مجله مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1396، دوره 17، شماره 9، ص‌ص 409-416

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

روش جفت شده ضعیف برای مدل‌سازی رسوب کف بر اساس روش ریمن تقویت‌شده

مینا برزگران[1]، حسین مهدیزاده[2*]، سلمان پوراسماعیل[3]

1- کارشناسی ارشد، مهندسی و مدیریت منابع آب، دانشگاه بیرجند، بیرجند
2- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه بیرجند، بیرجند
3- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه بجنورد، بجنورد
* بیرجند، صندوق پستی97175/615، hossein.mahdizadeh@birjand.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 26 اردیبهشت 1396
پذیرش: 06 شهریور 1396
ارائه در سایت: 31 شهریور 1396

کلید واژگان:
معادلات آب‌های کم‌عمق
روش جفت شده ضعیف
حل‌کننده ریمن تقویت‌شده
انتقال رسوب کف

چکیده

در تحقیق حاضر به‌منظور مدل‌سازی انتقال رسوب بستر، از یک روش حجم محدود گودونو استفاده می‌شود. معادلات به کار گرفته شده در این مدل‌سازی شامل معادلات آب کم‌عمق برای شبیه‌سازی رفتار هیدرودینامیک و نیز معادله رسوب برای شبیه‌سازی تغییرات مورفودینامیک می‌باشند. سپس این دو مجموعه از معادلات توسط روش ریمن تقویت‌شده بر اساس یک روش جفت شده ضعیف، حل می‌گردند. در روش جفت شده ضعیف ابتدا معادله رسوب حل می‌گردد و سپس نتایج به‌روز شده تغییرات پروفیل رسوب به‌صورت عبارت منبع در معادلات آب کم‌عمق با استفاده از یک ساختار ریمن مشابه به کار گرفته می‌شود. روش عددی مورد نظر ابتدا برای شبیه‌سازی نمونه آزمایشی انتقال لایه رسوب سهموی، استفاده شد و نتایج به‌دست آمده با داده‌های آزمایشگاهی در دسترس صحت‌سنجی گردید. سپس انتقال یک توده رسوب با شرایط اولیه زیربحرانی که شرایط برخورد ملایم و شدید بین سطح آب و رسوب کف ایجاد می‌نماید، در نظر گرفته شد. نتایج حاصل از این پژوهش بیانگر آن است که روش جفت شده ضعیف که بر مبنای روش ریمن تقویت‌شده، توسعه یافته است، قابلیت مدل‌سازی تمامی شرایط انتقال رسوب با دقت بالا را دارا می‌باشد و تطابق بسیار خوبی با حل‌های مرجع یا تحلیلی در نمونه‌های آزمایشی برای انواع جریان‌ها دارد.

A weakly coupled scheme for modelling bedload sediment transport using an augmented Riemann solver

Mina Barzgaran[1], Hossein Mahdizadeh[1*], Salman Pouresmaeil[2]

1- Department of Civil Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran
2- Department of Civil Engineering, Bojnourd University, Bojnourd, Iran
* P.O.B. 97175/615 Birjand, Iran, hossein.mahdizadeh@birjand.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 16 May 2017
Accepted 28 August 2017
Available Online 22 September 2017

Keywords:
Shallow Water Equations
Weakly Coupled Scheme
Augment Riemann Solver
Bedload Sediment Transport

ABSTRACT

In this paper a Godunov-type finite volume method is used for the solution of bedload sediment transport dynamics. The utilised equations for this modelling comprise the shallow water equations used for the hydrodynamic phase and also the Exner equation applied for the morphodynamic variations. These set of equations are then solved using a weakly-coupled scheme based on an augmented Riemann solver. In this approach the morphodynamic equation is first solved and the updated bedload changes with the same Riemann structure are used as a source term within the shallow water equations. The proposed numerical model is first used for the simulation of the parabolic sediment layer and the obtained numerical results are validated with the exact solution. Then, a bedload hump propagation with an initial subcritical condition which is able to create both mild and strong sediment and free-surface interactions is considered and the computed results are compared with the reference solution. These numerical results indicate that the defined weakly coupled method developed based on an augmented Riemann technique is able to be used for modelling bedload sediment transport for all flow regimes and exhibits a very good agreement with analytical or reference solutions for the given test cases.

1- مقدمه

در سال‌های اخیر مسئله انتقال رسوب به موضوع پراهمیتی در صنعت هیدرولیک تبدیل شده است. شناخت روند حرکت رسوبات بستر رودخانه‌ها و آبراهه‌ها در زمان سیلاب، جز مهم‌ترین بخش مدیریت آب کشور به شمار می‌رود. انتقال رسوب در زمینه‌های مختلفی ازجمله رسوب‌شناسی، ژئومورفولوژی، مهندسی عمران و محیط‌زیست مورد توجه است. به‌کارگیری روش‌های مطمئن برای پیش‌بینی جریان آب، انتقال رسوب و تغییرات بستر، قادر به ایجاد راهکارهای کنترلی برای جلوگیری از خسارات مالی و جانی و حفاظت محیط‌زیست می‌باشند.

تعامل بین جریان آب و انتقال رسوب یک مسئله در مهندسی هیدرولیک است که برای سیستم‌های رودخانه‌ای مختلف از قبیل دریاها، رودخانه‌ها و دلتاها مورد مطالعه واقع گردیده است. مدل‌های مورفودینامیک قادر به پیش‌بینی تغییر شکل‌های بستر دریا و رودخانه و نیز تغییرات سطح آب می‌باشند. این مدل‌ها معمولاً بر اساس معادلات آب‌های کم‌عمق که هیدرودینامیک جریان را پیش‌بینی می‌کنند، به همراه معادله اکسنر[1]، برای

[1] Exner

Please cite this article using:

M. Barzgaran, H. Mahdizadeh, S. Pouresmaeil, A weakly coupled scheme for modelling bedload sediment transport using an augmented Riemann solver, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 9, pp. 409-416, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

تقریب انتقال رسوب، می‌باشند [2,1].

برای حل این سیستم معادلات از دو روش جداشده و جفت شده استفاده شده است. روش جداشده[1] در گام اولیه به حل سیستم معادلات آب‌های کم‌عمق با ثابت در نظر گرفتن توپوگرافی می‌پردازد و سپس در گام دوم توپوگرافی با استفاده از معادله اکسنر به‌روزرسانی می‌گردد. به‌کارگیری این روش آسان است و سبب به حداقل رساندن هزینه و زمان محاسبات می‌گردد. مهم‌ترین ایراد این روش، بروز ناپایداری در هنگام استفاده از گام‌های زمانی مختلف برای هر معادله است. علت بروز این مشکل تقریب نامناسب از مقادیر ویژه واقعی سیستم موجود است. به‌علاوه این روش تنها قابل اعمال در مواردی است که تعامل بین انتقال رسوب و سطوح امواج آب ضعیف یا متوسط است و تاکنون روشی در مورد تعامل قوی بین رسوب و سطوح موج ارائه نشده است. روش جفت شده[2] کل سیستم مورفودینامیک را در فرمی از قوانین بقای جرم و مومنتم حل می‌کند و درنتیجه سبب پایداری بیشتر این روش می‌گردد [5-3,1]. علاوه بر این هرگونه تعاملات قوی که ممکن است در صورت تقابل شدید جریان سطح آزاد با رسوب کف رخ بدهد، به‌وسیله این روش تقریب زده می‌شود و روش مستقل از عدد فرود است. مهم‌ترین ضعف روش جفت شده نسبت به روش جداشده آن است که، این روش فقط بر اساس فرمول‌های غیر بقایی[3] توسعه‌یافته است و تاکنون هیچ‌گونه راه‌حل بقایی[4] برای این روش پیشنهاد نشده است [6,4,3].

کاسترو و همکاران [1] به‌منظور حل سیستم معادلات آب‌های کم‌عمق به همراه معادله اکسنر روش جفت شده را با شارهای غیر بقایی[5] استفاده نموده‌اند. کوردیر و همکاران [7]، دو روش جداشده و جفت شده را برای مدل‌سازی انتقال رسوب به همراه معادلات آب‌های کم‌عمق در نظر گرفتند. سعیدی[8] برای شناخت کامل از اتصال فیزیکی فازهای آب و رسوب در جریان‌های آبرفتی، دو روش جفت شده و جداشده را در مدل‌سازی جریان‌های آبرفتی مقایسه نمود. مهدیزاده و شریفی [9] مدل‌سازی انتقال رسوب بستر توسط یک روش انتشار موج اصلاح شده نوع گودونو با هر دو روش جداشده و جفت شده را ارائه نموده‌اند.

برای حل سیستم معادلات مورفودینامیکی روش‌های عددی متعددی توسعه یافته‌اند که در این بین، روش‌های حجم محدود در دهه‌های اخیر به‌طور گسترده‌ای به کار گرفته شده است. این روش‌ها بر اساس دو چارچوب متفاوت از روش‌های حجم محدود گسسته سازی می‌شوند. گروه اول، روش بالادست است که توسط گودونو ارائه شده است و در حل مسائل دینامیک گازها مورد استفاده گسترده است. در مورد مسائل یک‌بعدی، روش بالادست با موفقیت در موردی از انتقال رسوب با دقت بالا توسط روساتی و فراکارولو به کار گرفته شده است [10].

گروه دوم، روش حجم محدود مرکزی می‌باشند که طرح‌های مرکزی مانند لاکس- فردریچ یا لاکس- وندروف را به کار می‌گیرند. اخیراً روش‌های مرکزی غیر بقایی برای مسائل انتقال رسوب به کار گرفته شده است. کانستریلی و همکاران یک روش حجم محدود با دقت بالا برای معادلات آب‌های کم‌عمق به همراه بستر متحرک بر روی شبکه‌های بدون ساختار ارائه نمود [4].

معمولاً بیشتر حل‌های عددی برای معادلات آب‌های کم‌عمق در حالت غیرخطی، بر اساس روش حجم محدود گسترش یافته‌اند. روش حجم محدود روش گسسته سازی برمبنای فرم انتگرالی قانون بقا است، بنابراین خاصیت بقای جرم و اندازه حرکت در آن به‌خوبی حفظ می‌گردد. در این مقاله نوعی از روش حجم محدود گودونو، به نام الگوریتم پخش موج گودونو[6] برای تقریب معادلات مورفودینامیک استفاده می‌گردد. در روش پخش موج شارها به‌صورت عبارات نوسانی راست رونده و چپ رونده لحاظ شده که این شارها توسط یک روش ریمن تقویت‌شده قابل محاسبه هستند.

هدف اصلی در مقاله حاضر مدل‌سازی برهم‌کنش‌های شدید جریان سیال با رسوب بستر می‌باشد که در حالت کلی با روش‌های جدا شده که در ابتدای این قسمت بیان گردیده‌اند، ممکن نمی‌باشد. در واقع روش عددی ارائه شده در این پژوهش با به‌کارگیری حل‌کننده ریمن تقویت‌شده به‌صورت جفت شده ضعیف با معادله رسوب قادر به شبیه سازی برخوردهای شدید جریان سطح آزاد با رسوب بستر می‌باشد. روش ریمان تقویت‌شده در ابتدا در سال 2008 توسط جورج [11] برای حل معادلات آب‌های کم‌عمق معرفی گردید. در این روش از یک حل‌کننده شامل چهار موج استفاده شده که شامل یک بردار تقویت‌شده عمق، مومنتم، شار مومنتم و تراز بستر است. این روش یک روش متوازن شده بوده و قابلیت توسعه بر روی سطوح خشک را دارا است. بر اساس اطلاعات نویسندگان تاکنون هیچ توسعه‌ای از روش ریمان تقویت‌شده برای حل معادلات رسوب بستر ارائه نگردیده است. در این پژوهش ابتدا پیش‌زمینه‌ای در ارتباط با معادلات حاکم بر سیستم یک‌بعدی مورفودینامیک همراه با فرمول‌های تجربی انتقال رسوب مختلف ارائه می‌شود. سپس توضیحی مختصر از الگوریتم پخش موج به همراه حل‌کننده ریمان تقویت‌شده برای یک سیستم جفت شده ضعیف، معرفی می‌گردد. در نهایت به‌منظور صحت‌سنجی روش ارائه شده، نتایج حاصل از اجرای روش مدنظر با حل‌های تحلیلی و مرجع دو نمونه آزمایشی، مقایسه می‌گردد و نتایج حاصل از یافته‌ها بررسی می‌گردند.

2- معادلات حاکم و روش عددی

2-1- معادلات حاکم

معادلات حاکم برای تقریب معادلات رسوب کف، به‌صورت ترکیبی از معادلات آب‌های کم‌عمق و معادله اکسنر است. برای نمایش تغییرات بستر لازم است که معادلات آب کم‌عمق در کنار معادله انتقال رسوب کف به‌صورت هم‌زمان حل شوند. در حالت کلی سیستم مورفودینامیک شامل معادلات آب کم‌عمق و معادله انتقال رسوب به‌صورت رابطه (1) می‌باشند [12]:

$$U_t + F(U)_x = S$$
$$B_t + \nu q_b = 0 \tag{1}$$

در این رابطه U_t برداری از متغیرهای بقا یافته، $(U)_x$ گرادیان شارها در جهت x، S برداری از عبارت‌های منبع، B تراز ارتفاع بستر (m) و q_b دبی انتقال رسوب (m^2/s) می‌باشند که به‌صورت روابط (2) در معادلات مربوطه اعمال می‌گردند:

$$U = \begin{bmatrix} u \\ hu \end{bmatrix}$$
$$F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}$$
$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial B}{\partial x} \end{bmatrix}$$
$$\nu = \frac{1}{1-\varepsilon} \tag{2}$$

[1] Splitting
[2] Coupled
[3] Non-Conservative Formulations
[4] Conservative Solution
[5] Non-Conservative Fluxes
[6] Godunov-type Wave Propagation Algorithm

در روابط ذکر شده، ε تخلخل مواد بستر، h میزان عمق آب (m)، u مؤلفه سرعت در جهت محور x (m²/s) و g شتاب گرانش (m/s²) می‌باشند. روابط تحلیلی بسیاری برای پیش‌بینی و تعیین دبی انتقال رسوب استخراج شده‌اند که شامل هر دو رسوب جامد و معلق بستر می‌شوند. به‌عنوان‌مثال، یکی از ساده‌ترین روابط برای تعیین دبی انتقال رسوب توسط گرس معرفی شده است که دبی انتقال رسوب را به‌عنوان تابعی از سرعت عمق متوسط و یک ثابت به نام A_g به‌صورت رابطه (3) معرفی نمود [13]:

$$q_b = A_g u^{m_g} \tag{3}$$

مقدار ثابت A_g به خواص خاک وابسته است و بر اساس داده‌های تجربی تعیین می‌شود و m_g معمولاً در بازه $1 \le m_g \le 4$ انتخاب می‌گردد.

عملاً تخمین نرخ رسوب انتقالی عمدتاً بر اساس تنش برشی کف τ_b (N/m²) می‌باشد که در جریانات لایه‌ای رابطه تنش برشی کف به‌صورت رابطه (4) می‌باشد [7]:

$$\tau_b = \rho g h S_f \tag{4}$$

که در رابطه فوق ρ چگالی آب (kg/m³) می‌باشد و S_f عبارت اصطکاکی است که توسط قوانین تجربی مانند رابطه مانینگ قابل محاسبه است [7]:

$$S_f = \frac{n^2 u^2}{h^{\frac{3}{4}}} \tag{5}$$

در رابطه (5)، n ضریب مانینگ می‌باشد.

محاسبات نرخ انتقال رسوب عمدتاً توسط پارامتری به نام ψ که در رابطه (6) ارائه شده است، بیان می‌شود [7]:

$$q_b = \psi \sqrt{(G_s - 1) g d_m{}^3} \tag{6}$$

که در این رابطه G_s چگالی نسبی است که به‌صورت $G_s = \rho_s / \rho$ محاسبه می‌شود. به‌منظور محاسبه ψ، روابط تجربی مختلفی ارائه شده است. خلاصه برخی از این روابط در جدول 1 ارائه شده است [14-17]:

تنش برشی بستر معمولاً در فرم بی‌بعد استفاده می‌شود که با τ_b^* نشان داده می‌شود و نیز پارامتر شیلدز نامیده می‌گردد. این پارامتر در عباراتی از نیروهای پسا و وزن غوطه‌وری به‌صورت رابطه (7) تعریف می‌شود [7]:

$$\tau_b^* = \frac{\tau_b}{\left(\rho_s - \rho\right) g d_m} \tag{7}$$

که در این رابطه ρ_s چگالی رسوب (kg/m³) و d_m قطر متوسط ذرات رسوب (mm) می‌باشند. لازم به ذکر است که حرکت رسوب زمانی رخ می‌دهد که τ_b^* از مقدار τ_{cr}^* بیشتر گردد. میزان آستانه τ_{cr}^* به خواص فیزیکی رسوب وابسته است و معمولاً به‌طور تجربی محاسبه می‌شود. درصورتی‌که میزان τ_{cr}^* برابر با صفر گردد، روابط تجربی جدول 1 به‌اندازه رسوب وابسته نخواهند بود و می‌توان با کمک معادله گرس بیان شده در رابطه (3) با مقادیر اصلاح شده A_g و m_g، مطابق جدول 2 محاسبه گردند.

جدول 1 روابط تجربی مختلف برای تعیین پارامتر ψ

Table 1 Various empirical equations to determine parameter ψ

نام فرمول	پارامتر ψ
مایر- پیتر [14]	$\psi = 8(\tau_b^* - \tau_{cr}^*)^{1.5}$
فرناندز لوکو- ون بیک [15]	$\psi = 5.7(\tau_b^* - \tau_{cr}^*)^{1.5}$
نیلسن [16]	$\psi = \sqrt{\tau_b^*}(\tau_b^* - \tau_{cr}^*)^{1.5}$
کمنن- لارسون [17]	$\psi = 12{\tau_b^*}^{1.5}\exp(\frac{-4.5\tau_{cr}^*}{\tau_b^*})$

جدول 2 فرمول‌های تجربی مختلف انتقال رسوب در قالب فرمول گرس

Table 2 Different empirical sediment transport formulations written in the Grass-type form

نام فرمول	A_g	m_g
مایر- پیتر [14]	$\frac{8n^3 g^{0.5}}{h^{0.5}(G_s - 1)}$	3
فرناندز لوکو- ون بیک [15]	$\frac{5.7n^3 g^{0.5}}{h^{0.5}(G_s - 1)}$	3
کمنن- لارسون [17]	$\frac{12n^3 g^{0.5}}{h^{0.5}(G_s - 1)}$	3

2-2- الگوریتم پخش موج

روش ارائه شده در این مقاله نوعی از روش حجم محدود گودونو به نام الگوریتم پخش موج گودونو است که برای تقریب معادلات مورفودینامیک استفاده می‌گردد. این روش که برای اولین بار توسط لوک بیان گردید، می‌تواند به‌صورت رابطه (8) ارائه گردد [18]:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(A^+\Delta U_{i-\frac{1}{2}} + A^-\Delta U_{i+\frac{1}{2}}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^n - \tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^n\right) \tag{8}$$

در رابطه (8) U_i^n تقریب متوسط بردار مجهولات در زمان $n\Delta t$، Δt و Δx به ترتیب گام زمانی و گام مکانی، n سطح زمانی، $\mathrm{A}^+\Delta \mathrm{U}_{i-1/2}$ و $\mathrm{A}^-\Delta \mathrm{U}_{i+1/2}$ به ترتیب نوسانات راست رونده و چپ رونده و $\tilde{F}_{i\pm 1/2}^n$ عبارت‌های اصلاحی مرتبه دوم موردنیاز برای رسیدن به حل با دقت بالا می‌باشند. $\tilde{F}_{i\pm 1/2}^n$ با استفاده از محدودکننده‌های مختلف قابل محاسبه می‌باشند. درصورتی‌که $\tilde{F}_{i\pm 1/2}^n = 0$ آنگاه معادله فوق معادله گودونو مرتبه اول است. $\mathrm{A}^\pm \Delta U_{i\pm 1/2}$ نمادهای مستقلی می‌باشند که توسط حل مسئله ریمن در هر سطح برخورد بین دو سلول، به دست می‌آیند و به‌صورت رابطه (9) محاسبه می‌شوند [11]:

$$A^+\Delta U_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{k:s_{i-\frac{1}{2}}>0} S_{k,i-\frac{1}{2}} W_{k,i-\frac{1}{2}}$$
$$A^-\Delta U_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{k:s_{i-\frac{1}{2}}<0} S_{k,i-\frac{1}{2}} W_{k,i-\frac{1}{2}} \tag{9}$$

که در رابطه فوق $W_{k,i-1/2}$ که موج ریمن نامیده می‌شود، با کمک ضرب یک ضریب خاص به نام $\alpha_{k,i-1/2}$ در بردار ویژه مربوطه به‌صورت $W_{k,i-1/2} = \alpha_{k,i-1/2} r_{k,i-1/2}$ به دست می‌آید که این امواج با سرعت $S_{k,i-1/2}$ منتشر می‌شوند.

3-2- حل‌کننده ریمن تقویت‌شده با استفاده از روش جفت شده ضعیف

1-3-2- معادلات آب کم‌عمق

معادلات آب کم‌عمق که بیانگر بقای جرم آب و رابطه بقای اندازه حرکت هستند، یک سیستم از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای عمق و مومنتم می‌باشند که به شکل رابطه (10) نوشته می‌شوند [11]:

$$h_t + (hu)_x = 0$$
$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2} g h^2\right)_x = -g h B_x \tag{10}$$

روش ریمن تقویت‌شده اولین بار توسط جورج در سال 2008 به‌منظور حل معادلات آب کم‌عمق معرفی گردید. از مزایای حل‌کننده ریمن تقویت‌شده این است که این روش به‌طور هم‌زمان دارای ویژگی‌های مطلوب از حل‌کننده رو[1] [19]، انواع حل‌کننده‌های HLLE[2] و روش شار موج[3] و نیز عدم ایجاد ضعف‌های هر یک از این روش‌ها است. این روش دارای خاصیت حفظ عمق

[1] ROE
[2] Harten, Lax, van Leer and Einfeldt
[3] Flux-wave

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.9.5]

مثبت نزدیک به سطح خشک و نیز دارای یک ثابت آنتروپی طبیعی است و تخمین دقیق‌تری را برای مسائل با امواج انبساطی بزرگ فراهم می‌کند. این روش یک روش متوازن شده است [20].

در سیستم تقویت‌شده، با حذف عبارت منبع و اضافه کردن متغیر اضافی تراز بستر در کمیت‌های بقائی، چهار موج در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین در سیستم تقویت‌شده معادلات آب کم‌عمق رابطه (10)، به‌صورت رابطه (11) نوشته می‌شود [11]:

$$q_t + W(q)q_x = 0 \tag{11}$$

در رابطه فوق q بردار شامل کمیت‌های بقائی و $W(q)$ ماتریس ژاکوبین شارهای متناظر با این کمیت‌ها می‌باشند که بردار q به‌صورت رابطه (12) تعریف می‌گردد [11]:

$$q = (h, hu, \varphi, B)^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

بردار q شامل عمق (h)، مومنتم (hu)، شار مومنتم ($(\varphi = (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)$) و تراز بستر می‌باشد. ماتریس ژاکوبین شارهای متناظر با این کمیت‌ها به‌صورت رابطه (13) است [11]:

$$W(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 & gh \\ 0 & -u^2 + gh & 2u & 2ugh \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $W(q)$ مطابق با روابط (14) می‌باشند [11]:

$$\{r_1, \lambda_1\} = \left\{(1, \lambda_1, (\lambda_1)^2, 0)^{\mathrm{T}}, u - \sqrt{gh}\right\}$$
$$\{r_2, \lambda_2\} = \{(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}, 2u\}$$
$$\{r_3, \lambda_3\} = \left\{(1, \lambda_3, (\lambda_3)^2, 0)^{\mathrm{T}}, u + \sqrt{gh}\right\}$$
$$\{r_4, \lambda_4\} = \left\{(\frac{gh}{\lambda_1\lambda_3}, 0, -gh, 1)^{\mathrm{T}}, 0\right\} \tag{14}$$

بردارهای r_1 و r_3 متناظر با ناحیه‌های غیرخطی اختصاص‌یافته شده به معادلات آب کم‌عمق استاندارد می‌باشند. ناحیه اختصاص‌یافته به r_4، مربوط به ناحیه خطی حالت پایدار است. بردار r_3 تنها دارای یک مؤلفه غیر صفر در راستای φ است [11].

رابطه (15) یک مسئله ریمن برای سیستم تقویت‌شده (11) است [11]:

$$q_t + A(q)q_x = 0 \tag{15}$$

با داده اولیه ثابت قطعه‌ای [11]:

$$q(x,0) = \begin{cases} q_l, & x < 0 \\ q_r, & x > 0 \end{cases} \tag{16}$$

که در آن:

$$q_l = \begin{bmatrix} h_l \\ (hu)_l \\ \varphi_l \\ b_l \end{bmatrix}, \quad q_r = \begin{bmatrix} h_r \\ (hu)_r \\ \varphi_r \\ b_r \end{bmatrix} \tag{17}$$

برای حل تقریبی معادله (15) با استفاده از گسسته سازی، رابطه (18) قابل نگارش است [11]:

$$\Delta q = q_r - q_l = \sum_{p=1}^{4} \alpha_p r_p = W_p \tag{18}$$

که در آن، r_p تقریبات محلی بردار ویژه‌های ماتریس A می‌باشند که به‌صورت روابط (19) بیان می‌شوند [11]:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ s_\varepsilon^1 \\ (s_\varepsilon^1)^2 \\ 0 \end{bmatrix}, r_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ s_\varepsilon^3 \\ (s_\varepsilon^3)^2 \\ 0 \end{bmatrix}, r_4 = \begin{bmatrix} \frac{S_-^+(q_l, q_r)}{-\widetilde{\lambda_1\lambda_3}(q_l, q_r)} \\ 0 \\ S_-^+(q_l, q_r) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

بردار ویژه‌های فوق در الگوریتم پخش موج استفاده خواهند شد. میانگین‌های $S_-^+(q_l, q_r)$ و $\widetilde{\lambda_1\lambda_3}(q_l, q_r)$ طبق فرمول (20) قابل‌محاسبه می‌باشند [11]:

$$S_-^+(q_l, q_r) = -\frac{g}{2}(h_l + h_r)\frac{\widetilde{\lambda_1\lambda_3}(q_l, q_r)}{\overline{\lambda_1\lambda_3}(q_l, q_r)}$$

$$\widetilde{\lambda_1\lambda_3}(q_l, q_r) = -(-u_l u_r + g(\frac{h_l + h_r}{2}))$$
$$\overline{\lambda_1\lambda_3}(q_l, q_r) = -(-(\frac{u_l + u_r}{2})^2 + g(\frac{h_l + h_r}{2})) \tag{20}$$

بر این اساس امواج با سرعت‌های ارائه شده طبق روابط (21) منتشر می‌شوند [11]:

$$s^1 = s_\varepsilon^1, \qquad s^2 = \frac{1}{2}(s_\varepsilon^1 + s_\varepsilon^3)$$
$$s^3 = s_\varepsilon^3, \qquad s^4 = 0 \tag{21}$$

s_ε نشان‌دهنده سرعت‌های اینفلت[1] می‌باشند که به‌صورت روابط (22) بیان می‌شوند [21]:

$$s_\varepsilon^1 = \min\left(\lambda_{k,i-1}, \widetilde{\lambda_k}\right)$$
$$s_\varepsilon^3 = \min\left(\lambda_{k,i}, \widetilde{\lambda_k}\right) \tag{22}$$

در رابطه فوق $\lambda_{k,i}$، k امین مقدار ویژه برای ماتریس ژاکوبین و $\widetilde{\lambda_k}$ نشان‌دهنده k امین مقدار ویژه برای ماتریس رو می‌باشد. فرایند ارائه شده در این بخش، نشان‌دهنده یک حل‌کننده ریمن تقریبی تقویت‌شده برای حل معادلات آب کم‌عمق می‌باشد.

2-3-2- معادله اکسنر

در حل‌کننده جفت شده ضعیف، ابتدا فرمول انتقال رسوب برای هر گام زمانی حل می‌شود. سپس پروفیل بستر به‌دست‌آمده از این معادله، به‌عنوان عبارت منبع در معادلات آب کم‌عمق جایگزین می‌شود. معادلات آب کم‌عمق به روش ریمن تقویت‌شده حل می‌گردند.

به‌منظور تقریب معادله انتقال رسوب، از روش جدیدی برای تجزیه امواج و شارهای موج استفاده می‌شود که اولین بار توسط بیل و همکاران [22] در حل مسائل دینامیک گاز به‌صورت رابطه (23) استفاده شده است:

$$\begin{bmatrix} U_i - U_{i-1} \\ F(U_i) - F(U_{i-1}) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2m} \begin{bmatrix} W_{k,i-\frac{1}{2}} \\ \xi_{k,i-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \tag{23}$$

این رابطه شامل امواج و تفاضل شارها می‌باشد که درنهایت منجر به ایجاد یک موج منحصربه‌فرد می‌شود. در الگوریتم پخش موج هر موج از طریق رابطه (24) به شار موج مرتبط می‌گردد [23]:

$$\xi_{i-\frac{1}{2}} = s_{i-\frac{1}{2}} W_{i-\frac{1}{2}} \tag{24}$$

برای حل معادله انتقال رسوب، رابطه (23) به شکل رابطه (25) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{bmatrix} B_i - B_{i-1} \\ q_{bi} - q_{b(i-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{i-\frac{1}{2}} \\ \xi_{i-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \tag{25}$$

بنابراین برای تقریب امواج میان سطوح برخورد بین سلول‌های محاسباتی حجم محدود، تنها تفاضل میان سلول‌های مجاور رسوب بستر موردنیاز خواهد بود. میزان شار موج، $\xi_{k,i-1/2}$، با رابطه (26) به دست می‌آید [23]:

$$F(U_i) - F(U_{i-1}) = \nu(q_{bi} - q_{b(i-1)}) = \xi_{i-\frac{1}{2}} \tag{26}$$

[1] Einfeldt

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.9.5]

طبق رابطه (24) سرعت امواج در سطح برخورد بین دو سلول با رابطه (27) قابل محاسبه است:

$$s_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\xi_{i-\frac{1}{2}}}{W_{i-\frac{1}{2}}} \tag{27}$$

بنابراین تغییرات به‌روز شده بستر برای گام زمانی بعد توسط رابطه (28) محاسبه می‌شود:

$$B_i^{n+1} = B_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(A^+\Delta U_{i-\frac{1}{2}} + A^-\Delta U_{i+\frac{1}{2}}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\tilde{F}^n_{i-\frac{1}{2}} - \tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}}\right) \tag{28}$$

2-4- شرط پایداری

برای دست‌یابی به پایداری حل عددی، بایستی شرط پایداری کورانت اعمال گردد که به‌صورت رابطه (29) است [18]:

$$\mathrm{CFL} = \frac{\max(\lambda)\,\Delta t}{\Delta x} \tag{29}$$

که در آن $\lambda = \max[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^{\mathrm{T}}$ است.

3- تعریف مسئله و اعتبار سنجی

به‌منظور ارزیابی و اعتبار سنجی حل‌کننده عددی ارائه شده فوق، دو نمونه آزمایشی موردمطالعه قرارگرفته است. در نمونه اول مدل عددی برای شبیه‌سازی انتقال لایه رسوب سهموی استفاده می‌شود. در نمونه دوم انتشار یک توده رسوب با شرط اولیه جریان زیربحرانی در نظر گرفته شده است.

مدل عددی موردنظر با استفاده از کد نویسی در فرترن و بر روی پردازنده 7 هسته‌ای اینتل با حافظه داخلی 8 گیگابایت حل شده است.

3-1- انتقال لایه رسوب سهموی

هدف از این نمونه آزمایشی، مقایسه حل‌کننده ریمن تقویت‌شده با حل دقیق ارائه شده توسط هادسون و همکاران [3] با استفاده از مدل گرس است. عمق آب برابر با 10 متر، طول کانال موردنظر 1000 متر و دبی ثابت Q=10 m^3/s است. شرط اولیه برای پروفیل لایه رسوب به‌صورت رابطه (30) تعریف می‌گردد [12]:

$$B(x,0) = \begin{cases} B\,sin^2\left(\dfrac{\pi(x-300)}{200}\right), & 300 \le x \le 500 \\ 0\,, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{30}$$

حل دقیق برای این نمونه آزمایشی با فرض ثابت ماندن عمق آب و دبی رسوب برای تمام محدوده محاسباتی، تعیین می‌شود. با تنظیم مقادیر A_g=0.001، $m_g = 3$، $\varepsilon = 0.4$ و B=1 زمان t=238079s به دست می‌آید [12]. شکل 1 نتایج عددی به‌دست آمده با روش ریمن تقویت‌شده را به‌طور هم‌زمان با حل دقیق و پروفیل اولیه بستر نشان می‌دهد. نتایج محاسبه شده در زمان t=238079s و با 200 سلول محاسباتی و عدد $\mathrm{CFL} = 0.95$ است.

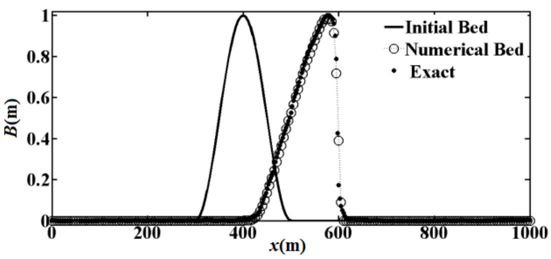

Fig. 1 Comparison of numerical results with the exact solution for the parabolic sediment propagation test case at t=238079 s and B =1

شکل 1 مقایسه نتایج عددی با حل دقیق نمونه آزمایشی انتقال رسوب سهموی در زمان t=238079 s و B=1

شکل 2 با همان داده‌های قبلی و با تفاوت در B =5 و زمان t=5339s به دست آمده است.

مطابق شکل‌های 1 و 2 تطابق خوبی بین روش موردنظر با حل دقیق مسئله برای هر دو مقدار B به‌خصوص در قسمت فوقانی توده رسوب متحرک، برخلاف اختلاف زیاد مشاهده شده در روش‌های عددی توسعه‌یافته بر اساس شارهای غیر بقائی [1]، مشاهده می‌شود.

شکل‌های 3 و 4 تفاوت بین روش ریمن تقویت‌شده جفت شده ضعیف مرتبه اول و مرتبه دوم به ترتیب با B=1 و B=5 را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود الگوریتم مرتبه اول نتایج با پخشیدگی بیشتری را از خود نشان می‌دهد درحالی‌که روش مرتبه دوم کاملاً بر حل تحلیلی منطبق می‌باشد.

3-2- انتشار توده رسوب با جریان زیربحرانی اولیه

این نمونه آزمایشی توسط کوردیر و همکاران [7] ارائه شده است و توانایی حل‌کننده عددی را در مدل‌سازی انتشار توده رسوب با مقادیر مختلف برای

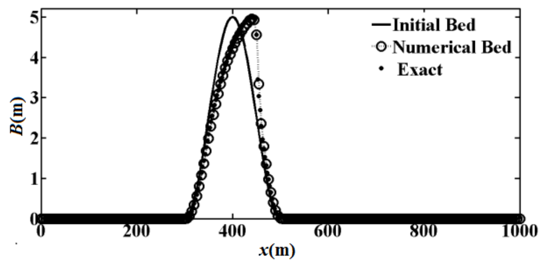

Fig. 2 Comparison of numerical results with the exact solution for the parabolic sediment propagation test case at t=5339 s and B =5

شکل 2 مقایسه نتایج عددی با حل دقیق نمونه آزمایشی انتقال رسوب سهموی در زمان t=5339 s و B=5

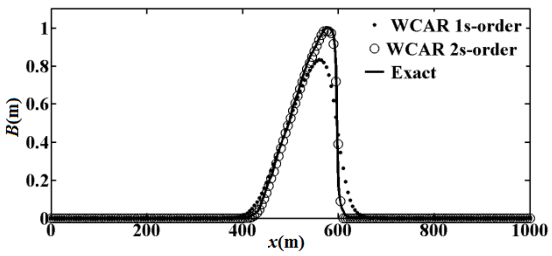

Fig. 3 Comparison between first and second-order weakly coupled scheme using augmented Riemann solver with B=1

شکل 3 مقایسه بین روش ریمن تقویت‌شده بر اساس روش جفت شده ضعیف مرتبه اول و مرتبه دوم با B=1

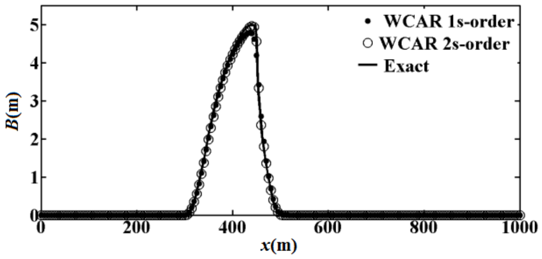

Fig. 4 Comparison between first and second-order weakly coupled scheme using augmented Riemann solver with B=5

شکل 4 مقایسه بین روش ریمن تقویت‌شده بر اساس روش جفت شده ضعیف مرتبه اول و مرتبه دوم با B=5

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.9.5]

A_g که سبب ایجاد رژیم‌های تعاملی بین تراز آب و رسوب می‌شود، بررسی می‌کند. شرایط اولیه برای پروفیل بستر، دبی و سرعت متوسط عمق در رابطه (31) ارائه گردیده است [7]:

$$\begin{cases} hu(x,0) = 0.5 \\ B(x,0) = 0.1 + 0.1exp^{-(x-5)^2} \\ \dfrac{u^2}{2} + g(h+B) = 6.386 \end{cases} \qquad (31)$$

شکل 5 نشان‌دهنده شرط اولیه برای تراز سطح آب و پروفیل بستر است.

برای ایجاد تعامل متوسط برای شرایط اولیه فوق ابتدا فرمول گرس با A_g=0.005 استفاده گردید. نتایج عددی به‌دست‌آمده در t=10 s با کمک 200 سلول محاسباتی و CFL = 0.95 در شکل 6 قابل‌مشاهده است.

مطابق شکل 6، مدل ارائه شده به‌خوبی قادر به شبیه‌سازی امواج شوک ایجاد شده ناشی از حرکت لایه رسوب می‌باشد. شکل 7 نشان‌دهنده نتایج برای مدل عددی با عدد CFL = 0.95، t=2.1 s و مقدار متفاوت A_g=0.07 است.

قابل ذکر است که مقدار A_g=0.07 باعث ایجاد تعامل قوی‌تری بین رسوب بستر و سطح آزاد جریان می‌شود که منجر به نتایج غیر فیزیکی می‌گردد [7]، اما درروش ارائه شده این مشکل ایجاد نمی‌شود و نتایج عددی تقریبی بسیار

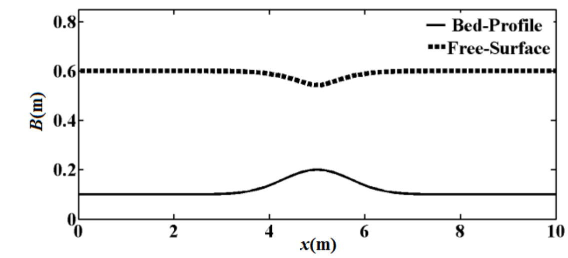

Fig. 5 Initial condition for the second test-case defined in Eq(31)

شکل 5 شرط اولیه برای نمونه آزمایشی دوم طبق معادله (31)

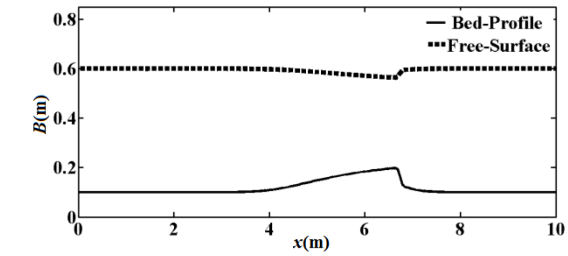

Fig. 6 Sediment hump propagation in a subcritical regime with A_g=0.005 at t=10 s

شکل 6 انتشار توده رسوب در جریان زیربحرانی با A_g=0.005 در t=10 s

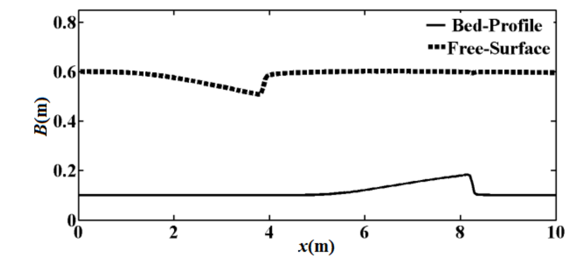

Fig. 7 Sediment hump propagation in a subcritical regime with A_g=0.07 at t=2.1 s

شکل 7 انتشار توده رسوب در جریان زیربحرانی با A_g=0.07 در t=2.1 s

خوبی را برای شبیه‌سازی راه‌حل ارائه می‌دهد.

برای بررسی کارآمدی مدل عددی مطرح شده در به‌کارگیری مقدار متغیر A_g، فرمول مایر- پیتر برای تقریب رابطه انتقال رسوب بستر استفاده می‌شود. بدین منظور شرایط اولیه به‌صورت رابطه (31) و نیز $hu(x=0,t)$ = 0.8 در نظر گرفته می‌شود. شکل 8 نتایج عددی با مقادیر CFL=0.95، n=0.095، ρ_s = 2612 kg/m^3 و A_g به دست آمده با استفاده از فرمول مایر- پیتر را نشان می‌دهد.

همان‌طور که در شکل 8 مشاهده می‌شود، روش عددی ارائه شده در این پژوهش قادر به مدل‌سازی مناسب امواج ایستا ایجاد شده برای رسوب کف و جریان سطح آزاد بدون ایجاد هرگونه نوسانات عددی، حتی برای مقادیر متغیر A_g و فرمول مایر-پیتر می‌باشد.

به‌منظور درک بهتر عملکرد روش پیشنهادی در مقایسه با سایر روش‌های عددی در دسترس، مقایسه‌ای بین نتایج روش ریمن تقویت‌شده بر اساس روش جفت شده ضعیف (WCAR) و روش روش جداشده بر اساس روش شار موج اصلاح شده (MSFW) که توسط مهدیزاده و شریفی [9] ارائه شده است، انجام گردید. در جدول 3 در شرایط A_g =0.005 و زمان t=10 s، مقادیر نرم اقلیدسی محاسبه شده بین روش WCAR و روش MSFW با نتایج حل مرجع به دست آمده با 10000 سلول محاسباتی، ارائه گردیده است. همچنین در جدول 4 مقایسه مشابهی در شرایط A_g =0.07 و زمان t=2.1 s، انجام پذیرفته است.

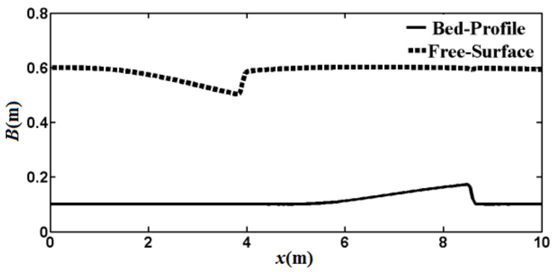

Fig. 8 Sediment hump propagation in a subcritical regime using Meyer-Peter formula t=2.1 s

شکل 8 انتشار توده رسوب در جریان زیربحرانی با استفاده از فرمول مایر- پیتر در زمان t=2.1 s

جدول 3 مقایسه تفاوت نرم‌های اقلیدسی محاسبه شده بین WCAR و MSFW با A_g =0.005 در زمان t=10 s و حل مرجع به‌دست‌آمده با 10000 سلول محاسباتی

Table 3 Comparison between the Euclidean norms of the difference between WCAR and MSFW simulations and the reference solution achieved with 10000 numerical cells at time t=10 s and A_g =0.005

تعداد سلول محاسباتی	50	100	200	400	800
نرم اقلیدسی به روش WCAR					
عمق	0.08554	0.05217	0.03101	0.01486	0.00448
مومنتم	0.01227	0.00792	0.00518	0.00277	0.00137
تراز ارتفاع بستر	0.05818	0.03536	0.02209	0.01107	0.00327
نرم اقلیدسی به روش MSFW					
عمق	0.09312	0.06556	0.04519	0.01049	0.00297
مومنتم	0.01553	0.01050	0.00691	0.00153	0.00692
تراز ارتفاع بستر	0.08036	0.05478	0.03570	0.00586	0.00182

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.9.5]

جدول 4 مقایسه تفاوت نرم‌های اقلیدسی محاسبه شده بین WCAR و MSFW با A_g=0.07 در زمان t=2.1 s و حل مرجع به‌دست‌آمده با 10000 سلول محاسباتی

Table 4 Comparison between the Euclidean norms of the difference WCAR and MSFW simulations and the reference solution achieved with 10000 numerical cells at time t=2.1 s and A_g=0.07

تعداد سلول محاسباتی	50	100	200	400	800
		نرم اقلیدسی به روش WCAR			
عمق	0.09034	0.05930	0.03977	0.02474	0.01390
مومنتم	0.08826	0.05809	0.03989	0.02560	0.01547
تراز ارتفاع بستر	0.06482	0.03999	0.03367	0.02578	0.01636
		نرم اقلیدسی به روش MSFW			
عمق	0.06300	0.03593	0.02127	0.02597	0.01915
مومنتم	0.09559	0.04789	0.02096	0.01082	0.01092
تراز ارتفاع بستر	0.08185	0.04365	0.02230	0.01283	0.01046

4- نتیجه‌گیری

در این پژوهش یک روش عددی به‌منظور حل سیستم مورفودینامیک یک‌بعدی با استفاده از یک حل‌کننده ریمن تقویت‌شده بر اساس روش جفت شده ضعیف، ارائه گردید. اعتبارسنجی حل‌کننده عددی ارائه شده، توسط مقایسه نتایج عددی با حل دقیق و شبیه‌سازی نمونه‌های آزمایشی بررسی گردید. در نمونه آزمایشی اول، شبیه‌سازی انتقال لایه رسوب سهموی با روش ریمن تقویت‌شده صورت گرفت. نتایج به دست آمده حاکی از تطابق بسیار خوب رویکرد مورد نظر با حل دقیق در تمام توده رسوب می‌باشند. هم‌چنین مشاهده شد که اعمال عبارات اصلاحی مرتبه دوم به معادلات مربوطه سبب افزایش دقت شبیه‌سازی گردید.

در نمونه آزمایشی دوم، حرکت یک توده رسوب با شرایط اولیه زیربحرانی جریان مدل‌سازی شد. مشاهده گردید که روش عددی ارائه شده با مقادیر متفاوت A_g که حتی منجر به یک برخورد شدید بین جریان سطحی و رسوب کف می‌شود، قادر به شبیه‌سازی دقیق حرکت رسوب می‌باشد. همان‌طور که در جداول 3 و 4 قابل‌مشاهده است، میزان تفاوت در نرم محاسبه شده نشان‌دهنده دقت بالای روش ریمن تقویت‌شده بر اساس روش جفت شده ضعیف (WCAR) نسبت به روش شار موج اصلاح شده بر اساس روش جداشده (MSFW) می‌باشد.

5- فهرست علایم

A_g	ثابت ابعادی گرس (s^2m^{-1})
B	تراز ارتفاع بستر (m)
d_m	قطر متوسط ذرات رسوب (mm)
$\tilde{F}$	عبارت اصلاحی مرتبه دوم
g	شتاب گرانش (m^2s^{-1})
G_s	چگالی نسبی
h	عمق آب (m)
n	ضریب زبری مانینگ
q	بردار شامل کمیت‌های بقائی
q_b	دبی انتقال رسوب (m^2s^{-1})
r_p	p امین بردار ویژه
s	سرعت موج
S_f	ضریب اصطکاک بستر
t	زمان (s)
U	تقریب متوسط بردار مجهولات
u	مؤلفه سرعت در جهت محور x (ms^{-1})
W	موج ریمن

علایم یونانی

α	ضریب موج
γ	وزن مخصوص آب (Nm^{-3})
γ_s	وزن مخصوص رسوب (Nm^{-3})
ε	تخلخل لایه رسوب
λ_p	p امین مقدار ویژه
ξ	موج شار
ρ	چگالی آب (kgm^{-3})
ρ_s	چگالی رسوب (kgm^{-3})
τ_b	تنش برشی لایه رسوب (Nm^{-2})
τ_b^*	عدد شیلدز
τ_{cr}^*	تنش برشی بحرانی
φ	شار مومنتم (m^3s^{-2})
ψ	دبی انتقال رسوب بی‌بعد
Δt	گام زمانی (s)
Δx	اندازه گره‌ها (m)

بالانویس‌ها

n	سطح زمانی

زیرنویس‌ها

i	شماره سلول محاسباتی
ε	نماد سرعت‌های اینفلت

6- مراجع

[1] M. J. Castro Díaz, E. D. Fernández-Nieto, A. M. Ferreiro, Sediment transport models in Shallow Water equations and numerical approach by high order finite volume methods, *Journal of Computers & Fluids*, Vol. 37, No. 3, pp. 299-316, 2008.

[2] M. J. Castro Dı´az ,E. D. Fernández-Nieto, A. M. Ferreiro, C. Parés, Two-dimensional sediment transport models in shallow water equations. A second order finite volume approach on unstructured meshes, *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 33–3, pp. 2520-2538, 2009.

[3] J. Hudson, P. K. Sweby, A high-resolution scheme for the equations governing 2D bed-load sediment transport, *Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 47, No. 10-11, pp. 1085-1091, 2005.

[4] A. Canestrelli, M. Dumbser, A. Siviglia, E. F. Toro, Well-balanced high-order centered schemes on unstructured meshes for shallow water equations with fixed and mobile bed, *Journal of Advances in Water Resources*, Vol. 33, No. 3, pp. 291-303, 2010.

[5] F. Benkhaldoun, M. Seaïd, Combined characteristics and finite volume methods for sediment transport and bed morphology in surface water flows, *Journal of Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 81, No. 10, pp. 2073-2086, 2011.

[6] A. Siviglia, G. Nobile, M. Colombini, Quasi-conservative formulation of the one-dimensional saint-venant–exner model, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 134, No. 10, pp. 1521-1526, 2008.

[7] S. Cordier, M. H. Le, T. Morales de Luna, Bedload transport in shallow water models: Why splitting (may) fail, how hyperbolicity (can) help, *Journal of Advances in Water Resources*, Vol. 34, No. 8, pp. 980-989, 2011.

[8] S. Saiedi, coupled modeling of alluvial flows, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 123, pp. 440-446, 1997.

[9] H. Mahdizadeh, S. Sharifi, efficient fully-coupled and splitting techniques based on a modified wave propagation algorithm for modelling bedload sediment transport, *Journal of Applied Mathematical Modelling*, to be published.

[10] G. Rosatti, L. Fraccarollo, A well-balanced approach for flows over mobile-bed with high sediment-transport, *Journal of Computational Physics*, Vol. 220, No. 1, pp. 312-338, 2006.

[11] D. L. George, Augmented Riemann solvers for the shallow water equations over variable topography with steady states and inundation, *Journal of*

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.9.5]

Computational Physics, Vol. 227, No. 6, pp. 3089-3113, 2008.

[12] J. Hudson, *Numerical Techniques for Morphodynamic Modelling*, Thesis, PhD Thesis, Department of Mathematics, University of Reading, Reading, 2001.

[13] A. J. Grass, *Sediment Transport by Waves and Currents*, pp. 10-32, London, University College, 1981.

[14] E. Meyer-Peter, R. Mueller, *Formulas for Bed-Load Transport*, Sweden, pp. 39–64, 1948.

[15] R. Fernandez Luque, R. Van Beek, erosion and transport of bed-load sediment, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 14, No. 2, pp. 127-144, 1976.

[16] P. Nielsen, *Coastal Bottom Boundary Layers and Sediment Transport*, pp. 103-125, Singapore: World Scientific, 1992.

[17] B. Camenen, M. Larson, A general formula for non-cohesive bed load sediment transport, *Journal of Estuarine, Coastal and Shelf Science*, Vol. 63, No. 1-2, pp. 249-260, 2005.

[18] R. J. LeVeque, balancing source terms and flux gradients in high-resolution godunov methods: the quasi-steady wave-propagation algorithm, *Journal of Computational Physics*, Vol. 146, No. 1, pp. 346-365, 1998.

[19] P. L. Roe, Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, No. 2, pp. 357-372, 1981.

[20] D. L. George, *Finite Volume Methods and Adaptive Refinement for Tsunami Propagation and Inundation*, PhD Thesis, Department of Applied Mathematics, University of Washington, Washington, 2006.

[21] R. J. LeVeque, D. L. George, High-resolution finite volume methods for the shallow water equations with bathymetry and dry states, *Proceedings of The Long-Wave workshop*, Catalina, pp. 43-73, 2008.

[22] D. S. Bale, R. J. LeVeque, S. Mitran, J. A. Rossmanith, A wave propagation method for conservation laws and balance laws with spatially varying flux functions, *Journal on Scientific Computing*, Vol. 24, No. 3, pp. 955-978, 2003.

[23] R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, pp. 333-335, Cambridge, Cambridge University Press, 2002.