مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر 1396، دوره 17، شماره 7، ص‌ص 373-385

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

کمانش پوسته استوانه‌ای تقویتی جدار ضخیم تابعی با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی تحت بارهای محوری و جانبی یکنواخت

شهروز یوسف‌زاده[1]، محمدرضا عیسوندزیبائی[2*]، مجید قیصری[3]

1- مربی، دانشکده مهندسی مکانیک، واحد الیگودرز، دانشگاه آزاد اسلامی، الیگودرز
2- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، واحد اندیمشک، دانشگاه آزاد اسلامی ،اندیمشک
3- کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، واحد الیگودرز، دانشگاه آزاد اسلامی، الیگودرز
*الیگودرز، صندوق پستی 159، isvandzibaei@iauandimeshk.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 29 بهمن 1395
پذیرش: 11 اردیبهشت 1396
ارائه در سایت: 13 مرداد 1396

کلید واژگان:
کمانش
ماده تابعی
پوسته
رینگ
بارهای یکنواخت

چکیده

در این تحقیق به بررسی کمانش مکانیکی پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم از جنس مواد مدرج تابعی با رینگ تقویتی تحت بارهای محوری و جانبی یکنواخت پرداخته شده است. خواص مکانیکی پوسته در راستای ضخامت متغیر فرض شده است. ابتدا معادلات حاکم بر کمانش پوسته استوانه‌ای تابعی تقویت شده با رینگ، بر اساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی بدست آمده است. سپس، معادلات مشخصه حاکم به روش انرژی و بکار بردن تکنیک ریتز استخراج شده‌اند. در ادامه، با حل معادلات مشخصه، نیروی بحرانی کمانش پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم از جنس مدرج تابعی تقویت شده تحت بارهای محوری و جانبی محاسبه گردیده است. شرایط مرزی در لبه‌های دو انتهای پوسته استوانه‌ای تابعی به صورت گیردار-گیردار و آزاد-آزاد در نظر گرفته شده است. به منظور حصول اطمینان از روش حل تحلیلی ارائه شده، نتایج این تحقیق با نتایج به دست آمده از نرم‌افزار المان محدود مورد مقایسه قرار گرفته که سازگاری مناسبی را نشان داده‌اند. در پایان، تأثیر عوامل مختلفی از جمله تغییرات ضخامت، شرایط مرزی، شرایط بارگذاری و پارامترهای هندسی پوسته و رینگ روی رفتار کمانشی پوسته استوانه ای مدرج تابعی تقویتی جدار ضخیم بررسی شده است. نتایج نشان داد که افزایش کسر حجمی ماده مدرج تابعی در ساختار پوسته منجر به افزایش بار کمانشی می‌گردد و محل نصب رینگ تقویتی تأثیر قابل توجهی در بار بحرانی کمانشی آن دارد. نتایج ارائه شده می‌تواند به عنوان یک معیار مهم برای محققان جهت اعتبار سنجی روشهای عددی و تحلیلی استفاده شوند.

Buckling of FGM thick-walled cylindrical shell supported using third order shear deformation theory under uniform axial and lateral loads

ShahrouzYousefzadeh[1], Mohammad Reza Isvandzibaei[2*], Majid Gheysari[1]

1- Department of Mechanical Engineering, Aligodarz Branch, Islamic Azad University, Aligudarz, Iran.
2- Department of Mechanical Engineering, Andimeshk Branch, Islamic Azad University, Andimeshk, Iran.
*P.O.B. 159, Aligudarz, Iran, isvandzibaei@iauandimeshk.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 February 2017
Accepted 01 May 2017
Available Online 04 August 2017

Keywords:
Buckling
FGM
Shell
Ring
Uniform Loads

ABSTRACT

This research presents a study on mechanical buckling of thick-walled cylindrical shell made of functionally graded materials with ring supported under uniform axial and lateral loads. The mechanical properties of shell are variable along the thickness direction. First, the governing equations on the buckling of the FGM cylindrical shell supported with ring are established based on third-order shear deformation theory. Then, the governing characteristic equations were employed using energy method and by applying the Ritz technique. In the following with solving characteristic equations, the critical load buckling of the FGM thick-walled cylindrical shell supported with axial and lateral loads are calculated. The boundary conditions represented by end conditions of the FGM shell are the following: clamped-clamped and free-free. To verify the validity of the proposed analytical method the results of this research are compared with the results that came from using the finite element software. Finally, the effects of the different parameters such as thickness variations, boundary conditions, loading conditions and geometrical parameters of shell and ring on the buckling behavior of FGM thick-walled cylindrical shell are investigated. The results showed that by increasing the FGM volume fraction power in the shell structure, the critical buckling load increases and the location of the ring support has a significant effect on the critical buckling load. The results presented can be used as an important benchmark for researchers to validate their numerical and analytical methods.

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Sh. Yousefzadeh, M. R. Isvandzibaei, M. Gheysari, Buckling of FGM thick-walled cylindrical shell supported using third order shear deformation theory under uniform axial and lateral loads, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 7, pp. 373-385, 2017 (in Persian)

1- مقدمه

مواد مدرج تابعی یاFGM[1]، مواد مرکب جدید با ریزساختار ناهمگن هستند که خواص مکانیکی آن‌ها بطور ملایم و پیوسته و طبق یک تابع معین از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. نوع رایج این مواد ترکیب پیوسته‌ای از سرامیک و فلز است. این مواد از اختلاط پودر فلز و سرامیک به دست می‌آیند. مزیت اصلی استفاده از این مواد این است که قادر به تحمل درجه حرارت بسیار بالا و اختلاف درجه حرارت بسیار بالا بوده و مقاوم در برابر خوردگی و سایش بوده و مقاومت بالایی در مقابل شکست دارد. در حال حاضر از این مواد برای سازه‌هایی که در مقابل درجه حرارت بالا باید مقاوم باشند استفاده می‌شود. این نوع از مواد به دلیل ویژگی خاص در سپرهای حرارتی موشک‌ها، مخازن شیمیایی و محیط‌های سایشی بالا مورد استفاده قرار می‌گیرند [1]. سازه‌های با سطوح میانی خمیده پوسته نامیده می‌شوند. همانند ورق‌ها، صفحه‌ای که ضخامت پوسته را به دو نیمه تقسیم می‌کند سطح میانی خوانده می‌شود. در حقیقت به علت انحنای صفحه میانی، پوسته‌ها دارای مقاومت زیادی برای هر دو نوع بارگذاری داخل صفحه‌ای و خمشی می‌باشند و در نتیجه می‌توانند با استفاده از مواد کمتری ناحیه بزرگی را تحت پوشش قرار دهند. برای حالتی که نسبت شعاع میانی به ضخامت پوسته $R/h < 20$ باشد، پوسته به عنوان یک سازه جدار ضخیم در نظر گرفته می‌شود. پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم از جمله مهم‌ترین عناصر سازه‌ای می‌باشد که به علت دارا بودن ویژگی‌های ممتاز در رفتار مکانیکی، در زمینه‌های مختلف مانند صنایع نفت و گاز، سکوهای فراساحل دریایی، سازه‌های دریایی، سیلوها، برج‌های خنک‌کننده، سدها، مخزن‌ها و غیره کاربرد دارند. همچنین این سازه‌ها به طور گسترده در هواپیماها و شاتل‌های فضایی به کار گرفته می‌شوند [2]. با توجه به کاربردهای ویژه و مهم این سازه‌ها، مطالعه و بررسی شرایط معیوب شدن و از کار افتادگی آنها بسیار حائز اهمیت می‌باشد. در گذشته به دلیل ناشناخته بودن پدیده کمانش، مقاومت تسلیم در اغلب طراحی‌ها به عنوان یک شاخص اصلی مورد توجه قرار می‌گرفت. اما رفته رفته با مطالعات انجام شده و شناخته شدن این معیار مهم، پدیده کمانش به عنوان اصلی‌ترین معیار در ملاحظات طراحی مدنظر قرار گرفت. پدیده کمانش زمانی رخ می‌دهد که بیشتر انرژی کرنشی که به صورت غشایی در جسم ذخیره شده، قابلیت تبدیل به انرژی خمشی لازم برای تغییر شکل-های بزرگ را پیدا کند که می‌تواند منجر به خرابی‌های فجیع گردد. ایجاد کمانش در یک پوسته به عواملی از جمله نحوه بارگذاری، هندسه پوسته و جنس آن بستگی دارد [3]. کارهای تئوری در ارتباط با کمانش الاستیک پوسته را می‌توان به دانل [4] نسبت داد. وی بار کمانش در حالت بحرانی را برای یک پوسته استوانه‌ای کوتاه فرموله نمود. در این فرمولاسیون انحراف اولیه در نظر گرفته شد و پوسته‌های استوانه‌ای تحت تراکم محوری و فشارخارجی با فرض اینکه نیروی برشی در جهت محیطی و دوران‌های β_x و β_θ قابل صرفنظر می‌باشد، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. معادلات تعادل و پایداری که دانل بدست آورد بر اساس روش برآیند نیروها بود که خود اساس مطالعات دیگری بر روی کمانش پوسته‌ها قرار گرفت که می‌توان به کار کویت [5] و براش و آلمورث [6] اشاره کرد. هراکویچ و جانسون [7] کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مرکب تحت ترکیبی از فشار و پیچش را با استفاده از روشهای نظری و تجربی بررسی نمودند. هیو [8] رفتار پس از کمانش پانل‌های استوانه‌ای لایه‌ای متقارن و کوتاه را که دارای لایه‌هایی با آرایش متعامد می‌باشد تحت بارهای فشاری مورد بررسی قرار داد. واندرلیچ و همکاران [9] به بررسی تأثیر رینگ‌های تقویتی روی کمانش الاستیک و پلاستیک پوسته‌های استوانه‌ای تحت فشار جانبی پرداختند. آنها در تحقیق خود راه حل کلی درخصوص نحوه چیدمان رینگ‌ها و هندسه پوسته ارائه دادند. تانگاراتنامو همکاران [10] در مقاله‌ای، کمانش پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی مرکب لایه‌ای را تحت بار حرارتی با استفاده از روش المان محدود مورد بررسی قرار دادند. اثرات دما بر روی کمانش و رفتار پس از کمانش صفحات یا پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده و مرکب بوسیله بیرمان و برت [11] مورد بررسی قرار گرفت. ساویا و ردی [12] مسئله رفتار پس از کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدور تقویت شده طولی و از جنس ماده مرکب لایه‌ای را که تحت تراکم محوری یکنواخت می‌باشد مورد مطالعه قرار دادند. کاردوماتیس با استفاده از حل الاستیسیته استاندارد، مسائل کمانش را برای پوسته‌های ارتوتروپ تحت فشار خارجی در حالت دو بعدی و با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته‌ها مورد مطالعه قرار داد [13]. ونگ و همکاران [14] روش جدیدی برای محاسبه بار کمانشی یک پوسته جدار نازک ارائه دادند. لی و باترا [15] به تحلیل کمانشی پوسته‌های جدار نازک با لایه میانی از جنس مواد مدرج تابعی، تحت بارگذاری فشاری محوری پرداختند. پوسته دارای سه لایه بوده و شرایط تکیه گاهی ساده در دو انتها برای آن در نظر گرفته شده بود. دو لایه بیرونی پوسته از مواد همسانگرد همگن و لایه میانی از ماده مدرج تابعی با تغییرات سهمی‌گون تشکیل شده بود. نشان داده شد مدهای کمانشی در راستای محیطی هارمونیک می باشند و افزایش نسبت طول به شعاع موجب افزایش شکل مودهای کمانشی در راستای محوری می‌گردد. بررسی تأثیر نیروی محوری بر کمانش پوسته‌های اورتوتروپیک توسط اسماعیل دخت و همکارانش صورت پذیرفت که از روش تحلیلی دانل برای بدست آوردن نتایج استفاده شد [16]. پورویس و کبیر پایداری پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی با تقویت کننده محیطی تحت اثر بارهای ترکیبی را مورد بررسی قرار دادند. آنها از روش ریتز برای استخراج معادلات استفاده کردند و نتایج برای لایه بندی‌های مختلف ارائه گردید [17].

آنالیز کمانش خطی برای پوسته‌های استوانه‌ای تشکیل شده از مواد مدرج تابعی در کارهای نجفی‌زاده و همکارانش [18] و هانگ و هان [19] آمده است. اثرات اغتشاشات دمایی روی کمانش دمایی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده در دو انتها توسط شاهسیاه و اسلامی [20] مورد مطالعه قرار گرفت. در این کار از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده شد و فرض شد خواص مواد وابستگی دمایی نداشته باشند. شن [21] رفتار پس از کمانش پوسته استوانه‌ای تحت فشردگی محوری را با استفاده از تئوری لایه مرزی مورد بررسی قرار داد. خواص مواد وابسته به دما بوده و بر اساس قانون توانی در راستای ضخامت در نظر گرفته شد. معادلات حاکم بر اساس تئوری کلاسیک و با سینماتیک غیرخطی ون-کارمن به دست آمدند. مشخص شد استفاده از این روش در برخی موارد دارای محاسبات ریاضی سنگینی می‌باشد. هانگ و هان [22] رفتار غیر خطی کمانش و پس کمانش پوسته‌های استوانه‌ای تشکیل شده از مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری ترکیبی از فشار جانبی و فشردگی محوری را مطالعه کردند. در این تحلیل روابط غیرخطی کرنش-جابه‌جایی برای تغییر شکل‌های بزرگ و روش انرژی ریتز مورد استفاده قرار گرفت. تاجداری و همکاران بررسی عددی و تجربی کمانش پوسته‌های جدار نازک استوانه ای ساخته شده از فولاد را مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق آزمایش توسط یک دستگاه هیدرولیکی صورت پذیرفت [23].

ژائو و همکاران [24-26] از روش المان آزاد ریتز برای تحلیل کمانش

[1] Functionally Graded Material

دمایی و مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای استفاده کردند. خواص مواد در راستای ضخامت بر اساس قانون ساده توزیع توانی تغییر می‌کرد و مواد مدرج تابعی، تشکیل شده از فلز و سرامیک بودند. فرمول‌بندی مسئله با استفاده از نوع بهبود یافته تئوری غیرخطی پوسته‌ها که توسط ساندرز ارائه شد، به دست آمد. از ترکیب روش طول کمان و تقریب اصلاح شده نیوتن-رافسون برای تعیین مسیرهای بار-تغییر مکان استفاده شد. نتایج نشان داد که توان کسر حجمی تاثیر قابل توجهی در تغییر مکان پانل دارد و همچنین نقش مهمی در تعیین اغتشاشات تنش محوری در نزدیکی سطوح بالایی و پایینی ایفا می‌کند. در حالت واقعی بیشتر سازه‌ها از جمله پوسته‌های استوانه‌ای ممکن است به دلیل فرایندهای ساخت، حمل و نقل، نصب و یا قرار گرفتن در محیط‌های خورنده مانند محیط‌های دریایی، دارای عیوب هندسی اولیه باشند. این عیوب هندسی می‌تواند موجب کاهش تحمل بار نهایی برای سازه‌ها شود که ممکن است در نظر نگرفتن این پدیده موجب پایین آمدن ایمنی در طراحی سازه‌ها گردد. همچنین برخی سازه‌های پوسته‌ای به دلیل قرار گرفتن در شرایط بارگذاری مختلف به گونه‌ای طراحی شوند که ضخامت آن در راستاهای محیطی و یا محوری متغیر باشد. الیشاکوف [27] در سال 2001 اثر عیوب هندسی به صورت متقارن محوری را روی پایداری پوسته‌های استوانه‌ای همسانگرد و کامپوزیت تحت بارگذاری محوری مورد مطالعه و بررسی قرار داد. گوسیک و همکاران [28] اثر تغییرات ضخامت در راستای محیطی را بر روی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک تحت فشار جانبی مورد توجه قرار دادند و به مطالعه عیوب هندسی پرداختند. از آنالیز نقطه شکست المان محدود برای تعیین تاثیر تغییرات ضخامت هارمونیک در جهت محیطی بر بار کمانشی پوسته استفاده شد. در ابتدا تاثیر کاهش ضخامت یکنواخت بر روی فشار کمانشی پوسته‌های تقریبا بلند و با طول نامحدود مورد مطالعه قرار گرفت و سپس یک حل تحلیلی برای پوسته‌های با طول نامحدود ارائه شد. مشخص گردید برای پوسته‌های تقریباً بلند عیوب ایجاد شده در ضخامت با طول موج بلند می‌توانند موجب خسارات زیادی گردند که تأثیر این عیوب بیشتر از عیوبی با طول موج کوتاه‌تر برای پوسته‌ها با طول کمتر می‌باشد. در این کار دو کد مختلف المان محدود مورد استفاده قرار گرفت: آنالیز چند وجهی متقارن محوری کوشی فوریه و آنالیز استفاده از المان پوسته‌ای سه بعدی. لیونگ و تاچ از روش اغتشاشات مرکب گالرکین به منظور بررسی پانل‌های استوانه‌ای جدار نازک با ضخامت متغیر استفاده کردند. آنها همچنین پانل‌های استوانه‌ای ناقص را با استفاده از روش انرژی مورد مطالعه قرار دادند [29]. نگوین و همکاران [31،30] به تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌ای با ضخامت متغیر در راستای محوری، تحت بارگذاری فشار جانبی پرداختند. آنها با استفاده از ترکیب اغتشاشات و روش گالرکین به معادلاتی بر حسب پارامتر تغییر ضخامت دست یافتند. در این کار از تئوری کلاسیک پوسته‌ها استفاده شد و پوسته دارای شرایط تکیه گاهی ساده بود. اثرات تغییرات ضخامت روی کمانش پوسته استوانه‌ای همسانگرد در حالت بارگذاری فشاری محوری توسط کویتر [32] مطالعه شد. در این کار تغییرات ضخامت و عیوب هندسی به صورت متقارن محوری در نظر گرفته شد.

تاکنون در هیچکدام از کارهای انجام شده در زمینه کمانش پوسته‌ها، اثر همزمان پارامترهای فشار جانبی و فشار محوری روی پوسته‌های از جنس مواد تابعی با یک رینگ تقویتی با در نظر گرفتن تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی بررسی نشده است. اغلب مطالعات، روی پوسته‌هایی با جنس مواد کامپوزیت لایه‌ای انجام شده است. پژوهش‌هایی که روی مواد تابعی انجام شده یا با تئوری‌های مرتبه پایین (همچون تئوری کلاسیک) و بدون رینگ تقویتی است یا اثر همزمان فشارهای جانبی و محوری را بررسی نکرده‌اند.

در این تحقیق که مراحل آن بسیار دقیق انجام شده است به ارائه راه حل دقیقی برای مسئله کمانش یک پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی با رینگ تقویتی تحت بارگذاری محوری و جانبی یکنواخت پرداخته شده است. برای دست یافتن به معادلات کمانشی از تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی استفاده شده است. برای حل معادلات حاکم بر کمانش پوسته از روش انرژی بر اساس تکنیک ریتز استفاده شده است. با حل معادلات مشخصه بدست آمده از روش ریتز بار بحرانی کمانش پوسته حاصل شده است. در پایان اثر کسر حجمی ماده مدرج تابعی در ساختار پوسته، محل نصب رینگ تقویتی و پارامترهای مختلف روی بار بحرانی کمانش پوسته مدرج تابعی مورد ارزیابی قرار گرفته است.

2- مدل سازی مواد تابعی مدرج

مواد مدرج تابعی از ترکیب مواد مختلف تشکیل شده‌اند و از نظر ریزساختاری غیرهمگن بوده و خواص مکانیکی آنها به صورت ملایم و پیوسته از یک سطح تا سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. این خاصیت ویژه توسط تغییر یکنواخت نسبت حجمی مواد تشکیل دهنده بدست می‌آیند. دو نوع ساختار ممکن جهت مدل سازی مواد مدرج تابعی وجود دارد که در شکل 1 نشان داده شده است. برای نوع اول (a)، تغییرات نسبت حجمی مواد تشکیل دهنده به صورت گام به گام است در حالی که در نوع دوم (b) تغییرات نسبت حجمی مواد تشکیل دهنده به صورت پیوسته می باشد.

2-1- توزیع فلز و سرامیک در ماده تابعی

برای توزیع فلز و سرامیک باید از یک مدل استفاده کرد که با یک توزیع بخصوص از ترکیب نسبی این دو ماده بدست می‌آید. مدل مورد استفاده در این تحقیق مدل ساده توانی یا مدل ردی[1] می‌باشد. محورهای مختصات طوری در نظر گرفته شدند که z محور مختصات در جهت ضخامت پوسته باشد و h بیانگر ضخامت پوسته می باشد.

نسبت حجمی سرامیک و فلز را می‌توان با استفاده از قانون توانی مطابق روابط زیر بیان کرد [1].

$$V_c = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p \quad (1)$$

$$V_m = 1 - V_c \quad (2)$$

با توجه به اینکه خواص مادی پوسته در جهت ضخامت پوسته تغییر می‌کند و اینکه ضریب پواسون ثابت است داریم:

$$E(z) = E_c V_c + E_m(1 - V_c) \quad (3)$$

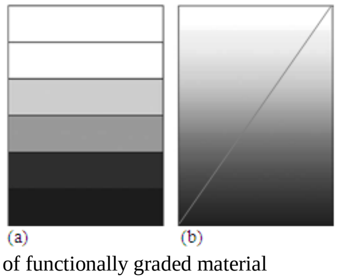


Fig. 1 Structure of functionally graded material

شکل 1 ساختار مواد مدرج تابعی

[1] Reddy

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.7.32.4]

$$\rho(z)=\rho_c V_c+\rho_m(1-V_c) \tag{4}$$
$$\nu(z)=\nu_0 \tag{5}$$

با جایگذاری نسبت حجمی از روابط (1) و (2) در روابط (3) تا (5) خواص مادی پوسته تابعی مانند مدول الاستیسیته E، چگالی ρ و ضریب پواسون ν به صورت زیر بدست می‌آیند [18].

$$E(z)=E_c+(E_m-E_c)\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{h}\right)^p \tag{6}$$
$$\rho(z)=\rho_c+(\rho_m-\rho_c)\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{h}\right)^p \tag{7}$$
$$\nu(z)=\nu_0 \tag{8}$$

در روابط بالا اندیس های c و m به ترتیب معرف خواص سرامیک و فلز در ماده تابعی می‌باشند.

3- هندسه پوسته و تقویت کننده

شکل2 طرح کلی مسئله مورد بحث را نشان می‌دهد که در آن یک پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم از جنس مواد تابعی توسط یک رینگ در فاصله $a_f L$ از یک انتها تقویت شده که تحت فشار جانبی $q(x)$ و فشار محوری p قرار دارد. فرض می‌شود که پوسته جدار ضخیم با پارامترهای h ضخامت پوسته، R شعاع داخلی پوسته، L طول پوسته مشخص شده باشند. سیستم مختصات متعامدx،θ و r بر سطح مرجع روی لایه میانی پوسته قرار دارد. تغییر مکان‌های پوسته استوانه‌ای تابعی u، v و w به ترتیب در جهات x، θ و r در نظر گرفته می‌شود.

سطح مقطع رینگ تقویتی در شکل3 نشان داده شده است که در آن رینگ تقویتی به صورت مستطیل شکل دارای پهنای b، ضخامت d و فاصله مرکز ضخامت پوسته تا مرکز ضخامت رینگ تقویتی e می‌باشد.

4- معادلات حاکم بر کمانش پوسته استوانه‌ای تابعی

تغییرمکان‌ها در نقطه دلخواهی از پوسته استوانه‌ای تابعی با استفاده از تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود [33]:

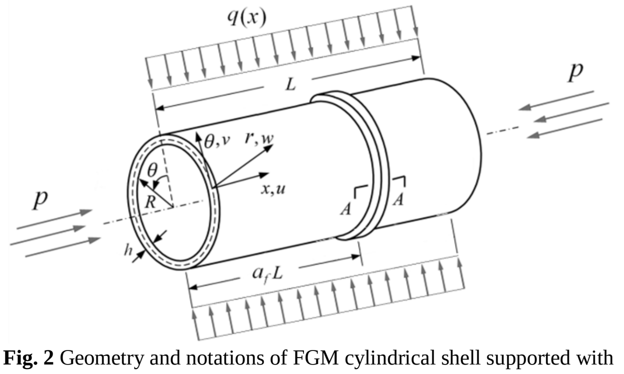


Fig. 2 Geometry and notations of FGM cylindrical shell supported with uniform axial and lateral loads

شکل 2 هندسه و نمادگذاری پوسته استوانه‌ای تابعی تقویتی با بارهای یکنواخت محوری و جانبی

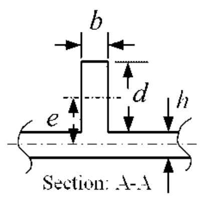


Fig. 3 Geometry of the cross section of the ring support

شکل 3 هندسه سطح مقطع رینگ تقویتی

$$u=u_0+z\phi_1-c_1z^3\left(\phi_1+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$
$$v=v_0+z\phi_2-c_1z^3\left(\phi_2+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right),\qquad w=w_0 \tag{9}$$

که در آن $c_1=4/3h^2$ و z فاصله یک نقطه از پوسته از لایه میانی بوده و تغییرات آن بصورت $-h/2\le z\le h/2$ می‌باشد. همچنین (u,v,w) به ترتیب تغییر مکان در راستای (x,θ,r) و (u_0,v_0,w_0) تغییر مکان لایه میانی پوسته در جهات مذکور می‌باشد. کرنش‌ها در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial\theta},\qquad \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\right),\qquad \gamma_{x\theta}=\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$\gamma_{z\theta}=\left(\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{v}{R}\right),\qquad \gamma_{zx}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{10}$$

با جایگذاری رابطه (9) در معادلات (10) روابط زیر بدست می‌آید [2]:

$$\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{xx}^0+zk_x+z^3k_x'$$
$$\varepsilon_{\theta\theta}=\varepsilon_{\theta\theta}^0+zk_\theta+z^3k_\theta'$$
$$\gamma_{x\theta}=\gamma_{x\theta}^0+zk_{x\theta}+z^3k_{x\theta}'$$
$$\gamma_{z\theta}=\gamma_{z\theta}^0+zk_{z\theta}+z^2k_{z\theta}'+z^3k_{z\theta}''$$
$$\gamma_{zx}=\gamma_{zx}^0+z^2k_{zx} \tag{11}$$

که در این روابط پارامترها به شرح زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_{xx}^0=\frac{\partial u_0}{\partial x},\ k_x=\frac{\partial\phi_1}{\partial x},\ k_x'=-c_1\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+\frac{\partial^2w_0}{\partial x^2}\right)$$
$$\varepsilon_{\theta\theta}^0=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial v_0}{\partial\theta}+w_0\right),k_\theta=\frac{1}{R}\frac{\partial\phi_2}{\partial\theta},\ k_\theta'=-\frac{c_1}{R}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\theta}+\frac{\partial^2w_0}{\partial\theta^2}\right)$$
$$\gamma_{x\theta}^0=\frac{1}{R}\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+\frac{\partial v_0}{\partial x},\ k_{x\theta}=\frac{1}{R}\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi_2}{\partial x}$$
$$k_{x\theta}'=-c_1\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}+\frac{2}{R}\frac{\partial^2w_0}{\partial x\partial\theta}+\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right)$$
$$\gamma_{r\theta}^0=\frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial\theta}+\phi_2-\frac{v_0}{R},\ k_{r\theta}=\ -\frac{\phi_2}{R}$$
$$k_{r\theta}'=-3c_1\left(\phi_2+\frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right),\ k_{r\theta}''=-\frac{c_1}{R}\left(\phi_2+\frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right)$$
$$\gamma_{rx}^0=\frac{\partial w_0}{\partial x}+\phi_1,k_{rx}=-3c_1\left(\phi_1+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \tag{12}$$

همچنین روابط تنش- کرنش برای پوسته تابعی به شرح زیر می‌باشد:

$$\sigma_{xx}=\frac{E(z)}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx}+\nu\varepsilon_{\theta\theta})\ ,\sigma_{\theta\theta}=\frac{E(z)}{1-\nu^2}(\varepsilon_{\theta\theta}+\nu\varepsilon_{xx}) \tag{13}$$
$$\tau_{x\theta}=\frac{E(z)}{2(1+\nu)}\gamma_{x\theta}\ ,\tau_{z\theta}=\frac{E(z)}{2(1+\nu)}\gamma_{r\theta}\ ,\tau_{zx}=\frac{E(z)}{2(1+\nu)}\gamma_{rx} \tag{14}$$

5- روابط انرژی پوسته استوانه‌ای تابعی

حال به بررسی انرژی پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم مدرج تابعی تقویتی با بارهای یکنواخت جانبی و محوری همانند شکل 1 پرداخته می‌شود.

5-1- انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل پوسته تابعی به شرح زیر است:

$$U=\frac{R}{2}\int_\Omega\int_{-h/2}^{h/2}(\overbrace{\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}}^{A}+\overbrace{\sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta}}^{B}+\overbrace{\tau_{x\theta}\gamma_{x\theta}}^{C}+\overbrace{\tau_{z\theta}\gamma_{z\theta}}^{D}$$
$$+\overbrace{\tau_{zx}\gamma_{zx}}^{E})\,dxd\theta\,dz \tag{15}$$

با فرضیات زیر به ساده سازی رابطه انرژی پتانسیل پوسته تابعی می‌پردازیم:

$$E_0,E_1,E_2,E_3,E_4,E_6=\int_{-h/2}^{h/2}E(z)(1,z,z^2,z^3,z^4,z^6)dz \tag{16}$$

و همچنین

$$u_0(x,\theta)=u_0(x)\sin(n\theta),\ \ v_0(x,\theta)=v_0(x)\cos(n\theta)$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.7.32.4]

$$w_0(x,\theta)=w_0(x)\sin(n\theta),\ \ \phi_1(x,\theta)=\phi_1(x)\sin(n\theta)$$
$$\phi_2(x,\theta)=\phi_2(x)\cos(n\theta) \tag{17}$$

با جایگزینی روابط (13)، (14)، (16) و (17) در معادله (15) و انتگرال گیری بر حسب dz، تک تک جملات را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

مولفه اول(A):

$$\begin{aligned}
A=\frac{\pi}{1-\nu^2}\int_0^L\Bigg[&\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2E_0+\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)^2E_2+(c_1)^2\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}+\frac{\partial^2_{w_0}}{\partial x^2}\right)^2E_6\\
&+2\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)E_1\\
&-2c_1\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}+\frac{\partial^2_{w_0}}{\partial x^2}\right)E_3\\
&-2c_1\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}+\frac{\partial^2_{w_0}}{\partial x^2}\right)E_4\\
&-\frac{\nu}{R}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)(n\phi_2)E_1\\
&+\frac{\nu c_1}{R}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\left(n\phi_2+\frac{n^2}{R}w_0\right)E_3\\
&+\frac{\nu}{R}(-nv_0+w_0)\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)E_1\\
&-\frac{\nu}{R}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)(n\phi_2)E_2\\
&+\frac{\nu c_1}{R}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)\left(n\phi_2+\frac{n^2}{R}w_0\right)E_4\\
&-\frac{\nu c_1}{R}(-nv_0+w_0)\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}+\frac{\partial^2_{w_0}}{\partial x^2}\right)E_3+\frac{\nu c_1}{R}(n\phi_2)\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}+\frac{\partial^2_{w_0}}{\partial x^2}\right)E_4\\
&-\frac{\nu c_1^2}{R}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}+\frac{\partial^2_{w_0}}{\partial x^2}\right)\left(n\phi_2+\frac{n^2}{R}w_0\right)E_6\Bigg]dx
\end{aligned} \tag{18}$$

مولفه دوم(B):

$$\begin{aligned}
B=\frac{\pi}{1-\nu^2}\int_0^L\Bigg[&\frac{1}{R^2}(-nv_0+w_0)^2E_0+\frac{1}{R^2}(n\phi_2)^2E_2\\
&+\left(\frac{c_1}{R}\right)^2\left(n\phi_2+\frac{n^2}{R}w_0\right)^2E_6\\
&-\frac{2}{R^2}(-nv_0+w_0)(n\phi_2)E_1\\
&+\frac{2c_1}{R^2}(-nv_0+w_0)\left(n\phi_2+\frac{n^2}{R}w_0\right)E_3\\
&-\frac{2c_1}{R^2}(n\phi_2)\left(n\phi_2+\frac{n^2}{R}w_0\right)E_4\\
&+\frac{\nu}{R}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)(-nv_0+w_0)E_0\\
&-\frac{\nu}{R}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)(n\phi_2)E_1\\
&+\frac{\nu c_1}{R}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\left(n\phi_2+\frac{n^2}{R}w_0\right)E_3\\
&+\frac{\nu}{R}(-nv_0+w_0)\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)E_1\\
&-\frac{\nu}{R}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)(n\phi_2)E_2\\
&+\frac{\nu c_1}{R}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)\left(n\phi_2+\frac{n^2}{R}w_0\right)E_4\\
&-\frac{\nu c_1}{R}(-nv_0+w_0)\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}+\frac{\partial^2_{w_0}}{\partial x^2}\right)E_3\\
&+\frac{\nu c_1}{R}(n\phi_2)\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}+\frac{\partial^2_{w_0}}{\partial x^2}\right)E_4\\
&-\frac{\nu c_1^2}{R}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}+\frac{\partial^2_{w_0}}{\partial x^2}\right)\left(n\phi_2+\frac{n^2}{R}w_0\right)E_6\Bigg]dx
\end{aligned} \tag{19}$$

مولفه سوم(C):

$$\begin{aligned}
C=\frac{\pi}{2(1+\nu)}\int_0^L\Bigg[&\left(\frac{nu_0}{R}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2E_0+\left(\frac{n\phi_1}{R}+\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right)^2E_2\\
&+(c_1)^2\left(\frac{n\phi_1}{R}+\frac{2n}{R}\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right)^2E_6\\
&+2\left(\frac{nu_0}{R}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\left(\frac{n\phi_1}{R}+\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right)E_1\\
&-2c_1\left(\frac{nu_0}{R}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\left(\frac{n\phi_1}{R}+\frac{2n}{R}\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right)E_3\\
&-2c_1\left(\frac{n\phi_1}{R}+\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right)\left(\frac{n\phi_1}{R}+\frac{2n}{R}\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right)E_4\Bigg]dx
\end{aligned} \tag{20}$$

مولفه چهارم(D):

$$\begin{aligned}
D=\frac{\pi}{2(1+\nu)}\int_0^L\Bigg[&\left(\frac{nw_0}{R}+\phi_2-\frac{v_0}{R}\right)^2E_0+\left(\frac{\phi_2}{R}\right)^2E_2\\
&+9c_1^2\left(\phi_2+\frac{nw_0}{R}\right)^2E_4\\
&+\left(\frac{c_1}{R}\right)^2\left(\phi_2+\frac{nw_0}{R}\right)^2E_6\\
&-2\left(\frac{\phi_2}{R}\right)\left(\frac{nw_0}{R}+\phi_2-\frac{v_0}{R}\right)E_1\\
&-6c_1\left(\frac{nw_0}{R}+\phi_2-\frac{v_0}{R}\right)\left(\phi_2+\frac{nw_0}{R}\right)E_2\\
&-\frac{2c_1}{R}\left(\frac{nw_0}{R}+\phi_2-\frac{v_0}{R}\right)\left(\phi_2+\frac{nw_0}{R}\right)E_3\\
&+\frac{6c_1}{R}\phi_2\left(\phi_2+\frac{nw_0}{R}\right)E_3+\frac{2c_1}{R^2}\phi_2\left(\phi_2+\frac{nw_0}{R}\right)E_4\\
&+\frac{6c_1^2}{R}\left(\phi_2+\frac{nw_0}{R}\right)^2E_5\Bigg]dx
\end{aligned} \tag{21}$$

مولفه پنجم(E):

$$E=\int_0^L\frac{\pi}{2(1+\nu)}\left[(w_0+\phi_1)^2(E_0+9c_1^2E_4-6c_1E_2)\right]dx \tag{22}$$

با جایگذاری روابط (18) تا (22) در رابطه انرژی پتانسیل (15) خواهیم داشت:

$$U=A+B+C+D+E \tag{23}$$

5-2- انرژی کرنشی رینگ تقویتی

مطابق شکل2 فرض می‌کنیم یک رینگ تقویتی در فاصله a_fL از یک سمت پوسته استوانه‌ای تابعی قرار دارد. با استفاده از تئوری اویلر- برنولی انرژی کرنشی در رینگ تقویتی به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
U_s=\frac{EI_z}{2}\int_0^sX_1^2d_s+\frac{EI_x}{2}\int_0^sX_2^2d_s+\frac{EA}{2}\int_0^s\varepsilon_s^2d_s\\
+\frac{GC_r}{2}\int_0^s\phi^2ds
\end{aligned} \tag{24}$$

که در معادله بالا داریم:

$$X_1=-\frac{1}{R+e}\left(\frac{\partial w_s}{\partial x}+\frac{\partial^2u_s}{\partial\theta^2}\right),\qquad X_2=\frac{1}{(R+e)^2}\left(w_s+\frac{\partial^2w_s}{\partial\theta^2}\right)$$
$$\varepsilon_s=\frac{1}{R+e}\left(\frac{\partial v_s}{\partial\theta}-w_s\right),$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.7.32.4]

$$\phi = \frac{1}{R+e}\left(-\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial\theta}+\frac{1}{R+e_k}\frac{\partial u_s}{\partial\theta}\right) \tag{25}$$

میدان جابجایی برای رینگ تقویتی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$u_s = u_s^0 + e\frac{\partial w_s^0}{\partial x}$$
$$v_s = v_s^0\left(1+\frac{e}{R}\right)+\frac{e}{R}\frac{\partial w_s^0}{\partial\theta}, \quad w_s = w_s^0 \tag{26}$$

که در معادله (26) روابط (w_s, v_s, u_s) به ترتیب جابجایی رینگ تقویتی در راستاهای (r,θ,x) و (w_s^0, v_s^0, u_s^0) جابجایی نقطه متناظر در پوسته استوانه‌ای تابعی می‌باشد. همچنین ممان اینرسی و مساحت سطح مقطع رینگ حول محورهای (x,z) به شرح زیر می‌باشد:

$$I_r = I_z = \frac{b^3 d}{12}, I_x = \frac{d^3 b}{12}, A = bd, e = \frac{h+d}{2}, R_s = \frac{1}{(R+e)} \tag{27}$$

و ممان اینرسی قطبی رینگ به شرح زیر می‌باشد:

$$J_r = \frac{1}{3}\left(1-\frac{192b}{\pi^5 d}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^5}\tanh\frac{n\pi d}{2b}\right)b^3 d \tag{28}$$

پس از جایگزینی رابطه (25) در رابطه (24) انرژی کرنشی در رینگ تقویتی به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$U_S = \int_0^{2\pi}\frac{EI_zR_s}{2}\left(\frac{\partial w_s^0}{\partial x}+R_s\frac{\partial^2 u_s^0}{\partial\theta^2}\right)^2+\frac{EI_xR_s^3}{2}\left(w_s^0+\frac{\partial^2 w_s^0}{\partial\theta^2}\right)^2 + \frac{EAR_s}{2}\left(\frac{\partial v_s^0}{\partial\theta}-w_s^0\right)^2 + \frac{GJ_r}{2}R_s\left(-\frac{\partial^2 w_s^0}{\partial x\partial\theta}+R_s\frac{\partial u_s^0}{\partial\theta}\right)^2 d\theta \tag{29}$$

برای ساده سازی معادله (29) فرض زیر در نظر گرفته می‌شود [24]:

$$u_s^0(x,\theta) = u_s^0(x)\sin(n\theta), \quad v_s^0(x,\theta) = v_s^0(x)\cos(n\theta)$$
$$w_s^0(x,\theta) = w_s^0(x)\sin(n\theta) \tag{30}$$

با جایگزینی معادله (30) در معادله (29) و انتگرال‌گیری انرژی کرنشی در رینگ تقویتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_S = \frac{EI_zR_s\pi}{2}\left[\left(\frac{\partial w_s^0}{\partial x}\right)^2+n^4{R_s}^2(u_s^0)^2-2n^2R_su_s^0\left(\frac{\partial w_s^0}{\partial x}\right)\right] + \frac{EI_xR_s^3\pi}{2}\left[(n^2-1)^2(w_s^0)^2\right] + \frac{EAR_s\pi}{2}\left[n^2(v_s^0)^2+(w_s^0)^2+2nv_s^0w_s^0\right] + \frac{GJ\pi}{2}R_s\left[n^2\left(\frac{\partial w_s^0}{\partial x}\right)^2+n^2{R_s}^2(u_s^0)^2 - 2n^2R_su_s^0\left(\frac{\partial w_s^0}{\partial x}\right)\right] \tag{31}$$

5-3- انرژی پتانسیل ناشی از فشار محوری و جانبی

انرژی پتانسیل چرخشی متقارن ناشی از فشار جانبی $q(x)$ و فشار محوری یکنواخت انتهایی p بصورت زیر بدست می‌آید:

$$V = -\int_0^L\int_0^{2\pi}\frac{q(x)}{2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+w\right]w d_\theta d_x - \frac{\beta p}{4}\int_0^L\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 R^2 d\theta dx \tag{32}$$

با جایگزینی روابط (17) در معادله (32) و ساده‌سازی روابط حاصل داریم:

$$V = -\int_0^L\frac{\pi q(x)}{2}(1-n^2)(w_0)^2 d_x - \frac{\pi\beta p}{4}\int_0^L R^2\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 dx \tag{33}$$

در نهایت انرژی پتانسیل کل برای کمانش یک پوسته استوانه‌ای تابعی تقویتی با بار یکنواخت محوری و جانبی بصورت زیر می‌باشد:

$$F = U + U_s + V \tag{34}$$

6- معادله مشخصه حاکم

به علت امکان ترکیبات متفاوت قیود در فواصل سطحی اجزاء (u,v) شرایط مرزی مسئله مطابق جدول1 از نوع گیردار و آزاد می باشد. چهار نوع شرایط مرزی گیردار را به صورت زیر خواهیم داشت [29]:

$$C1: w = \frac{dw}{dx} = v = 0, \quad C2: w = \frac{dw}{dx} = 0$$
$$C2: w = \frac{dw}{dx} = u = 0, \quad C4: w = \frac{dw}{dx} = u = v = 0 \tag{35}$$

در این تحقیق، از روش تحلیلی ریلی ریتز برای حل معادلات کمانش استفاده شده است. برای حل تحلیلی از معادلات به دست آمده در راستای ضخامت پوسته انتگرال خواهیم گرفت و در نهایت به یک سیستم معادلات خطی همگن دست خواهیم یافت. معادلات مشخصه حاکم با استفاده از روش ریتز با توجه به شرایط مرزی به صورت زیر برای پوسته اختیار شده است:

$$u = \left(\sum_{i=1}^{M}c_i x^{(i-1)}\right)(x)^{\Omega_u^o}(1-x)^{\Omega_u^L} = \sum_{i=1}^{M}c_i u_i$$
$$v = \left(\sum_{i=1}^{M}d_i x^{(i-1)}\right)(x)^{\Omega_v^o}(1-x)^{\Omega_v^L} = \sum_{i=1}^{M}d_i \bar{v}$$
$$w = \left(\sum_{i=1}^{M}e_i x^{(i-1)}\right)(x)^{\Omega_w^o}(1-x)^{\Omega_w^L} = \sum_{i=1}^{M}e_i w_i$$
$$\phi_1 = \left(\sum_{i=1}^{M}f_i x^{(i-1)}\right)(x)^{\Omega^o_{\phi_1}}(1-x)^{\Omega^L_{\phi_1}} = \sum_{i=1}^{M}f_i {\phi_1}_i$$
$$\phi_2 = \left(\sum_{i=1}^{M}g_i x^{(i-1)}\right)(x)^{\Omega^o_{\phi_1}}(1-x)^{\Omega^L_{\phi_1}} = \sum_{i=1}^{M}g_i {\phi_2}_i$$
$$u_s = \left(\sum_{i=1}^{M}c_i x^{(i-1)}\right)(x)^{\Omega_u^o}(1-x)^{\Omega_u^L} = \sum_{i=1}^{M}c_i u_{si}$$
$$v_s = \left(\sum_{i=1}^{M}c_i x^{(i-1)}\right)(x)^{\Omega_v^o}(1-x)^{\Omega_v^L} = \sum_{i=1}^{M}c_i v_{si}$$
$$w_s = \left(\sum_{i=1}^{M}c_i x^{(i-1)}\right)(x)^{\Omega_w^o}(1-x)^{\Omega_w^L} = \sum_{i=1}^{M}c_i w_{si} \tag{36}$$

در این روابط c_i، d_i، e_i، f_i و g_i ضرایب مجهول ریتز، M عدد ترم چند جمله‌ای بوده و Ω_u^o به شرایط مرزی پوسته استوانه‌ای در $x=0$ و Ω_u^L به شرایط مرزی پوسته استوانه‌ای در $x=L$ اشاره دارد.

جدول 1 مقادیر Ω_u^o و Ω_u^L برای شرایط مرزی آزاد و گیردار در پوسته

Table 1 Values of Ω_u^o and Ω_u^L for free and clamped boundary conditions in the shell

C4	C3	C2	C1	F	شرایط مرزی
1	1	0	0	0	Ω_u
1	0	0	1	0	Ω_v
2	2	2	2	0	Ω_w
1	1	0	0	0	Ω_{ϕ_1}
1	0	0	1	0	Ω_{ϕ_2}

اکنون از انرژی پتانسیل کل نسبت به ضرایب به کار رفته در معادلات مشخصه بصورت زیر مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial F}{\partial c_i}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial d_i}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial e_i}=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial f_i}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial g_i}=0\qquad i=1,2,\ldots\ldots,M \tag{37}$$

حال با جایگذاری مقادیر مشخصه (36) در انرژی پتانسیل کل (34) و مشتق‌گیری مطابق رابطه (37) به محاسبه تک تک مولفه‌های انرژی پتانسیل کل پوسته می‌پردازیم. در ابتدا با مشتق گرفتن از معادله کلی انرژی پوسته (34) برحسب ضریب c_i مولفه اول معادلات مشخصه بدست می‌آید:

$$\frac{\partial F}{\partial c_i}=0 \tag{38}$$

برای مولفه اول انرژی پتانسیل پوسته داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial c_i}=\frac{\pi}{1-\nu^2}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L\Bigg[&2c_i\left(\frac{du_i}{dx}\right)^2E_0+2f_i\left(\frac{du_i}{dx}\right)\left(\frac{d\phi_{1i}}{dx}\right)E_1\\&-2c_1\left(\frac{du_i}{dx}\right)\left[f_i\left(\frac{d\phi_{1i}}{dx}\right)+e_i\left(\frac{d^2w_i}{dx^2}\right)\right]E_3\\&+\frac{\nu}{R}\left(\frac{du_i}{dx}\right)(-nd_iv_i+e_iw_i)E_0\\&-\frac{\nu ng_i}{R}\left(\frac{du_i}{dx}\right)(\phi_{2i})E_1\\&+\frac{\nu c_1}{R}\left(\frac{du_i}{dx}\right)\left(ng_i\phi_{2i}+\frac{n^2}{R}e_iw_i\right)E_3\end{aligned} \tag{39}$$

برای مولفه دوم انرژی پتانسیل پوسته داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial c_i}=\frac{\pi}{1-\nu^2}\int_0^L\sum_{i=1}^{M}\Bigg[&\frac{\nu}{R}\left(\frac{du_i}{dx}\right)(-nd_iv_i+e_iw_i)E_0\\&-\frac{\nu n}{R}g_i\phi_{2i}\left(\frac{du_i}{dx}\right)E_1+\frac{\nu c_1}{R}\left(\frac{du_i}{dx}\right)\Bigg(ng_i\phi_{2i}\\&+\frac{n^2}{R}e_iw_i\Bigg)E_3\Bigg]dx\end{aligned} \tag{40}$$

برای مولفه سوم انرژی پتانسیل پوسته داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial c_i}=\frac{\pi}{2(1+\nu)}\int_0^L\sum_{i=1}^{M}\Bigg[&\left[\frac{2n^2}{R^2}c_i(u_i)^2+\frac{2n}{R}d_iu_i\left(\frac{dv_i}{dx}\right)\right]E_0\\&+\left[\frac{2n^2}{R^2}f_iu_i\phi_{1i}E_1+\frac{2n}{R}g_iu_i\left(\frac{d\phi_{2i}}{dx}\right)\right]\\&-\left[\frac{2n^2c_1}{R^2}f_iu_i\phi_{1i}+\frac{4n^2c_1}{R^2}e_iu_i\left(\frac{dw_i}{dx}\right)\right.\\&\left.+\frac{2nc_1}{R}g_iu_i\left(\frac{d\phi_{2i}}{dx}\right)\right]E_3\Bigg]dx\end{aligned} \tag{41}$$

برای مولفه انرژی پتانسل رینگ تقویتی داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_S}{\partial c_i}=\sum_{i=1}^{M}EI_zR_s\pi&\left[n^4{R_s}^2c_i(u_{is})^2-2n^2R_se_iu_{is}\left(\frac{dw_{is}}{dx}\right)\right]\\&+GJ\pi n^2\left[{R_s}^3c_i(u_{is})^2-{R_s}^2u_{is}e_i\frac{dw_{is}}{dx}\right]\end{aligned} \tag{42}$$

با مشتق گرفتن از معادله انرژی پتانسیل کل(34) برحسب ضریب d_iمولفه اول معادلات مشخصه بدست می‌آید:

$$\frac{\partial F}{\partial d_i}=0 \tag{43}$$

برای مولفه اول انرژی پتانسیل پوسته داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial d_i}=\frac{\pi}{1-\nu^2}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L\Bigg[&-\frac{\nu n}{R}c_iv_i\left(\frac{du_i}{dx}\right)E_0-\frac{\nu n}{R}f_iv_i\left(\frac{d\phi_{1i}}{dx}\right)E_1\\&+\left[\frac{\nu nc_1}{R}f_i\left(\frac{d\phi_{1i}}{dx}\right)\right.\\&\left.+\frac{\nu nc_1}{R}v_ie_i\left(\frac{d^2w_i}{dx^2}\right)\right]E_3\Bigg]dx\end{aligned} \tag{44}$$

برای مولفه دوم انرژی پتانسیل پوسته داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial d_i}=\frac{\pi}{1-\nu^2}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L\Bigg[&\left[\frac{2n^2}{R^2}d_i(v_i)^2-\frac{2n}{R^2}e_iv_iw_i\right]E_0\\&+\frac{2n^2}{R^2}v_ig_i\phi_{2i}E_1-\frac{2n^2c_1}{R^2}v_ig_i\phi_{2i}E_3\\&-\frac{2n^3c_1}{R^3}v_ie_iw_iE_3-\frac{\nu n}{R}c_iv_i\left(\frac{du_i}{dx}\right)E_0\\&-\frac{\nu n}{R}v_if_i\left(\frac{d\phi_{1i}}{dx}\right)E_1\\&+\frac{\nu c_1n}{R}f_iv_i\left(\frac{d\phi_{1i}}{dx}\right)E_3\\&+\frac{\nu c_1n}{R}v_ie_i\left(\frac{d^2w_i}{dx^2}\right)E_3\Bigg]dx\end{aligned} \tag{45}$$

برای مولفه سوم انرژی پتانسیل پوسته داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial d_i}=\frac{\pi}{2(1+\nu)}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L\Bigg[&\left[2d_i\left(\frac{dv_i}{dx}\right)^2+\frac{2n}{R}c_iu_i\left(\frac{dv_i}{dx}\right)\right]E_0\\&+\left[\frac{2n}{R}f_i\phi_{1i}\left(\frac{dv_i}{dx}\right)+2g_i\left(\frac{d\phi_{2i}}{dx}\right)\left(\frac{dv_i}{dx}\right)\right]E_1\\&-\left[\frac{2nc_1}{R}f_i\phi_{1i}\left(\frac{dv_i}{dx}\right)\right.\\&+\frac{4nc_1}{R}e_i\left(\frac{dv_i}{dx}\right)\left(\frac{dw_i}{dx}\right)\\&\left.+2c_1g_i\left(\frac{dv_i}{dx}\right)\left(\frac{d\phi_{2i}}{dx}\right)\right]E_3\Bigg]dx\end{aligned} \tag{46}$$

برای مولفه چهارم انرژی پتانسیل پوسته داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial d_i}=\frac{\pi}{2(1+\nu)}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L\Bigg[&\left(\frac{2}{R^2}d_i(v_i)^2-\frac{2n}{R^2}e_iv_iw_i\right.\\&\left.-\frac{2}{R}g_iv_i\phi_{2i}\right)E_0\\&+\left(\frac{2}{R^2}v_ig_i\phi_{2i}\right)E_1+\left(\frac{6c_1}{R}g_iv_i\phi_{2i}\right.\\&\left.+\frac{6nc_1}{R^2}v_ie_iw_i\right)E_2\\&+\left(\frac{2c_1}{R^2}g_iv_i\phi_{2i}+\frac{2nc_1}{R^3}e_iv_iw_i\right)E_3\Bigg]\,dx\end{aligned} \tag{47}$$

برای مولفه انرژی پتانسل رینگ داریم:

$$\frac{\partial U_S}{\partial d_i}=EAR_s\pi[n^2d_i(v_{is})^2+ne_iv_{is}w_{is}] \tag{48}$$

به طور مشابه با مشتق گرفتن از معادله انرژی پتانسیل کل (34) برحسب ضریب e_i، f_i و g_i معادلات مشخصه بدست می‌آید و با فاکتورگیری از ضرایب، معادله مقدار مشخصه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$([K]-\lambda[G])\{C\}=\{0\} \tag{49}$$

در معادله بالا داریم:

$$\{C\}=\{c_i\quad d_i\quad e_i\quad f_i\quad g_i\}^{\mathrm{T}} \tag{50}$$

همچنین ماتریس سختی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$[K] = [k]^c + [k]^s \tag{51}$$

که در رابطه بالا $[k]^c$ ماتریس سختی انرژی پتانسیل پوسته و به شرح زیر می‌باشد. درایه‌های این ماتریس در پیوست الف آورده شده است.

$$[k]^c = \begin{vmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] & [k_{13}] & [k_{14}] & [k_{15}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] & [k_{23}] & [k_{24}] & [k_{25}] \\ [k_{31}] & [k_{32}] & [k_{33}] & [k_{34}] & [k_{35}] \\ [k_{41}] & [k_{42}] & [k_{43}] & [k_{44}] & [k_{45}] \\ [k_{51}] & [k_{52}] & [k_{53}] & [k_{54}] & [k_{55}] \end{vmatrix} \tag{52}$$

ماتریس متقارن سختی مربوط به رینگ تقویتی بصورت زیر است که درایه‌های این ماتریس در پیوست ب آورده شده است.

$$[k]^k = \begin{vmatrix} [k_{11}]^k & 0 & [k_{13}]^k & 0 & 0 \\ 0 & [k_{22}]^k & [k_{23}]^k & 0 & 0 \\ [k_{31}]^k & [k_{32}]^k & [k_{33}]^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{53}$$

برای ماتریس انرژی جنبشی داریم:

$$[G] = -\sum_{i=1}^{M} \left\{ \int_0^L \pi q(x)(1-n^2)(w_i)^2 d_x - \frac{\pi\beta p}{2} \int_0^L R^2 \left(\frac{dw_i}{dx}\right)^2 dx \right\} \tag{54}$$

در نهایت با حل معادله (49) نیروی بحرانی کمانش پوسته استوانه ای تابعی با رینگ تقویتی تحت بارهای یکنواخت محوری و جانبی با استفاده از عامل بار کمانش ارتجاعی $\lambda = pR(1-\nu^2)/Eh$ بدست می‌آید.

7- بحث بر روی نتایج

به منظور درک بهتر رفتار کمانشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی و بررسی صحت روابط تحلیلی ارائه شده، ابتدا هندسه‌ی پوسته در نرم افزار تجاری انسیس[1] نسخه 16.1 مدلسازی شد و تحلیل‌های عددی روی آن انجام گرفت و نتایج حاصل با نتایج تحلیلی مورد مقایسه قرار گرفت. برای این منظور ابتدا در محیط نرم‌افزار، پوسته‌ای با مشخصات هندسی و شرایط بارگذاری زیر مدل‌سازی گردید:

$R = 1\text{m}$, $h = 0.025\text{m}$, $E_c = 200$ GPa, $L_s = 0.5L$, $p = 1$, $b = d = 0.2\text{m}$, $E_m = 70$ GPa, $L = 5\text{m}$, $q(x) = 1$ GPa

با توجه به مدت زمان اجرای شبیه سازی و نزدیکی نتایج، انواع مختلفی از المان‌ها با اندازه‌های متفاوت بررسی شدند و در نهایت المان سه بعدی پوسته با چهار گره[2] انتخاب گردید. با توجه به قابلیتی که نسخه 16.1 نرم‌افزار انسیس دارد نحوه مش‌بندی بصورت اتوماتیک انجام شد تا بهینه‌ترین تعداد مش از نظر دقت نتایج و زمان پردازش انتخاب گردد. پس از اجرای برنامه، نیروهای کمانش در چهار مقدار مختلف R_2/R_1 محاسبه گردید و پس از بی‌بعدسازی طبق رابطه $f = PR_2/\pi E_m h(R_2^2 - R_1^2)$ با نتایج حاصل از حل تحلیلی مورد مقایسه قرار گرفت که در آن R_1 شعاع داخلی و R_2 شعاع خارجی پوسته تابعی می‌باشد. در ادامه تاثیر پارامترهای موثر بر کمانش پوسته تابعی از قبیل ابعاد رینگ، ضخامت پوسته، طول استوانه، نوع تکیه‌گاه، ضریب توانی کسر حجمی و فشار محوری و جانبی بررسی می‌گردد.

در جدول 2 نیروی کمانش بحرانی بی‌بعد f برای شرایط فوق برای تکیه گاه ثابت با استفاده از نرم افزار انسیس و روش تحلیلی با هم مقایسه شده است در این جدول R_1 شعاع داخلی و R_2 شعاع خارجی پوسته تابعی می‌باشد.

[1] ANSYS
[2] Shell 3D 4node 181

جدول 2 مقایسه نیروی کمانش بحرانی بی بعد $f = PR_2/\pi E_m h(R_2^2 - R_1^2)$ با استفاده از نرم افزارانسیس و روش تحلیلی

Table 2 Comparison of critical buckling force $f = PR_2/\pi E_m h(R_2^2 - R_1^2)$ with the using ANSYS software and numerical method

$R = 1\text{m}, h = 0.025\text{m}, E_c = 200\text{ GPa}, L_s = 0.5L, p = 1, b = d = 0.2\text{m}$
$E_m = 70\text{ GPa}, L = 5\text{m}, q(x) = 1\text{ GPa}$

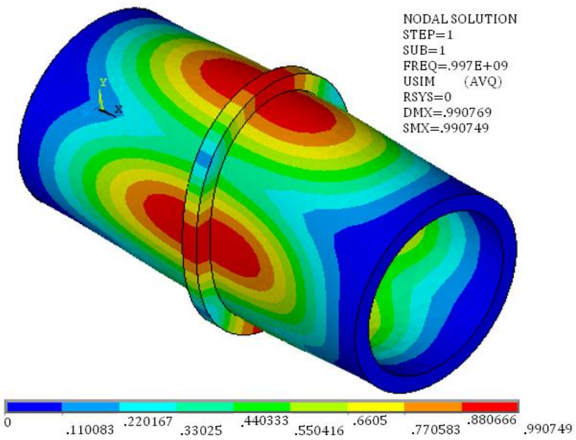
R_2/R_1	انسیس	حل تحلیلی
1.05	12.2479	11.3197
1.10	6.1797	5.7433
1.15	4.1528	3.8921
1.20	3.2171	2.9651

نتایج این جدول نشان می‌دهد همگرایی خوبی بین نتایج دو روش حل وجود دارد. علت درصد اختلاف حاصل از حل تحلیلی نسبت به نتایج تحلیل نرم افزار در مدل کردن رینگ تقویتی نسبت به پوسته می باشد. در مدل تحلیلی جابجایی رینگ بر اساس جابجایی سطح خارجی پوسته تعریف شده است در حالی که در نرم افزار انسیس این جابجایی بر اساس جابجایی سطح میانی پوسته می باشد. شکل4 تغییر شکل حاصل از اعمال بار محوری و جانبی بر پوسته استوانه ای تابعی تقویتی را برای چهار مود اول نشان می‌دهد.

شکل 5 تأثیر تغییرات عرض رینگ تقویتی تابعی بر بار بحرانی بی‌بعد کمانش برای حالت تکیه‌گاه گیردار-گیردارار نشان می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش هر یک از ابعاد رینگ تقویتی میزان بار بحرانی کمانش بیشتر می‌شود که این نتیجه کاملاً منطقی است چون با افزایش ابعاد رینگ تقویتی میزان انحراف پوسته استوانه‌ای تابعی با بار محوری و جانبی کمتر شده و فشار کمانش بحرانی افزایش می‌یابد. همچنین افزایش بار بحرانی بی‌بعد کمانش پوسته استوانه‌ای تابعی از عرض رینگ 0.2m به بعد با شیب تندتری اتفاق می‌افتد.

تاثیر تغییرات ضخامت پوسته استوانه ای تقویتی تابعی با بار محوری و جانبی بر فشار بحرانی کمانش را می توان در شکل6 مشاهده کرد. شرایط مرزی استفاده شده در این شکل گیردار-گیردار می باشد. مقادیر مختلف توان کسر حجمی مورد استفاده در مواد تابعی به ترتیب $p = 0, 1, 2, 5, 10$ می‌باشند.

نتایج در این شکل نشان می‌دهد که برای هر ترکیبی از مواد مدرج تابعی، با افزایش ضخامت پوسته استوانه‌ای تقویتی با بار محوری و جانبی مقدار بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد. همچنین برای ضخامت ثابت، پوسته فلزی نسبت به پوسته از جنس مواد تابعی کمترین بار بحرانی را دارد و با



مود اول کمانش

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.7.32.4]

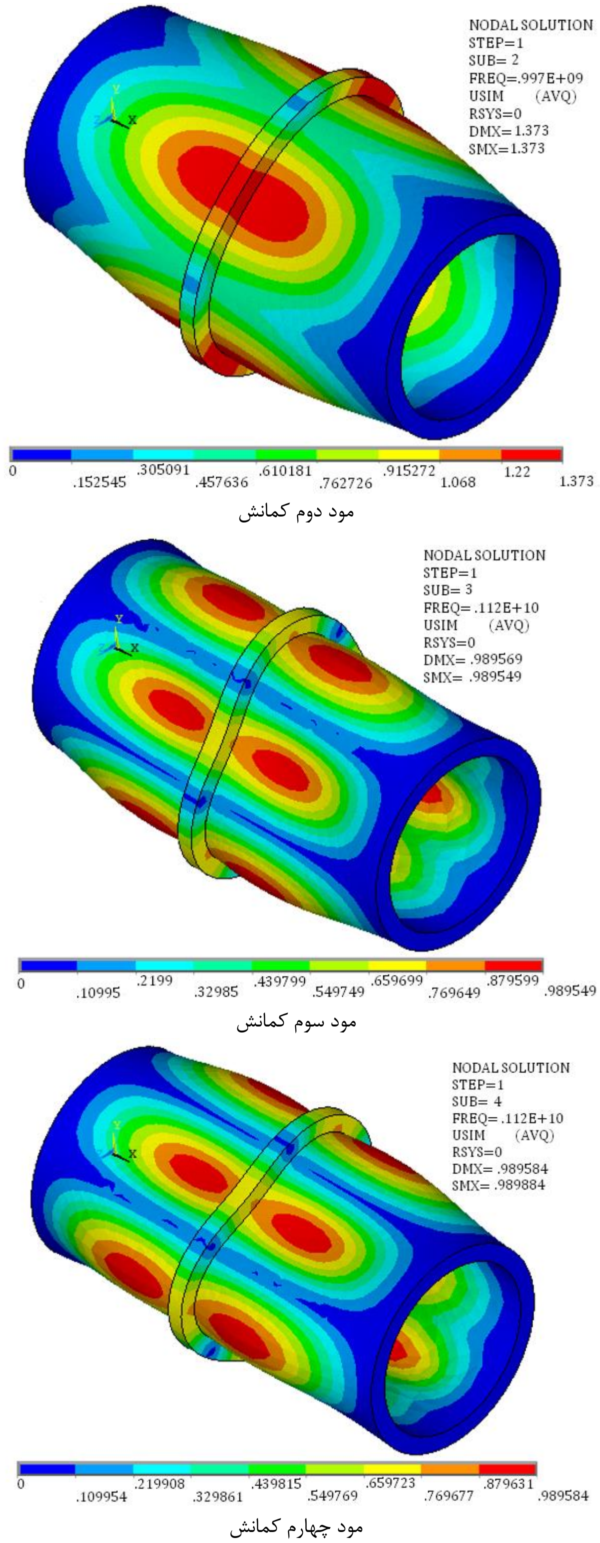


Fig. 4 variations of four primary mode of FGM cylindrical shell supported under axial load and lateral pressure

شکل 4 تغییرات چهار مود اول پوسته استوانه‌ای تابعی تقویتی تحت بار محوری و فشار جانبی

افزایش کسر حجمی که منجر به افزایش میزان سرامیک می‌شود بار بحرانی افزایش می‌یابد. به عبارتی پوسته از جنس مواد تابعی در وضعیت کمانش استحکام بیشتری نسبت به پوسته فلزی دارد.

در جدول 3 تأثیر تغییرات نسبت طول استوانه بر ضخامت روی فشار

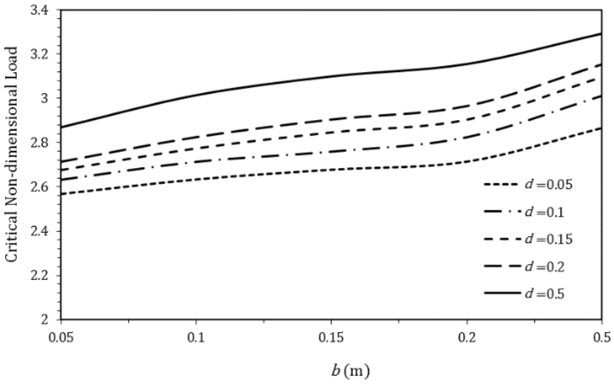


Fig. 5 Effects of variations the width of FGM ring support on critical buckling pressure

شکل 5 تأثیر تغییرات عرض رینگ تقویتی تابعی بر فشار کمانش بحرانی

$R = 1\text{m}, h = 0.025\text{m}, E_c = 380$ GPa$, L_s = 0.5L, p = 1, E_m = 70$ GPa,
$L = 5\text{m}, q(x) = 1$ GPa

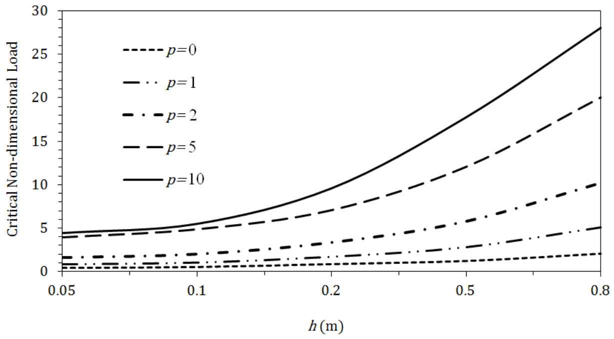


Fig. 6 Effects of variations the thickness of FGM cylindrical shell supported on critical buckling pressure for different volume fractions

شکل 6 تأثیر تغییرات ضخامت پوسته استوانه‌ای تابعی تقویتی بر فشار کمانش بحرانی برای کسر حجمی مختلف

$R = 1\text{m}, L_s = 0.5\text{L}, E_c = 380$ GPa$, q(x) = 1$ GPa$, b = d = 0.2\text{m},$
$E_m = 70$ GPa
$L = 5\text{m}$

بحرانی کمانش برای توان‌های مختلف کسر حجمی در حالت تکیه گاه دو سرگیردار نشان داده شده است. نتایج این جدول نشان می‌دهد که با افزایش نسبت طول بر ضخامت پوسته استوانه‌ای تقویتی تابعی با بار محوری و جانبی، بار بحرانی کمانش برای تمام مقادیر توان کسر حجمی کاهش می‌یابد و برای مقادیر بزرگ L/R مقدار ثابتی به خود می‌گیرد.

شکل7 تأثیر دو نوع شرایط تکیه‌گاهی مختلف در دو سر پوسته استوانه‌ای تقویتی تابعی با بار محوری و جانبی بر فشار بحرانی کمانش را برای توان‌های مختلف کسر حجمی نشان می‌دهد. این شکل برای شرایط مـــرزی

جدول 3 تأثیر تغییرات نسبت طول بر ضخامت پوسته استوانه‌ای تقویتی تابعی بر فشار بحرانی کمانش بر حسب توان‌های مختلف کسر حجمی

Table 3 Effects of variations length to thickness ratios of FGM cylindrical shell supported on critical buckling pressure for different volume fractions

$R_2/R_1 = 1.3, E_c = 380$ GPa$, q(x) = 1$ GPa$, b = d = 0.2\text{m},$
$E_m = 70$ GPa

Different volume fraction (p)							
10	5	2	1	0.5	0.1	0	L/R
15.263	14.285	11.325	8.954	6.358	3.921	3.177	1
12.213	12.683	9.031	7.112	5.004	3.026	2.443	5
12.168	12.216	8.997	7.085	4.984	3.018	2.431	10
12.157	11.389	8.989	7.078	4.979	3.009	2.428	20
12.155	11.369	8.988	7.077	4.978	3.008	2.428	30

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.7.32.4]

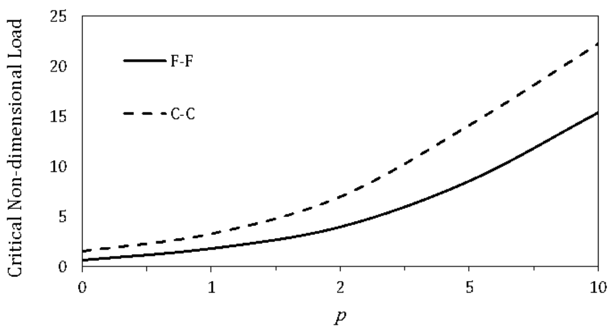


Fig. 7 Effects of combination the functionally graded material cylindrical shell supported on critical buckling pressure for different boundary conditions

شکل 7 تأثیر ترکیب ماده تابعی پوسته استوانه‌ای تقویتی بر فشار کمانش بحرانی برای شرایط مرزی مختلف

$R_2/R_1 = 1.3, E_c = 380\text{GPa}, q(x) = 1\text{GPa}, b = d = 0.2\text{m},$
$E_m = 70\text{GPa}$
$h = 0.05\text{m}$

آزاد-آزاد (F − F) و گیردار-گیردار (C-C) بدست آمده است.

نتایج نشان می‌دهد برای هر دو نوع تکیه‌گاه مختلف با افزایش مقدار کسر حجمی، بار بحرانی کمانش پوسته استوانه‌ای تقویتی تابعی با بار محوری و جانبی افزایش می‌یابد. نتایج همچنین نشان می‌دهد که ترکیب ماده تابعی روی بار بحرانی کمانش اثر می گذارد و این اثر برای شرایط مرزی مختلف متفاوت است به طوری که مقادیر بحرانی بار کمانش برای تکیه‌گاه دو سر گیردار دارای بیشترین مقدار است.

تاثیر محل نصب رینگ تقویتی بر فشار بحرانی کمانش پوسته استوانه‌ای تابعی در حالت‌های مختلف تکیه‌گاهی را می توان در شکل8 مشاهده کرد. این شکل برای شرایط مرزی آزاد-آزاد (F-F) و گیردار-گیردار (C-C) بدست آمده است. موقعیت رینگ تقویتی در طول پوسته استوانه‌ای تابعی بسیار حائز اهمیت است و روی بار بحرانی کمانش تاثیر می گذارد. همانطور که در شکل نشان داده شده است به ازای شرایط مرزی آزاد-آزاد و گیردار-گیردار بار بحرانی کمانش حول مرکز پوسته استوانه‌ای تابعی با بار محوری و جانبی متقارن خواهد بود. در این پوسته استوانه‌ای تابعی با بار محوری و جانبی با شرایط مرزی یکسان در دو طرف، وقتی رینگ در انتهای دو سر پوسته استوانه‌ای قرار می‌گیرد پوسته دارای بیشترین مقدار بار بحرانی کمانش است و با جابجایی آن به وسط پوسته استوانه‌ای تابعی بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد و در نهایت در وسط پوسته استوانه‌ای تابعی به کمترین مقدار خود می‌رسد. این موضوع به این دلیل می‌تواند باشد که وجود رینگ در انتهای پوسته به منزله دیوار صلب عمل کرده و طول پوسته کمتر شده و نهایتاً بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد. نتایج همچنین نشان می‌دهد که بار بحرانی کمانش با موقعیت رینگ تقویتی واقع شده در نقاط مختلف پوسته استوانه‌ای تابعی با بار محوری و جانبی برای شرایط مرزی مختلف متفاوت می‌باشد.

در شکل9 تأثیر تغییرات فشار جانبی پوسته استوانه‌ای تقویتی تابعی روی فشار بحرانی کمانش برای تکیه‌گاه‌های مختلف نمایش داده شده است. این شکل برای شرایط مرزی آزاد-آزاد (F-F) و گیردار-گیردار (C-C) بدست آمده است. در این شکل برای هر دو نوع تکیه‌گاه مذکور، افزایش فشار جانبی پوسته استوانه‌ای تقویتی از جنس مواد تابعی منجر به کاهش بار بحرانی کمانش آن می شود.

8- نتیجه گیری

در این تحقیق رفتار کمانشی پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم از جنس مواد

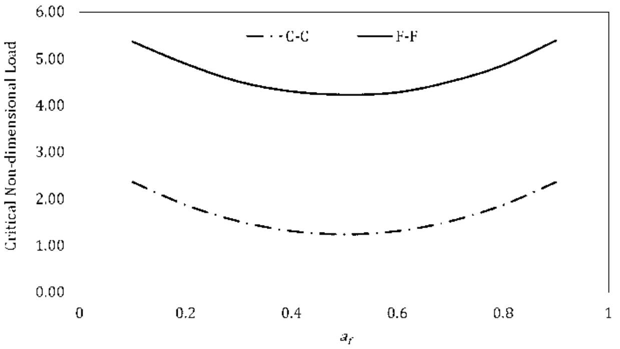


Fig. 8 Effects of ring support position on critical buckling pressure for different boundary conditions

شکل 8 تأثیر موقعیت رینگ تقویتی بر فشار کمانش بحرانی برای شرایط مرزی مختلف

$R_2/R_1 = 1.3, E_c = 380\text{GPa}, q(x) = 1\text{GPa}, b = d = 0.2\text{m},$
$E_m = 70\text{GPa}$
$h = 0.05\text{m}, p = 1$

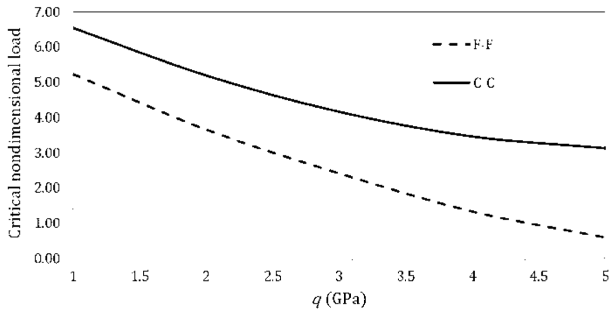


Fig. 9 Effects of variations the lateral pressure on critical buckling pressure for different boundary conditions

شکل 9 تأثیر تغییرات فشار جانبی بر فشار کمانش بحرانی برای شرایط مرزی مختلف

$R_2/R_1 = 1.3, E_c = 380\text{GPa}, q(x) = 1\text{GPa}, b = d = 0.2\text{m},$
$E_m = 70\text{GPa}$
$h = 0.05\text{m}, p = 1$

تابعی با رینگ تقویتی تحت بارگذاری محوری و جانبی مورد بررسی قرار گرفت. خواص مواد مدرج تابعی در جهت ضخامت به صورت درجه‌ای مطابق با قانون توزیع کسر حجمی می باشد. در ابتدا معادلات حاکم بر کمانش پوسته استوانه‌ای تقویتی تابعی با بارهای محوری و جانبی بر اساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی و روش انرژی محاسبه گردید و پس از جایگذاری در رابطه انرژی پتانسیل کل، توابع ریتز بر آنها اعمال شد و معادلات مشخصه بدست آمد. سپس با حل معادلات مشخصه نیروی بحرانی کمانش پوسته استوانه‌ای تقویتی تابعی با بارهای محوری و جانبی محاسبه گردید. در ادامه به منظور حصول اطمینان از روش حل تحلیلی ارائه شده، نتایج این تحقیق با نتایج به دست آمده از نرم‌افزار المان محدود مقایسه شد که سازگاری مناسبی را نشان داد.

در این تحقیق، برخلاف بسیاری از پژوهش‌ها، فشار جانبی و محل رینگ ثابت در نظر گرفته نشده و در نتایج ارائه شده اثر تغییرات این دو پارامتر روی نیروی بحرانی کمانش نیز با جزئیات تفسیر شده است. همچنین اثر شرایط مرزی مختلف (دو سر آزاد و دو سرگیردار) روی نیروی بحرانی کمانش مورد بررسی قرار گرفته است.

در نهایت تأثیر عوامل مختلفی از جمله تغییرات ضخامت، شرایط مرزی، شرایط بارگذاری و پارامترهای هندسی روی رفتار کمانشی پوسته‌های جدار ضخیم مورد بررسی قرار گرفت. همچنین پارامترهای هندسی رینگ تقویت کننده بر کمانش بحرانی بررسی شد. برخی از نتایج این تحقیق به صورت زیر

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.7.32.4]

ارائه می گردد.

1- بار بحرانی کمانش برای پوسته از جنس مواد مدرج تابعی بیشتر از پوسته از جنس مواد همگن می‌باشد.

2- با افزایش ضخامت پوسته، بار بحرانی کمانش برای تمام مقادیر توان کسر حجمی افزایش می‌یابد.

3- با افزایش طول پوسته بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد و برای مقادیر بزرگ طول پوسته، بار بحرانی کمانش به مقدار ثابتی همگرا می‌شود.

4- با افزایش هریک از ابعاد رینگ تقویتی میزان بار بحرانی کمانش بیشتر می‌شود.

5- با افزایش توان کسر حجمی بار بحرانی کمانش بیشتر می‌شود، به عبارتی فلز خالص کمترین و سرامیک خالص بیشترین بار بحرانی کمانش را دارا می‌باشند.

6- بار بحرانی کمانش برای تکیه‌گاه گیردار بیشترین و برای تکیه‌گاه آزاد کمترین مقدار می‌باشد. همچنین در دو نوع تکیه‌گاه با افزایش کسر حجمی میزان بار بحرانی افزایش می‌یابد.

7- محل قرارگیری رینگ تقویتی در هر یک از دو سر استوانه دارای بیشترین مقدار بار بحرانی کمانش و در وسط پوسته کمترین مقدار بار بحرانی کمانش را نصیب پوسته می‌کند.

8- افزایش فشار جانبی پوسته منجر به کاهش بار بحرانی کمانش می‌شود.

9- پیوست ها

9-1- پیوست الف

درایه‌های ماتریس رابطه (52) بصورت زیر است:

$$[k_{11}] = \frac{\pi}{1-\nu^2}\int_0^L \sum_{i=1}^{M} \left[2\left(\frac{du_i}{dx}\right)^2 E_0\right] dx + \frac{\pi}{2(1+\nu)}\int_0^L \sum_{i=1}^{M} \left[\left[\frac{2n^2}{R^2}(u_i)^2\right] E_0\right] dx$$

(الف-1)

$$[k_{12}] = \frac{\pi}{1-\nu^2}\int_0^L \sum_{i=1}^{M} \left[-\frac{2\nu n}{R} v_i \left(\frac{du_i}{dx}\right) E_0\right] dx + \frac{\pi}{2(1+\nu)}\int_0^L \sum_{i=1}^{M} \left[\left[\frac{2n}{R} u_i \left(\frac{dv_i}{dx}\right)\right] E_0\right] dx$$

(الف-2)

$$[k_{13}] = \frac{\pi}{1-\nu^2}\int_0^L \sum_{i=1}^{M} \left[-2c_1\left(\frac{du_i}{dx}\right)\left(\frac{d^2w_i}{dx^2}\right) E_3 + \frac{2\nu}{R}\left(E_0 + \frac{n^2c_1}{R}E_3\right) w_i \left(\frac{du_i}{dx}\right)\right] dx - \frac{\pi}{2(1+\nu)}\int_0^L \sum_{i=1}^{M} \left[\frac{4n^2c_1}{R^2} u_i \left(\frac{dw_i}{dx}\right) E_3\right] dx$$

(الف-3)

$$[k_{14}] = \frac{\pi}{1-\nu^2}\int_0^L \sum_{i=1}^{M} \left[2(E_1 - c_1E_3)\left(\frac{du_i}{dx}\right)\left(\frac{d\phi_{1_i}}{dx}\right)\right] dx + \frac{\pi}{2(1+\nu)}\int_0^L \sum_{i=1}^{M} \left[\frac{2n^2}{R^2}(E_1 - c_1E_3) u_i \phi_{1_i}\right] dx$$

(الف-4)

$$[k_{15}] = \frac{\pi}{1-\nu^2}\int_0^L \sum_{i=1}^{M} \left[\frac{2\nu n}{R}(c_1E_3 - E_1)\phi_{2_i}\left(\frac{du_i}{dx}\right)\right] dx + \frac{\pi}{2(1+\nu)}\int_0^L \sum_{i=1}^{M} \left[\frac{2n}{R}(E_1 - c_1E_3)u_i\left(\frac{d\phi_{2_i}}{dx}\right)\right] dx$$

(الف-5)

$$[k_{22}] = \frac{\pi}{1-\nu^2}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L \left[\left[\frac{2n^2}{R^2}(v_i)^2\right] E_0\right] dx + \frac{\pi}{2(1+\nu)}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L \left[\left[2\left(\frac{dv_i}{dx}\right)^2\right] E_0 + \left[\frac{2}{R^2}(v_i)^2\right] E_0\right] dx$$

(الف-6)

$$[k_{23}] = \frac{\pi}{1-\nu^2}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L \left[\left[\frac{2\nu n c_1}{R} v_i \left(\frac{d^2w_i}{dx^2}\right)\right] E_3 - \frac{2n}{R^2}\left[E_0 + \frac{n^2c_1}{R}E_3\right] v_i w_i\right] dx + \frac{\pi}{2(1+\nu)}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L \left[\left[-\frac{4nc_1}{R}\left(\frac{dv_i}{dx}\right)\left(\frac{dw_i}{dx}\right)\right] E_3 - \frac{2n}{R^2}\left(3c_1E_2 + \frac{c_1}{R}E_3 - E_0\right) v_i w_i\right] dx$$

(الف-7)

$$[k_{24}] = \frac{\pi}{1-\nu^2}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L \frac{2\nu n}{R}(c_1E_3 - E_1)v_i\left(\frac{d\phi_{1_i}}{dx}\right) dx + \frac{\pi}{2(1+\nu)}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L \frac{2n}{R}(E_1 - c_1E_3)\phi_{1_i}\left(\frac{dv_i}{dx}\right) dx$$

(الف-8)

$$[k_{25}] = \frac{\pi}{1-\nu^2}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L \frac{2n^2}{R^2}(E_1 - c_1E_3)v_i\phi_{2_i} dx + \frac{\pi}{2(1+\nu)}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L \left[2[E_1 - c_1E_3]\left(\frac{dv_i}{dx}\right)\left(\frac{d\phi_{2_i}}{dx}\right) + \frac{2}{R}\left(\frac{E_1}{R} + \frac{c_1E_3}{R} - E_0 + 3c_1E_2\right) v_i\phi_{2_i}\right] dx$$

(الف-9)

$$[k_{33}] = \frac{\pi}{1-\nu^2}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L \left[c_1^2\left[2\left(\frac{d^2w_i}{dx^2}\right)^2\right]E_6 + \left[\frac{2\nu c_1}{R}E_3 + \frac{2}{R^2}E_0 + \frac{2n^4c_1^2}{R^4}E_6 + \frac{4n^2c_1}{R^3}E_3\right](w_i)^2 - \frac{2\nu c_1}{R}\left(\frac{2n^2c_1}{R}E_6 + E_3\right)\right] w_i\left(\frac{d^2w_i}{dx^2}\right) dx + \frac{\pi}{2(1+\nu)}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L \left[\left[\frac{8n^2c_1^2}{R^2}\left(\frac{dw_i}{dx}\right)^2\right]E_6 + \left[\left(\frac{2n^2}{R^2}\right)\left(E_0 + 9c_1^2E_4 + \frac{c_1^2}{R^2}E_6 - 6c_1E_2 - \frac{2c_1}{R}E_3 - \frac{6c_1^2}{R}E_5\right) + 2(E_0 + 9c_1^2E_4 - 6c_1E_2)\right](w_i)^2\right] dx$$

(الف-10)

$$[k_{34}] = \frac{\pi}{1-\nu^2}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L \left[2(c_1^2E_6 - c_1E_4)\left(\frac{d\phi_{1_i}}{dx}\right)\left(\frac{d^2w_i}{dx^2}\right) + \frac{2\nu}{R}\left(\frac{n^2c_1}{R}E_4 - c_1E_3 - \frac{n^2c_1^2}{R}E_6 + E_1\right) w_i\left(\frac{d\phi_{1_i}}{dx}\right)\right] dx + \frac{\pi}{2(1+\nu)}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L \left[\frac{4n^2c_1}{R^2}(c_1E_6 - E_4)\phi_{1_i}\left(\frac{dw_i}{dx}\right) + \left[(2w_i\phi_{1_i})(E_0 + 9c_1^2E_4 - 6c_1E_2)\right]\right] dx$$

(الف-11)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.7.32.4]

$$
\begin{aligned}
[k_{35}] = \frac{\pi}{1-\nu^2}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L \Bigg[&\frac{2\nu n c_1}{R}(E_4 - c_1E_6)\phi_{2_i}\left(\frac{d^2w_i}{dx^2}\right)\\
&+ \frac{2n}{R^2}\left(\frac{n^2c_1^2}{R}E_6 - E_1 + c_1E_3\right.\\
&\left.- \frac{n^2c_1}{R}E_4\right)w_i\phi_{2_i}\Bigg]dx\\
&+ \frac{\pi}{2(1+\nu)}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L \Bigg[\frac{4nc_1}{R}(c_1E_6\\
&- E_4)\left(\frac{dw_i}{dx}\right)\left(\frac{d\phi_{2_i}}{dx}\right)\\
&+ \frac{2n}{R}\left(E_0 + 9c_1^2E_4 + \frac{c_1^2}{R^2}E_6 - \frac{1}{R}E_1\right.\\
&- 6c_1E_2 + \frac{c_1}{R}E_3 + \frac{c_1}{R^2}E_4\\
&\left.- \frac{6c_1^2}{R}E_5\right)w_i\phi_{2_i}\Bigg]dx
\end{aligned}
$$

(الف-12)

$$
\begin{aligned}
[k_{44}] = \frac{\pi}{1-\nu^2}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L &2(E_2 + c_1^2E_6 - 2c_1E_4)\left(\frac{d\phi_{1_i}}{dx}\right)^2dx\\
&+ \frac{\pi}{2(1+\nu)}\int_0^L\Bigg[\frac{2n^2}{R^2}(E_2 + c_1^2E_6 - 2c_1E_4)\\
&+ 2(E_0 + 9c_1^2E_4 - 6c_1E_2)\Bigg](\phi_{1_i})^2dx
\end{aligned}
$$

(الف-13)

$$
\begin{aligned}
[k_{45}] = \frac{\pi}{1-\nu^2}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L &\frac{2\nu n}{R}(-E_2 + 2c_1E_4\\
&- c_1^2E_6)\phi_{2_i}\left(\frac{d\phi_{1_i}}{dx}\right)dx\\
&+ \frac{\pi}{2(1+\nu)}\int_0^L\frac{2n}{R}(E_2 + c_1^2E_6\\
&- 2c_1E_4)\phi_{1_i}\left(\frac{d\phi_{2_i}}{dx}\right)dx
\end{aligned}
$$

(الف-14)

$$
\begin{aligned}
[k_{55}] = \frac{\pi}{1-\nu^2}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L &\frac{2n^2}{R^2}(E_2 + c_1^2E_6 - 2c_1E_4)(\phi_{2_i})^2dx\\
&+ \frac{\pi}{2(1+\nu)}\sum_{i=1}^{M}\int_0^L\Bigg[2(E_2 + c_1^2E_6\\
&- 2c_1E_4)\left(\frac{d\phi_{2_i}}{dx}\right)^2\\
&+ 2\left(E_0 + \frac{1}{R^2}E_2 + 9c_1^2E_4 + \frac{c_1^2}{R^2}E_6 - \frac{2}{R}E_1\right.\\
&- 6c_1E_2 + \frac{4c_1}{R}E_3 - \frac{2c_1}{R^2}E_4\\
&\left.- \frac{6c_1^2}{R}E_5\right)(\phi_{2_i})^2\Bigg]dx
\end{aligned}
$$

(الف-15)

9-2- پیوست ب

درایه‌های ماتریس رابطه (53) بصورت زیر است:

$$
[k_{11}]^k = \sum_{i=1}^{M}\pi n^2{R_s}^3[n^2EI_z + GJ](u_{is})^2
$$

(ب-1)

$$
[k_{13}]^k = \sum_{i=1}^{M}\pi n^2{R_s}^2[-EI_z + GJ]u_{is}\left(\frac{dw_{is}}{dx}\right)
$$

(ب-2)

$$
[k_{22}]^k = \sum_{i=1}^{M}EAR_s\pi[n^2(v_{is})^2]
$$

(ب-3)

$$
[k_{23}]^k = \sum_{i=1}^{M}[EAR_s\pi(nv_{is}w_{is})]
$$

(ب-4)

$$
\begin{aligned}
[k_{33}]^k = +\sum_{i=1}^{M}\Bigg\{&EI_zR_s\pi\left[\left(\frac{dw_{is}}{dx}\right)^2\right]\\
&+ EI_xR_s^3\pi[(n^2-1)^2(w_{is})^2]\\
&+ EAR_s\pi[(w_{is})^2] + GJ\pi n^2R_s\left(\frac{dw_{is}}{dx}\right)^2\Bigg\}
\end{aligned}
$$

(ب-5)

10- مراجع

[1] Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin, A. Kawasaki, R. G. Ford, *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*, Springer, Vol. 5, pp.1-317, Springer Science & Business Media, 2013.

[2] D. O. Brush, B. O. Almroth, *Buckling of Bars, Plates and Shells*, pp. 241-304, New York, McGraw-Hill, 1975.

[3] J. Spence, A. S. Tooth, C. W. Bert, Pressure Vessel Design: Concepts and Principles, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 62, No. 824, pp. 824-836,1995.

[4] L. H. Donnell, C. C. Wan, Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression, *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, Vol. 17, No. 1, pp. 73-83.1950.

[5] W. T. Koiter, *Theoretical and Applied Mechanics*, pp. 185-247, North Holland, New York, pp. 261-491, 1977.

[6] D. O. Brush, B. O. Almroth, Thin Shell Buckling Analysis-a General Expression for the Second Variation of the Strain Energy, *Proceedings of the 4th US national congress applied mechanic*, Berkeley, California, pp. 967-975, 1962.

[7] C. T. Herakovich, E. R. Johnson, Buckling of composite cylinders under combined compression and torsiontheoretical/experimental correlation, Test methods and design allowables for fibrous composites, Proceedings of the Symposium, Dearborn, MI, October 2, 3, 1979. (A81-47801 23-24) Philadelphia, PA, American society for testing and materials, pp. 341-360, 1981.

[8] D. Hui, Asymmetric postbuckling of symmetrically laminated cross ply, short cylindrical panels under compression,*Composite structures*, Vol. 3, No.1, pp. 81-95,1985.

[9] W. Wunderlich, Z. Lu, H. Obrecht, Elastic and Inelastic Buckling of Ring–StiffeneSabag, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 56, No.1, pp. 121-126,1991.

[10] R. K. Thangaratnam, R. Palaninathan, J. Ramachandran, Thermal buckling of laminated composite shells, *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 5, pp. 859-860,1990.

[11] V. Birman, C. W. Bert, Buckling and post-buckling of composite plates and shells subjected to elevated temperature, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, No. 2, pp. 514-519,1993.

[12] M. Savoia, J. N. Reddy, Post-buckling behavior of stiffened cross-ply cylindrical shells, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 61, No. 4, pp. 998-1000,1994.

[13] G. A. Kardomateas, Buckling of thick orthotropic cylindrical shells under external pressure, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, No. 1, pp. 195-202,1993.

[14] X. Wang, J. Xiao, Y. C. Zhang, A method for solving the buckling problem of a thin-walled shell, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 81, No. 12, pp. 907-912, 2004.

[15] S. R. Li, R. C. Batra,Buckling of axially compressed thin cylindrical shells with functionally graded middle layer. *Thin-Walled Structures*, Vol. 44, No.10, pp. 1039-1047, 2006.

[16] M. Esmaeildokht, R. Akbari, M. H. Ghasemi, M. Dardel, Effect of axial force to lateral force on the buckling of orthotropic thin cylindrical shell, *Journal of Solid Mechanics in Engineering*, Vol. 7, No. 3, pp. 35-43, 2015. (in Persian فارسی)

[17] D. Pourvais, M. Zaman Kabir, Environmental sustainability reinforced composite cylindrical shells under Combined loads, *Journal of Department of Engineering*, Vol. 39, No. 3, pp. 365-374. 2005. (in Persian فارسی)

[18] M. M. Najafizadeh, A. Hasani, P. Khazaeinejad, Mechanical stability of functionally graded stiffened cylindrical shells, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, No. 2, pp. 1151-1157, 2009.

[19] H. Huang, Q. Han, Buckling of imperfect functionally graded cylindrical shells under axial compression, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 27, No. 6, pp. 1026-1036, 2008.

[20] R. Shahsiah, M. R. Eslami, Thermal buckling of functionally graded cylindrical shell, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 26, No. 3, pp. 277-294, 2003.

[21] H. S. Shen, Postbuckling analysis of axially-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments, *Composites Science and Technology*, Vol. 62, No. 7, pp. 977-987, 2002.

[22] H. Huang, Q. Han, Nonlinear buckling and postbuckling of heated functionally graded cylindrical shells under combined axial compression and radial pressure, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 44, No. 2, pp. 209-218, 2009.

[23] M. Tajdari, M. Azimi, M. Khoram, J. Eskandari Jam, Numerical and experimental investigations on buckling of steel cylindrical shells with triangular cutout subject to axial compression, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 1, pp. 24-37, 2013. (in Persianفارسی)

[24] X. Zhao, Y. Yang, K. M. Liew, Geometrically nonlinear analysis of cylindrical shells using the element-free kp-Ritz method,*Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 31, No. 9, pp. 783-792, 2007.

[25] X. Zhao, K. M. Liew, Geometrically nonlinear analysis of functionally graded shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 51, No. 2, pp. 131-144, 2009.

[26] X. Zhao, K. M. Liew, A mesh-free method for analysis of the thermal and mechanical buckling of functionally graded cylindrical shell panels, *Computational Mechanics*, Vol. 45, No. 4, pp. 297-310, 2010.

[27] I. Elishakoff, Y. Li, Jr. J. H. Starnes, *Non-Classical Problems in the Theory of Elastic Stability*, pp. 187-265, Cambridge university press, 2001.

[28] G. Gusic, A. Combescure, J. F. Jullien, The influence of circumferential thickness variations on the buckling of cylindrical shells under lateral pressure, *Computers and Structures*, Vol. 74, No. 4, pp. 461–477, 2000.

[29] N. T. H Luong, T. S. S. Hoach, Stability of cylindrical panel with variable thickness, *Vietnam Journal of Mechanics*, Vol. 28, No. 1, pp. 56-65, 2006.

[30] T. H. L. Nguyen, S. S. H. Thach, Influence of the thickness variation and initial geometric imperfection on the buckling of cylindrical panel, *Proceeding of the 8th Vietnamese Conference on Mechanics of Solids*, Thai Nguyen, pp. 491-499, 2006.

[31] H. L. T. Nguyen, I. Elishakoff, V. T. Nguyen, Buckling under the external pressure of cylindrical shells with variable thickness, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, No. 24, pp. 4163-4168, 2009.

[32] W. T. Koiter, I. Elishakoff, Y. W. Li, J. H. Starnes, Buckling of an axially compressed cylindrical shell of variable thickness, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, No. 6, pp. 797-805,1994.

[33] M. Shariyat, D. Asgari, Nonlinear thermal buckling and postbuckling analyses of imperfect variable thickness temperature-dependent bidirectional functionally graded cylindrical shells, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 111, No.45, pp. 310-320, 2013.