مجله مهندسی مکانیک مدرس، فوق‌العاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 16، ص‌ص 143-151

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

ضریب شدت تنش برای ترک نیم‌بیضوی طولی در یک استوانه جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی هذلولوی

محمدباقر نظری[1*]، امید عاصمی[2]

1- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

* شاهرود، صندوق پستی 3619995161، mbnazari@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 18 فروردین 1393

پذیرش: 06 اردیبهشت 1393

ارائه در سایت: 10 آبان 1393

کلید واژگان:

ترک نیم‌بیضوی

ضریب شدت تنش

هدایت گرمایی هذلولوی

استوانه جدار ضخیم

روش تابع وزنی

چکیده

در این مقاله، ضریب شدت تنش برای یک ترک نیم‌بیضوی طولی در سطح داخلی یک استوانه جدار ضخیم به‌صورت تحلیلی و عددی تعیین شده است. استوانه به قدر کافی بلند درنظر گرفته شده است و تحت شوک حرارتی غیرفوریه‌ای (هذلولوی) سرمایشی در سطح داخلی به‌طور متقارن محوری قرار دارد. معادلات ترموالاستیسیته حاکم به‌صورت غیرکوپل حل شده‌اند. جواب تحلیلی معادله هدایت گرمایی پس از بی‌بعد سازی با روش جداسازی متغیرها استخراج می‌شود. ضریب شدت تنش برای عمق و گوشه‌های ترک با استفاده از روش تابع وزنی به‌دست می‌آید. نتایج، رفتار متفاوت ترک تحت شوک حرارتی هذلولوی نسبت به مدل فوریه را نشان می‌دهد. در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک حرارتی، ضریب شدت تنش در عمق ترک به‌خصوص برای ترک‌های با عمق نسبی کمتر در مدل هذلولوی به‌طور قابل ملاحظه‌ای بزرگ‌تر از مدل فوریه است. ضریب شدت تنش عمق ترک برای دو مدل در ترک‌های نازک‌تر مقدار بیشتری است. در گوشه ترک نیز ضریب شدت تنش برای مدل هذلولوی همیشه بزرگ‌تر از مدل فوریه است. برخلاف بارگذاری مکانیکی، حداکثر ضریب شدت تنش ممکن است در گوشه ترک اتفاق بیفتد. مطابق نتایج، درنظر گرفتن مدل مناسب هدایت گرمایی در طراحی سازه‌ها تحت بار حرارتی گذرا اهمیت ویژه‌ای دارد.

Stress intensity factor for a longitudinal semi-elliptical crack in a thick-walled cylinder under hyperbolic thermal loading

Mohammad Bagher Nazari[1*], Omid Asemi[2]

1- Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran
* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, mbnazari@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 07 April 2014
Accepted 26 April 2014
Available Online 01 November 2014

Keywords:
Semi-Elliptical Crack
Stress Intensity Factor
Hyperbolic Heat Conduction
Thick-Walled Cylinder
Weight Function Method

ABSTRACT

In this paper, the stress intensity factor for a longitudinal semi-elliptical crack in the internal surface of a thick-walled cylinder is derived analytically and numerically. The cylinder is assumed long enough and subjected to the axisymmetric cooling thermal shock on the internal surface. The uncoupled thermoelasticity governing equations for an uncracked cylinder are solved analytically. The non-dimensional hyperbolic heat equation is solved using separation of variables method. The weight function method is implemented to obtain the stress intensity factor for the deepest and surface points of the crack. Results show the different behavior of the crack under hyperbolic thermal shock. A short time after the thermal shock, the stress intensity factor at the deepest point –especially for shallow cracks for hyperbolic model is significantly greater than Fourier one. The stress intensity factor at the deepest point is greater as the crack is narrower for both models. Unlike mechanical loading, the greatest stress intensity factor may occur at the surface point. According to the results, assumption of adequate heat conduction model for structure design under transient thermal loading is critical.

1- مقدمه

هدایت گرمایی سریع یکی از مسائلی است که در تجهیزات مهندسی مدرن مانند راکتورهای جوش هسته‌ای، دستگاه‌های تولید و انتقال اشعه ایکس و لیزر اتفاق می‌افتد[1]. در این موارد، توزیع دمای حاصل از قانون فوریه، به اندازه کافی دقیق نیست. برای مثال، دمای اندازه‌گیری شده در تختال نازکی که تحت گرمایش با لیزر قرار گرفته است، در زمان‌های نزدیک به اعمال شوک حرارتی حدود 300 درجه سانتیگراد بیشتر از دمایی است که با استفاده از قانون فوریه پیش‌بینی می‌شود[2]. مهم‌ترین نقص قانون فوریه، منجر شدن به سرعت بی‌نهایت امواج حرارتی است. برای حل این مشکل، تئوری هدایت گرمایی هذلولوی شامل یک تأخیر زمانی برای شار حرارتی ارائه شده است که در تغییر دما مطابق با شرایط مرزی یا اوّلیه اعمالی درنظر گرفته می‌شود[1].

وجود عیوب و ترک‌های سطحی یکی از مسائل معمول در سازه‌های مدور مثل لوله‌ها و مخازن تحت فشار است. ارزیابی دقیق ایمنی و تخمین عمر این

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

M.B. Nazari, O. Asemi, Stress intensity factor for a longitudinal semi-elliptical crack in a thick-walled cylinder under hyperbolic thermal loading, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 16, pp. 143-151, 2015 (In Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.17.6]

سازه‌ها مستلزم بررسی رفتار ترک است. لین و اسمیت نشان دادند ترک نیم-بیضوی، مدل مناسبی برای نقص‌های داخلی سازه‌های استوانه‌ای است[3]. شهرآیینی و هاشمی با کاربرد نمودار ارزیابی آسیب، اثر ابعاد ترک‌های نیم-بیضوی بر ایمنی لوله‌های انتقال گاز را بررسی کردند[4]. بخش عمده‌ای از مطالعات انجام شده در خصوص رفتار ترک در لوله‌ها و مخازن تحت فشار با استفاده از روش‌های المان محدود و المان مرزی و با کاربرد روش‌های عددی تعیین ضریب شدت تنش مانند انتگرال J[4] انجام شده است. روش‌های مذکور با توجه به هندسه سه‌بعدی مسأله و تابع زمان بودن آن، زمان‌بر، پرهزینه و همراه با دشواری‌هایی است.

روش تابع وزنی یک ابزار کارآمد برای تعیین ضریب شدت تنش با توجه به توزیع تنش در جسم بدون ترک است. اگر تابع وزنی برای یک جسم دارای ترک معلوم باشد، با انتگرال‌گیری از حاصلضرب تابع وزنی و توزیع تنش در جسم بدون ترک روی سطح ترک می‌توان ضریب شدت تنش را به‌دست آورد. شاهانی و نبوی با استفاده از روش تابع وزنی، یک عبارت تحلیلی برای ضرایب شدت تنش در عمق و سطح یک ترک نیم‌بیضوی طولی در یک استوانه تحت فشار داخلی و بار حرارتی پایا[5] و گذرا ارائه نمودند. در این مطالعات، استوانه تحت شرایط مرزی حرارتی ثابت[6] و وابسته به زمان[7] قرار داشت و در هر لحظه توزیع تنش حرارتی در استوانه با برازش منحنی چندجمله‌ای تقریب زده شد. زو نیز با کاربرد روش تابع وزنی و تقریب توزیع تنش حرارتی با توابع چندجمله‌ای، ضریب شدت تنش حرارتی برای استوانه حاوی ترک نیم‌بیضوی طولی را با تقریب حداقل مربعات به‌دست آورد[8]. ما و لیو[9] با معرفی تابع وزنی حرارتی، ضریب شدت تنش حرارتی را با انتگرال‌گیری از حاصلضرب توزیع دما و تابع وزنی حرارتی روی سطح ترک به‌دست آوردند. هر چند در این روش به محاسبه تنش حرارتی در جسم بدون ترک نیازی نیست؛ اما تابع وزنی حرارتی باید برای آن به‌دست آید که کار دشوارتری است. لو و همکارانش[10] با استفاده از روش گسترش ترک مجازی، تابع وزنی حرارتی را برای نقاط مختلف یک ترک نیم‌بیضوی طولی به‌دست آوردند. در تحقیق-های فوق هدایت گرمایی براساس قانون فوریه درنظر گرفته شده است.

چانگ و ونگ[11] ضریب شدت تنش برای یک ترک لبه‌ای عمودی در یک محیط نیمه‌بی‌نهایت را به‌دست آورده‌اند که تحت شوک حرارتی هذلولوی قرار دارد. ایشان با حل تحلیلی میدان دما و تنش و سپس با انتگرال‌گیری عددی از رابطه تابع وزنی، تغییرات زمانی ضریب شدت تنش را ارائه نموده‌اند. طبق این نتایج، ضریب شدت تنش حاصل از قانون هدایت گرمایی هذلولوی از مقادیر متناظر با قانون فوریه بزرگ‌تر است. هو و چن[12] ضرایب شدت تنش را برای یک ترک محدود موازی با مرز در یک باریکه تحت شوک حرارتی هذلولوی به‌دست آورده‌اند. ونگ و هان[13] نیز ضریب شدت تنش را برای یک ترک سکه‌ای در فصل مشترک دو باریکه از جنس مواد مرکب ارائه نموده‌اند. چن و هو یک نیم‌صفحه حاوی ترک تحت شوک حرارتی هذلولوی را بررسی کرده‌اند[14]. اخیرا، چن و هو ضرایب شدت تنش برای یک سیستم هسته/پوشش تحت بار دینامیکی[15] و استاتیکی[16] را به‌طور تحلیلی به-دست آورده‌اند که یک ترک محدود در هسته و موازی با مرز پوشش درنظر گرفته شده است.

طبق اطلاع نویسندگان، تاکنون گزارشی در مورد ضریب شدت تنش در استوانه‌های حاوی ترک نیم‌بیضوی طولی تحت بارگذاری حرارتی غیرفوریه‌ای منتشر نشده است. در این مقاله، ضریب شدت تنش برای عمق و گوشه یک ترک نیم‌بیضوی طولی در یک استوانه جدار ضخیم با کاربرد روش تابع وزنی و یک عبارت تحلیلی تعیین و با انتگرال‌گیری عددی ارزیابی شده است که تحت بارگذاری حرارتی غیرفوریه‌ای (هذلولوی) قرار دارد. میدان‌های دما و تنش به‌صورت تحلیلی به‌دست آمده‌اند. ضریب شدت تنش برای گوشه‌ها و عمق ترک نیم‌بیضوی در طول استوانه نیز با کاربرد تابع وزنی تعیین شده است. هندسه استوانه و ترک در شکل 1 نشان داده شده است.

بخش‌های بعدی مقاله به این صورت است: در بخش 2، حل تحلیلی معادلات ترموالاستیسیته حاکم برای استوانه بدون ترک ارائه شده است. بخش 3، روش تابع وزنی برای محاسبه ضریب شدت تنش در عمق و سطح ترک آمده است. بخش 4 شامل نتایج و بحث در مورد آن و در بخش 5 نیز نتیجه‌گیری بیان شده است.

2- میدان‌های دما و تنش در استوانه بدون ترک

در این بخش، میدان‌های دما و تنش در یک استوانه با شعاع‌های داخلی R_i و خارجی R_o و به اندازه کافی بلند به‌دست می‌آید که تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی به‌صورت متقارن محوری قرار دارد. از کوپل میدان‌های کرنش و دما و همچنین نیروهای اینرسی صرف‌نظر می‌شود. معادلات حاکم ترموالاستیسیته شبه‌استاتیکی به‌صورت روابط (1) و (2) است:

$$k\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \tau_0\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \rho c\frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} - \beta\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

که $\beta=\alpha(1+\nu)/(1-\nu)$، α ضریب انبساط حرارتی، ν ضریب پواسون، k ضریب هدایت گرمایی، c ظرفیت حرارتی، ρ چگالی، u میدان جابه‌جایی و T میدان دماست. رابطه هدایت گرمایی هذلولوی (2) با فرض $\tau_0=0$ به رابطه هدایت گرمایی فوریه کاهش می‌یابد. شرایط مرزی و اولیه دمایی به‌صورت روابط (3-الف) تا (3-د) است.

$$T(R_i, t) = -T_1 \quad (\text{3-الف})$$

$$T(R_o, t) = 0 \quad (\text{3-ب})$$

$$T(r, 0) = 0 \quad (\text{3-ج})$$

$$\frac{\partial T(r, 0)}{\partial t} = 0 \quad (\text{3-د})$$

همچنین، اعمال فشار داخلی p_i و خارجی p_o یکنواخت به استوانه به‌صورت شرایط مرزی مکانیکی مطابق روابط (4-الف) و (4-ب) بیان می‌شود.

$$\sigma_r(R_i, t) = -p_i \quad (\text{4-الف})$$

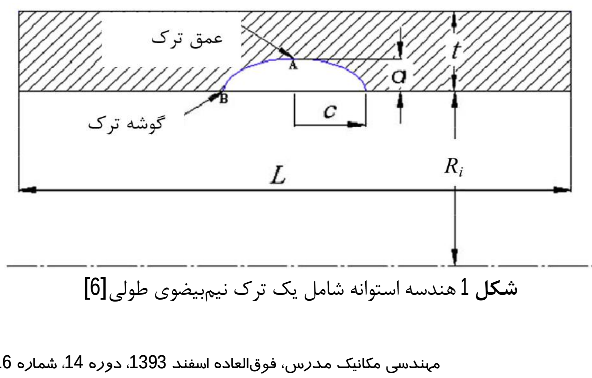
$$\sigma_r(R_o, t) = -p_o \quad (\text{4-ب})$$

2-1- میدان دما

میدان دما در استوانه بدون ترک از حل معادله هدایت گرمایی (2) با توجه به شرایط اولیه و مرزی (3) به‌دست می‌آید. رابطه هدایت گرمایی هذلولوی برحسب متغیرهای بی‌بعد به‌صورت رابطه (5) بیان می‌شود.

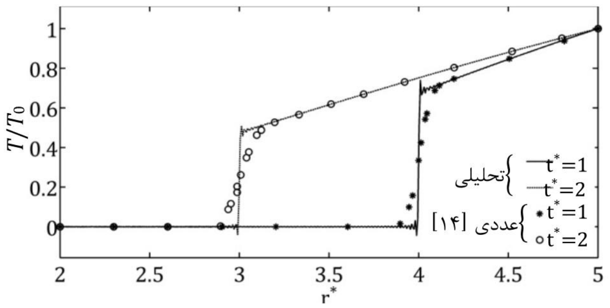
$$\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial T}{\partial r^*}\right) = \frac{\partial^2 T}{\partial t^{*2}} + \frac{\partial T}{\partial t^*} \quad (5)$$

که در آن، r^*، t^* و l_0 به‌صورت رابطه (6-الف) تا (6-ج) تعریف می‌شوند.

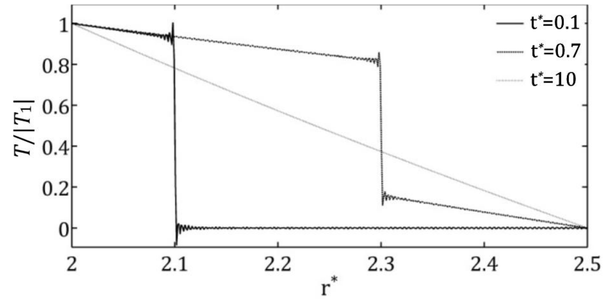


شکل 1 هندسه استوانه شامل یک ترک نیم‌بیضوی طولی[6]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.17.6]



شکل 2 مقایسه توزیع دما در دیواره استوانه حاصل از رابطه تحلیلی (7) و نتایج عددی[14]



شکل 3 توزیع دما در دیواره استوانه طبق مدل هدایت گرمایی هذلولوی

$$t^* = \frac{t}{\tau_0} \tag{6 -الف}$$

$$r^* = \frac{r}{l_0} \tag{6 -ب}$$

$$l_0 = \sqrt{\frac{k\tau_0}{\rho c}} \tag{6 -ج}$$

میدان دما با حل رابطه هدایت گرمایی (5) با استفاده از روش جداسازی متغیرها برحسب متغیرهای بی‌بعد r^* و t^* به‌صورت رابطه (7) حاصل می‌شود.

$$T(r^*, t^*) = S(r^*) + \sum \Lambda_0(\lambda_n r^*) f_n(t^*) \tag{7}$$

عبارتهای رابطه (7) در روابط (8) به‌صورت مشروح آمده است.

$$S(r^*) = T_1 \frac{\ln(r^*/R_o^*)}{\ln(R_i^*/R_o^*)} \tag{8-الف}$$

$$\omega_n = \sqrt{{\lambda_n}^2 - 0.25} \tag{8-ب}$$

$$\Lambda_\mu(\lambda_n r^*) = J_0(\lambda_n R_i^*) Y_\mu(\lambda_n r^*) - J_\mu(\lambda_n r^*) Y_0(\lambda_n R_i^*) \tag{8-ج}$$

$$\Omega_n(t^*) = e^{-t^*/2}(a_n \cos(\omega_n t^*) + b_n \sin(\omega_n t^*)) \tag{8-د}$$

در رابطه (8- د)، ضرایب a_n و b_n با توجه به خاصیت تعامد حل‌های معادله دیفرانسیل اشتروم-لیوویل از رابطه (9-الف) و (9-ب) به‌دست می‌آید.

$$a_n = \frac{\int_{R_i}^{R_o} r^* S(r^*) \Lambda_0(\lambda_n r^*) dr^*}{\int_{R_i}^{R_o} r^* \left(\Lambda_0(\lambda_n r^*)\right)^2 dr^*} = -T_1 \pi^2 {J_0}^2(\lambda_n R_o^*)$$
$$\left(\frac{2}{\pi} + \frac{\Lambda_0(\lambda_n R_o^*)}{\ln(R_i^*/R_o^*)}\right) / 2 \left({J_0}^2(\lambda_n R_i^*) - {J_0}^2(\lambda_n R_o^*)\right) \tag{9- الف}$$

$$b_n = \frac{a_n}{2\omega_n} \tag{9- ب}$$

ضرایب λ_n نیز ریشه‌های معادله (10) هستند.

$$\Lambda_0(\lambda_n R_o^*) = J_0(\lambda_n R_i^*) Y_0(\lambda_n R_o^*) - J_0(\lambda_n R_o^*) Y_0(\lambda_n R_i^*) = 0 \tag{10}$$

در شکل 2، توزیع دمای حاصل از رابطه (7) با نتایج عددی[14] مقایسه شده است. نتایج عددی برای استوانه‌ای با شعاع‌های داخلی $R_i^*=2$ و خارج ی $R_o^*=5$ با کاربرد 500 المان چهارگوش 9گره‌ای در روش المان محدود برای گسسته‌سازی فضا و به‌کارگیری روش پسرو در روش تفاضل محدود برای گسسته‌سازی زمان به‌دست آمده است. در ابتدا، دمای سطح خارجی استوانه از دمای اولیه استوانه (صفر) تا T_0 افزایش می‌یابد. هرچند کاربرد روش پسرو مثل روش‌های تفاضل مرکزی و پیشرو در تعیین توزیع دما باعث نوسان در نزدیکی موقعیت ناپیوستگی نمی‌شود، اما تغییر یکباره دما در پیشانی موج را در یک بازه ایجاد می‌نماید (دو روش دیگر پرش دما را صحیح‌تر مدل می‌کنند).

در شکل 3، توزیع دما در استوانه برای زمان‌های مختلف رسم شده است. سرعت محدود موج گرمایی در توزیع دما برای $t^*=0.1$ به‌خوبی مشهود است، در نقاط ناحیه اثر موج گرمایی، دما تغییر کرده است؛ درحالی که نقاط بین پیشانی موج و سطح خارجی استوانه هنوز در دمای اولیه قرار دارند. توزیع دما برای $t^*=0.7$ نیز برگشت موج گرمایی پس از برخورد با سطح خارجی استوانه را نشان می‌دهد. استهلاک موج گرمایی در این منحنی از نکات قابل ذکر است. نزدیک شدن توزیع دمای هذلولوی به توزیع دمای فوریه‌ای پس از استهلاک موج گرمایی نیز در توزیع دمای متناظر با $t^*=10$ دیده می‌شود که در این زمان پیشانی موج گرمایی کاملا مستهلک شده است.

2-2- میدان تنش

رابطه تعادل برحسب جابه‌جایی در جهت r به‌صورت بی‌بعد، مطابق رابطه (11)، قابل بیان است.

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial u^*}{\partial r^*} - \frac{u^*}{r^{*2}} - \beta \frac{\partial T}{\partial r^*} = 0 \tag{11}$$

که در آن، u^* به‌صورت رابطه (12) تعریف می‌شود.

$$u^* = \frac{u}{l_0} \tag{12}$$

رابطه (13) جابه‌جایی بی‌بعد u^* را نشان می‌دهد که از حل معادله (11) به‌دست آمده است.

$$u^*(r^*, t^*) = \frac{\beta}{r^*}\Big(\frac{(1-2\nu)r^{*2} + R_i^{*2}}{{R_o^*}^2 - R_i^{*2}} \int_{R_i^*}^{R_o^*} r^* T(r^*, t^*) dr^* +$$
$$\int_{R_i^*}^{r^*} r^* T(r^*, t^*) dr^*\Big) + A(t^*) r^* + \frac{B(t^*)}{r^*} =$$
$$\frac{\beta}{r^*}\Big(\frac{(1-2\nu)r^{*2} + R_i^{*2}}{{R_o^*}^2 - R_i^{*2}}\Big(\frac{T_1}{\ln(R_i^*/R_o^*)}\Big(\frac{R_i^{*2}}{4} - \frac{{R_o^*}^2}{4} -$$
$$\frac{R_i^{*2}}{2}\ln\Big(\frac{R_i^*}{R_o^*}\Big)\Big) + \sum \frac{\Omega_n(t^*)}{\lambda_n}\left(R_o^* \Lambda_1(\lambda_n R_o^*) - R_i^* \Lambda_1(\lambda_n R_i^*)\right)$$
$$+ \frac{T_1}{\ln(R_i^*/R_o^*)}\Big(\frac{r^{*2}}{2}\ln\Big(\frac{r^*}{R_o^*} - \frac{1}{2}\Big) - \frac{R_i^{*2}}{2}\ln\Big(\frac{R_i^*}{R_o^*} - \frac{1}{2}\Big) +$$
$$\sum \frac{1}{\lambda_n}\Omega_n(t^*)\left(r^* \Lambda_1(\lambda_n r^*) - R_i^* \Lambda_1(\lambda_n R_i^*)\right)$$
$$+ A(t^*) r^* + B(t^*)/r^* \tag{13}$$

ثابت‌های A و B با اعمال شرایط مرزی مکانیکی به‌دست می‌آیند. برای تنش حرارتی، تنش عمودی در راستای شعاعی در دیواره داخلی و خارجی استوانه برابر صفر است (معادله (14)).

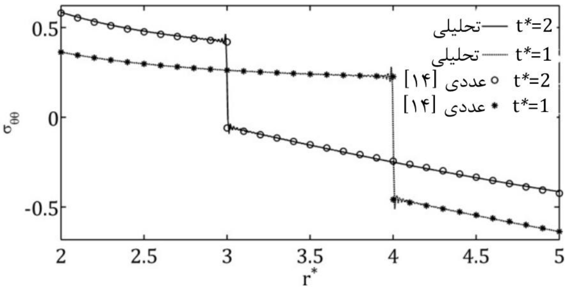
$$\sigma_r(R_i, t) = 0 \tag{14-الف}$$

$$\sigma_r(R_o, t) = 0 \tag{14-ب}$$

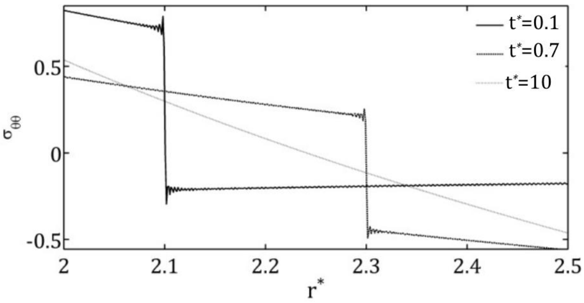
توزیع تنش محیطی در استوانه نیز به‌صورت رابطه (15) است.

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}(r^*, t^*)}{\frac{E\alpha}{(1-\nu)}} = \frac{(1 + R_i^{*2}/r^{*2})}{{R_o^*}^2 - R_i^{*2}} \int_{R_i^*}^{R_o^*} r^* T(r^*, t^*) dr^*$$
$$+ \frac{1}{r^{*2}} \int_{R_i^*}^{r^*} r^* T(r^*, t^*) dr^* - T(r^*, t^*)$$
$$= \frac{{R_o^*}^2 + R_i^{*2}}{{R_o^*}^2({R_o^*}^2 - R_i^{*2})}\Big(\frac{T_1}{\ln(R_i^*/R_o^*)}\left(\frac{R_i^{*2} - {R_o^*}^2}{4} - \frac{R_i^{*2}}{2}\ln\Big(\frac{R_i^*}{R_o^*}\Big)\right)$$
$$+ \sum \frac{1}{\lambda_n}\Omega_n(t^*)\left(R_o^* \Lambda_1(\lambda_n R_o^*) - R_i^* \Lambda_1(\lambda_n R_i^*)\right)\Big)$$
$$+ \frac{T_1}{\ln(R_i^*/R_o^*)}\left[\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{r^*}{R_o^*} - \frac{1}{2}\Big) - \frac{R_i^{*2}}{2r^{*2}}\ln\Big(\frac{R_i^*}{R_o^*} - \frac{1}{2}\Big)\right]$$
$$+ \sum \frac{1}{\lambda_n r^{*2}}\Omega_n(t^*)\left(r^* \Lambda_1(\lambda_n r^*) - R_i^* \Lambda_1(\lambda_n R_i^*)\right) \tag{15}$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.17.6]



شکل 4 مقایسه تنش محیطی بی‌بعد تحلیلی (رابطه 15) و حاصل از توزیع دمای عددی[14]



شکل 5 توزیع تنش محیطی در دیواره استوانه طبق مدل هدایت گرمایی هذلولوی

توزیع تنش محیطی حاصل از رابطه تحلیلی (15) با توزیع تنش ناشی از توزیع دمای عددی[14] در شکل 3 مقایسه شده است. توزیع تنش اخیر در مرجع [14] نیامده و توسط نویسندگان با استفاده از توزیع دمای عددی[14] (شکل 2) به‌دست آمده است. برای این کار، دو منحنی بر توزیع دما در هر لحظه از ابتدا تا موقعیت دقیق ناپیوستگی و از ناپیوستگی تا انتهای بازه برازش شده است. نتیجه دو روش تطابق قابل قبولی با یکدیگر دارد.

در شکل 5، تغییرات تنش محیطی بی‌بعد در استوانه برای زمان‌های مختلف رسم شده است. تنش محیطی به‌صورت رابطه (16) بی‌بعد شده است.

$$\sigma^*_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}/(E\alpha T_1/(1-\nu)) \quad (16)$$

تنش محیطی ناشی از توزیع دمای غیرفوریه‌ای با تنش حاصل از توزیع دمای فوریه‌ای تفاوت قابل توجهی دارد. اثر سرعت محدود موج تنش در نمودارها مشهود است. در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک حرارتی، تنش کششی در دیواره داخلی تا موقعیت پیشانی موج تنش به‌وجود می‌آید و در بخش دیگر دیواره تنش محیطی فشاری است.

اما با گذشت زمان موج تنش مستهلک شده و نهایتا بر توزیع تنش حاصل از مدل فوریه منطبق می‌شود (در شکل نشان داده نشده است).

3- تعیین ضریب شدت تنش با روش تابع وزنی

3-1- روش تابع وزنی

با توجه به خطی بودن مسأله تحلیل ترک تحت بار حرارتی، با اعمال اصل برهم نهی، این مسأله به استوانه‌ای حاوی ترک تبدیل می‌شود که در حالت هم‌دما قرار دارد و تنها نیروی خارجی، عکس تنش حرارتی در استوانه بدون ترک است که به سطح ترک اعمال می‌شود. مسأله اخیر با روش‌های مختلفی از جمله روش تابع وزنی قابل تحلیل است.

اگر تابع وزنی $m(x,a)$ برای یک هندسه خاص معلوم باشد، ضریب شدت تنش با انتگرال‌گیری از حاصل‌ضرب توزیع تنش در هندسه بدون ترک $\sigma(x)$ و تابع وزنی روی سطح فرضی ترک به‌صورت رابطه (17) تعیین می‌شود.

$$K = \int_0^a m(x,a)\sigma(x)dx \quad (17)$$

باکنر[15] و رایس[16] تابع وزنی را برحسب بازشدگی سطح ترک به‌صورت رابطه (18) بیان نمودند.

$$m(x,a) = \frac{H}{K_r}\frac{\partial v_r(x,a)}{\partial a} \quad (18)$$

که در آن، a طول ترک، v_r بازشدگی سطح ترک، K_r ضریب شدت تنش مرجع و H ثابتی است که به خصوصیات ماده بستگی دارد. در دسترس نبودن تابع بازشدگی برای هندسه و ترک‌های مختلف، کاربرد رابطه (18) برای تعیین تابع وزنی را محدود می‌کند. از این‌رو، روش‌های مختلفی شامل کاربرد تقریبی جامع برای تابع بازشدگی سطح ترک توسط پتروسکی و آخن‌باخ[17] و یا پیشنهاد توابع وزنی تقریبی برای هندسه‌های متفاوت ارائه شده است. گلینکا و شن[18] یک تابع وزنی تقریبی شامل چهار جمله پیشنهاد نموده‌اند که کاربرد آن برای ترک‌های نیم‌بیضوی منجر به نتایجی با خطای کمتر از 1% می‌شود. این تابع وزنی شامل یک جمله تکین در نوک ترک با مرتبه 0/5 و سه جمله دیگر با سه ضریب مجهول است که معمولا با استفاده از دو بارگذاری مرجع و شرط مرزی جابه‌جایی تعیین می‌شود.

3-2- تابع وزنی برای گوشه‌ها و عمق ترک نیم‌بیضوی

تابع وزنی برای عمیق‌ترین نقطه یک ترک نیم‌بیضوی (نقطه A در شکل 1) در راستای طولی استوانه به‌صورت رابطه (19) است[18].

$$m(r,a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi(R_i+a-r)}}\left[1 + M_1\left(1-\frac{r-R_i}{a}\right)^{0.5} + M_2\left(1-\frac{r-R_i}{a}\right) + M_3\left(1-\frac{r-R_i}{a}\right)^{1.5}\right] \quad (19)$$

ثابت‌های مجهول M_i (i=1, 2, 3) با درنظر گرفتن دو بارگذاری مرجع و شرط صفر بودن مشتق دوم تابع وزنی در دهانه ترک $r=R_i$ تعیین می‌شوند[18]. معمولا بارگذاری یکنواخت به اندازه یک و بارگذاری خطی با حداکثر اندازه یک روی ترک به‌عنوان بارگذاری‌های مرجع درنظر گرفته می‌شود که در روابط (20) ذکر شده است.

$$\sigma_{ref.1}(r) = 1 \quad \text{(20-الف)}$$

$$\sigma_{ref.2}(r) = \left(\frac{r-R_i}{a}\right) \quad \text{(20-ب)}$$

متناظر با هر بارگذاری، ضریب شدت تنش مرجع به‌صورت رابطه (21-الف) و (21-ب) تعریف می‌شود.

$$K_{ref1} = \sqrt{\frac{\pi a}{Q}}Y_0 \quad \text{(21-الف)}$$

$$K_{ref2} = \sqrt{\frac{\pi a}{Q}}Y_1 \quad \text{(21-ب)}$$

که در آن، Y_0 و Y_1 ضرایب تصحیح هندسه جسم و Q ضریب تصحیح شکل ترک است که به‌صورت رابطه (22) تعریف می‌شود.

$$Q = 1 + 1.464\left(\frac{a}{c}\right)^{1.65}, (a/c \le 1) \quad (22)$$

با درنظرگرفتن ضرایب شدت تنش مرجع (21) و اعمال شرط صفر بودن مشتق دوم تابع وزنی در دهانه ترک، ثابت‌های مجهول M_i (i=1, 2, 3) به‌صورت روابط (23-الف) تا (23-ج) تعیین می‌شوند.

$$M_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{2Q}}(-3Y_1+Y_0) + \frac{24}{5} \quad \text{(23-الف)}$$

$$M_2 = 3 \quad \text{(23-ب)}$$

$$M_3 = \frac{6\pi}{\sqrt{2Q}}(2Y_1-Y_0) + \frac{8}{5} \quad \text{(23-ج)}$$

ضرایب تصحیح هندسه Y_0و Y_1 به‌صورت توابعی از a/t، a/c برای R_0/R_i=0.25 در مرجع [18] آمده است.

تابع وزنی برای گوشه‌های یک ترک نیم‌بیضوی در راستای طولی استوانه (نقطه B در شکل 1) نیز به‌صورت رابطه (24) ارائه شده است.

$$n(r,a)=\frac{2}{\sqrt{\pi(r-R_i)}}\Big[1+N_1\left(\frac{r-R_i}{a}\right)^{0.5}+N_2\left(\frac{r-R_i}{a}\right)+N_3\left(\frac{r-R_i}{a}\right)^{1.5}\Big] \quad (24)$$

ضرایب مجهول N_i (i=1, 2, 3) با درنظرگرفتن دو بارگذاری مرجع و شرط صفر بودن تابع وزنی در نوک ترک به‌صورت روابط (25-الف) تا (25-ج) به‌دست می‌آیند.

$$N_1=\frac{3\pi}{\sqrt{Q}}(2F_1-5F_0)+8 \quad (25\text{-الف})$$

$$N_2=\frac{15\pi}{\sqrt{Q}}(3F_1-F_0)+15 \quad (25\text{-ب})$$

$$N_1=\frac{3\pi}{\sqrt{Q}}(-10F_1+3F_0)-8 \quad (25\text{-ج})$$

برای گوشه‌های ترک، ضرایب شدت تنش مرجع به‌صورت روابط (26-الف) و (26-ب) بیان می‌شوند.

$$K_{ref1}=\sqrt{\frac{\pi a}{Q}}F_0 \quad (26\text{-الف})$$

$$K_{ref2}=\sqrt{\frac{\pi a}{Q}}F_1 \quad (26\text{-ب})$$

که در آن، F_0 و F_1 ضرایب تصحیح هندسه است. البته، تکینی تنش نوک ترک در فصل مشترک سطوح آزاد (مثل گوشه ترک نیم‌بیضوی) وجود ندارد و ضریب شدت تنش در این نقطه به صفر میل می‌کند. تکینی 0/5- در جبهه ترک وقتی اتفاق می‌افتد که نوک ترک کاملا در ماده قرار داشته باشد. تابع وزنی (23) برای یک ترک سکه‌ای درون ماده به‌دست آمده است. در این تابع وزنی انحراف تکینی میدان تنش از 0/5- در نزدیکی گوشه ترک لحاظ نشده است. طبق گزارش‌های قبلی، در یک ترک سطحی، در لایه‌های میانی تکینی 0/5- برقرار است. پس بخش عمده‌ای از جبهه ترک تحت تاثیر تکینی 0/5- قرار دارد. علاوه‌بر این، لایه‌های سطحی نزدیک به گوشه تحت تاثیر تکینی 0/5- در لایه‌های دیگر قرار دارد. به‌طوری که تکینی گوشه ترک در فولادها با ν=0.3، برابر $r^{-0.4523}$ است که با $r^{-0.5}$ اختلاف چندانی ندارد[19]. بنابراین، نتایج تابع وزنی (24)، که با فرض تکینی 0/5- به‌دست آمده است، تقریبی است.

3-3- تعیین ضریب شدت تنش حرارتی

با معلوم بودن تنش حرارتی به‌صورت یک تابع پیوسته از r و تابع وزنی، می‌توان ضریب شدت تنش حرارتی را از رابطه (27-الف) و (27-ب) تعیین نمود.

$$K_A=\int_{R_i}^{R_i+a}\sigma_{\theta\theta}m(r,a)dr \quad (27\text{-الف})$$

$$K_B=\int_{R_i}^{R_i+a}\sigma_{\theta\theta}n(r,a)dr \quad (27\text{-ب})$$

به‌دلیل پیچیدگی عبارت تنش محیطی، انتگرال‌گیری از روابط (27) به‌طور تحلیلی امکان‌پذیر نیست. برای حل این مشکل، انتگرال‌گیری عددی در دو ناحیه توسط مفتخر و گلینکا[20] و همچنین کشیاک و دیگران[21] ارائه شده است. شاهانی و نبوی[6] با استفاده از برازش دو تابع درجه دوم بر بخشی از عبارت تنش محیطی در هر زمان، یک عبارت تحلیلی برای ضریب شدت تنش ارائه نموده‌اند. در اینجا، به‌منظور بیان یک عبارت تحلیلی برای ضریب شدت تنش از برازش دو منحنی درجه دوم بر کل عبارت تنش محیطی، مطابق با روابط (28)، استفاده شده است. اگر موقعیت ناپیوستگی ρ باشد، توزیع تنش محیطی به دو بخش قبل و بعد از ناپیوستگی تقسیم می‌شود، تا برازش منحنی دقیق‌تری صورت گیرد.

$$\sigma_{\theta\theta1}=A_1r^2+B_1r+C_1,\ R_i\le r\le R_i+\rho \quad (28\text{-الف})$$

$$\sigma_{\theta\theta2}=A_2r^2+B_2r+C_2,\ R_i+\rho\le r\le R_i+a \quad (28\text{-ب})$$

عبارت تحلیلی ضریب شدت تنش به‌ترتیب برای عمق و گوشه‌های ترک به‌صورت روابط (29) و (30) به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}K_A&=\int_{R_i}^{R_i+\rho}\sigma_{\theta\theta1}m(r,a)dr+\int_{R_i+\rho}^{R_i+a}\sigma_{\theta\theta2}m(r,a)dr=\\&A_1f_1(a,\rho)+B_1f_2(a,\rho)+C_1f_3(a,\rho)\\&+A_2f_4(a,\rho)+B_2f_5(a,\rho)+C_2f_6(a,\rho)\end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}K_B&=\int_{R_i}^{R_i+\rho}\sigma_{\theta\theta1}n(r,a)dr+\int_{R_i+\rho}^{R_i+a}\sigma_{\theta\theta2}n(r,a)dr=\\&A_1h_1(a,\rho)+B_1h_2(a,\rho)+C_1h_3(a,\rho)\\&+A_2h_4(a,\rho)+B_2h_5(a,\rho)+C_2h_6(a,\rho)\end{aligned} \quad (30)$$

پارامترهای روابط (29) و (30) در روابط (31) و (32) آمده است.

$$\begin{aligned}
f_1&=\sqrt{8a/\pi}\left(1-\sqrt{1-\rho^*}\right)+\sqrt{a/\pi}\,\rho^*M_1\\
&+\sqrt{8a/9\pi}\left(1-\sqrt{(1-\rho^*)^3}\right)M_2\\
&+\sqrt{2a/\pi}\,\rho^*(1-0.5\rho^*)M_3\\
f_2&=\sqrt{8a^3/9\pi}\left(\left(1-\sqrt{1-\rho^*}\right)(2+3R_i^*)-\rho^*\sqrt{1-\rho^*}\right)\\
&+\sqrt{a^3/2\pi}\,\rho^*(\rho^*+2R_i^*)M_1+\sqrt{8a^3/225\pi}\ \big((2+5R_i^*)\\
&\qquad-(2+3\rho^*+5R_i^*)\sqrt{(1-\rho^*)^3}\big)M_2\\
&+\sqrt{a^3/18\pi}\,\rho^*\left((3-2\rho^*)\rho^*+3(2-\rho^*)R_i^*\right)M_3\\
f_3&=\sqrt{8a^5/225\pi}\ \big(\left(8+20R_i^*+15R_i^{*2}\right)\\
&-\sqrt{1-\rho^*}(8(1+R_i^*)^2+4(1+R_i^*)(\rho^*+R_i^*)\\
&+3(\rho^*+R_i^*)^2)\ -\sqrt{2a^5/9\pi}\left(R_i^{*3}-(\rho^*+R_i^*)^3\right)M_1\\
&+\sqrt{8a^5/105^2\pi}\ \big(\left(8+28R_i^*+35R_i^{*2}\right)\\
&-\sqrt{1-\rho^*}((8+4\rho^*)+3\rho^{*2}(1-5\rho^*)\\
&+14R_i^*\left(2+\rho^*-\rho^{*2}\right)+35R_i^{*2}(1-\rho^*))\big)M_2\\
&-4\sqrt{a^5/72\pi}\,(1+R_i^*)\big(\left(R_i^{*3}-(\rho^*+R_i^*)^3\right)\\
&+3\left((\rho^*+R_i^*)^4-R_i^{*4}\right)\big)M_3\\
f_4&=\sqrt{8a(1-\rho^*)/\pi}+\sqrt{2a/\pi}\,(1-\rho^*)M_1\\
&+\sqrt{8a/9\pi}\sqrt{(1-\rho^*)^3}M_2+\sqrt{a^3/2\pi}\,(1-\rho^*)^3M_3\\
f_5&=\sqrt{2a^3/9\pi}\sqrt{1-\rho^*}(2+\rho^*+3R_i^*)\\
&+\sqrt{a^3/2\pi}\,(1-\rho^*)(1+\rho^*+2R_i^*)M_1\\
&+\sqrt{8a^3/225\pi}\sqrt{(1-\rho^*)^3}(2+3\rho^*+5R_i^*)M_2\\
&+\sqrt{a^3/18\pi}\,(1-\rho^*)^2(1+2\rho^*+3R_i^*)M_3\\
f_6&=\sqrt{8a^5/225\pi}\sqrt{1-\rho^*}(8+4\rho^*+3\rho^{*2}+20R_i^*\\
&+10R_i^*\rho^*+15R_i^{*2})+\sqrt{2a^5/9\pi}\ ((1+R_i^*)^3\\
&-(\rho^*+R_i^*)^3)M_1+\sqrt{8a^5/105^2\pi}\sqrt{1-\rho^*}(8+4\rho^*\\
&+3\rho^{*2}-15\rho^{*3}+14\left(2+\rho^*-3\rho^{*2}\right)+35R_i^{*2}\\
&(1-\rho^*))M_2+\sqrt{a^5/72\pi}\ ((1+R_i^*)^4-4(1+R_i^*)\\
&(\rho^*+R_i^*)^3+3(\rho^*+R_i^*)^4)M_3
\end{aligned} \quad (31)$$

و

$$\begin{aligned}
h_1&=4\sqrt{\rho^*a/\pi}+\sqrt{8a/\pi}\,\rho^*N_1+\sqrt{16a/9\pi}\left(\sqrt{\rho^{*3}}\right)N_2\\
&+\sqrt{a/\pi}\,\rho^{*2}N_3\\
h_2&=\sqrt{16a^3/9\pi}\sqrt{\rho^*}(\rho^*+3R_i^*)+\sqrt{a^3/\pi}\,\rho^*\\
&(\rho^*+2R_i^*)N_1+\sqrt{16a^3\rho^{*3}/225\pi}\,(3\rho^*+5R_i^*)N_2\\
&+\sqrt{a^3/9\pi}\,\rho^{*2}(2\rho^*+3R_i^*)N_3\\
h_3&=\sqrt{16a^5/225\pi}\sqrt{\rho^*}\left(3\rho^{*2}+10R_i^*\rho^*+15R_i^{*2}\right)\\
&+\sqrt{4a^5/9\pi}\,\rho^*\left(\rho^{*2}+3R_i^*\rho^*+3R_i^{*2}\right)N_1+\\
&\sqrt{16a^5/105^2\pi}\sqrt{\rho^{*3}}\left(15\rho^{*2}+42R_i^*\rho^*+35R_i^{*2}\right)N_2\\
&+\sqrt{a^5/36\pi}\,\rho^{*2}\left(3\rho^{*2}+8R_i^*\rho^*+6R_i^{*2}\right)N_3\\
h_4&=\sqrt{16a/\pi}\left(1-\sqrt{\rho^*}\right)+\sqrt{4a/\pi}\,(\rho^*-1)N_1\\
&+\sqrt{16a^3/9\pi}\left(1-\sqrt{\rho^{*3}}\right)N_2+\sqrt{a/\pi}\left(1-\rho^{*2}\right)N_3\\
h_5&=\sqrt{16a^3/9\pi}\left((1+3R_i^*)-\sqrt{\rho^*}(\rho^*+3R_i^*)\right)\\
&+\sqrt{a^3/\pi}\,(1-\rho^*)(1+\rho^*+2R_i^*)N_1\\
&+\sqrt{16a^5/225\pi}\left(3-3\rho^{*2}\sqrt{\rho^*}+5R_i^*\left(1-\rho^*\sqrt{\rho^*}\right)\right)N_2\\
&+\sqrt{a^3/9\pi}\left(2\left(1-\rho^{*3}\right)+3R_i^*\left(1-\rho^{*2}\right)\right)N_3
\end{aligned}$$

$$h_6 = \sqrt{16a^5/225\pi}\sqrt{1-\rho^*}\big((3+10R_i^*+15R_i^{*2}) -\sqrt{\rho^*}(3\rho^{*2}+10R_i^*\rho^*+15R_i^{*2})\big)+\sqrt{4a^5/9\pi} \big((1+R_i^*)^3-(\rho^*+R_i^*)^3\big)N_1+\sqrt{16a^5/105^2\pi} \big(15(1-\rho^{*3}\sqrt{\rho^*})+42R_i^*(1-\rho^{*2}\sqrt{\rho^*}) +35R_i^{*2}(1-\rho^*\sqrt{\rho^*})\big)N_2+\sqrt{a^5/36\pi}\big(3(1-\rho^{*4}) +8R_i^*(1-\rho^{*3})+6R_i^{*2}(1-\rho^{*2})\big)N_3 \quad (32)$$

متغیرهای بی‌بعد روابط (31) و (32) به‌صورت روابط (33) است.

$$\rho^* = \rho/a \quad (\text{33- الف})$$

$$R_i^* = R_i/a \quad (\text{33- ب})$$

4- نتایج و بحث

به‌علت در دسترس نبودن نتایج مشابه منتشر شده، امکان ارزیابی مستقیم نتایج وجود ندارد، به همین دلیل، ضریب شدت تنش به دو روش محاسبه شده است:

الف- استفاده از روابط تحلیلی (29) و (30) که با کاربرد منحنی‌های درجه دوم برازش شده بر توزیع تنش (رابطه 28) به‌دست آمده است.

ب- با انتگرال‌گیری عددی از رابطه تابع وزنی (رابطه 17) که در آن از رابطه دقیق تنش (رابطه 15) استفاده شده است.

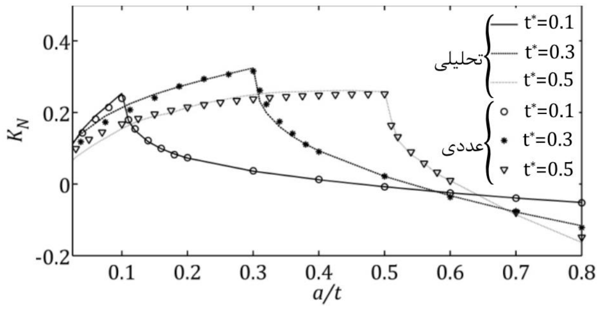
مقایسه نتایج با مقادیر گزارش شده در جدول‌های 1 و 2 دقت روش انتگرال‌گیری عددی -با توجه به رفتار مجانبی توابع وزنی در ابتدا/انتهای ترک- در حالت پایا را نشان می‌دهد. ضریب شدت تنش با دو رابطه هدایت گرمایی فوریه‌ای و هذلولوی -که باید در حالت پایا برهم منطبق شوند- به‌دست آمده است. در اینجا، فرض شده است سطح داخلی استوانه تحت فشار p_i=10 *MPa* و کاهش دمای $T(R_i,0)$=-100 °C قرار دارد. خصوصیات ماده نیز به‌صورت ضریب پواسون ν=0.3، مدول برشی μ=80 *MPa*، ضریب انبساط حرارتی α=12e-6 1/°C و ضریب پخش حرارتی κ=1e-5 m^2/s با نسبت شعاع خارجی به داخلی R_o/R_i=1.25 درنظر گرفته شده است. نزدیکی مقادیر محاسبه شده با نتایج منتشر شده، دقت روش انتگرال‌گیری عددی را تایید می‌نماید. در بارگذاری مکانیکی-حرارتی پایا برای ترک‌های باریک‌تر (با *a/c* کوچک‌تر)، ضریب شدت تنش عمق ترک بزرگ‌تر است. ضریب شدت تنش گوشه ترک با عمیق‌تر شدن ترک افزایش می‌یابد. برای *a/c*=1، ضریب شدت تنش گوشه ترک تقریبا مستقل از عمق ترک است. در جدول‌های 1 و 2، داده‌ها به‌صورت رابطه (33) بی‌بعد شده‌اند.

$$K_N = \frac{K}{p_i\sqrt{\pi a/Q}} \quad (33)$$

در ادامه، تغییرات ضریب شدت تنش حرارتی برای مدل هدایت گرمایی هذلولوی و هندسه‌های مختلف ترک به‌صورت نمودار ارائه شده است که در آن، ضریب شدت تنش به‌صورت رابطه (34) بی‌بعد شده است.

$$K_N = \frac{K}{E\alpha T_1\sqrt{l_0}/(1-\nu)} \quad (34)$$

در شکل 6، ضریب شدت تنش عمق ترک با استفاده از دو روش تحلیلی (رابطه 28) و انتگرال‌گیری عددی از حاصل‌ضرب تابع وزنی و تنش تحلیلی (رابطه 15) برای سه زمان مشخص t^*=0.1, 0.3, 0.5 و برحسب عمق نسبی ترک (*a/t*) مقایسه شده است. نتایج تطابق قابل قبولی با یکدیگر دارند. در یک زمان مشخص در ابتدای اعمال شوک حرارتی، سرعت محدود موج دما باعث تغییر دمای بخشی از دیواره داخلی و به تبع آن ایجاد تنش‌های کششی در این بخش می‌شود. در نتیجه، برای ترک‌هایی که پیشانی موج تنش از نوک آن‌ها عبور کرده است، ضریب شدت تنش متناسب با طول ترک افزایش می‌یابد.



شکل 6 مقایسه مقادیر تحلیلی و عددی ضریب شدت تنش در عمق ترک برای *a/c*=1.0

جدول 1 مقایسه ضریب شدت تنش پایا برای عمق ترک

a/c	a/t	ضریب شدت تنش (K_N) هدایت گرمایی غیرفوریه‌ای	هدایت گرمایی فوریه‌ای	نتایج منتشر شده[7]
0/2	0/2	20/81	20/81	20/78
	0/4	18/78	18/80	18/76
	0/6	17/70	17/71	17/73
	0/8	16/40	16/40	16/48
1	0/2	18/97	18/98	18/94
	0/4	13/51	13/53	13/50
	0/6	8/12	8/13	8/17
	0/8	2/80	2/79	2/89

جدول 2 مقایسه ضریب شدت تنش پایا برای گوشه ترک

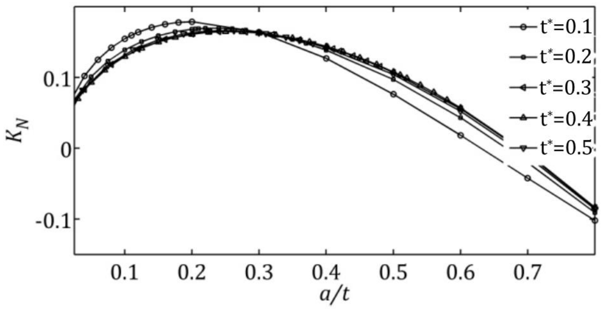
a/c	a/t	ضریب شدت تنش (K_N) هدایت گرمایی غیرفوریه‌ای	هدایت گرمایی فوریه‌ای	نتایج منتشر شده[7]
0/2	0/2	14/13	14/12	14/14
	0/4	15/56	15/55	15/53
	0/6	17/91	17/91	17/87
	0/8	20/78	20/78	20/74
1	0/2	26/03	26/01	26/03
	0/4	25/09	25/08	25/06
	0/6	24/55	24/55	24/49
	0/8	24/30	24/30	24/23

اما در ترک‌هایی که موج تنش به نوک آن‌ها نرسیده است، تنش در بخشی از سطح انتهایی ترک -بین محل پیشانی موج و نوک ترک- فشاری است که باعث بسته شدن سطوح ترک و کاهش ضریب شدت تنش با افزایش طول ترک می‌شود. بنابراین، در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک حرارتی برای یک ترک ضریب شدت تنش بیشینه زمانی اتفاق می‌افتد که پیشانی موج تنش به نوک آن برسد.

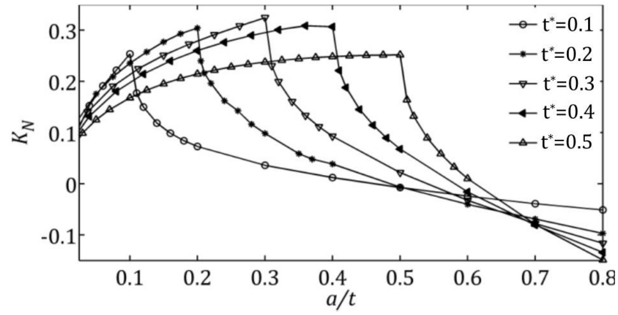
در شکل‌های 7 و 8، ضریب شدت تنش حاصل از کاربرد دو مدل هدایت گرمایی فوریه و هذلولوی در زمان‌های مشخص و برحسب عمق نسبی (*a/t*) ترک نشان داده شده است. تفاوت ناچیز منحنی‌ها در شکل 7 بیانگر تغییر آهسته‌تر دما در مدل فوریه نسبت به مدل هذلولوی است.

طبق نتایج نمودارها، در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک ضریب شدت تنش در دو مدل به‌ویژه مدل هذلولوی سریعا افزایش و سپس به‌تدریج کاهش می‌یابد. بیشینه آن در مدل هذلولوی به‌طور قابل توجهی بزرگ‌تر از مدل فوریه است، به‌طوری که، در t^*=0.3 بیشینه ضریب شدت تنش در مدل هذلولوی 87% بزرگ‌تر از مدل فوریه است. در t^*=0.5 این مقادیر 47% اختلاف دارند.

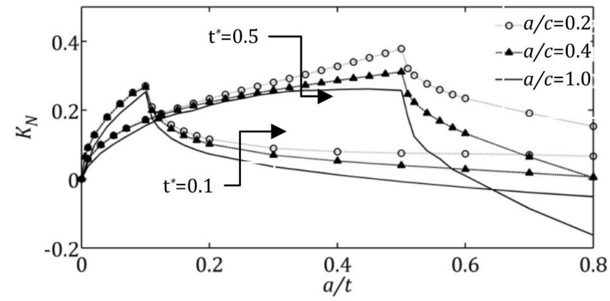
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.17.6]



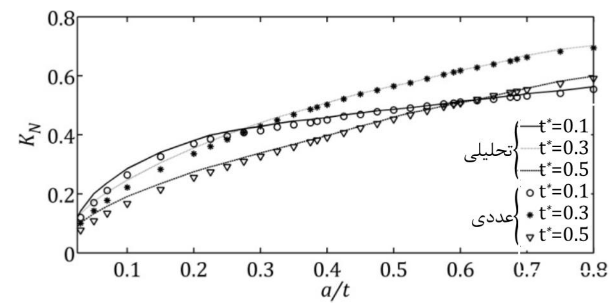
شکل 7 ضریب شدت تنش در عمق ترک (مدل هدایت گرمایی فوریه و a/c=1.0)



شکل 8 ضریب شدت تنش در عمق ترک برای مدل هدایت گرمایی هذلولوی و a/c=1.0



شکل 9 مقایسه ضریب شدت تنش عمق ترک برای نسبت قطرهای مختلف



شکل 10 مقایسه مقادیر تحلیلی و عددی ضریب شدت تنش گوشه ترک

جدول 3 بیشینه ضریب شدت تنش عمق ترک و محل وقوع آن برای دو مدل فوریه و هذلولوی در زمان‌های مختلف

زمان (t^*)	هدایت گرمایی هذلولوی	عمق ترک (a/t)	هدایت گرمایی فوریه‌ای	عمق ترک (a/t)
0/1	0/253	0/1	0/187	0/184
0/2	0/312	0/2	0/177	0/211
0/3	0/324	0/3	0/173	0/224
0/4	0/307	0/4	0/172	0/230
0/5	0/252	0/5	0/171	0/232

در جدول 3 مقدار و موقعیت ضریب شدت تنش بیشینه برای دو مدل در زمان‌های مشخص با هم مقایسه شده است. در ابتدای اعمال شوک، بیشینه ضریب شدت تنش در موقعیت ناپیوستگی موج تنش اتفاق می‌افتد و با سرعتی برابر با موج تنش در دیواره جابه‌جا می‌شود.

در مدل فوریه ترک‌های عمیق‌تر زودتر تحت تاثیر شوک حرارتی قرار می‌گیرند. ضریب شدت تنش در ترک‌هایی که پیشانی موج به نوک آن‌ها نرسیده است، در مدل فوریه بزرگ‌تر از مدل هذلولوی است.

تغییرات ضریب شدت تنش برحسب عمق نسبی برای سه نسبت قطر 1.0 و 0.4 ,a/c=0.2 در زمان‌های 0.5 و t*=0.1 در شکل 9 نشان داده شده است. براساس این نتایج، رفتار ترک‌های با عمق کم مشابه است و نسبت قطرهای ترک (a/c) بر ضریب شدت تنش ترک‌های کم‌عمق اثر چندانی ندارد. با گذشت زمان ترک‌های عمیق‌تری دارای رفتار مشابه هستند. مطابق نتایج، در t*=0.1 ضریب شدت تنش ترک‌های تا عمق تقریبی a/t=0.175 دارای حداکثر 10% اختلاف هستند. در t*=0.3 این عمق برابر a/t=0.225 و در t*=0.5 تقریبا برابر a/t=0.3 است. به‌علاوه، در ترک‌های با عمق نسبی یکسان ترک‌های باریک‌تر (با a/c کمتر) دارای ضریب شدت تنش بزرگ‌تری هستند. البته، درصورت افزایش عمق ترک در این شرایط، نسبت قطر ترک افزایش می‌یابد که باعث کاهش ضریب شدت تنش در عمق ترک می‌شود.

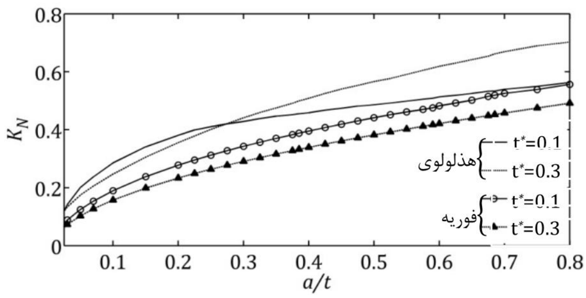
ضریب شدت تنش گوشه ترک با استفاده از دو روش تحلیلی (رابطه 30) و انتگرال‌گیری عددی از تابع وزنی برای سه زمان مشخص t*=0.1, 0.3, 0.5 و برحسب عمق نسبی ترک (a/t) در شکل 10 نشان داده شده است. تطابق قابل قبول نتایج دو روش صحت رابطه تحلیلی را تائید می‌کند. نتایج نشان می‌دهد، در یک زمان مشخص ضریب شدت تنش در گوشه ترک برحسب عمق آن (a/t) به‌طور یکنوا افزایشی است. از آنجا که در اکثر فرآیندهای طراحی تنش‌های حرارتی به‌عنوان تنش‌های خودمتعادل در دسته تنش‌های ثانویه قرار می‌گیرند، تناسب ضریب شدت تنش گوشه با ابعاد و بیشتر شدن احتمال رشد ترک در طول سازه مهم است (در مواقع دیگر خودمتعادل بودن تنش حرارتی ایجاب می‌کند تنش در بخشی از سازه فشاری باشد که در توقف رشد ترک تاثیر مثبت دارد). ضریب شدت تنش گوشه دو مدل هدایت گرمایی هذلولوی و فوریه در زمان‌های مشخص و برحسب عمق نسبی ترک (a/t) در شکل 10 مقایسه شده است. طبق نتایج، در گوشه ترک –برخلاف عمق آن– ضریب شدت تنش هذلولوی همیشه از مدل فوریه بزرگ‌تر است. بنابراین، احتمال گسیختگی سازه در اثر تنش‌های حرارتی در مدل هذلولوی بیشتر است.

در شکل 12، ضریب شدت تنش گوشه ترک برای نسبت قطرهای مختلف در زمان t*=0.1 با یکدیگر مقایسه شده است. در ترک‌های با نسبت قطر بزرگ‌تر ضریب شدت تنش گوشه، برخلاف عمق ترک، بیشتر است.

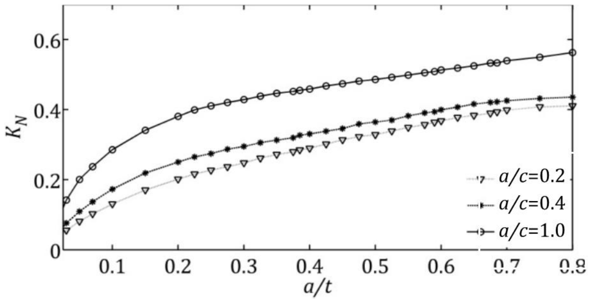
کاهش شدید ضریب شدت تنش عمق ترک برای ترک‌هایی که موج تنش به نوک آن‌ها نرسیده است و از طرفی افزایش متناسب ضریب شدت تنش گوشه با ابعاد ترک بزرگ‌تر بودن ضریب شدت تنش گوشه نسبت به عمق ترک را امکان‌پذیر می‌کند. در شکل 13، ضریب شدت تنش عمق و گوشه ترک در زمان t*=0.1 برای مقادیر متفاوت نسبت قطر و عمق نسبی آمده است. طبق نتایج، برای نسبت قطر a/c=1.0 ضریب شدت تنش در گوشه ترک همیشه از مقدار آن در عمق بزرگ‌تر است. اما برای نسبت قطرهای a/c=0.2, 0.4، ضریب شدت تنش عمق برای ترک‌های کم‌عمق بزرگ‌تر است و برای ترک‌های عمیق-تر، ضریب شدت تنش گوشه ترک بیشتر است.

عمق نسبی که بعد از آن ضریب شدت تنش گوشه از عمق ترک بیشتر می‌شود (عمق نسبی گذار)، در زمان‌ها و برای نسبت قطرهای مختلف در جدول 4 آمده است.

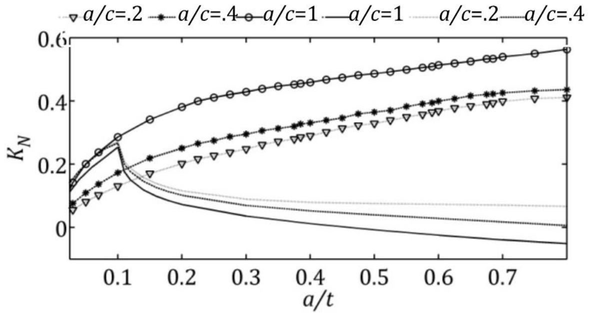
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.17.6]



شکل 11 مقایسه ضریب شدت تنش در گوشه ترک برای مدل‌های هدایت گرمایی فوریه‌ای و هذلولوی با a/c=1.0



شکل 12 ضریب شدت تنش گوشه ترک برای نسبت قطرهای مختلف در t*=0.1



شکل 13 مقایسه ضریب شدت تنش در عمق و گوشه ترک برای نسبت قطرهای مختلف

جدول 4 عمق نسبی گذار برای بیشینه ضریب شدت تنش از عمق ترک به گوشه

a/t			t*
a/c=1.0	a/c=0.4	a/c=0.2	
-	0/114	0/137	0/1
-	0/209	0/239	0/2
-	0/304	0/337	0/3
-	0/402	0/434	0/4
-	0/392	0/511	0/5

چون ضریب شدت تنش عمق در ترک‌های با سطح بیشتر، در یک زمان و برای یک عمق ترک مشخص، کاهش شدیدتری دارد، افزایش سطح ترک باعث می‌شود ضریب شدت تنش گوشه برای ترک‌های با عمق کمتری از ضریب شدت تنش عمق ترک بیشتر شود.

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ضریب شدت تنش در عمق و گوشه یک ترک نیم‌بیضوی واقع در سطح داخلی یک استوانه جدار ضخیم به‌دست آمده است که تحت شوک حرارتی هذلولوی قرار دارد. یافته‌های تحقیق عبارت است از:

1. در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک حرارتی، ضریب شدت تنش در عمق برای ترک‌های با عمق کم به‌طور قابل ملاحظه‌ای بزرگ‌تر از مدل فوریه است. بیشینه ضریب شدت تنش در عمق زمانی اتفاق می‌افتد که پیشانی موج تنش به نوک ترک آن برسد.

2. ضریب شدت تنش در عمق ترک ابتدا سریعا افزایش و سپس تا مقدار پایا به‌تدریج کاهش می‌یابد.

3. برای ترک‌های کوچک (کم‌عمق) نسبت قطرهای ترک اثر چندانی بر رفتار آن ندارد. اما، با گذشت زمان یا عمیق‌تر شدن ترک، اثر نسبت قطر بر ضریب شدت تنش بیشتر می‌شود. به‌علاوه، در ترک‌های با عمق نسبی یکسان ترک‌های باریک‌تر دارای ضریب شدت تنش بزرگ‌تری هستند.

4. ضریب شدت تنش گوشه ترک در مدل هذلولوی همیشه از مدل فوریه بزرگ‌تر است. این موضوع در امکان رشد ناپایدار ترک قابل توجه است. رشد طولی ترک موجب کاهش نسبت قطرهای ترک و در نتیجه بیشتر شدن ضریب شدت تنش در عمق ترک می‌شود.

با توجه به رفتار متفاوت ترک تحت بارگذاری‌های گرمایی فوریه‌ای و هذلولوی، درنظر گرفتن مدل مناسب برای هدایت گرمایی در تحلیل و طراحی سازه‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

6- مراجع

[1] M. H. Babaei, Z. T. Chen, Hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow sphere, *International Journal of Thermophysics*, Vol. 29, pp. 1457-1469, 2008.

[2] M. J. Maurer, H. A. Thompson, Non-Fourier effects at high heat flux, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 95, pp. 284-286, 1973.

[3] X. B. Lin, R. A. Smith, Fatigue growth prediction of internal surface cracks in pressure vessels, *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 120, pp. 17-23, 1998.

[4] S. I. Shahraini, S. H. Hashemi, Effects of surface crack length and depth variations on gas transmission pipeline safety, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 5, pp. 26-32, 2014. (In Persian)

[5] M. Kamaya, T. Nishioka, Analysis of surface crack in cylinder by finite element alternating method, *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 127, pp. 165-172, 2005.

[6] A. R. Shahani, S. M. Nabavi, Closed-form stress intensity factors for a semi-elliptical crack in a thick-walled cylinder under thermal stress, *International Journal of Fatigue*, Vol. 28, No. 9, pp. 26-32, 2006.

[7] A. R. Shahani, S. M. Nabavi, Transient thermal stress intensity factors for an internal longitudinal semi-elliptical crack in a thick-walled cylinder, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 74, pp. 2585-2602, 2007.

[8] S. M. Nabavi, A. R. Shahani, Thermal stress intensity factors for a cracked cylinder under transient thermal loading, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 86, pp. 153–163, 2009.

[9] R. X. Xu, X. R. Wu, A weight function aproach to stress intensity factors for half-elliptical surface cracks in cylinderical pressure vessels to a thermal shock, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 39, pp. 375–409, 1989.

[10] C. C. Ma, M. H. Liao, Analysis of axial cracks in hollow cylinders subjected to thermal shock by using the thermal weight function method, *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 118, pp. 146-153, 1996.

[11] Y. L. Lu, S. J. Zhang, X. P. Huang, J. Huang, Determination of histories of SIF distributions for axial semi-elliptical surface cracks in hollow cylinders subjected to thermal shock, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 80, pp. 167-178, 2003.

[12] D. M. Chang, B. L. Wang, Transient thermal fracture and crack growth behavior in brittle media based on non-Fourier heat conduction, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 94, pp. 29–36, 2012.

[13] K. Q. Hu, Z. T. Chen, Thermoelastic analysis of a partially insulated crack in a strip under thermal impact loading using the hyperbolic heat conduction theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 51, pp. 144-160, 2012.

[14] B. L. Wang, J.C. Han, Non-Fourier heat conduction in layered composite materials with an interface crack, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 55, pp. 66-75, 2012.

[15] Z. T. Chen, K. Q. Hu, Thermo-elastic analysis of a cracked half-plane under a thermal shock impact using the hyperbolic heat conduction theory, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 35, pp. 342-362, 2012.

[16] Z. T. Chen, K. Q. Hu, Thermoelastic analysis of a cracked substrate bonded to a coating using the hyperbolic heat conduction theory, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 37, pp. 270-291, 2014.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.17.6]

[17] Z. T. Chen, K. Q. Hu, Thermo-elastic analysis of a cracked substrate bonded to a coating using the hyperbolic heat conduction theory, In *13th International Conference on Fracture, ICF 2013,* Beijing, China, 2013.

[18] H. F. Bueckner, principle for the computation of stress intensity factors, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik,* Vol. 50, pp. 129-146, 1970.

[19] J. R. Rice, remarks on elastic crack-tip stress fields, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 8, pp. 751-758, 1972.

[20] H. J. Petroski, J. D. Achenbach, Computation of the weight function from a stress intensity factor, *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 10, pp. 257-266, 1978.

[21] G. Glinka, G. Shen, Universal features of weight functions for cracks in mode I, *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 40, pp. 1135-1146, 1991.

[22] G. C. Sih, C. T. Li, Initiation and growth characterization of comer cracks near circular hole, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics,* Vol. 40, PP. 1135-1146, 1991.

[23] A. A. Moftakhar, G. Glinka, Calculation of stress intensity factors by efficient integration of weight functions, *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 43,No. 5, pp. 749-756, 1992.

[24] A. Kiciak, G. Glinka, D. J. Burns, Calculation of stress intensity factors and crack opening displacements for cracks subjected to complex stress fields, *ASME Journal of Pressure Vessel Technology,* Vol. 125, pp. 261-266, 2003.