخت در نظر گرفته می‌شود و بنابراین از اثرات ایجاد میدان الکتریکی بخاطر تغییر در میدان مغناطیسی صرف‌نظر می‌شود. چون هیچ میدان الکتریکی خارجی اعمال نمی‌شود، $\vec{E}$ در معادله (۸) صفر است. معادلات ۲ تا ۵ را می‌توان بصورت بدون بعد نوشت.

$$\frac{\partial u^*}{\partial X} + \frac{\partial v^*}{\partial Y} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial X} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial Y} = -\frac{\partial p^*}{\partial X}$$

برای بررسی انتقال حرارت از عدد بی بعد ناسلت استفاده می شود. عدد ناسلت نسبت انتقال حرارت همرفتی به رسانشی است. مقادیر محلی و میانگین عدد ناسلت به ترتیب بصورت روابط (۲۴) و (۲۵) محاسبه می شوند [۲]:

$$Nu_x = - \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{\partial \theta}{\partial n} \bigg|_{y=S(x)} \quad (24)$$

$$\overline{Nu} = \frac{1}{L} \int_0^x Nu_x dx \quad (25)$$

در رابطه (۱۹) $S(x)$ معادله دیواره سینوسی است و از رابطه (۱) بدست می آید. عدد بی بعد هارتمن که نسبت نیروی الکترومغناطیسی به نیروی ویسکوز است، بصورت رابطه (۲۶) تعریف می شود [۱۶].

$$Ha = BH \sqrt{\frac{\sigma_f}{\mu_f}} \quad (26)$$

در این رابطه σ_f رسانش الکتریکی و μ_f ویسکوزیته دینامیکی سیال آب هستند. در این مطالعه، چهار حالت اعداد هارتمن مختلف $Ha=0$ ، $Ha=5$ ، $Ha=10$ و $Ha=20$ مورد مطالعه قرار می گیرند.

۳- روش حل عددی

برای حل عددی از کد متن باز این فوم^۱ استفاده شده است. معادلات بر اساس روش حجم محدود و روش سیمپل^۲ جداسازی شده اند. برای حل معادله فشار، الگوریتم پیزو^۳ مورد استفاده قرار گرفته است. از شرایط تقارن در مسأله استفاده شده تا مدت زمان حل کامپیوتری کاهش یابد. همچنین از قابلیت پردازش موازی این فوم بهره گرفته شده است. معادلات تا وقتی حل می شوند که باقی مانده برای تمام متغیرها کمتر از 10^{-6} بشود.

۴- نتایج

۴-۱- اعتبارسنجی

برای اعتبارسنجی کانال دوبعدی سینوسی شکل، حل یک کانال ساده تحت میدان مغناطیسی با حل تحلیلی [۲۷] آن مورد مقایسه قرار می گیرد.

در این روابط ϕ درصد حجمی نانوسیال و p, f, n, f به ترتیب مربوط به نانوسیال، سیال پایه و ذره جامد هستند. برای بدست آوردن ضریب هدایت الکتریکی موثر نانوسیال از رابطه ماکسول [۲۴] استفاده می شود. در این رابطه σ ضریب هدایت الکتریکی است. مقدار ϕ نیز درصد حجمی نانوسیال را نشان می دهد. رابطه ماکسول برای مقادیر کم درصد حجمی نانو سیال مورد استفاده قرار می گیرد.

$$\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} = 1 + \frac{3 \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_f} - 1 \right) \phi}{\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_f} + 2 \right) - \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_f} - 1 \right) \phi} \quad (16)$$

ویسکوزیته دینامیکی نانوسیال از رابطه برینکمن [۲۵] بدست می آید.

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \phi)^{2.5}} \quad (17)$$

روابط متعددی برای محاسبه ضریب رسانشی حرارتی نانوسیال ارائه شده اند. در این مقاله با توجه به کم بودن درصد حجمی نانوذرات و با در نظر گرفتن شکل کروی و اندازه یکسان برای این ذرات، ضریب رسانش حرارتی با استفاده از تقریب ماکسول-گرانٹ و از رابطه (۱۸) تعیین می شود [۲۶].

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{k_p + 2k_f + 2\phi(k_p - k_f)}{k_p + 2k_f - \phi(k_p - k_f)} \quad (18)$$

شرایط مرزی بی بعد برای حل مسأله بصورت روابط ۱۹ تا ۲۲ است.

$$\theta = 0, u^* = U_{in}, v^* = 0 \quad \text{برای ورودی} \quad (19)$$

کانال

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0, \frac{\partial u^*}{\partial X} = 0 \quad \text{برای خروجی کانال} \quad (20)$$

$$\theta = 1, u^* = v^* = 0 \quad \text{برای دیواره گرم} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0, u^* = v^* = 0 \quad \text{برای دیواره آدیاباتیک} \quad (22)$$

عدد بی بعد رینولدز بصورت رابطه (۲۳) و بر اساس نصف ارتفاع کانال تعریف می شود [۲].

$$Re = \frac{\rho_f U_{in} H}{\mu_f} \quad (23)$$

در این مطالعه سه حالت $Re = 100$ ، $Re = 300$ و $Re = 500$ مورد بررسی قرار می گیرند.

1. OpenFOAM
2. SIMPLE
3. PISO

حل تحلیلی [۲۷] بصورت رابطه (۲۷) است.

$$\frac{U}{U_{\max}} = \frac{\cosh(Ha) - \cosh(y \cdot Ha)}{\cosh(Ha) - 1} \quad (27)$$

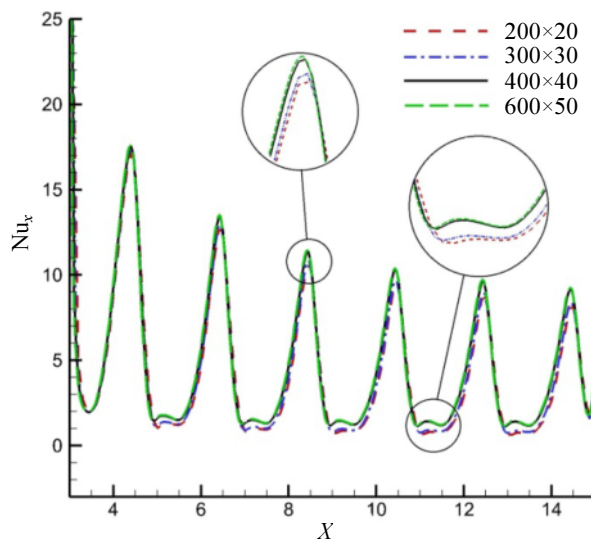
در این رابطه Ha ، عدد بی بعد هارتمن است و y نمایانگر ارتفاع مورد نظر از وسط کانال است.

در حالتی که میدان مغناطیسی وجود ندارد حل برای یک کانال سینوسی شکل با حل عددی [۲] مورد مقایسه قرار می گیرد. در شکل ۴ نتایج حل برای عدد رینولدز $Re = 500$ و عدد پراوتل $Pr = 6.93$ ارائه شده است.

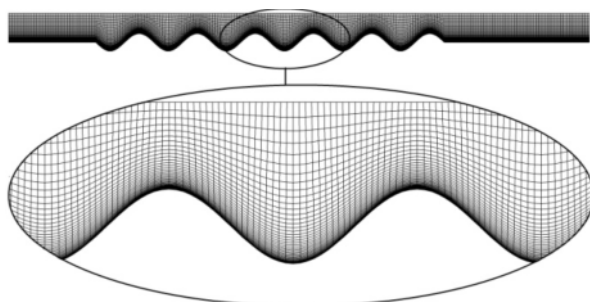
۴-۲- استقلال از مش

برای بررسی استقلال از مش، چهار مش در اندازه های 200×20 ، 300×30 ، 400×40 و 600×50 مورد بررسی قرار گرفتند. مش های تولید شده از نوع غیر یکنواخت بوده و در نزدیکی دیوارها ریزتر هستند.

نتایج حاصل از بررسی استقلال از شبکه در شکل ۵ آورده شده است. در شکل ۵، ناسلت محلی به ازای چهار مش با اندازه های متفاوت رسم شده است. مش 400×40 دقت مورد نظر را دارد و در این مقاله از این مش استفاده شده است. شکل ۶ نمونه ای از مش تولید شده را نشان می دهد.



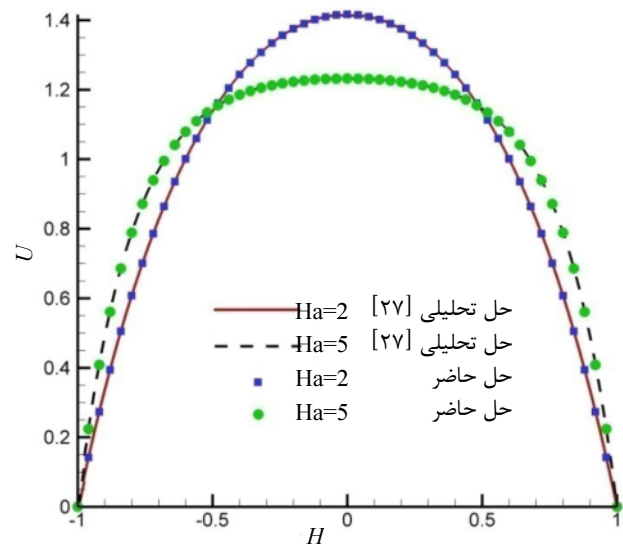
شکل ۵ نتایج حاصل از بررسی استقلال از مش در حالت $Re = 100$, $Ha = 0$, $\phi = 0.05$, $\alpha = 0.3$



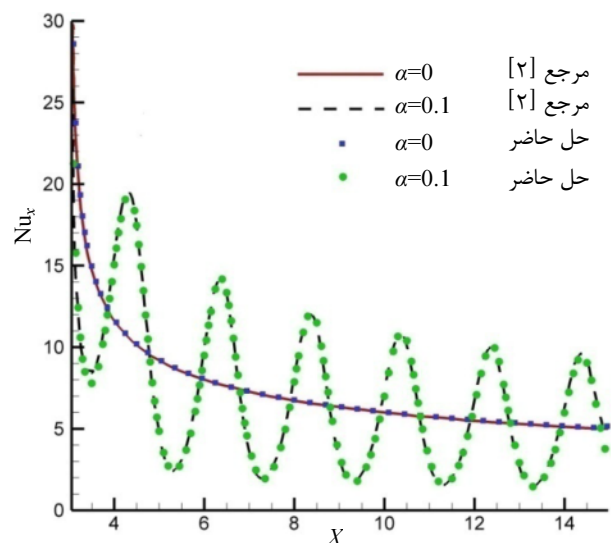
شکل ۶ نمونه مش غیر یکنواخت تولید شده

۴-۳- نتایج حل

در شکل ۷ مقادیر ناسلت محلی برای سه حالت مختلف هندسه سینوسی آورده شده است. مقدار $Ha = 5$ ، $\phi = 0.03$ و

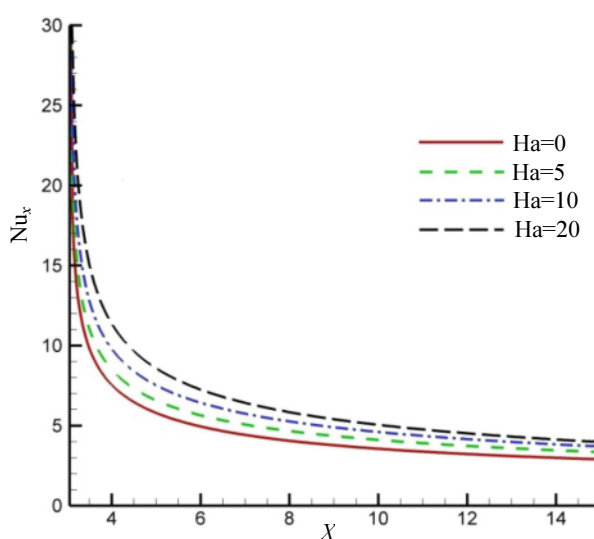


شکل ۳ اعتبارسنجی برای کانال ساده با حل تحلیلی



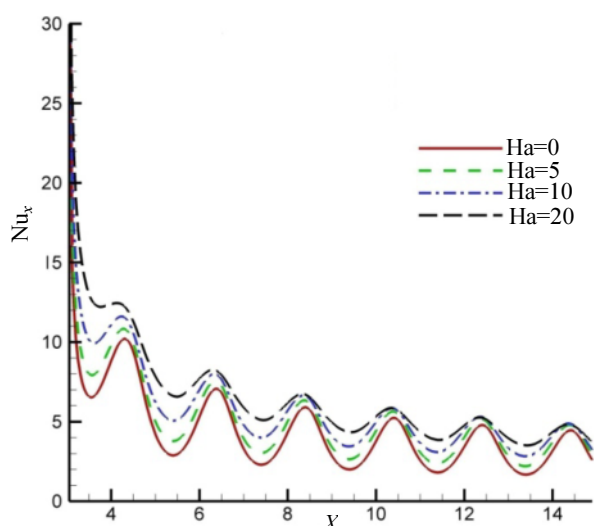
شکل ۴ اعتبارسنجی برای کانال سینوسی، مرجع [۲]

که در این حالت نیز چون ضریب هندسی α کم است، افزایش عدد هارتمن گرادیان سرعت را در تمام نواحی همگرا و واگرا افزایش می‌دهد. این افزایش گرادیان سرعت برای نواحی واگرا بیشتر است. در واقع می‌توان گفت عدد هارتمن بیشتر بر مقادیر مینی‌مم عدد ناسلت محلی در هر طول موج تأثیر گذار است. شکل ۹ این تأثیرگذاری بر مقادیر مینی‌مم را به خوبی نشان می‌دهد.



شکل ۸ ناسلت محلی برای مقادیر مختلف هارتمن در حالت

$$Re = 100, \phi = 0.03, \alpha = 0$$



شکل ۹ ناسلت محلی برای مقادیر مختلف هارتمن در حالت

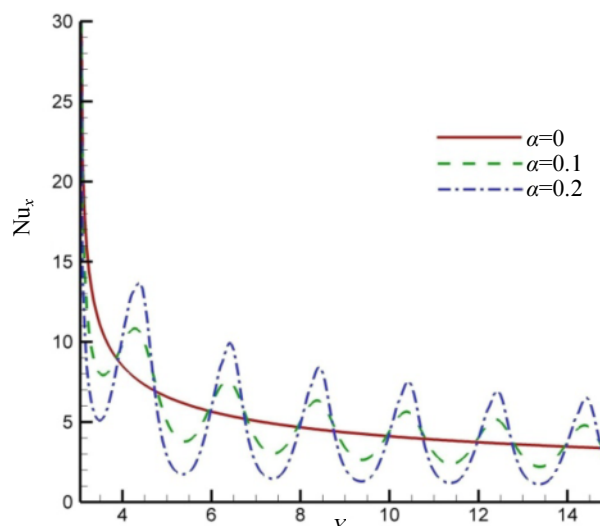
$$Re = 100, \phi = 0.03, \alpha = 0.1$$

برخلاف شکل ۹ در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ مقادیر عدد ناسلت

$Re = 100$ در نظر گرفته شده است تا اثر پارامتر α بر روی انتقال حرارت مورد بررسی قرار گیرد. با توجه به شکل ۷ ملاحظه می‌شود که در جایی که کانال در هر طول موج، همگرا می‌شود مقادیر ناسلت افزایش می‌یابد. علت آن، افزایش مقدار سرعت در نزدیکی دیواره‌ها است که این موجب افزایش گرادیان دما می‌شود. در قسمت واگرای هر طول موج کانال، عدد ناسلت کاهش می‌یابد. دلیل این کاهش، کاهش سرعت متوسط در نزدیکی دیواره و کاهش گرادیان سرعت است.

شکل ۸ مقادیر عدد ناسلت را برای مقادیر مختلف عدد هارتمن در کانال ساده ($\alpha = 0$) نشان می‌دهد. مقادیر $Re = 100$ و $\phi = 0.03$ در نظر گرفته می‌شوند. با توجه به این که افزایش عدد هارتمن در این مسأله به معنی تخت شدن پروفیل سرعت است، در نتیجه با افزایش عدد هارتمن، مقادیر سرعت متوسط در کنار دیواره‌ها افزایش می‌یابد. این افزایش گرادیان سرعت باعث افزایش گرادیان دما می‌شود که این به معنی افزایش عدد ناسلت است. هرچه عدد هارتمن بیشتر باشد، این افزایش بیشتر است. در شکل‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ تأثیر عدد بی‌بعد هارتمن بر هندسه‌های مختلف سینوسی ($\alpha = 0.1$ ، $\alpha = 0.2$ و $\alpha = 0.3$) نشان داده شده است.

در شکل ۹ در تمام نواحی کانال سینوسی، عدد ناسلت محلی افزایش می‌یابد.



شکل ۷ تغییرات ناسلت محلی برای مقادیر مختلف α در حالت

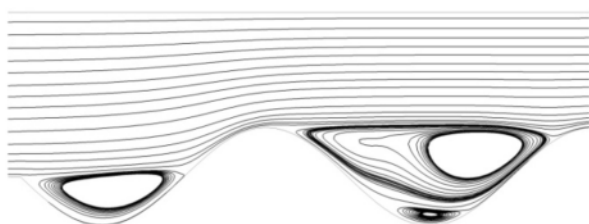
$$Re = 100, Ha = 5, \alpha = 0.3$$

مشابه تحلیلی که برای حالت $\alpha = 0$ گفته شد، می‌توان گفت

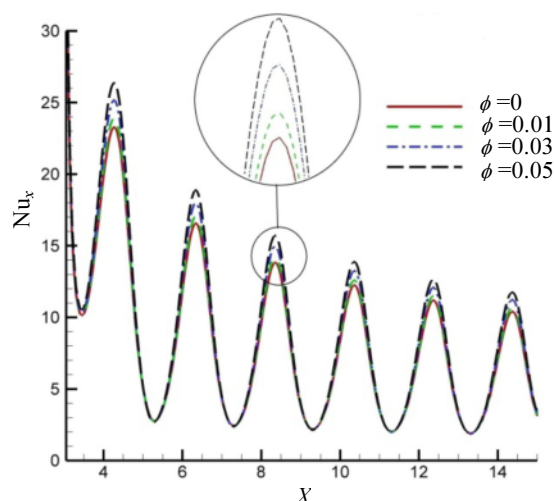
در شکل ۱۲ در اولین و دومین قسمت سینوسی شکل کانال، خط جریان رسم شده است. به وضوح می‌توان وجود گردابه‌ها را مشاهده کرد.

تأثیر عدد هارتمن بیشتر بر مقادیر مینیمم عدد ناسلت در هر طول موج است و این سبب می‌شود در مقادیر بیشتر α ، مقدار عدد ناسلت متوسط، افزایش یابد. در واقع با اعمال میدان مغناطیسی، سرعت در کناره‌ها افزایش می‌یابد و این باعث می‌شود ضخامت لایه مرزی سرعتی که عامل نامطلوب در انتقال حرارت است، کاهش یابد. با کاهش ضخامت لایه مرزی عدد ناسلت و انتقال حرارت افزایش می‌یابد.

در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ برای ضرایب متفاوت α ، با افزایش درصد حجمی نانوذره مس، افزایش عدد ناسلت مشاهده می‌شود. این افزایش درصد حجمی نانوذره، بیشتر بر مقادیر ماکزیمم ناسلت در هر طول موج کانال مؤثر است.



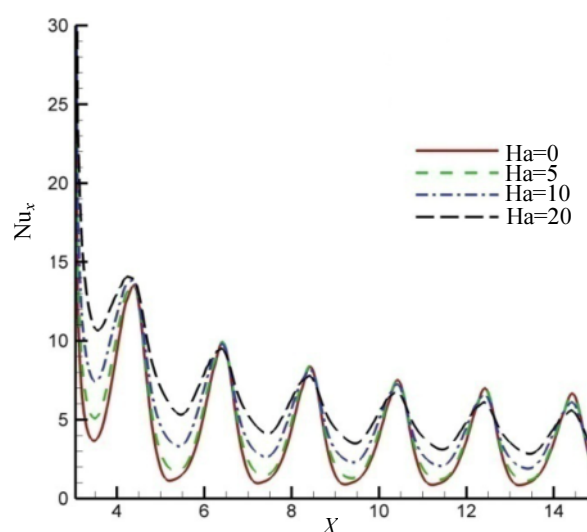
شکل ۱۲ خطوط جریان برای دو حفره اول کانال سینوسی در حالت $\alpha = 0.3$, $Ha = 0$, $Re = 100$, $\phi = 0.03$



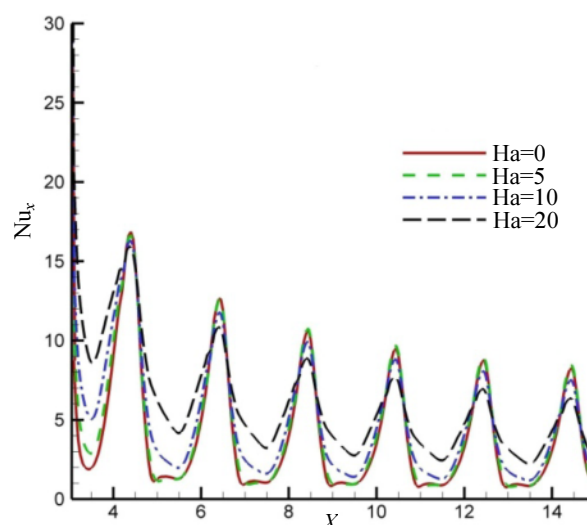
شکل ۱۳ ناسلت محلی برای مقادیر مختلف ϕ در حالت $Re = 500$, $Ha = 5$, $\alpha = 0.1$

دلیل این امر این است که مقادیر مینیمم عدد ناسلت که در

محلی در همه جا افزایش ندارد. در شکل ۱۰ به خوبی مشخص است که به جز در قسمت اولین همگرایی کانال که عدد ناسلت افزایش پیدا کرده است، در بقیه قسمت‌های همگرا این عدد کاهش می‌یابد. همچنین این روند کاهشی با حرکت به سمت آخرین طول موج سینوسی، بیشتر مشخص می‌شود. با افزایش عدد هارتمن، در مقادیر ماکزیمم عدد ناسلت، کاهش جزئی دیده می‌شود. این تأثیر با افزایش ضریب شکل هندسی α بیشتر می‌شود. دلیل این امر این است که با افزایش ضریب شکل، مؤلفه عمودی سرعت بیشتر شده و احتمال شکل‌گیری گردابه‌ها بیشتر می‌شود.



شکل ۱۰ ناسلت محلی برای مقادیر مختلف هارتمن در حالت $Re = 100$, $\phi = 0.03$, $\alpha = 0.2$



شکل ۱۱ ناسلت محلی برای مقادیر مختلف هارتمن در حالت $Re = 100$, $\phi = 0.03$, $\alpha = 0.3$

افزایش درصد حجمی نانوذرات نیز باعث افزایش عدد ناسلت میانگین می‌شود.

شکل ۱۷ تغییرات عدد ناسلت متوسط را در مقادیر مختلف هارتمن و برای ضرایب شکل مختلف نمایش می‌دهد. با افزایش عدد هارتمن در همه حالت‌ها، عدد ناسلت میانگین نیز افزایش می‌یابد. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، با افزایش عدد هارتمن، سرعت در نزدیکی دیواره افزایش می‌یابد و این به نوبه خود گرادیان دما را افزایش می‌دهد.

در شکل ۱۷ با افزایش ضریب شکل، در حالتی که میدان مغناطیسی وجود ندارد، عدد ناسلت میانگین نیز افزایش می‌یابد (به جز در حالت $\alpha = 0.1$). با افزایش عدد هارتمن بیشترین مقادیر عدد ناسلت میانگین در حالتی که $\alpha = 0$ اتفاق می‌افتد. در ضرایب شکل بالاتر، مؤلفه عمودی سرعت به علت شکل سینوسی کانال، بیشتر می‌شود. این مؤلفه عمودی باعث جدایش جریان و کاهش عدد ناسلت میانگین می‌گردد. افزایش عدد هارتمن، اگرچه مقادیر سرعت در نزدیکی دیواره‌ها را افزایش می‌دهد اما همان‌طور که قبلاً نیز در توضیحات شکل ۱۱ ذکر شد، باعث کاهش مقادیر ماکزیمم عدد ناسلت محلی نیز می‌شود. بنابراین ناسلت متوسط ممکن است کاهش یابد. در حالت $\alpha = 0.1$ این کاهش دیده می‌شود.

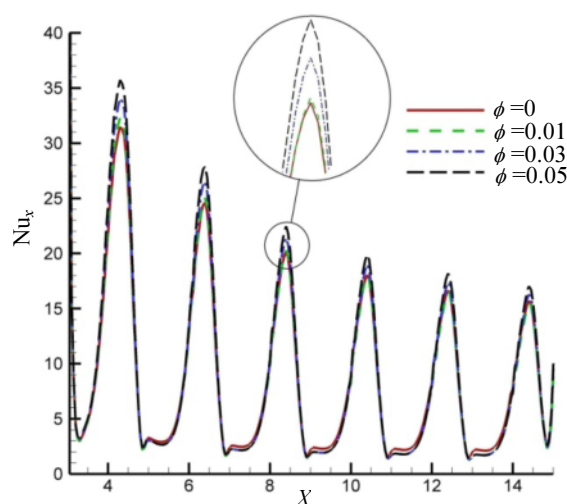
در شکل ۱۸ کانتور فشار بی‌بعد برای کانال در مقادیر متفاوت عدد هارتمن رسم شده است. با توجه به شکل مشخص است که با افزایش عدد هارتمن اختلاف فشار بین ابتدا و انتهای کانال افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش عدد هارتمن، اختلاف فشار موضعی در قسمت‌های واگرا و همگرای کانال نیز کم‌کم از بین می‌رود.

شکل ۱۹ کانتور سرعت بی‌بعد را برای ابتدای قسمت موجی کانال نشان می‌دهد. با افزایش عدد هارتمن، مقدار ماکزیمم سرعت در مرکز کانال کاهش پیدا می‌کند و برعکس در نزدیکی دیواره‌ها افزایش می‌یابد. در مقادیر بالای عدد هارتمن، حداکثر سرعت در نزدیکی قله موج سینوسی اتفاق می‌افتد.

قسمت واگرای کانال هستند، تحت تأثیر گردابه‌ها و نوع جریان هستند و اضافه کردن نانو ذره، اگرچه خواص حرارتی سیال را بهبود می‌دهد اما تأثیرات نوع جریان و گردابه‌ها بیشتر است. در مقادیر ماکزیمم ناسلت که در قسمت‌های همگرای کانال اتفاق می‌افتند، گرادیان سرعت بیشتر است و بهبود خواص حرارتی سیال، بیشتر در این ناحیه تأثیرگذار است.

در شکل ۱۵ خط جریان برای یک حالت خاص ($\alpha = 0.3, Ha = 0, Re = 100, \phi = 0.03$) وجود گردابه‌ها را به خوبی نشان می‌دهد. در اولین موج سینوسی کانال، گردابه‌ای مشاهده می‌شود که مرکز آن کاملاً در پایین حفره سینوسی قرار دارد، در دومین موج سینوسی، دو گردابه وجود دارد که یکی کاملاً در کف حفره سینوسی و گردابه بزرگ‌تر، در بالای حفره قرار دارد. در بقیه حفره‌های سینوسی (حفره سه تا شش) گردابه‌ها تقریباً مشابه یکدیگرند. بعد از دیواره موجی شکل کانال هم یک گردابه طویل مشاهده می‌شود.

در شکل ۱۶ تغییرات عدد ناسلت متوسط در اعداد مختلف رینولدز و در مقادیر مختلف درصد حجمی نانوسیال در حالت $Ha = 5$ و $\alpha = 0.2$ رسم شده‌اند. با توجه به شکل مشخص است که با افزایش عدد رینولدز مقادیر عدد ناسلت میانگین، افزایش می‌یابد.

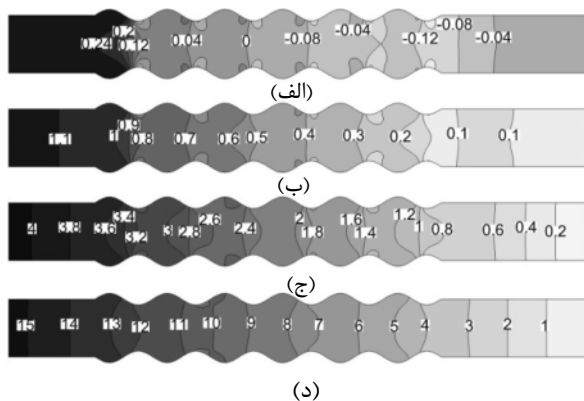


شکل ۱۴ ناسلت محلی برای مقادیر مختلف ϕ در حالت

$Re = 500, Ha = 5, \alpha = 0.2$

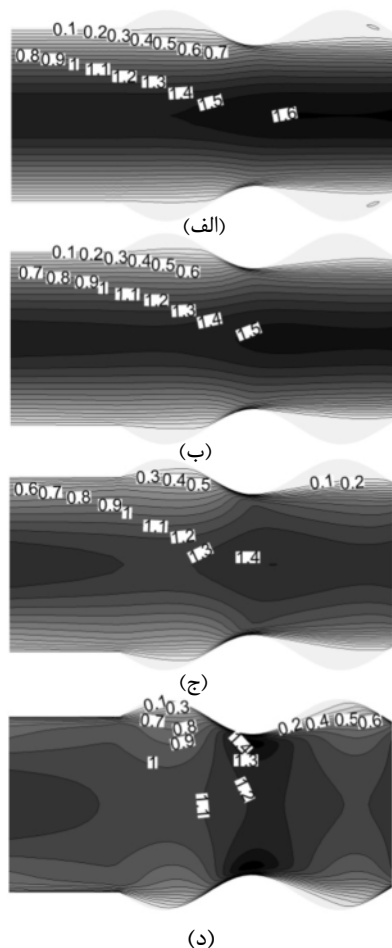


شکل ۱۵ خطوط جریان برای حالت $\alpha = 0.3, Ha = 0, Re = 100, \phi = 0.03$



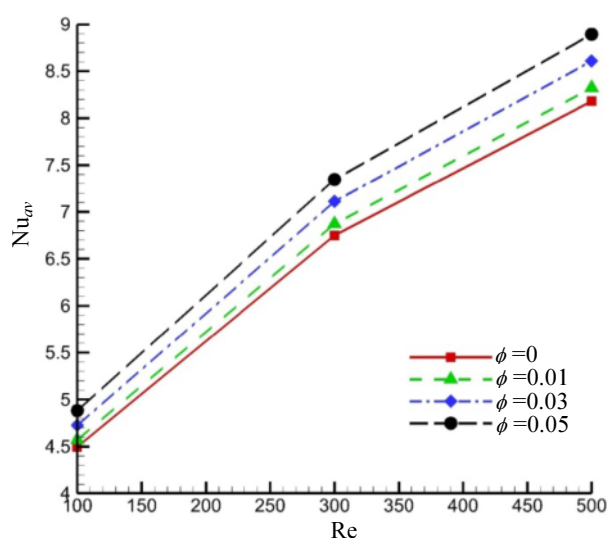
شکل ۱۸ کانتور فشار بی بعد برای مقادیر مختلف عدد هارتمن،

ب- $Ha = 5$ ، ج- $Ha = 10$ ، د- $Ha = 20$
در حالت $\alpha = 0.2$ ، $Re = 500$ ، $\phi = 0.03$

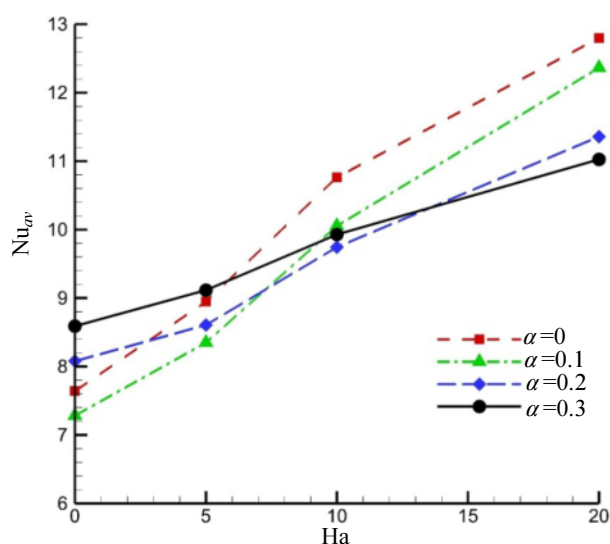


شکل ۱۹ کانتور سرعت بی بعد برای مقادیر مختلف عدد هارتمن،

الف- $Ha = 0$ ، ب- $Ha = 5$ ، ج- $Ha = 10$ ، د- $Ha = 20$ در حالت
 $\alpha = 0.2$ ، $Re = 500$ ، $\phi = 0.03$ برای قسمت ابتدایی کانال سینوسی



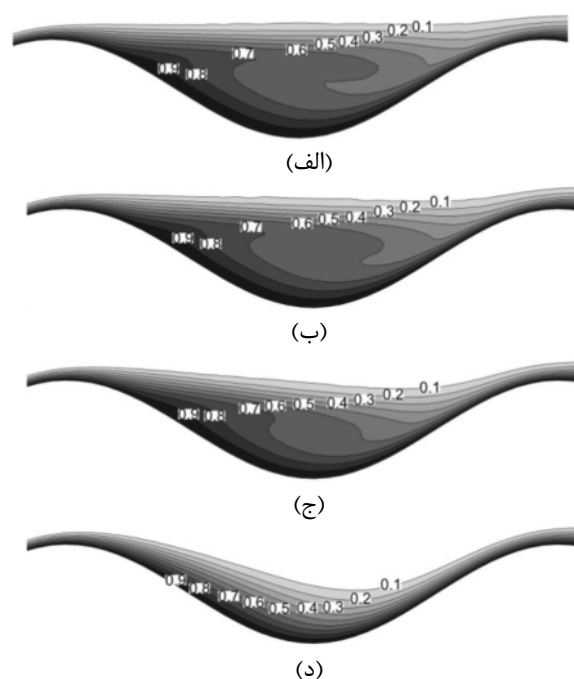
شکل ۱۶ تغییرات ناسلت میانگین برای مقادیر مختلف رینولدز
و درصد حجمی نانوذرات در حالت $Ha = 5$ ، $\alpha = 0.12$



شکل ۱۷ تغییرات ناسلت میانگین برای مقادیر مختلف ضرایب شکل
و عدد هارتمن در حالت $Re = 500$ ، $\phi = 0.03$

با افزایش قدرت میدان مغناطیسی احتمال ایجاد گردابه‌ها کم می‌شود و این بخاطر افزایش سرعت در نزدیکی دیواره‌ها است. در شکل ۲۰ کانتور دمای بی بعد در مقادیر مختلف هارتمن رسم شده است. با توجه به شکل مشخص است که هرچه مقادیر عدد هارتمن بیشتر شود، خطوط هم‌دما به هم نزدیکتر می‌شوند. همچنین با افزایش عدد هارتمن، در نزدیکی دیواره مقدار گرادیان دما نیز افزایش می‌یابد. این افزایش گرادیان دما موجب افزایش عدد ناسلت شده و در نتیجه انتقال حرارت افزایش می‌یابد.

عدد رینولدز از ۱۰۰ تا ۵۰۰ حدود ۸۰ درصد، با افزایش عدد هارتمن از ۰ تا ۲۰ حدود ۶۸ درصد، با افزایش ضریب شکل از صفر تا ۰/۳، حدود ۱۳ درصد بر مقدار عدد ناسلت میانگین افزوده می‌شود. در حالت عدم وجود میدان مغناطیسی، در حالت $\alpha = 0.1$ کاهش عدد ناسلت میانگین و در بقیه حالت‌ها افزایش ناسلت میانگین، مشاهده شد. کانتور فشار بی‌بعد نشان داد که با افزایش عدد هارتمن، اختلاف فشار بین ابتدا و انتهای کانال افزایش می‌یابد. هرچه مقدار عدد هارتمن بیشتر شود، سرعت در مرکز کانال کاهش و در کناره دیواره‌ها افزایش می‌یابد. کانتور دمای بی‌بعد نیز نشان داد که با افزایش عدد هارتمن، خطوط همدمای بیشتر به هم نزدیک می‌شوند و در نتیجه گرادیان دما در نزدیکی دیواره‌ها بیشتر می‌شود که این خود باعث افزایش عدد ناسلت و افزایش انتقال حرارت می‌شود.



شکل ۲۰ کانتور دمای بی‌بعد برای مقادیر مختلف عدد هارتمن، الف- $Ha = 0$ ، ب- $Ha = 5$ ، ج- $Ha = 10$ ، د- $Ha = 20$ در حالت $\alpha = 0.2$ ، $Re = 500$ ، $\phi = 0.03$ برای دومین حفره کانال سینوسی

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، جریان اجباری نانوسیال در یک کانال سینوسی شکل که تحت تأثیر میدان مغناطیسی است، مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که تأثیر افزایش عدد هارتمن بر α های مختلف، متفاوت است. در تمام موارد عدد ناسلت میانگین با افزایش عدد هارتمن افزایش یافت. با افزایش عدد هارتمن در $\alpha = 0.1$ عدد ناسلت محلی در تمام نواحی کانال افزایش یافت، اما در حالت‌های $\alpha = 0.2$ و $\alpha = 0.3$ ، در برخی مناطق عدد ناسلت کاهش یافت. دلیل این امر این است که میدان مغناطیسی مطلوب، باعث تخت شدن پروفیل سرعت می‌شود و این امر، سرعت در نزدیکی دیواره‌ها را افزایش می‌دهد. وجود گردابه‌ها در مقادیر بیشتر α باعث می‌شود با افزایش عدد هارتمن، مقدار عدد ناسلت محلی در مقادیر ماکزیمم هر طول موج کاهش یابد. بررسی تأثیر درصد حجمی نانوذره مس بر انتقال حرارت کانال، نشان داد که با افزایش درصد حجمی نانوذره، همان‌طوری که انتظار می‌رفت، مقادیر عدد ناسلت افزایش یافت. حداکثر این افزایش در حدود ۱۰ درصد بود. بررسی عدد ناسلت میانگین نشان داد که با افزایش

۶- فهرست علائم

a	دامنه موج کانال (M)
$\vec{B}$	میدان مغناطیسی (T)
$\vec{E}$	میدان الکتریکی (NC^{-1})
C_p	ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت ($Jkg^{-1}K^{-1}$)
h	ضریب انتقال حرارت ($Wm^{-2}K^{-1}$)
$\vec{j}$	چگالی جریان الکتریکی (Am^{-2})
k	رسانش حرارتی ($Wm^{-1}K^{-1}$)
L	طول کانال (M)
Nu_x	ناسلت محلی
$\overline{Nu}$	ناسلت میانگین
p	فشار (Pa)
p^*	فشار بی‌بعد
t	زمان (s)
t^*	زمان بی‌بعد
T	دما (T)
u	سرعت افقی (ms^{-1})
u^*	سرعت افقی بی‌بعد
v	سرعت عمودی (ms^{-1})
v^*	سرعت عمودی بی‌بعد
U_{in}	سرعت ورودی (ms^{-1})
x	مولفه افقی (m)

- experimental study of flow and heat transfer in sinusoidal wavy passages, *International journal of heat and mass transfer*, Vol. 42, No. 9, 1999, pp. 1541-1553.
- [6] Ahmed A.M, Shuaib N.H, Yusoff M.Z, Numerical investigations on the heat transfer enhancement in a wavy channel using nanofluid, *International journal of heat and mass transfer*, Vol. 55, No. 21-22, 2012, pp. 5891-5898.
- [7] Liang G., Krishna K., Wenquan T., Yogendra J., Parametric numerical study of flow and heat transfer in microchannels with wavy walls, *Journal of heat transfer*, Vol. 133, No. 5, 2011, pp. 1-10.
- [8] Lee S., Choi S.U.S., Li S., Eastman J.A., Measuring thermal conductivity of fluids containing oxide nano-particles, *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 121, No. 2, 1999, pp. 280-289.
- [9] Eastman J.A., Choi S.U.S., Li S., Yu W., Thompson L.J., Anomalous increased effective thermal conductivities of ethylene glycol-based nano-fluids containing copper nano-particles, *Applied Physics Letters*, Vol. 78, No. 6, 2001, pp. 718- 720.
- [10] Xuan Y., Li Q., Investigation on convective heat transfer and flow features of nanofluids, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 125, No. 1, 2003, pp. 151-155.
- [11] Santra A.K., Sen S., Chakraborty N., Study of heat transfer due to laminar flow of copper-water nanofluid through two isothermally heated parallel plates, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 48, No. 2, 2009, pp. 391-400.
- [12] Fabbri G., Heat transfer optimization in corrugated wall channels, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, No. 23, 2000, pp. 4299-4310.
- [13] Fabbri G., Rossi R., Analysis of the heat transfer in the entrance region of optimized corrugated wall channel, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 32, No. 7, 2005, pp. 902-912.
- [14] Guzman A. M., Amon C. H., Transition to chaos in converging-diverging channel flows, *Physics of Fluids A*, Vol. 6, No. 6, 1994, pp. 1994-2002.
- [15] Guzman A. M., Amon C. H., Dynamical flow characterization of transitional and chaotic regime in converging-diverging channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 321, No. 1, 1996, pp. 25-57.
- [16] Kefayati G.H.R., Lattice Boltzmann simulation of MHD natural convection in a nanofluid-filled cavity with sinusoidal temperature distribution, *Powder Technology*, Vol. 243, No. 1, 2013, pp. 171-183.
- [17] Malekpoor A., Ghasemi B., Investigation of effect of magnetic field on free convection heat transfer of nanofluid in a triangular enclosure, *Modares journal of mechanical engineering*, Vol. 13, No., 2013, pp. 10-21. (In Persian)
- [18] Nourazar S.S., Habibi Matin M., Simiari M., The

X	مولفه افقی بی بعد
y	مولفه عمودی (m)
Y	مولفه عمودی بی بعد
Pr	عدد بی بعد پرانتل
Re	عدد بی بعد رینولدز
Ha	عدد بی بعد هارتمن
$S(x)$	معادله دیواره سینوسی

علائم یونانی:

α	دامنه موج بی بعد کانال
μ	ویسکوزیته دینامیکی ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$)
ν	ویسکوزیته سینماتیکی (m^2s^{-1})
θ	دمای بی بعد
ρ	چگالی (kgm^{-3})
σ	ضریب هدایت الکتریکی ($\text{m}^{-1}\Omega^{-1}$)
ϕ	درصد حجمی نانوسیال

پانویس ها:

av	متوسط
f	سیال
in	ورودی کانال
max	ماکزیمم
nf	نانوسیال
p	ذره جامد
w	دیواره

۷- مراجع

- [1] Choi U.S, Enhancing thermal conductivity offluids with nanoparticles, *Developments and Applications of Non-Newtonian Flows*, Vol. 231, No. 1, 1995, pp. 99-105.
- [2] Wang C.C, Chen C.K, Forced convection in a wavy-wall channel, *International journal of heat and mass transfer*, Vol. 45, No. 12, 2002, pp. 2587-2595.
- [3] Heidary H., Kermani M.J., Effect of nano-particles on forced convection in sinusoidal-wall channel, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, No. 10, 2010, pp. 1520-1527.
- [4] Goldstein L., Sparrow E.M, Heat/Mass transfer characteristics for flow in a corrugated wall channel, *Journal of heat transfer*, Vol. 99, No. 2, 1997, pp. 187-196.
- [5] Rush T.A, Newell A.M, Jacobi A.M, An

- [23] Sheikholeslami M., Gorji-Bandpy M., Ganji D.D., Magnetic field effects on natural convection around a horizontal circular cylinder inside a square enclosure filled with nanofluid, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, No. 7, 2012, pp. 978-986.
- [24] Maxwell J.C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, second ed. Oxford University Press, Cambridge, 1904, pp. 435-441.
- [25] Brinkman H.C., The viscosity of concentrated suspensions and solutions, *Journal of Chemical Physics*, Vol. 20, No. 4, 1952, pp. 571-581.
- [26] Khanafer K., Vafai K., Lightstone M., Buoyancy-driven heat transfer enhancement in a two dimensional enclosure utilizing nanofluids, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, No. 19, 2003, pp. 3639-3653.
- [27] Sutton G.W., Serman A., *Textbook of Magnetohydrodynamics*, New York, McGraw- Hill, 1965.
- HPM applied to MHD nanofluid flow over a horizontal plate, *Journal of applied mathematics*, Vol. 2011, No. 1, 2011, pp. 876437(1-17).
- [19] Bourhan T., Al-Odat M., Magnetic field effect on heat and fluid flow over a wavy surface with a variable heat flux, *Journal of magnetism and magnetic materials*, Vol. 268, No.3, 2004, pp. 357-363.
- [20] Parvin S., Hossain N.F., Finite element simulation of MHD combined convection through a triangular wavy channel, *International communications in heat and mass transfer*, Vol. 39, No. 6, 2012, pp. 811-817.
- [21] Celick I., Solution of Magnetohydrodynamic Flow in a Rectangular Duct by Chebyshev Polynomial Method, *Applied Mathematics*, Vol. 2, No. 3, 2012, pp. 58-65.
- [22] Sheikholeslami M., Hatami M., Ganji D.D., Analytical investigation of MHD nanofluid flow in a semi-porous channel, *Powder Technology*, Vol. 246, No. 1, 2013, pp. 327-336.