مجله مهندسی مکانیک مدرس، مرداد 1394، دوره 15، شماره 5، ص‌ص 329-340

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

پایدارسازی گرادیان جاذبه وضعیت ماهواره با بوم طول‌متغیر در مدار دایره‌ای

سلمان فارسی[1]، مجید محمدی مقدم[2*]

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* تهران، صندوق پستی 143-14115، m.moghadam@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 02 دی 1393

پذیرش: 19 اسفند 1393

ارائه در سایت: 19 فروردین 1394

کلید واژگان:

کنترل وضعیت

پایدارسازی گرادیان جاذبه

سیستم‌های پورت‌همیلتونی

سیستم‌های فروتحریک‌شده

چکیده

در این مقاله، روشی برای پایدارسازی گرادیان جاذبهٔ سه‌محورهٔ ماهواره در مدار دایره‌ای ارائه و بررسی شده است که در آن تنها از یک عملگر استفاده می‌شود. ماهواره‌ای با بوم طول‌متغیر، متشکل از دو جسم صلب شامل بدنهٔ اصلی و جرم متصل به انتهای بوم درنظر گرفته می‌شود که درراستای بوم نسبت به هم امکان حرکت دارند. سیستم دارای 4 درجه آزادی است و تنها ورودی کنترلی، نیروی بین این دو جسم است و درنتیجه، سیستم فروتحریک‌شده است. گشتاور گرادیان جاذبه تنها گشتاور خارجی سیستم فرض شده است. به‌دلیل این که سیستم فروتحریک‌شده است و ساختار همیلتونی دارد، از رویکرد پورت‌همیلتونی بهره گرفته شده است. معادلات حرکت سیستم به‌فرم همیلتونی استخراج شده و نقاط تعادل و مقادیر ورودی لازم برای آن به‌دست آمده است. از دینامیک خطی سیستم حول نقاط تعادل می‌توان نتیجه گرفت که دینامیک خطی پیچش و تغییر طول بوم مستقل از دینامیک خطی گردش- غلتش است. بنابراین، دینامیک گردش- غلتش، به‌صورت خطی کنترل‌ناپذیر است. برای طراحی کنترل‌کننده، از روش شکل‌دهی انرژی و تزریق میرایی استفاده شده است. شرایط لازم برای این که قانون کنترلی شکل‌دهی انرژی، پایدارساز باشد به‌دست آمده و دینامیک حلقه‌بسته بررسی شده است. سیستم حلقه‌بسته، دارای منیفولد مرکزی است. در نهایت، به‌وسیلهٔ شبیه‌سازی، عملکرد سیستم حلقه‌بسته، میل‌کردن مسیر حالت به منیفولد مرکزی و همگرایی غیرنمایی آن نمایش داده شده است.

Gravity gradient attitude stabilization of a satellite with varying-length boom in circular orbit

Salman Farsi, Majid Mohammadi Moghaddam*

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
* P.O.B. 14115-143 Tehran, Iran, m.moghadam@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 23 December 2014
Accepted 10 March 2015
Available Online 08 April 2015

Keywords:
Attitude control
Gravity gradient stabilization
port-Hamiltonian systems
Under-actuated systems

ABSTRACT

In this paper, a method of tri-axial gravity gradient stabilization of satellite in circular orbit is proposed and investigated. In this method, only one actuator is employed. A satellite with varying-length boom is considered, consisting of two rigid bodies having the freedom of moving in the boom direction. The only control input is the force between these two bodies to control the varying-length boom. The gravity gradient torque is considered as the only external torque acting on the satellite. The system is under-actuated and has Hamiltonian structure. So, the port-Hamiltonian approach is utilized. The equations of motion of the system are obtained in Hamiltonian formulation. The equilibrium points and their required control inputs are determined. The linearization around the equilibria is carried out and it can be seen that the linear dynamics of pitch-boom and roll-yaw are decoupled. Therefore, the roll-yaw dynamics is linearly uncontrollable. The method of energy shaping and damping injection is used for controller design. The conditions on the energy shaping control law to stabilize the system are determined. Further, the resulting closed-loop system is analyzed. The closed-loop system has center manifolds. Finally, the performance of the closed-loop system, convergence of state trajectory to the center manifold and its non-exponential convergence is shown by simulation.

1- مقدمه

پایدارسازی وضعیت ماهوارهٔ فروتحریک‌شده[1] از جنبهٔ عملی و نظری اهمیت دارد. در ماهواره‌های کوچک برای کاهش جرم، هزینه، توان مصرفی و پیچیدگی سیستم، از پایدارسازی نیمه‌فعال[2] استفاده می‌شود. همچنین در صورت خرابی برخی عملگرها، سیستم فروتحریک‌شده باید مأموریت‌های کاهش‌یافته‌ای را انجام دهد. از طرف دیگر، ماهوارهٔ فروتحریک‌شده به‌عنوان نمونه‌ای مناسب در نظریهٔ کنترل هندسی بررسی می‌شود.

پایدارسازی گرادیان جاذبه از روش‌های مؤثری است که نشانه‌روی به زمین[3] را به‌صورت غیرفعال و ذاتی تأمین می‌کند و معمولاً در کنار عملگرهای

1- under-actuated
2- semi-active
3- earth-pointing

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
Please cite this article using:
S. Farsi, M. Mohammadi Moghaddam, Gravity gradient attitude stabilization of a satellite with varying-length boom in circular orbit, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 5, pp. 329-340, 2015 (In Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.5.26.0]

فعال مانند گشتاوردهندهٔ مغناطیسی [1] یا اجزای غیرفعال مانند میراکنندهٔ حلقهٔ لزج[1] [2] و میلهٔ هیسترزیس[2] [3] استفاده می‌شود. برای ایجاد گشتاور گرادیان جاذبه، معمولاً از بوم گرادیان جاذبه[3] استفاده می‌شود که در مرحله‌ای از مأموریت باز می‌شود. بعضی از مکانیزم‌های بازشونده[4] برای بوم گرادیان جاذبه، عملگر فعال دارد تا نحوهٔ بازشدن آن قابل برنامه‌ریزی باشد. مکانیزم بازشونده می‌تواند پانتوگراف[5] باشد [4]. همچنین در بسیاری از ماهواره‌های کوچک، سازهٔ بازشونده به‌صورت نوار پیش‌تنیده‌ای[6] است که به سر آن جرمی متصل است و برای بازشدن بوم، نوار به میزان لازم باز می‌شود [5].

در این پژوهش به‌این ایده توجه شده است که می‌توان با تغییر طول بوم به‌وسیلهٔ یک عملگر فعال به پایدارسازی وضعیت ماهواره پرداخت. می‌توان بوم طول‌متغیر را تنها عملگر ماهواره درنظر گرفت یا آن را در کنار عملگرهای دیگری فرض کرد که در صورت خرابی آن‌ها به‌تنهایی وظیفهٔ پایدارسازی را انجام می‌دهد. یکی از مزایای بوم طول‌متغیر این است که درصورت خرابی آن در اواخر مأموریت، به‌علت پایداری ذاتی بوم، نوسانات وضعیت ماهواره محدود می‌ماند.

مکانیزم‌های بازشوندهٔ بوم گرادیان جاذبه، انعطاف‌پذیر هستند [4-6]. با این‌حال، به‌گونه‌ای می‌توانند طراحی شوند که انعطاف‌پذیری آن‌ها به اندازهٔ کافی کم باشد. البته، هان و دیگران [6] براساس شبیه‌سازی نتیجه گرفتند که انعطاف‌پذیری بوم گرادیان جاذبهٔ بررسی‌شده بر پایداری ماهواره تأثیر نمی‌گذارد. این مکانیزم‌ها اجزای متحرک نیز دارند. در این مقاله، از انعطاف‌پذیری و دینامیک اجزای مکانیزم بازشونده صرف نظر شده است.

تغییر طول بوم، باعث تغییر ممان اینرسی ماهواره می‌شود. کانل [7] کنترل ممان اینرسی ماهواره را به‌عنوان روشی برای نشانه‌روی به زمین در مدار بیضوی ارائه کرد. بررسی انجام شده محدود به دینامیک در صفحهٔ مدار است. کوجیما [8] باز و بسته‌کردن بوم گرادیان جاذبه برای نشانه‌روی به زمین را در مدار دایره‌ای بررسی کرد. مدل سازهٔ فضایی، یک بدنهٔ اصلی صلب مجهز به بوم‌های بدون جرم با جرم نقطه‌ای در سر آن‌ها و ورودی کنترلی، نرخ تغییر طول بوم‌ها در نظر گرفته شد. بررسی انجام شده در [8] نیز محدود به دینامیک صفحه‌ای است و کنترل زمان‌بهینه برای حذف زاویهٔ پیچش در آن ارائه شده است.

پایدارسازی گرادیان جاذبه در ماهواره‌های کمندی[7] نقش کلیدی دارد [9-12]. از طرف دیگر، تغییر طول کمند به‌عنوان روشی برای کنترل وضعیت (و شکل آرایش) استفاده می‌شود [13,10]. همچنین مدل جرم و فنر یکی از مدل‌های متداول ماهوارهٔ کمندی به‌شمار می‌آید [12]. ماهوارهٔ کمندی با طول کمند متغیر، با فرض بدون جرم بودن کمند و شل نشدن آن، می‌تواند به‌عنوان حالت خاصی از مسئلهٔ ماهواره با بوم طول‌متغیر به‌حساب آید.

دیدگاه انرژی در مسائل کنترل سیستم‌های فیزیکی بسیار کارامد است. به‌طور خاص، مسائل مختلفی از کنترل وضعیت ماهوارهٔ فروتحریک‌شده با دیدگاه انرژی بررسی شده است [14,11,1]. رویکرد پورت‌همیلتونی[8] یکی از رویکردهای غنی در دیدگاه انرژی است که روش پورت‌مبنا را به‌صورت هندسی گسترش داده است و کارایی خود را در مسائل مدل‌سازی و کنترل نشان داده است [15]. به‌همین جهت، در این پژوهش از رویکرد پورت‌همیلتونی بهره گرفته شده است.

در بخش 2، معادلات حرکت سیستم و فرم همیلتونی آن به‌دست آمده است. در بخش‌های 3 و 4 نقاط تعادل و خطی‌سازی حول آن‌ها ارائه شده است. در بخش 5 پایدارسازی با روش شکل‌دهی انرژی و تزریق میرایی، که یکی از روش‌های متداول و کارامد در رویکرد پورت‌همیلتونی است، بررسی شده است و شبیه‌سازی، بحث دربارهٔ نتایج و نتیجه‌گیری بخش‌های پایانی مقاله است.

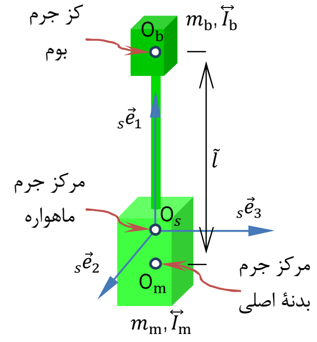
2- مدل‌سازی

2-1- توصیف سیستم

سیستم مورد نظر، ماهواره‌ای است با یک بوم طول‌متغیر تحت گشتاور گرادیان جاذبهٔ جسم سنگین مرکزی کروی (زمین) که در مدار دایره‌ای حول آن جسم قرار دارد. اثر دینامیک وضعی و نیروهای خارجی دیگر روی دینامیک انتقالی نادیده گرفته می‌شود. تنها، عبارت اول گشتاور گرادیان جاذبه درنظر گرفته می‌شود. همچنین، از گشتاورهای خارجی دیگر، صرف نظر می‌شود. ماهواره با بوم طول‌متغیر متشکل از دو جسم صلب درنظر گرفته می‌شود که در یک راستا نسبت به هم امکان حرکت دارند؛ به‌عبارت دیگر، بین این دو جسم، قید لغزش برقرار است. بنابراین، سیستم، انعطاف‌ناپذیر فرض شده و اجزای متحرک دیگری برای ماهواره درنظر گرفته نشده است. جسم بزرگ‌تر، بدنهٔ اصلی (اندیس m) و جسم کوچک‌تر، بوم (اندیس b) نام‌گذاری می‌شود (شکل 1). اولویت ذاتی در فرمول‌بندی برای یکی از این دو جسم وجود ندارد. ماهواره، نامتقارن فرض شده است؛ یعنی، مقادیر اینرسی اصلی ماهواره با یکدیگر برابر نیستند. دینامیک سیستم از دو بخش دینامیک وضعی و دینامیک تغییر طول بوم تشکیل شده است. نیروی داخلی بین بدنهٔ اصلی و بوم که در دینامیک تغییر طول بوم ظاهر می‌شود به‌عنوان ورودی کنترلی درنظر گرفته می‌شود. در این بخش، فرم همیلتونی معادلات حرکت ماهواره با بوم طول‌متغیر به‌دست می‌آید.

2-2- چارچوب‌های مرجع

سه چارچوب مرجع و دستگاه مختصات مرتبط با هر کدام، در این مدل‌سازی ماهواره، اهمیت دارد. چارچوب مرجع اینرسی $i := (\mathrm{O}_i, \{{}_i\vec{e}_\alpha\}_{\alpha=1}^{3})$ با مبدأ O_i در مرکز جرم جسم مرکزی و پایهٔ متعامد یکهٔ راستگرد $\{{}_i\vec{e}_1, {}_i\vec{e}_2, {}_i\vec{e}_3\}$ یک چارچوب مرجع نیوتنی را تعریف می‌کند. چارچوب مرجع مدار $o := (\mathrm{O}_s, \{{}_o\vec{e}_\alpha\}_{\alpha=1}^{3})$ با مبدأ O_s در مرکز جرم ماهواره، پایهٔ متعامد یکهٔ راستگرد $\{{}_o\vec{e}_1, {}_o\vec{e}_2, {}_o\vec{e}_3\}$ را دارد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:



شکل 1 ماهواره با بوم طول‌متغیر

1- viscous ring damper
2- hysteresis rod
3- gravity gradient boom
4- deployable
5- pantograph
6- prestressed tape
7- tethered satellites
8- port-Hamiltonian approach

$$ {}_o\vec{e}_1 := \frac{\vec{r}}{\|r\|},\ {}_o\vec{e}_3 := \frac{\vec{r}\times\vec{v}}{\|\vec{r}\times\vec{v}\|},\ {}_o\vec{e}_2 := {}_o\vec{e}_3 \times {}_o\vec{e}_1 \qquad (1)$$

که $\vec{r} := \overrightarrow{O_iO_s}$ بردار مکان مرکز جرم ماهواره نسبت به مرکز جرم جسم مرکزی، و $\vec{v} := \dot{\vec{r}} := {}^i d\vec{r}/dt$ بردار سرعت ماهواره نسبت به چارچوب اینرسی است. در مدار دایره‌ای، بردار یکهٔ ${}_o\vec{e}_1$ هم‌جهت بردار سرعت ماهواره $\vec{v}$ است. چارچوب‌های مرجع اینرسی و مدار در شکل 2 نمایش داده شده‌اند. سرعت زاویه‌ای چارچوب مدار نسبت به چارچوب اینرسی $\vec{\omega}_o$ درجهت عمود بر صفحهٔ مدار است و مقدار آن در مدار دایره‌ای، ثابت و برابر حرکت میانگین[1] است. برای سادگی، واحد اندازه‌گیری زمان به‌گونه‌ای انتخاب شده است که حرکت میانگین برابر واحد باشد. بنابراین، زمان، معادل زاویهٔ دوران در مدار است و

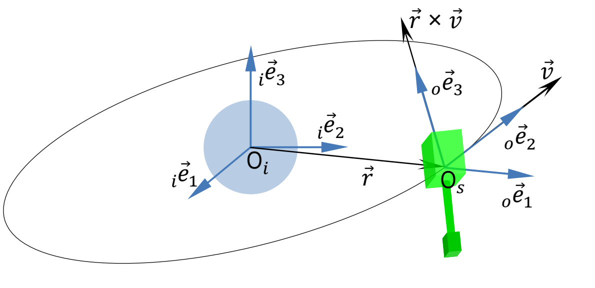
$$\vec{\omega}_o = {}_o\vec{e}_3 \qquad (2)$$

چارچوب مرجع ماهواره $s := (O_s, \{{}_s\vec{e}_\alpha\}_{\alpha=1}^{3})$ با مبدأ O_s روی مرکز جرم ماهواره دارای پایهٔ متعامد یکهٔ راستگرد $\{{}_s\vec{e}_1, {}_s\vec{e}_2, {}_s\vec{e}_3\}$ است؛ به‌نحوی که بدنهٔ اصلی و بوم نسبت به آن دوران نمی‌کنند. بردار یکهٔ ${}_s\vec{e}_1$ درجهت بردار مکان مرکز جرم بوم نسبت به مرکز جرم بدنهٔ اصلی انتخاب شده است. چارچوب مرجع ماهواره در شکل 1 نشان داده شده است. رابطهٔ بین سرعت زاویه‌ای (چارچوب) ماهواره نسبت به چارچوب اینرسی $\vec{\omega}$ و سرعت زاویه‌ای ماهواره نسبت به چارچوب مدار $\vec{\Omega}$ به‌این صورت است:

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}_o \qquad (3)$$

بردار دلخواه $\vec{a}$ را می‌توان در یک دستگاه مختصات بیان کرد: $\vec{a} = {}^i a^\alpha\, {}_i\vec{e}_\alpha$، که ${}^i a^\alpha$ $(\alpha = 1,2,3)$ مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ در دستگاه مختصات i است. در ادامه، روی اندیس‌های تکراری جمع بسته می‌شود. رابطهٔ بین بیان یک بردار در دو دستگاه مختصات به‌فرم ماتریسی ${}^i a = {}^i_s e\, {}^s a$ است که ${}^i a := [{}^i a^1, {}^i a^2, {}^i a^3]^{\mathrm{T}}$ ماتریس ستونی مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ در دستگاه مختصات i، و ${}^i_s e$ ماتریس مربعی تبدیل بین دو دستگاه مختصات s و i با مؤلفه‌های ${}^i_s e^\alpha_\beta = {}_i\vec{e}_\alpha \cdot {}_s\vec{e}_\beta$ است. از آن‌جا که ${}^i_i e^\alpha_\beta = {}^s_s e^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$، طبیعتاً $\overleftrightarrow{e}$ تانسور همانی و e ماتریس همانی است.

ضرب داخلی محیطی فضا یک یکریختی[2] طبیعی بین فضای برداری و فضای دوگان آن ایجاد می‌کند. به‌دلیل متعامد یکه بودن پایهٔ دستگاه‌های مختصات، این یکریختی بین بردار و هم‌بردار، متناظر با ترانهادهٔ بیان ماتریسی آن‌ها می‌شود. همچنین، ماتریس تبدیل ${}^i_s e$ بین دو دستگاه مختصات s و i برابر بیان ماتریسی تانسور دوران دستگاه مختصات s به دستگاه مختصات i در یکی از این دو دستگاه است. بنابراین، ماتریس‌های تبدیل بین دستگاه‌های متعامد یکهٔ راستگرد، عضو گروه متعامد ویژهٔ مرتبهٔ سه هستند: ${}^s_i e^{\mathrm{T}} = {}^i_s e \in \mathrm{SO}(3) := \{B \in \mathbb{R}^{3\times3} : B^{\mathrm{T}}B = e, \det B = 1\}$.



شکل 2 چارچوب‌های مرجع مدار و اینرسی

2-3- خصوصیات اینرسی

بدنهٔ اصلی ماهواره دارای جرم m_{m} و تانسور اینرسی $\overleftrightarrow{I}_{\mathrm{m}}$ حول مرکز جرم خود O_{m} است. بوم ماهواره دارای جرم m_{b} و تانسور اینرسی $\overleftrightarrow{I}_{\mathrm{b}}$ حول مرکز جرم خود O_{b} است. جرم کل ماهواره m برابر مجموع این دو جرم است: $m := m_{\mathrm{m}} + m_{\mathrm{b}}$.

فاصلهٔ بین مرکز جرم بدنهٔ اصلی و مرکز جرم بوم $\tilde{l} := \overrightarrow{O_{\mathrm{m}}O_{\mathrm{b}}} \cdot {}_s\vec{e}_1$ به‌عنوان «طول بوم» تعریف می‌شود. برای بردارهای مکان مرکز جرم بدنهٔ اصلی و بوم نسبت به مرکز جرم ماهواره $\vec{\rho}_{\mathrm{m}} := \overrightarrow{O_sO_{\mathrm{m}}}$ و $\vec{\rho}_{\mathrm{b}} := \overrightarrow{O_sO_{\mathrm{b}}}$ روابط زیر برقرار است:

$$m_{\mathrm{m}}\vec{\rho}_{\mathrm{m}} + m_{\mathrm{b}}\vec{\rho}_{\mathrm{b}} = \vec{0} \qquad (4)$$

$$\vec{\rho}_{\mathrm{b}} - \vec{\rho}_{\mathrm{m}} = \tilde{l}\, {}_s\vec{e}_1 \qquad (5)$$

بنابراین،

$$\vec{\rho}_{\mathrm{m}} = -\frac{m_{\mathrm{b}}}{m}\tilde{l}\, {}_s\vec{e}_1 \qquad (6)$$

$$\vec{\rho}_{\mathrm{b}} = \frac{m_{\mathrm{m}}}{m}\tilde{l}\, {}_s\vec{e}_1 \qquad (7)$$

تانسور اینرسی ماهواره حول مرکز جرم آن به‌این صورت است:

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{I} &= \overleftrightarrow{I}_{\mathrm{b}} + \overleftrightarrow{I}_{\mathrm{m}} + m_{\mathrm{m}}\left(\vec{\rho}_{\mathrm{m}\times}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{\rho}_{\mathrm{m}\times}\right) + m_{\mathrm{b}}\left(\vec{\rho}_{\mathrm{b}\times}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{\rho}_{\mathrm{b}\times}\right) \\ &= \overleftrightarrow{I}_0 + m_{\mathrm{r}}\tilde{l}^2\left({}_s\vec{e}_{1\times}^{\mathrm{T}} \cdot {}_s\vec{e}_{1\times}\right) \qquad (8)\end{aligned}$$

که $\overleftrightarrow{I}_0 := \overleftrightarrow{I}_b + \overleftrightarrow{I}_m$ بخش ثابت تانسور اینرسی ماهواره است. ${}_s\vec{e}_{1\times}$ تانسور ضرب خارجی بردار ${}_s\vec{e}_1$ است؛ یعنی، ${}_s\vec{e}_{1\times} \cdot \vec{a} = {}_s\vec{e}_1 \times \vec{a}$. همچنین این اتحاد برقرار است: ${}_s\vec{e}_{1\times}^{\mathrm{T}} \cdot {}_s\vec{e}_{1\times} = \overleftrightarrow{e} - {}_s\vec{e}_1\, {}_s\vec{e}_1$. «جرم کاهش‌یافته»[3] m_{r} به‌این صورت تعریف می‌شود:

$$m_{\mathrm{r}} := \frac{m_{\mathrm{m}}m_{\mathrm{b}}}{m} \le \frac{1}{4}m \qquad (9)$$

جرم کاهش‌یافته در مسئلهٔ دو جسم ظاهر می‌شود [16,12].

تانسور $\overleftrightarrow{I}_0$ بردارهای ویژه‌ای دارد که نسبت به چارچوب ماهواره ثابت هستند. در صورتی‌که ${}_s\vec{e}_1$ بردار ویژهٔ $\overleftrightarrow{I}_0$ نباشد، با تغییر طول بوم بردارهای ویژهٔ تانسور اینرسی ماهواره $\overleftrightarrow{I}$ ثابت نبوده و درنتیجه، چارچوب ماهواره چارچوب اصلی سیستم نخواهد بود. برای سادگی، فرض می‌شود چارچوب ماهواره چارچوب اصلی سیستم است و ${}_s\vec{e}_1$، ${}_s\vec{e}_2$ و ${}_s\vec{e}_3$ بردارهای ویژهٔ تانسورهای اینرسی $\overleftrightarrow{I}_0$ و $\overleftrightarrow{I}$ هستند. مقادیر اصلی اینرسی به‌طور طبیعی در نامساوی‌های مثلثی صدق می‌کنند: $I_\alpha - I_\beta < I_\gamma$، $\alpha\beta\gamma \in \{123, 231, 312\}$. مقادیر اصلی بخش ثابت تانسور اینرسی $\overleftrightarrow{I}_0$ به‌این ترتیب فرض شدند:

$$I_{01} < I_{02} < I_{03} \qquad (10)$$

بیان تانسور اینرسی $\overleftrightarrow{I}$ در دستگاه مختصات ماهواره به‌این صورت است:

$${}^s_s I = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3) = \mathrm{diag}(I_{01}, I_{02} + m_{\mathrm{r}}\tilde{l}^2, I_{03} + m_{\mathrm{r}}\tilde{l}^2) \qquad (11)$$

و بیان آن در دستگاه مختصات مدار به‌این صورت نمایش داده می‌شود:

$${}^o_o I = {}^o_s e\, {}^s_s I\, {}^s_o e = \begin{bmatrix} I_1^1 & I_2^1 & I_1^3 \\ I_2^1 & I_2^2 & I_3^2 \\ I_1^3 & I_3^2 & I_3^3 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

2-4- فضای حالت

وضعیت ماهواره، جهت‌گیری یا دوران دستگاه مختصات مدار نسبت به دستگاه مختصات بدنه ${}^s_o e \in \mathrm{SO}(3)$ درنظر گرفته می‌شود. بنابراین، فضای پیکربندی سیستم به‌صورت $Q := \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}$ است. فضای پیکربندی سیستم چهار بعدی است. به‌دلیل این که معادلات حرکت سیستم، برحسب مومنتوم و به‌فرم همیلتونی مورد نظر است، فضای حالت سیستم، کلاف هم‌مماسی

1- mean motion
2- isomorphism
3- reduced mass

فضای پیکربندی[1] $\mathcal{X} := T^*Q \cong \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ است.

2-5- دینامیک وضعیت

بیان برداری دینامیک وضعیت ماهواره، که از سینماتیک دوران و اصل مومنتوم دورانی تشکیل شده است، به‌این صورت است:

$$\frac{{}^o\mathrm{d}_s\vec{e}_\alpha}{\mathrm{d}t} = \vec{\Omega} \times {}_s\vec{e}_\alpha, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{13}$$

$$\dot{\vec{\Pi}} = \frac{{}^o\mathrm{d}\vec{\Pi}}{\mathrm{d}t} + {}_o\vec{e}_3 \times \vec{\Pi} = \vec{M} \tag{14}$$

که

$$\vec{\Pi} = \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega} = \overleftrightarrow{I} \cdot \left(\vec{\Omega} + {}_o\vec{e}_3\right) \tag{15}$$

بردار مومنتوم زاویه‌ای ماهواره حول مرکز جرم آن است، $\vec{M}$ بردار گشتاور گرادیان جاذبه به‌عنوان تنها گشتاور خارجی وارد بر ماهواره است. (درواقع، مومنتوم زاویه‌ای و گشتاور، هم‌بردار هستند که با بردار یکی گرفته می‌شوند.)

2-6- دینامیک تغییر طول بوم

دینامیک تغییر طول بوم از تصویر اصل مومنتوم سیستم درجهت تغییرات مختصات تعمیم‌یافتهٔ طول بوم به‌دست می‌آید. برای ساده‌سازی معادلات حرکت تغییر طول بوم و حذف پارامتر جرم کاهش‌یافته m_r از آن، طول بوم نرمال‌شده l به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$l := \sqrt{m_\mathrm{r}}\,\tilde{l} \tag{16}$$

معادلات حرکت تغییر طول نرمال‌شدهٔ بوم به‌این صورت می‌شود:

$$\dot{l} = p_l \tag{17}$$

$$\dot{p}_l = l\vec{\omega} \cdot \left({}_s\vec{e}_{1\times}^{\mathrm{T}} \cdot {}_s\vec{e}_{1\times}\right) \cdot \vec{\omega} + Q_l + u \tag{18}$$

نحوهٔ به‌دست آوردن معادلات (17) و (18) در پیوست ارائه شده است. ورودی کنترلی u، نیروی نرمال‌شدهٔ بین بوم و جسم اصلی است (معادلات (90) و (100))، p_l مومنتوم تعمیم‌یافتهٔ تغییر طول نرمال‌شدهٔ بوم است (معادلات (92)، (94) و (98))، Q_l نیروی تعمیم‌یافتهٔ جاذبهٔ نرمال‌شده است (معادلات (89) و (99)).

تانسور اینرسی برحسب طول بوم نرمال‌شده به‌این صورت می‌شود:

$$\overleftrightarrow{I} = \overleftrightarrow{I}_0 + l^2\left({}_s\vec{e}_{1\times}^{\mathrm{T}} \cdot {}_s\vec{e}_{1\times}\right) = \overleftrightarrow{I}_0 + l^2\left(\overleftrightarrow{e} - {}_s\vec{e}_1\,{}_s\vec{e}_1\right) \tag{19}$$

2-7- میدان جاذبه

خط اثر نیروی جاذبهٔ وارد بر ماهواره از جرم نقطه‌ای مرکزی می‌گذرد؛ اما به‌دلیل یکنواخت نبودن میدان جاذبه، لزوماً از مرکز جرم ماهواره نمی‌گذرد. این امر موجب می‌شود که به ماهواره، حول مرکز جرم آن، گشتاور گرانشی وارد شود. در صورت کوچک بودن ابعاد ماهواره نسبت به ابعاد مدار می‌توان از عبارت مرتبهٔ اول گشتاور به‌عنوان تقریب مناسب استفاده کرد. مبحث نیرو، گشتاور و پتانسیل گرانشی در متون مرتبط، مانند [17-19]، یافت می‌شود. میدان جاذبه، یک میدان پایستار است و با یک تابع پتانسیل قابل بیان است. تابع انرژی پتانسیل گرانشی V به‌این صورت است:

$$V = \tfrac{3}{2}{}_o\vec{e}_1 \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot {}_o\vec{e}_1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\overleftrightarrow{I}\right) \tag{20}$$

که $\mathrm{tr}\left(\overleftrightarrow{I}\right) = I_1 + I_2 + I_3 = 2l^2 + I_{01} + I_{02} + I_{03}$ اثر[2] تانسور اینرسی ماهواره است. بردار گشتاور گرادیان جاذبه $\vec{M}$ به‌صورت زیر است:

$$\vec{M} = -\vec{\nabla}_{{}_o\vec{e}_1}V \times {}_o\vec{e}_1 = 3{}_o\vec{e}_1 \times \overleftrightarrow{I} \cdot {}_o\vec{e}_1 \tag{21}$$

نیروی تعمیم‌یافتهٔ جاذبهٔ نرمال‌شده Q_l در معادلهٔ (18) به‌این صورت است:

$$Q_l = -\frac{\partial V}{\partial l} = l\left[3\left({}_o\vec{e}_1 \cdot {}_s\vec{e}_1\right)^2 - 1\right] \tag{22}$$

2-8- فرم پورت‌همیلتونی معادلات حرکت

همیلتونی سیستم H از مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل تشکیل شده است که انرژی پتانسیل ماهواره V همان انرژی پتانسیل گرانشی معادلهٔ (20) است و انرژی جنبشی ماهواره به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T := \int \vec{\Omega} \cdot \mathrm{d}\vec{\Pi} + \dot{l}\mathrm{d}p_l = \tfrac{1}{2}\vec{\Pi} \cdot \overleftrightarrow{I}^{-1} \cdot \vec{\Pi} - {}_o\vec{e}_3 \cdot \vec{\Pi} + \tfrac{1}{2}{p_l}^2 \tag{23}$$

انرژی جنبشی ماهواره به‌صورت ضمنی زیر نیز می‌تواند تعریف شود:

$$\vec{\nabla}_{\vec{\Pi}}T = \vec{\Omega} = \vec{\Omega}\left(\vec{\Pi}\right) = \overleftrightarrow{I}^{-1} \cdot \vec{\Pi} - {}_o\vec{e}_3 \tag{24}$$

$$\frac{\partial T}{\partial p_l} = \dot{l} = p_l \tag{25}$$

در این‌جا، مفهوم مومنتوم قبل از مفهوم انرژی، ارائه و سپس انرژی جنبشی با کمک آن تعریف شد. می‌توان ابتدا هم‌انرژی[3] جنبشی را تعریف و سپس مومنتوم و انرژی جنبشی را با تبدیل لژاندر[4] آن نسبت به سرعت زاویه‌ای ماهواره نسبت به مدار $\vec{\Omega}$ و نرخ تغییر طول بوم $\dot{l}$ تعریف کرد.

بنابراین، همیلتونی به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} H &= \tfrac{1}{2}\vec{\Pi} \cdot \overleftrightarrow{I}^{-1} \cdot \vec{\Pi} - {}^o\Pi^3 + \tfrac{1}{2}{p_l}^2 + \tfrac{3}{2}I_1^1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\overleftrightarrow{I}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\Omega} + \tfrac{1}{2}{p_l}^2 - \tfrac{1}{2}I_3^3 + \tfrac{3}{2}I_1^1 \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\overleftrightarrow{I}\right) \end{aligned} \tag{26}$$

فرم همیلتونی معادلات حرکت در دستگاه مختصات مدار به‌این صورت است:

$$\dot{\xi} = J(x)\left(\partial_\xi H\right)^{\mathrm{T}}(x) + g(x)u \tag{27-الف}$$

$$\begin{bmatrix} {}^o\Omega \\ {}^o\dot{\Pi} \\ \dot{l} \\ \dot{p}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e & 0 & 0 \\ -e & -{}^o\Pi_\times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\partial H/\partial {}^o\theta)^{\mathrm{T}} \\ (\partial H/\partial {}^o\Pi)^{\mathrm{T}} \\ \partial H/\partial l \\ \partial H/\partial p_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{27-ب}$$

که e ماتریس همانی 3 در 3 است و تابع همیلتونی برحسب مختصات $x = ({}_o^se, {}^o\Pi, l, p_l)$ و مشتقات پاره‌ای آن به‌این صورت است:

$$\begin{aligned} H({}_o^se, {}^o\Pi, l, p_l) &= \tfrac{1}{2}{}^o\Pi^{\mathrm{T}}\,{}_o^se^{\mathrm{T}}\,{}_s^sI^{-1}\,{}_o^se\,{}^o\Pi - {}^o\Pi^3 + \tfrac{1}{2}{p_l}^2 \\ &\quad + \tfrac{3}{2}{}_o^se_1^{\mathrm{T}}\,{}_s^sI\,{}_o^se_1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}({}_s^sI) \end{aligned} \tag{28}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial {}^o\Pi}\right)^{\mathrm{T}} = {}^o\Omega \tag{29}$$

$$-\left(\frac{\partial H}{\partial {}^o\theta}\right)^{\mathrm{T}} = -\left(\frac{\partial H}{\partial {}_o^se_\alpha}\frac{\partial {}_o^s\dot{e}_\alpha}{\partial {}^o\Omega}\right)^{\mathrm{T}} = {}^o\Pi \times {}^o\omega + 3e_1 \times {}_o^oIe_1 \tag{30}$$

$$\frac{\partial H}{\partial l} = l\left({}^s\omega^{2\,2} + {}^s\omega^{3\,2} + 3{}_o^se_1^{1\,2} - 1\right), \qquad \frac{\partial H}{\partial p_l} = p_l \tag{31}$$

که ${}^o\theta$ شبه‌مختصاتی است که ${}^o\dot{\theta} := {}^o\Omega$ مختصات $T_{{}_o^se}\mathrm{SO}(3)$، و $\partial/\partial {}^o\theta$ میدان‌های برداری متناظر با آن روی $\mathrm{SO}(3)$ است. بنابراین، ξ مختصات $T_x\mathcal{X}$ و $\partial_\xi := \partial/\partial\xi$ میدان‌های برداری متناظر با آن روی فضای حالت $\mathcal{X}$ است.

3- نقاط تعادل

ماهوارهٔ تحت گرادیان جاذبه در مدار دایره‌ای دارای وضعیت‌های تعادل نسبت به چارچوب مدار است. دوران ماهواره نسبت به چارچوب مدار، به‌همین دلیل، به‌عنوان وضعیت ماهواره انتخاب شده است. حالت تعادل سیستم در نقاطی است که نرخ متغیرهای حالت صفر است؛ بنابراین، با توجه به معادلات دینامیک وضعیت (13) و (14) و مومنتوم دورانی معادلهٔ (15) و معادلات دینامیک بوم (17) و (18)، روابط زیر، در حالت تعادل، برقرار است:

$$\frac{{}^o\mathrm{d}_s\bar{\vec{e}}_\alpha}{\mathrm{d}t} = \bar{\vec{\Omega}} \times {}_s\bar{\vec{e}}_\alpha = \vec{0} \Rightarrow \bar{\vec{\Omega}} = \vec{0} \Rightarrow \tag{32-الف}$$

1- the cotangent bundle of the configuration space
2- trace
3- co-energy
4- Legendre transform

$$\vec{\bar{\omega}} = {}_o\vec{e}_3, \qquad \vec{\bar{\Pi}} = \overleftrightarrow{\bar{I}} \cdot {}_o\vec{e}_3 \tag{32-ب}$$

$$\begin{aligned}\frac{{}^o\mathrm{d}\vec{\bar{\Pi}}}{\mathrm{d}t} &= \vec{\bar{\Pi}} \times {}_o\vec{e}_3 + 3{}_o\vec{e}_1 \times \overleftrightarrow{\bar{I}} \cdot {}_o\vec{e}_1 \\ &= -{}_o\vec{e}_3 \times \overleftrightarrow{\bar{I}} \cdot {}_o\vec{e}_3 + 3{}_o\vec{e}_1 \times \overleftrightarrow{\bar{I}} \cdot {}_o\vec{e}_1 \\ &= \vec{0}\end{aligned} \tag{33}$$

$$\dot{\bar{l}} = \bar{p}_l = 0 \tag{34}$$

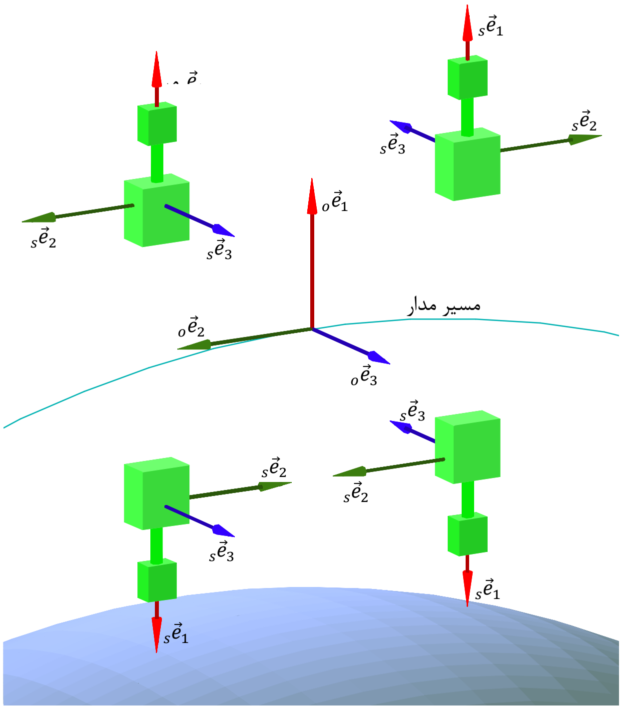
$$\begin{aligned}\dot{\bar{p}}_l &= \bar{l}\left[\vec{\bar{\omega}} \cdot \left({}_s\vec{\bar{e}}_{1\times}^{\mathrm{T}} \cdot {}_s\vec{\bar{e}}_{1\times}\right) \cdot \vec{\bar{\omega}} + 3\left({}_o\vec{e}_1 \cdot {}_s\vec{\bar{e}}_1\right)^2 - 1\right] + \bar{u} \\ &= \bar{l}\left[-\left({}_s\vec{\bar{e}}_1 \cdot {}_o\vec{e}_3\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 3\left({}_o\vec{e}_1 \cdot {}_s\vec{\bar{e}}_1\right)^2\right] + \bar{u} = 0\end{aligned} \tag{35}$$

که نماد میله روی متغیرهای در حالت تعادل قرار داده شده است. از معادلۀ (32-الف) واضح است که در حالت تعادل، ماهواره نسبت به مدار ثابت است، و از معادلۀ (34) روشن است که در حالت تعادل، طول بوم ثابت است. جهت‌گیری ماهواره در حالت تعادل از معادلۀ (33) به‌دست می‌آید و ورودی کنترلی که طول بوم را ثابت نگه می‌دارد از معادلۀ (35) مشخص می‌شود.

بیان معادلۀ (33) در دستگاه مختصات مدار به‌این صورت است:

$$-e_3 \times {}^o_o\bar{I}e_3 + 3e_1 \times {}^o_o\bar{I}e_1 = [\bar{I}^2_3, -4\bar{I}^3_1, 3\bar{I}^1_2]^{\mathrm{T}} = 0 \tag{36}$$

از معادلۀ (36) نتیجه می‌شود که مقادیر غیر قطری بیان ماتریسی تانسور اینرسی در دستگاه مختصات مدار در وضعیت تعادل صفر هستند، بنابراین، وضعیت تعادل، وضعیتی است که دستگاه مختصات مدار، دستگاه مختصات اصلی تانسور اینرسی باشد؛ به‌عبارت دیگر، بردارهای یکۀ دستگاه مختصات مدار بردارهای ویژۀ تانسور اینرسی باشند. با فرض عدم تقارن ماهواره، بردارهای ویژۀ تانسور اینرسی سه راستای متعامد را در فضا تشکیل می‌دهند، در این صورت، قرار گرفتن بردارهای یکۀ دستگاه مختصات ماهواره در راستای بردارهای یکۀ دستگاه مختصات مدار، وضعیت‌های تعادل را تشکیل می‌دهند. تعداد این وضعیت‌های تعادل برای ماهوارۀ نامتقارن 24 است. در جدول 1 وضعیت‌های تعادل نمایش داده شده‌اند. هر سطر از این جدول، چهار وضعیت تعادل را نشان می‌دهد. در شکل 3 وضعیت‌های تعادل 123 مشخص‌شده در سطر اول جدول 1 نمایش داده شده است.



شکل 3 چهار وضعیت تعادل 123 (سطر اول جدول 1)

مقدار ورودی کنترلی $\bar{u}$ که طول بوم را در مقدار تعادل $\bar{l}$ ثابت نگه می‌دارد با توجه به معادلۀ (35) به‌صورت زیر است:

$$\bar{u} = \left[\left({}_s\vec{\bar{e}}_1 \cdot {}_o\vec{e}_3\right)^2 - 3\left({}_s\vec{\bar{e}}_1 \cdot {}_o\vec{e}_1\right)^2\right]\bar{l} = \bar{d}_1\bar{l} \tag{37}$$

که

$$\bar{d}_1 := {}^s_o\bar{e}^{1\,2}_3 - 3{}^s_o\bar{e}^{1\,2}_1 \tag{38}$$

مقادیر ورودی کنترلی در وضعیت‌های تعادل مختلف در جدول 1 آمده است.

4- مدل خطی سیستم

برای بررسی پایداری در همسایگی نقاط تعادل همچنین بررسی کنترل‌پذیری خطی، لازم است مدل خطی سیستم حول نقاط تعادل به‌دست آید. زوایای دوران بی‌نهایت‌کوچک حول وضعیت تعادل $\delta^o\theta$ را با خاصیت $\delta^o\theta_\times = \delta^o_s e\,{}^s_o\bar{e}$ و $\delta^o\dot{\theta} = \delta^o\Omega = \delta^o\omega$ درنظر می‌گیریم. رابطۀ مومنتوم دورانی بی‌نهایت‌کوچک به‌این صورت است: $\delta^o\Pi = {}^o_o\bar{I}\,\delta^o\Omega + \delta^o_oI\,e_3$. بنابراین، معادلۀ سینماتیک خطی‌شدۀ دوران به‌صورت زیر است:

$$\delta^o\dot{\theta} = \delta^o\Omega = {}^o_o\bar{I}^{-1}(\delta^o\Pi - \delta^o_oI\,e_3) \tag{39}$$

فرم خطی‌شدۀ معادلۀ سینتیک دوران به‌این صورت است:

$$\delta^o\dot{\Pi} = \delta^o\Pi \times e_3 + 3e_1 \times \delta^o_oI\,e_1 \tag{40}$$

فرم خطی‌شدۀ دینامیک بوم معادلات (17) و (18) به‌این صورت است:

$$\delta\dot{l} = \delta p_l \tag{41}$$

$$\delta\dot{p}_l = 2\bar{l}\left(1 - {}^s_o\bar{e}^{1\,2}_3\right)\delta^o\Omega^3 + \left(3{}^s_o\bar{e}^{1\,2}_1 - {}^s_o\bar{e}^{1\,2}_3\right)\delta l + \delta u \tag{42}$$

که $\delta u := \bar{u} - u$ و در به‌دست آوردن معادلۀ (42) از این خاصیت وضعیت تعادل استفاده شده است: ${}^s_o\bar{e}^1_\alpha\,{}^s_o\bar{e}^1_\beta = 0, \alpha \neq \beta$. توجه شود که در وضعیت‌های تعادل، ${}^o_o\bar{I}$ قطری است و حالت‌های مختلف آن در جدول 1 آمده است. تانسور اینرسی بی‌نهایت‌کوچک در دستگاه مختصات مدار δ^o_oI از خطی‌سازی معادلۀ (12) به‌دست می‌آید:

$$\delta^o_oI = \delta^o\theta \times {}^o_o\bar{I} - {}^o_o\bar{I} \times \delta^o\theta + {}^s_o\bar{e}^{\mathrm{T}}\delta^s_sI\,{}^s_o\bar{e} \tag{43}$$

با استفاده از معادلات (39) تا (43)، معادلات دینامیک خطی وضعیت تغییر طول بوم حاصل می‌شود.

دینامیک گردش[1] (دوران حول بردار مکان) و غلتش[2] (دوران حول بردار سرعت) به‌این صورت است:

$$\delta^o\dot{\theta}^1 = \frac{\delta^o\Pi^1}{\bar{I}^1_1} - \frac{(\bar{I}^3_3 - \bar{I}^1_1)}{\bar{I}^1_1}\delta^o\theta^2 \tag{44-الف}$$

$$\delta^o\dot{\theta}^2 = \frac{\delta^o\Pi^2}{\bar{I}^2_2} - \frac{(\bar{I}^2_2 - \bar{I}^3_3)}{\bar{I}^2_2}\delta^o\theta^1 \tag{44-ب}$$

$$\delta^o\dot{\Pi}^1 = \delta^o\Pi^2 \tag{44-پ}$$

$$\delta^o\dot{\Pi}^2 = -\delta^o\Pi^1 - 3(\bar{I}^3_3 - \bar{I}^1_1)\delta^o\theta^2 \tag{44-ت}$$

و دینامیک پیچش[3] (دوران حول بردار عمود بر صفحۀ مدار) و بوم به‌این صورت است:

جدول 1 وضعیت‌های تعادل ماهوارۀ نامتقارن

نام	$\bar{u}$	${}^o_o\bar{I}$	وضعیت ماهواره
123	$-3\bar{l}$	$\mathrm{diag}(\bar{I}_1 \quad \bar{I}_2 \quad \bar{I}_3)$	${}_s\vec{\bar{e}}_1 = \pm{}_o\vec{e}_1,\ {}_s\vec{\bar{e}}_3 = \pm{}_o\vec{e}_3$
132	$-3\bar{l}$	$\mathrm{diag}(\bar{I}_1 \quad \bar{I}_3 \quad \bar{I}_2)$	${}_s\vec{\bar{e}}_1 = \pm{}_o\vec{e}_1,\ {}_s\vec{\bar{e}}_2 = \pm{}_o\vec{e}_3$
312	0	$\mathrm{diag}(\bar{I}_3 \quad \bar{I}_1 \quad \bar{I}_2)$	${}_s\vec{\bar{e}}_3 = \pm{}_o\vec{e}_1,\ {}_s\vec{\bar{e}}_2 = \pm{}_o\vec{e}_3$
213	0	$\mathrm{diag}(\bar{I}_2 \quad \bar{I}_1 \quad \bar{I}_3)$	${}_s\vec{\bar{e}}_2 = \pm{}_o\vec{e}_1,\ {}_s\vec{\bar{e}}_3 = \pm{}_o\vec{e}_3$
231	$\bar{l}$	$\mathrm{diag}(\bar{I}_2 \quad \bar{I}_3 \quad \bar{I}_1)$	${}_s\vec{\bar{e}}_2 = \pm{}_o\vec{e}_1,\ {}_s\vec{\bar{e}}_1 = \pm{}_o\vec{e}_3$
321	$\bar{l}$	$\mathrm{diag}(\bar{I}_3 \quad \bar{I}_2 \quad \bar{I}_1)$	${}_s\vec{\bar{e}}_3 = \pm{}_o\vec{e}_1,\ {}_s\vec{\bar{e}}_1 = \pm{}_o\vec{e}_3$

1- yaw
2- roll
3- pitch

$$\delta^o\dot{\theta}^3 = \frac{\delta^o\Pi^3}{\bar{I}_3^3} + \frac{\bar{d}_2}{\bar{I}_3^3}\delta l \tag{45-الف}$$

$$\delta^o\dot{\Pi}^3 = 3(\bar{I}_1^1 - \bar{I}_2^2)\delta^o\theta^3 \tag{45-ب}$$

$$\delta\dot{l} = \delta p_l \tag{45-پ}$$

$$\delta\dot{p}_l = -\frac{\bar{d}_2}{\bar{I}_3^3}\delta^o\Pi^3 - \left(\bar{d}_1 + \frac{\bar{d}_2{}^2}{\bar{I}_3^3}\right)\delta l + \delta u \tag{45-ت}$$

که $\bar{d}_1$ در معادلهٔ (38) تعریف شده است و

$$\bar{d}_2 := -2\bar{l}\left(1 - {}_o^s\bar{e}_3^1{}^2\right) \tag{46}$$

از معادلات (44) و (45) مشاهده می‌شود که دینامیک گردش- غلتش و دینامیک پیچش- بوم از یکدیگر مستقل هستند.

معادلهٔ مشخصهٔ دینامیک گردش- غلتش به‌صورت زیر است:

$$s^4 + (1 + 3\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2)s^2 - 4\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 = 0 \tag{47}$$

که

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\bar{I}_2^2 - \bar{I}_3^3}{\bar{I}_1^1}, \qquad \bar{\sigma}_2 = \frac{\bar{I}_3^3 - \bar{I}_1^1}{\bar{I}_2^2}, \qquad \bar{\sigma}_3 = \frac{\bar{I}_1^1 - \bar{I}_2^2}{\bar{I}_3^3} \tag{48}$$

فرم همیلتونی دینامیک خطی سیستم از خطی‌سازی معادلات همیلتونی (27-ب) و یا تبدیل معادلات خطی به‌فرم همیلتونی به‌دست می‌آید. معادلات همیلتونی خطی دینامیک گردش- غلتش به‌این صورت است:

$$\delta\dot{\xi}_{\mathrm{yr}} = J_{\mathrm{yr}}P_{\mathrm{yr}}\delta\xi_{\mathrm{yr}} \tag{49}$$

$$\delta\xi_{\mathrm{yr}} := \begin{bmatrix}\delta^o\theta^1\\ \delta^o\Pi^2\\ \delta^o\theta^2\\ \delta^o\Pi^1\end{bmatrix}, \qquad J_{\mathrm{yr}} := \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -\bar{I}_3^3\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & \bar{I}_3^3 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{49-الف}$$

$$P_{\mathrm{yr}} := \begin{bmatrix}-\bar{I}_3^3\frac{\bar{D}_1}{\bar{I}_2^2} & -\frac{\bar{D}_1}{\bar{I}_2^2} & 0 & 0\\ -\frac{\bar{D}_1}{\bar{I}_2^2} & \frac{1}{\bar{I}_2^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & (3\bar{I}_1^1 + \bar{I}_3^3)\frac{\bar{D}_2}{\bar{I}_1^1} & -\frac{\bar{D}_2}{\bar{I}_1^1}\\ 0 & 0 & -\frac{\bar{D}_2}{\bar{I}_1^1} & \frac{1}{\bar{I}_1^1}\end{bmatrix} \tag{49-ب}$$

که $\bar{D}_1 := \bar{I}_2^2 - \bar{I}_3^3$ و $\bar{D}_2 := \bar{I}_3^3 - \bar{I}_1^1$. ترتیب متغیرها در معادلهٔ (49) به‌گونه‌ای انتخاب شده است که ماتریس P_{yr} معادلهٔ (49-ب) قطری بلوکی شود. معادلات همیلتونی خطی دینامیک پیچش- بوم به‌این صورت است:

$$\delta\dot{\xi}_{\mathrm{pb}} = J_{\mathrm{pb}}P_{\mathrm{pb}}\delta\xi_{\mathrm{pb}} + g_{\mathrm{pb}}\delta u \tag{50}$$

$$\delta\xi_{\mathrm{pb}} := \begin{bmatrix}\delta^o\theta^3\\ \delta^o\Pi^3\\ \delta l\\ \delta p_l\end{bmatrix}, \qquad J_{\mathrm{pb}} := \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix} \tag{50-الف}$$

$$P_{\mathrm{pb}} := \begin{bmatrix}-3(\bar{I}_1^1 - \bar{I}_2^2) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\bar{I}_3^3} & \frac{\bar{d}_2}{\bar{I}_3^3} & 0\\ 0 & \frac{\bar{d}_2}{\bar{I}_3^3} & \bar{d}_1 + \frac{\bar{d}_2{}^2}{\bar{I}_3^3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, g_{\mathrm{pb}} := \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{50-ب}$$

همیلتونی سیستم خطی به‌صورت درجه دوم است:

$$\delta^2 H = \tfrac{1}{2}\delta\xi_{\mathrm{pb}}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{pb}}\delta\xi_{\mathrm{pb}} + \tfrac{1}{2}\delta\xi_{\mathrm{yr}}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{yr}}\delta\xi_{\mathrm{yr}} \tag{51}$$

مدل خطی سیستم، اطلاعات مهمی دربارهٔ رفتار سیستم غیرخطی دربر دارد. از آن‌جا که دینامیک گردش-غلتش و دینامیک پیچش-بوم به‌صورت خطی از یکدیگر مستقل هستند و ورودی کنترلی در دینامیک خطی پیچش-بوم ظاهر می‌شود، دینامیک گردش-غلتش کنترل‌ناپذیر خطی است. بنابراین، اگر دینامیک خطی گردش-غلتش ناپایدار باشد (قطب سمت راست داشته باشد)، هیچ قانون کنترلی C^1 (یکبار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر) وجود ندارد که سیستم غیرخطی را پایدار کند ([20] قضیهٔ 10.5، [21] قضیهٔ 10.5). اگر دینامیک خطی گردش-غلتش پایدار باشد، که در آن صورت به دلیل همیلتونی بودن، لزوماً قطب‌های آن روی محور موهومی است، قانون کنترلی C^1 وجود ندارد که سیستم غیرخطی را پایدار مجانبی نمایی[1] کند ([22] قضیهٔ 7.15).

5- پایدارسازی

در این بخش پایداری و شرایط آن و پایدارسازی لیاپانوف و مجانبی از طریق شکل‌دهی انرژی و تزریق میرایی بررسی می‌شود. ورودی کنترل از دو بخش قانون کنترلی برای شکل‌دهی انرژی $u_{\mathrm{es}}(x)$ و قانون کنترلی برای تزریق میرایی $u_{\mathrm{di}}(x)$ درنظر گرفته می‌شود:

$$u = u_{\mathrm{es}}(x) + u_{\mathrm{di}}(x) \tag{52}$$

5-1- شکل‌دهی انرژی

سیستم‌های پورت‌همیلتونی این خاصیت را دارند که نقاط کمینهٔ تابع همیلتونی آن‌ها پایداری لیاپانوف دارد. بنابراین، قانون کنترلی می‌تواند به‌گونه‌ای معرفی شود که سیستم حلقه‌بسته، فرم پورت‌همیلتونی داشته باشد و دارای تابع همیلتونی تغییر شکل یافته با مقدار کمینه در نقطهٔ مطلوب باشد. این تکنیک، کنترل «شکل‌دهی انرژی»[2] نامیده می‌شود. یک انتخاب طبیعی برای تابع همیلتونی تغییر شکل یافته در مورد سیستم‌های فیزیکی، تفاضل انرژی ذخیره شده (همیلتونی) و انرژی تأمین شده (توسط کنترل‌کننده) است که منجر به «کنترل موازنهٔ انرژی»[3] می‌شود [15].

تابع همیلتونی سیستم حلقه‌بسته برابر مجموع تابع همیلتونی سیستم حلقه‌باز و تابع انرژی است که توسط قانون کنترلی شکل‌دهی انرژی معرفی می‌شود:

$$H_{\mathrm{cl}}(x) := H(x) + H_{\mathrm{es}}(x) \tag{53}$$

دینامیک سیستم حلقه‌بسته با جایگذاری معادلهٔ (52) در معادلهٔ (27-ب) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{\xi} = J(x)\big(\partial_\xi H\big)^{\mathrm{T}}(x) + g(x)\big(u_{\mathrm{es}}(x) + u_{\mathrm{di}}(x)\big) \tag{54}$$

مطلوب است که سیستم حلقه‌بسته به‌فرم زیر باشد:

$$\dot{\xi} = J(x)\big(\partial_\xi H_{\mathrm{cl}}\big)^{\mathrm{T}}(x) + g(x)u_{\mathrm{di}}(x) \tag{55}$$

از برابر قرار دادن طرف راست معادلات (54) و (55)، و استفاده از معادلهٔ (53) رابطهٔ زیر برای قانون کنترلی شکل‌دهی انرژی u_{es} و تابع انرژی H_{es} به‌دست می‌آید:

$$g(x)u_{\mathrm{es}}(x) = J(x)\big(\partial_\xi H_{\mathrm{es}}\big)^{\mathrm{T}}(x) \tag{56}$$

$$\frac{\partial H_{\mathrm{es}}}{\partial^o\theta} = 0, \qquad \frac{\partial H_{\mathrm{es}}}{\partial^o\Pi} = 0, \qquad \frac{\partial H_{\mathrm{es}}}{\partial p_l} = 0 \tag{56-الف}$$

$$u_{\mathrm{es}} = -\frac{\partial H_{\mathrm{es}}}{\partial l} \tag{56-ب}$$

بنابر معادلهٔ (56-الف) تابع انرژی H_{es}، تنها، تابعی از طول بوم است: $H_{\mathrm{es}} = H_{\mathrm{es}}(l)$؛ یعنی، به‌صورت تابع پتانسیل یک فنر (غیرخطی) بین بدنهٔ اصلی و بوم است. بنابراین، معادلهٔ (56-ب) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$u_{\mathrm{es}}(l) = -H_{\mathrm{es}}'(l) \tag{57}$$

بر اساس معادلهٔ (37) و این که در نقاط تعادل، قانون کنترلی تزریق میرایی

1- exponentially asymptotically stable
2- energy shaping
3- energy-balancing control

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.5.26.0]

صفر است ($u_{\rm di}(\bar{x})=0$)، برای طول بوم در حالت تعادل رابطهٔ زیر برقرار است:

$$-H'_{\rm es}(\bar l)=u_{\rm es}(\bar l)=\bar d_1\bar l \tag{58}$$

بنابر جدول 1 و معادلهٔ (58)، محل‌های تقاطع منحنی $u=u_{\rm es}(l)$ و خط $u=-3l$ طول تعادل بوم در وضعیت‌های تعادل 123 و 132 را مشخص می‌کند. محل‌های تقاطع منحنی $u=u_{\rm es}(l)$ و خط $u=0$ طول تعادل بوم در وضعیت‌های تعادل 312 و 213 را معین می‌کند. محل‌های تقاطع منحنی $u=u_{\rm es}(l)$ و خط $u=l$ طول تعادل بوم در وضعیت‌های تعادل 231 و 321 را معلوم می‌کند. در صورت عدم تقاطع منحنی $u_{\rm es}(l)$ با یکی از این سه خط، وضعیت تعادل مربوط به آن برای سیستم وجود ندارد. در شکل 4 یک نمونه منحنی $u_{\rm es}(l)$ و طول‌های تعادل بوم متناظر با آن نشان داده شده است. طول تعادل بوم در چهار نقطهٔ تعادل 123 با $\bar l_{123}$ نمایش داده شده است. توجه شود که هر طول تعادل بوم برای هشت نقطهٔ تعادل است؛ یعنی، $\bar l_{123}=\bar l_{132}$، $\bar l_{312}=\bar l_{213}$ و $\bar l_{231}=\bar l_{321}$.

در سیستم‌های همیلتونی، یک نقطهٔ تعادل اگر کمینهٔ (یا بیشینهٔ) محلی تابع همیلتونی باشد پایدار لیاپانوف است. (با اضافه شدن میرایی به سیستم، نقطهٔ تعادلی که در آن تابع همیلتونی بیشینه است ناپایدار می‌شود. البته تابع همیلتونی سیستم‌های مکانیکی بیشینه ندارد.) شرط کافی برای کمینه بودن یک تابع اسکالر دو بار مشتق‌پذیر در یک نقطه، مثبت معین بودن ماتریس هسین[1] آن در آن نقطه است.

بر اساس معادلات (49-51)، و قانون کنترلی شکل‌دهی انرژی خطی‌شده $\delta u_{\rm es}=u'_{\rm es}(\bar l)\delta l=-H''_{\rm es}(\bar l)\delta l$، تابع همیلتونی سیستم حلقه‌بسته خطی‌شده به‌صورت زیر است:

$$\delta^2 H_{\rm cl}=\frac{1}{2}\delta\xi_{pb}^{\rm T}P_{\rm cl,pb}\delta\xi_{\rm pb}+\frac{1}{2}\delta\xi_{\rm yr}^{\rm T}P_{\rm yr}\delta\xi_{\rm yr} \tag{59}$$

که $P_{\rm yr}$ در معادلهٔ (49-ب) تعریف شده است و

$$P_{\rm cl,pb}:=\begin{bmatrix}-3(\bar I_1^1-\bar I_2^2) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\bar I_3^3} & \dfrac{\bar d_2}{\bar I_3^3} & 0\\ 0 & \dfrac{\bar d_2}{\bar I_3^3} & \bar d_1+\dfrac{\bar d_2{}^2}{\bar I_3^3}+H''_{\rm es}(\bar l) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{60}$$

برای این که $P_{\rm yr}>0$ باید $\bar I_3^3-\bar I_1^1>0$ و $\bar I_2^2-\bar I_3^3<0$، و برای این که $P_{\rm cl,pb}>0$ باید $\bar I_1^1-\bar I_2^2<0$ و $\bar d_1+H''_{\rm es}(\bar l)>0$. بنابراین، شرط کافی پایداری لیاپانوف یک نقطهٔ تعادل سیستم به‌صورت زیر است:

$$\bar I_1^1<\bar I_2^2<\bar I_3^3 \tag{61-الف}$$

$$-H''_{\rm es}(\bar l)=u'_{\rm es}(\bar l)<\bar d_1 \tag{61-ب}$$

برای این که یک نقطهٔ تعادل، ناپایدار باشد کافی است یکی از نامساوی‌های (61) برای آن نقطه به‌صورت برعکس برقرار باشد.

با توجه به فرضی که در نامساوی (10) برای مقادیر ثابت اینرسی سیستم شد، همواره مقادیر اینرسی سیستم به‌این ترتیب هستند: $I_1<I_2<I_3$، و به‌طور خاص، در نقاط تعادل همین ترتیب برقرار است:

$$\bar I_1<\bar I_2<\bar I_3 \tag{62}$$

از شرط (61-الف) و نامساوی (62) نتیجه می‌شود که تمام نقاط تعادل به‌جز نقاط تعادل 123 لزوماً ناپایدار هستند. اگر نامساوی (61-ب) برای چهار نقطهٔ تعادل 123 برقرار باشد، این نقاط پایدار لیاپانوف خواهند بود. بنابراین، بر اساس معادلهٔ (58) و نامساوی (61-ب)، برای این که نقاط تعادل 123 وجود داشته و همچنین پایدار باشند باید شرایط زیر برای قانون کنترلی شکل‌دهی انرژی ارضا شود:

$$u_{\rm es}(\bar l_{123})=-3\bar l_{123} \tag{63-الف}$$

$$u'_{\rm es}(\bar l_{123})<-3 \tag{63-ب}$$

یعنی تابع $u_{\rm es}(l)$ خط $u(l)=-3l$ را با شیبی کم‌تر از آن در طول طراحی شدهٔ $\bar l_{123}$ قطع کند (شکل 4). طول تعادل بوم $\bar l_{123}$ و شیب قانون کنترلی شکل‌دهی انرژی در آن طول $u'_{\rm es}(\bar l_{123})$ بر اساس عملکرد مورد نظر طراح تعیین می‌شود.

سیستم حلقه‌بستهٔ معادلهٔ (55) بدون ورودی، $u_{\rm di}=0$، یک سیستم بدون اتلاف است؛ بنابراین، تابع همیلتونی یک انتگرال حرکت آن سیستم است:

$$\dot\xi(t)=J\big(x(t)\big)\big(\partial_\xi H_{\rm cl}\big)^{\rm T}\big(x(t)\big) \tag{64}$$

$$H_{\rm cl0}=H_{\rm cl}\big(x(0)\big)=H_{\rm cl}\big(x(t)\big),\qquad \forall t \tag{65}$$

مجموعهٔ نقاطی که همیلتونی سیستم حلقه‌بستهٔ آن‌ها $H_{\rm cl0}$ است به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_{\rm cl}{}^{-1}(H_{\rm cl0}):=\{x\in\mathcal{X}:H_{\rm cl}(x)=H_{\rm cl0}\} \tag{66}$$

و $H_{\rm cl}{}^{-1}(H_{\rm cl}(x_0),x_0)$ قسمت همبند[2] مجموعهٔ $H_{\rm cl}{}^{-1}(H_{\rm cl}(x_0))$ است که x_0 را دربر دارد؛ یعنی، متشکل از تمام نقاط $H_{\rm cl}{}^{-1}(H_{\rm cl}(x_0))$ است که به x_0 متصل هستند. بنابراین، مسیر حالت $x(t)$، $x(0)=x_0$ روی سطح همیلتونی ثابت $H_{\rm cl}{}^{-1}(H_{\rm cl}(x_0),x_0)$ قرار دارد. در همسایگی نقاط تعادل پایدار، $H_{\rm cl}{}^{-1}(H_{\rm cl}(x_0),x_0)$ به شکل یک بیضی‌گون است؛ زیرا در آن نقاط، هسین تابع همیلتونی حلقه‌بسته، مثبت‌معین است. می‌توان از این سطوح انتگرال کرانی برای مسیرهای حالت مشخص کرد. (برای این منظور نیاز است که بین نقاط فضای حالت، فاصله تعریف شود.) اگر به‌ازای هر $x_0\in\mathcal{X}$ مجموعهٔ $H_{\rm cl}{}^{-1}(H_{\rm cl}(x_0),x_0)$ کران‌دار باشد، آن‌گاه تمام مسیرهای حالت فضای حالت کران‌دار هستند. در آن صورت، برخلاف پایداری لیاپانوف که یک خاصیت محلی برای نقاط تعادل پایدار است، یک خاصیت فراگیر برای سیستم، یعنی کران‌دار بودن مسیرهای حالت، نتیجه می‌شود. توجه شود که به دلیل پیوستگی $H_{\rm cl}$، در صورت کران‌دار بودن مجموعهٔ $H_{\rm cl}{}^{-1}(H_{\rm cl}(x_0),x_0)$، این مجموعه، بسته و در نتیجه فشرده است.

فضای حالت سیستم $\mathcal{X}={\rm SO}(3)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (پس از بدیهی‌سازی) به‌صورت ضرب دکارتی چند فضا است، و ${\rm SO}(3)$ یک مجموعهٔ فشرده است. همچنین به‌ازای افزایش بی‌کران $|p_l|$ و $\|{}^o\Pi\|$، همیلتونی به‌صورت بی‌کران افزایش می‌یابد. بنابراین، برای بررسی کران‌دار بودن مجموعهٔ $H_{\rm cl}{}^{-1}(H_{\rm cl}(x_0),x_0)$ کافی است به بررسی نحوهٔ تابعیت $H_{\rm cl}$ به l بپردازیم. در عمل، طول بوم در یک بازهٔ مشخص می‌تواند تغییر کند: $l\in[l_{\rm min},l_{\rm max}]$. در این صورت، فضای پیکربندی سیستم، ${\rm SO}(3)\times[l_{\rm min},l_{\rm max}]$ است. می‌توان تابع انرژی شکل‌دهی انرژی را به‌گونه‌ای انتخاب کرد که طول بوم ماهواره همواره در این بازه باقی بماند. (البته در صورتی که در شروع اعمال قانون کنترلی، طول بوم در این بازه باشد.) شرط زیر روی تابع همیلتونی شکل‌دهی انرژی، برای کران‌دار بودن مجموعهٔ $H_{\rm cl}{}^{-1}(H_{\rm cl}(x_0),x_0)$ کافی است:

$$\lim_{l\to l_{\rm min}^+}H_{\rm es}(l)=\lim_{l\to l_{\rm max}^-}H_{\rm es}(l)=+\infty \tag{67}$$

نامساوی‌های (63) به‌همراه نامساوی (67) شرایطی بر روی قانون کنترلی و همیلتونی شکل‌دهی انرژی است که پایداری نقاط تعادل 123 و کران‌دار

1- Hessian

2- connected component

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.5.26.0]

بودن مسیرهای حالت در کل فضای حالت را تضمین می‌کند؛ به‌عنوان نمونه، قانون کنترلی شکل‌دهی انرژی با شرایط نامساوی‌های (63) و به‌طوری که معادلۀ (67) برای تابع انرژی آن صدق کند، می‌تواند به‌صورت زیر باشد (شکل 4):

$$u_{\mathrm{es}}(l) = -3l - k_{\mathrm{es1}}\delta l - 3\left(\frac{\Delta_l}{\pi}\right)^3 k_{\mathrm{es3}}\left\{\tan\left(\pi\frac{\delta l}{\Delta_l}\right) - \left(\pi\frac{\delta l}{\Delta_l}\right)\right\} \quad (68)$$

$$0 < k_{\mathrm{es1}}, \qquad 0 < k_{\mathrm{es3}} \quad (69)$$

که $\delta l = l - \bar{l}_{123}$، $\Delta_l = l_{\max} - l_{\min}$ و $\bar{l}_{123} = (l_{\max} + l_{\min})/2$. معادلۀ (68) به‌ازای $k_{\mathrm{es3}} = 0$ معادل با یک فنر خطی است.

5-2- تزریق میرایی

به‌منظور کاهش انرژی سیستم و پایداری مجانبی آن، از طریق قانون کنترلی مناسب، به سیستم، میرایی افزوده (یا تزریق) می‌شود. معادلۀ (55) را درنظر بگیرید. قانون کنترلی تزریق میرایی به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که با اعمال آن سیستم حلقه‌بسته به‌صورت زیر باشد:

$$\dot{\xi} = f_{\mathrm{cl}}(x) := \left(J(x) - R_{\mathrm{cl}}(x)\right)\left(\partial_\xi H_{\mathrm{cl}}\right)^{\mathrm{T}}(x) \quad (70)$$

که ماتریس میرایی $R_{\mathrm{cl}}(x)$ یک ماتریس متقارن مثبت نیمه‌معین است: $R_{\mathrm{cl}} = R_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{T}} \geq 0$. با توجه به معادلات (55) و (70) رابطۀ زیر برای قانون کنترلی تزریق میرایی $u_{\mathrm{di}}(x)$ و ماتریس R_{cl} برقرار است:

$$g(x)u_{\mathrm{di}}(x) = -R_{\mathrm{cl}}(x)\left(\partial_\xi H_{\mathrm{cl}}\right)^{\mathrm{T}}(x) \quad (71)$$

از آن‌جا که معادلۀ (71) برای تمام فضای حالت برقرار است می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس میرایی و قانون کنترلی تزریق میرایی، به‌ترتیب، به فرم زیر هستند:

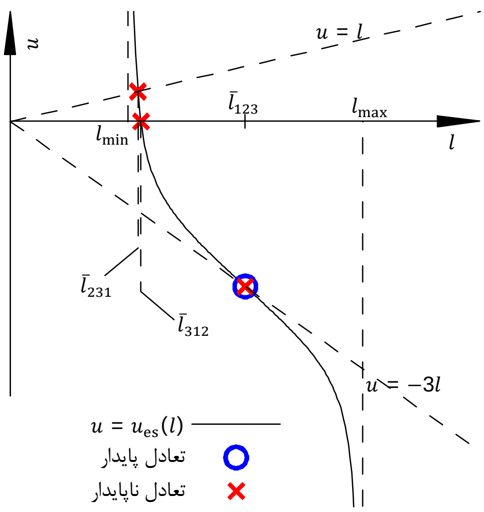
$$R_{\mathrm{cl}}(x) = k_{\mathrm{di}}g(x)g^{\mathrm{T}}(x) \quad (72)$$

$$u_{\mathrm{di}}(x) = -k_{\mathrm{di}}\left(\partial_\xi H_{\mathrm{cl}}g\right)^{\mathrm{T}}(x) \quad (73)$$

که k_{di} ضریب میرایی تزریق‌شده است. می‌توان مشاهده کرد که خروجی سیستم شکل‌دهی انرژی شده، با خروجی سیستم حلقه‌باز برابر است:

$$y_{\mathrm{cl}} := \partial_\xi H_{\mathrm{cl}}(x)g(x) = \partial_{p_l}H(x) = \dot{l} = p_l = y \quad (74)$$

بنابراین، از معادلات (73) و (74) نتیجه می‌شود که قانون کنترلی تزریق میرایی ضریبی از خروجی دوگان آن است:



شکل 4 قانون کنترلی شکل‌دهی انرژی معادلۀ (68) برای این که طول بوم همواره در بازه $[l_{\min}, l_{\max}]$ باقی بماند

$$u_{\mathrm{di}}(x) = -k_{\mathrm{di}}y = -k_{\mathrm{di}}p_l \quad (75)$$

معادلۀ بقای توان برای سیستم حلقه‌بسته به‌صورت زیر است:

$$\dot{H}_{\mathrm{cl}} = yu_{\mathrm{di}} = -\partial_\xi H_{\mathrm{cl}}R_{\mathrm{cl}}\left(\partial_\xi H_{\mathrm{cl}}\right)^{\mathrm{T}} = -k_{\mathrm{di}}y^2 \leq 0 \quad (76)$$

$$0 < k_{\mathrm{di}} \quad (77)$$

که $\dot{H}_{\mathrm{cl}} := L_{f_{\mathrm{cl}}}H_{\mathrm{cl}} = \partial_\xi H_{\mathrm{cl}}f_{\mathrm{cl}}$. معادلۀ (76) نشان می‌دهد که $\dot{H}_{\mathrm{cl}}$ در کل فضای حالت منفی نیمه‌معین است.

5-3- دینامیک سیستم حلقه‌بسته

برای شناسایی رفتار سیستم حلقه‌بسته در فضای حالت ابتدا دینامیک خطی حول نقاط تعادل بررسی می‌شود. دینامیک خطی سیستم حلقه‌بسته حول نقاط تعادل پایدار 123 همانند دینامیک سیستم حلقه‌باز متشکل از دو دینامیک مستقل گردش-غلتش و پیچش-بوم است. دینامیک خطی گردش-غلتش حلقه‌بسته حول نقاط تعادل پایدار 123 همان دینامیک خطی گردش-غلتش حلقه‌باز معادلۀ (44) به‌ازای جایگذاری مقادیر اینرسی مربوط به آن‌ها است. قطب‌های دینامیک خطی گردش-غلتش حول نقاط تعادل پایدار روی محور موهومی قرار دارند که از معادلۀ مشخصۀ (47) قابل محاسبه است.

با توجه به معادلۀ (76) برای قانون کنترلی تزریق میرایی و معادلۀ (68) برای قانون کنترلی شکل‌دهی انرژی، قانون کنترلی خطی‌شده حول این نقاط، به‌این صورت است:

$$\delta u(\delta l, \delta p_l) = \delta u_{\mathrm{es}}(\delta l) + \delta u_{\mathrm{di}}(\delta p_l) = -(3 + k_{\mathrm{es1}})\delta l - k_{\mathrm{di}}\delta p_l \quad (78)$$

دینامیک خطی پیچش-بوم حلقه‌بسته حول نقاط تعادل پایدار 123 با جایگذاری معادلۀ (78) در معادلۀ (45) به‌دست می‌آید. با شروط (69) و (77) ($0 < k_{\mathrm{es1}}$ و $0 < k_{\mathrm{di}}$) قطب‌های دینامیک خطی پیچش-بوم حلقه‌بسته حول نقاط تعادل پایدار 123 در نیم‌صفحه سمت راست قرار دارند و معادلۀ مشخصۀ آن به‌صورت زیر است:

$$\left\{s^4 + \left(k_{\mathrm{es1}} - 3\bar{\sigma}_3 + \frac{\left(2\bar{l}_{123}\right)^2}{I_{03} + \bar{l}_{123}{}^2}\right)s^2 - 3\bar{\sigma}_3 k_{\mathrm{es1}}\right\} + k_{\mathrm{di}}\{s^3 - 3\bar{\sigma}_3 s\} = 0 \quad (79)$$

که $\bar{\sigma}_3$ در معادلۀ (48) تعریف شده است و برای نقاط تعادل پایدار 123 $\bar{\sigma}_3 = \left(I_{01} - I_{02} - \bar{l}_{123}{}^2\right)/\left(I_{03} + \bar{l}_{123}{}^2\right) < 0$. عبارت سمت چپ معادلۀ (79) چندجمله‌ای مشخصۀ دینامیک خطی پیچش-بوم سیستم (55) بدون ورودی (بدون میرایی، $k_{\mathrm{di}} = 0$) است، و ضریب k_{di} در معادلۀ (79) چندجمله‌ای مشخص‌کننده صفرهای متناهی آن است.

از مهم‌ترین خصوصیات یک سیستم دینامیکی، مجموعه‌های ناوردا و مجموعه‌های حد در فضای حالت است. شناسایی این مجموعه‌ها به درک رفتار سیستم و بررسی رفتار مجانبی سیستم کمک می‌کند.

براساس قضیه منیفولد مرکزی[1]، در یک همسایگی یک نقطۀ تعادل یک سیستم غیرخطی که (مدل خطی آن) دارای تعدادی قطب سمت چپ و تعدادی قطب روی محور موهومی است، مسیرهای حالت به سمت یک منیفولد ناوردا (ناوردا به‌این معنی که میدان برداری سیستم بر آن مماس است) در این همسایگی میل می‌کنند که بُعد آن برابر تعداد قطب‌های روی محور موهومی است و در نقطۀ تعادل مماس بر زیرفضای متناظر با قطب‌های روی محور موهومی است. همچنین خواص پایداری (پایداری لیاپانوف و مجانبی، و ناپایداری) آن نقطۀ تعادل در فضای حالت، معادل خواص پایداری آن در سیستم محدود شده به منیفولد مرکزی است [20-23].

1- center manifold

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.5.26.0]

بنابراین، در یک همسایگی هر یک از نقاط تعادل پایدار 123 سیستم حلقه‌بستهٔ (70) یک منیفولد مرکزی با بُعد 4 وجود دارد که در نقطهٔ تعادل، مماس بر زیرفضای گردش-غلتش است و مسیرهای حالت سیستم در آن همسایگی به آن میل می‌کنند. از آن‌جا که سیستم حلقه‌بسته در نقاط تعادل 123 پایدار است، سیستم محدودشده به‌این منیفولد مرکزی نیز پایدار است، اما پایداری مجانبی سیستم به بررسی بیشتر نیاز دارد. از وجود منیفولد مرکزی تنها می‌توان نتیجه گرفت که نقاط تعادل 123 پایداری مجانبی نمایی ندارند. برای بررسی امکان پایداری مجانبی آن‌ها، می‌توان از اصل ناوردایی بهره گرفت [23,21] که معادل بررسی مشاهده‌پذیری حالت-صفر سیستم است [24]. این کار به استفاده از ابزارهای هندسی یا به‌دست آوردن منیفولد مرکزی نیاز دارد که خارج از حوصله این مقاله است. در عوض، با شبیه‌سازی عددی رفتار نقاط تعادل پایدار را نشان می‌دهیم.

نقاط تعادل پایدار درون دو منیفولد ناوردا قرار دارند. این دو منیفولد به‌ازای هر قانون کنترلی نسبت به سیستم حلقه‌بسته، ناوردا هستند. این دو منیفولد ناوردا را در دستگاه مختصات بدنه به‌این صورت می‌توان بیان کرد: $\{({}^{s}_{o}e, {}^{s}\Pi, l, p_l) : {}^{s}_{o}e_3 = \pm e_3, {}^{s}\Pi^1 = {}^{s}\Pi^2 = 0\}$. این دو منیفولد ناوردا هر کدام دو نقطهٔ تعادل پایدار و دو نقطهٔ تعادل ناپایدار را دربر دارند. در واقع، منیفولد پایدار 4 بُعدی نقاط تعادل، که مماس بر زیرفضای پیچش-بوم با دینامیک خطی معادلهٔ (45) است، مربوط به همین منیفولدهای ناوردای دوران در صفحه مدار است. نقاط روی منیفولد پایدار به‌صورت نمایی به نقطهٔ تعادل پایدار همگرا می‌شوند.

5-4- اصلاح وضعیت بوم وارونه

معمولاً برای ماهواره‌های دارای بوم، مطلوب است که در وضعیت نشانه‌روی به زمین، بوم رو به بالا باشد. از چهار وضعیت تعادل پایدار 123، در دو وضعیت، بوم رو به بالا و در دو وضعیت، بوم رو به پایین است (شکل 3). در صورت همگرایی به وضعیت بوم رو به پایین، می‌توان با یک مانور به وضعیت بوم رو به بالا رسید؛ به‌این صورت که طول بوم، کاهش و سپس افزایش داده شود. در وضعیت تعادل، ماهواره دارای سرعت زاویه‌ای برابر سرعت زاویه‌ای مدار، حول محور عمود بر مدار ${}_{o}\vec{e}_3$ است. با کاهش طول بوم، ماهواره حول ${}_{o}\vec{e}_3$ شروع به چرخیدن می‌کند و با افزایش طول بوم سرعت زاویه‌ای ماهواره حول ${}_{o}\vec{e}_3$ کم می‌شود. می‌توان زمان و مقدار کم و زیاد شدن طول بوم را به‌گونه‌ای تنظیم کرد که ماهواره از وضعیت تعادل بوم رو به پایین به وضعیت تعادل بوم رو به بالا برسد. در [5] این مانور بررسی و شبیه‌سازی شده است.

6- شبیه‌سازی

ماهواره‌ای که برای شبیه‌سازی درنظر گرفته شده است در مدار دایره‌ای با ارتفاع 600 کیلومتر است. بنابراین، حرکت میانگین 0/00108 رادیان بر ثانیه، معادل 15 مدار بر روز است. پارامترهای جرم، اینرسی و طول بوم به‌صورت زیر انتخاب شده است:

$$m = 50\ (\mathrm{kg}), \qquad m_b = 2\ (\mathrm{kg}) \tag{80}$$

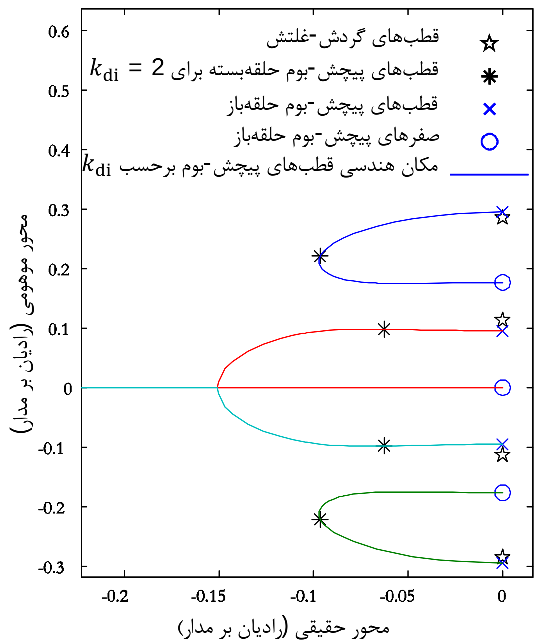
$$I_0 = \mathrm{diag}(1.9,2,3)\ (\mathrm{kgm^2}) \tag{81}$$

$$\bar{l}_{123} = 1\ (\mathrm{m}), \qquad \bar{l}_{\min} = 0.5\ (\mathrm{m}), \qquad \bar{l}_{\max} = 1.5\ (\mathrm{m}) \tag{82}$$

قانون‌های کنترلی شکل‌دهی انرژی (68) و تزریق میرایی (75) با ضرایب زیر برای شبیه‌سازی درنظر گرفته می‌شود:

$$k_{\mathrm{es1}} = 1, \qquad k_{\mathrm{es3}} = 10, \qquad k_{\mathrm{di}} = 2 \tag{83}$$

در شکل 5 قطب‌های گردش-غلتش و مکان هندسی قطب‌های پیچش-بوم



شکل 5 قطب‌های سیستم حلقه‌بسته حول نقاط تعادل پایدار 123 و مکان هندسی آن برحسب k_{di} به‌ازای $k_{\mathrm{es1}} = 1$

به‌ازای $k_{\mathrm{es1}} = 1$ برحسب ضریب میرایی k_{di} نشان داده شده است. مقدار ضریب k_{es1} به‌گونه‌ای انتخاب شده است که فرکانس طبیعی دینامیک گردش-غلتش و دینامیک پیچش-بوم به هم نزدیک باشند و با وجود مستقل بودن دینامیک خطی آن‌ها، به‌صورت غیرخطی درگیری بیشتری داشته باشند؛ تا انرژی دینامیک گردش-غلتش در نزدیکی نقطهٔ تعادل پایدار بهتر به دینامیک پیچش-بوم منتقل و میرا شود. مقدار ضریب k_{es3}، که عامل غیرخطی قانون کنترلی است، به‌گونه‌ای انتخاب شده است که حداکثر نیروی کنترلی بیش از اندازه بزرگ نباشد.

شبیه‌سازی با حالت اولیه زیر انجام شده است:

$${}^{o}_{s}e(0) = e, \qquad {}^{s}\Omega(0) = [3 \quad 2 \quad -1]^{\mathrm{T}}\ (\mathrm{rev/orb}) \tag{الف-84}$$

$$\tilde{l}(0) = \bar{\tilde{l}}_{123} = 1\ (\mathrm{m}), \qquad p_l(0) = 0 \tag{ب-84}$$

که $e = \mathrm{diag}(1,1,1)$ ماتریس همانی است و واحد سرعت زاویه‌ای، دور بر مدار[1] است.

معادلات حرکت سیستم به‌ازای شرط اولیهٔ (84) با حل‌کنندهٔ صریح، حل عددی شد. معادلهٔ سینماتیک دوران دارای قید است. به منظور حفظ قیدها در محدوده تلرانس حل عددی، می‌توان از تکنیک‌هایی استفاده کرد که پایداری مجانبی خطا از قیدها را تضمین کند. در این‌جا، از روشی استفاده شد که در [25] برای معادلات دیفرانسیل معمولی با ناورداها[2] بیان شده است. همچنین، از این روش برای تضمین دقت لازم برای معادلهٔ بقای توان (76)، با افزودن انرژی به‌عنوان متغیر حالت، استفاده شد.

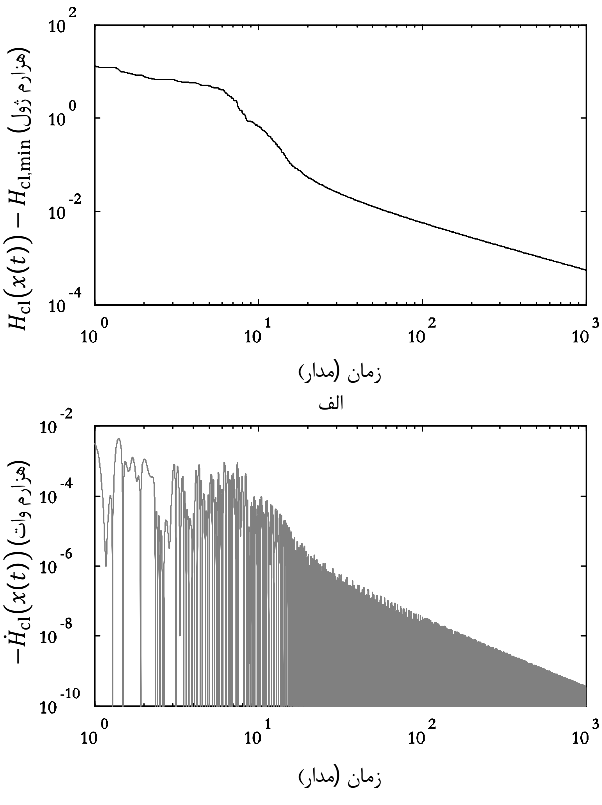
شکل‌های 6 تا 11 نتایج شبیه‌سازی زمانی سیستم حلقه‌بسته را نشان می‌دهد. شکل 6-الف نشان می‌دهد که سیستم با حالت اولیهٔ (84) به نقطهٔ تعادل پایدار با همیلتونی کمینه، همگرا شده است. نرخ همگرایی، به‌صورت غیرنمایی است. شکل‌های 7 و 8 نشان می‌دهد که ماهواره به وضعیت تعادل ${}^{o}_{s}\bar{e} = e$ همگرا شده است (وضعیت بالا چپ در شکل 3). سیستم با حالت‌های اولیهٔ دیگر می‌تواند به دیگر وضعیت‌های تعادل 123 همگرا شود.

1- revolutions per orbit (rpo)
2- ODEs with invariants

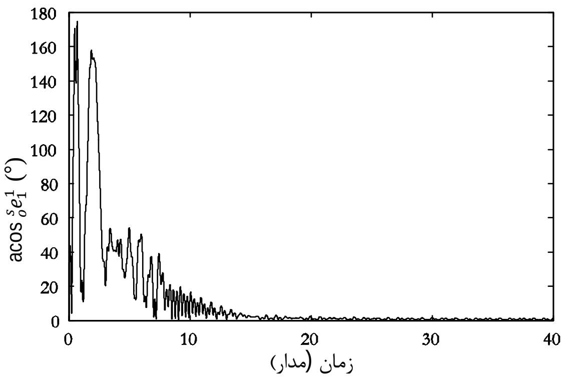
از شکل 7 مشاهده می‌شود که محور بوم، $_s\vec{e}_1$، پس از 3 مدار از حالت غلتیدن[1] به حالت نوسان[2] در می‌آید و پس از 15 مدار (یک روز) به دقت 3 درجه نشانه‌روی به زمین می‌رسد. از شکل 8 مشاهده می‌شود که محور $_s\vec{e}_3$ پس از 8 مدار از حالت غلتیدن به حالت نوسان در می‌آید و پس از 30 مدار به زاویهٔ 12 درجه نسبت به $_o\vec{e}_3$ می‌رسد. دیرتر میرا شدن حرکت محور $_s\vec{e}_3$ (و $_s\vec{e}_2$) در مقایسه با $_s\vec{e}_1$، به علت ضعف گشتاور حول بوم است که از مهمترین مشکلات بوم گرادیان جاذبه محسوب می‌شود.

شکل 9 همگرایی طول بوم به مقدار تعادل $\bar{\tilde{l}}_{123}$ را نشان می‌دهد. قانون کنترلی شکل‌دهی انرژی (68) موجب شده است که طول بوم در بازهٔ $\left[\bar{\tilde{l}}_{\min},\bar{\tilde{l}}_{\max}\right]$ باشد. شکل 10 نیروی کنترلی مربوط به قانون کنترلی شکل‌دهی انرژی و تزریق میرایی را برحسب زمان نشان می‌دهد. مقدار این نیرو بسیار ناچیز است. در زمان‌هایی که طول بوم به حد پایین و بالای خود نزدیک می‌شود (شکل 9)، قله‌ها و چاه‌های نیروی کنترلی را به‌وجود می‌آورد (شکل 10). این قله‌ها و چاه‌ها در حالت حدی به ضربه میل می‌کنند.

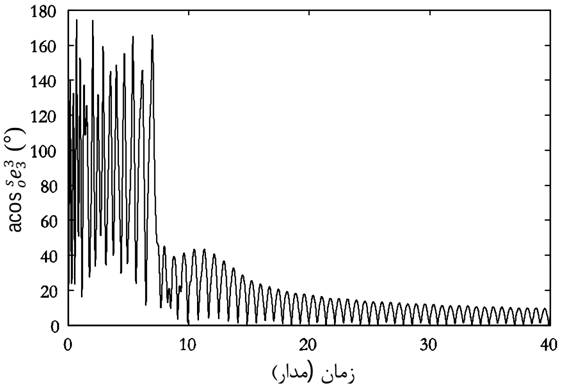
همان‌طور که در بخش قبل بیان شد، (تقریباً همهٔ) مسیرهای حالت سیستم به منیفولد مرکزی میل می‌کنند. در شکل 11، تصویر مسیر حالت پس از همگرایی به منیفولد مرکزی حول نقطهٔ تعادل پایدار در زیرفضای مومنتوم زاویه‌ای قابل مشاهده است.



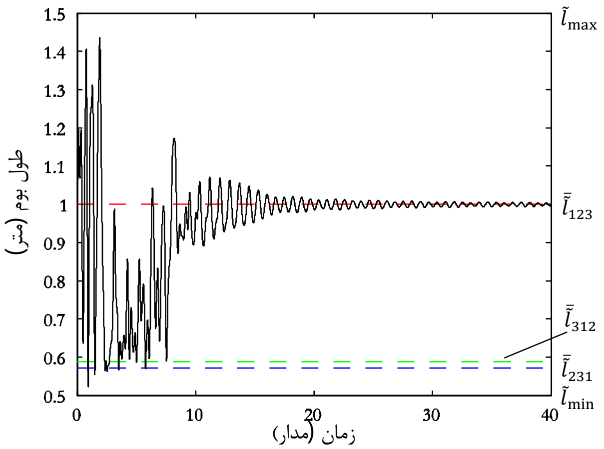
شکل 6 الف: انرژی (همیلتونی) سیستم حلقه‌بسته نسبت به وضعیت تعادل پایدار برحسب زمان، ب: نرخ کاهش انرژی سیستم حلقه‌بسته برحسب زمان



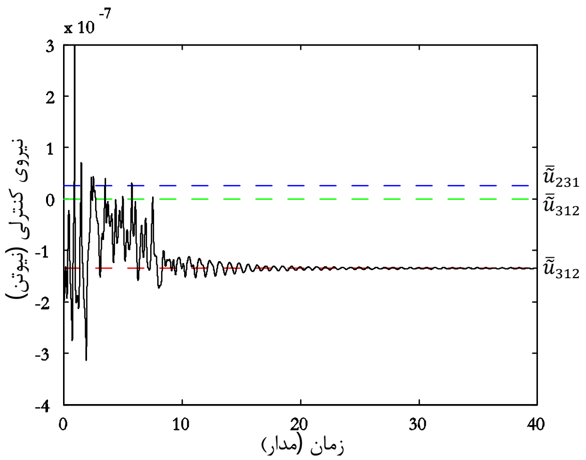
شکل 7 زاویهٔ محور بوم $_s\vec{e}_1$ نسبت به جهت سمت $_o\vec{e}_1$، برحسب زمان



شکل 8 زاویهٔ محور $_s\vec{e}_3$ نسبت به جهت عمود بر صفحهٔ مدار $_o\vec{e}_3$، برحسب زمان



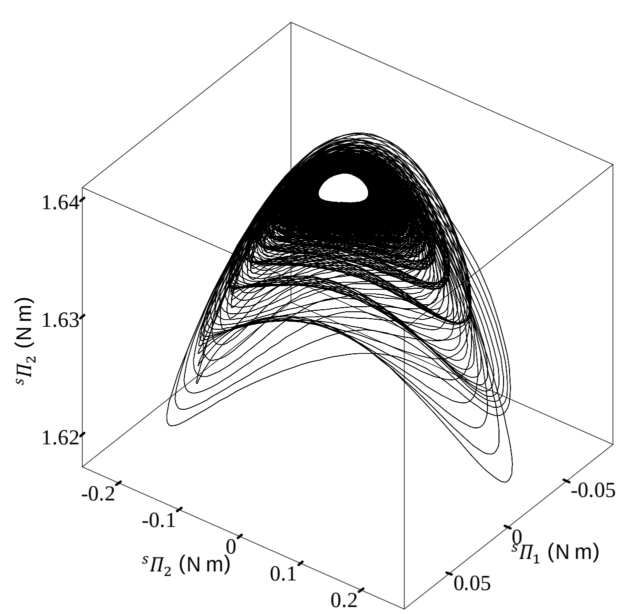
شکل 9 طول بوم برحسب زمان



شکل 10 نیروی کنترلی برحسب زمان

1- tumbling
2- oscillation, libration

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.5.26.0]



شکل 11 مسیر بردار مومنتوم زاویه‌ای ماهواره بیان شده در دستگاه مختصات ماهواره پس از همگرایی به منیفولد مرکزی (از 40 تا 1000 مدار)

7- نتیجه‌گیری

در این مقاله، بوم گرادیان جاذبهٔ طول‌متغیر به‌عنوان ابزاری برای پایدارسازی سه‌محورهٔ ماهواره در مدار دایره‌ای ارائه و بررسی شد. ماهواره با بوم طول‌متغیر، متشکل از دو جسم صلب درنظر گرفته شد که درراستای بوم نسبت به هم امکان حرکت دارند و ورودی کنترلی، نیروی بین این دو جسم است. قانون کنترلی طراحی‌شده مانند فنر غیرخطی و میراکننده عمل می‌کند. از بررسی سیستم حلقه‌بسته مشاهده شد که وضعیت‌های تعادل، پایداری مجانبی غیرنمایی دارد. مصرف کم توان و پایداری ذاتی از مزایای این روش است. درنتیجه، این روش می‌تواند در ماهواره‌های کوچکی که برای نشانه‌روی به زمین دقت بالایی نیاز ندارند، استفاده شود.

یکی از مشکلات پایدارسازی گرادیان جاذبه این است که در مدار بیضوی، ماهوارهٔ صلب تحت گرادیان جاذبه، وضعیت تعادل ندارد. ایدهٔ پایدارسازی ماهواره در مدار دایره‌ای تنها با تغییر طول بوم، می‌تواند به مدار بیضوی تعمیم داده شود. در این صورت، می‌توان با تغییر طول بوم، وضعیت‌های تعادل پایداری که در مدار دایره‌ای وجود دارد را در مدار بیضوی ایجاد کرد. امکان پایدارسازی سه‌محورهٔ این وضعیت‌های تعادل، تنها با تغییر طول بوم، نیاز به بررسی دارد که موضوع پیشنهادی برای ادامهٔ کار است.

8- پیوست: استخراج معادلات حرکت تغییر طول بوم

دینامیک تغییر طول بوم از تصویر اصل مومنتوم سیستم درجهت تغییرات مختصات تعمیم‌یافتهٔ طول بوم به‌دست می‌آید. اصل مومنتوم خطی به‌ترتیب برای بدنهٔ اصلی و بوم عبارت‌اند از:

$$\dot{\vec{L}}_\mathrm{m} = \vec{F}_\mathrm{mg} + \vec{F}_\mathrm{mb} \tag{85}$$

$$\dot{\vec{L}}_\mathrm{b} = \vec{F}_\mathrm{bg} + \vec{F}_\mathrm{bm} \tag{86}$$

که در آن $\vec{F}_\mathrm{mg}$ و $\vec{F}_\mathrm{bg}$ به‌ترتیب نیروی جاذبهٔ وارد بر بدنهٔ اصلی و بوم هستند، $\vec{F}_\mathrm{mb}$ نیروی وارد بر بدنهٔ اصلی از طرف بوم و $\vec{F}_\mathrm{bm}$ نیروی وارد بر بوم از طرف بدنهٔ اصلی است و بنابر قانون سوم نیوتن $\vec{F}_\mathrm{mb} = -\vec{F}_\mathrm{bm}$، $\vec{L}_\mathrm{m} := m_\mathrm{m}\vec{v}_\mathrm{m}$ و $\vec{L}_\mathrm{b} := m_\mathrm{b}\vec{v}_\mathrm{b}$ به‌ترتیب مومنتوم‌های خطی بدنهٔ اصلی و بوم است. $\vec{v}_\mathrm{m} := \dot{\vec{r}}_\mathrm{m} = \vec{v} + \dot{\vec{\rho}}_\mathrm{m}$ و $\vec{v}_\mathrm{b} := \dot{\vec{r}}_\mathrm{b} = \vec{v} + \dot{\vec{\rho}}_\mathrm{b}$ به‌ترتیب بردارهای سرعت بدنهٔ اصلی و بوم نسبت به چارچوب اینرسی، و بردارهای مکان مرکز جرم بدنهٔ اصلی و بوم نسبت به جرم مرکزی به‌ترتیب $\vec{r}_\mathrm{m} := \overrightarrow{\mathrm{O}_\iota\mathrm{O}_\mathrm{m}} = \vec{r} + \vec{\rho}_\mathrm{m}$ و $\vec{r}_\mathrm{b} := \overrightarrow{\mathrm{O}_\iota\mathrm{O}_\mathrm{b}} = \vec{r} + \vec{\rho}_\mathrm{b}$ هستند. تصویر اصل مومنتوم سیستم درجهت تغییر طول بوم به‌این صورت است:

$$\dot{\vec{L}}_\mathrm{m} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\mathrm{m}}{\partial \tilde{l}} + \dot{\vec{L}}_\mathrm{b} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\mathrm{b}}{\partial \tilde{l}} = \left(\vec{F}_\mathrm{mg} + \vec{F}_\mathrm{mb}\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\mathrm{m}}{\partial \tilde{l}} + \left(\vec{F}_\mathrm{bg} + \vec{F}_\mathrm{bm}\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\mathrm{b}}{\partial \tilde{l}} \tag{87}$$

بردارهای سرعت پاره‌ای جهت تغییر طول بوم برای بدنهٔ اصلی و بوم به‌این صورت هستند:

$$\frac{\partial \vec{r}_\mathrm{m}}{\partial \tilde{l}} = \frac{\partial \vec{v}_\mathrm{m}}{\partial \dot{\tilde{l}}} = -\frac{m_\mathrm{b}}{m}\,{}_s\vec{e}_1 \tag{88-الف}$$

$$\frac{\partial \vec{r}_\mathrm{b}}{\partial \tilde{l}} = \frac{\partial \vec{v}_\mathrm{b}}{\partial \dot{\tilde{l}}} = \frac{m_\mathrm{m}}{m}\,{}_s\vec{e}_1 \tag{88-ب}$$

عبارت سمت راست تساوی معادلهٔ (87) نیروی تعمیم‌یافتهٔ متناظر با مختصات تعمیم‌یافتهٔ تغییر طول بوم است که از دو بخش اثر نیروی جاذبه $Q_{\tilde{l}}$ و نیروی کنترلی بین بوم و بدنهٔ اصلی ماهواره $\tilde{u}$ تشکیل شده است:

$$Q_{\tilde{l}} := \vec{F}_\mathrm{mg} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\mathrm{m}}{\partial \tilde{l}} + \vec{F}_\mathrm{bg} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\mathrm{b}}{\partial \tilde{l}} = m_\mathrm{r}\left(\frac{\vec{F}_\mathrm{bg}}{m_\mathrm{b}} - \frac{\vec{F}_\mathrm{mg}}{m_\mathrm{m}}\right) \cdot {}_s\vec{e}_1 \tag{89}$$

$$\tilde{u} := \vec{F}_\mathrm{mb} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\mathrm{m}}{\partial \tilde{l}} + \vec{F}_\mathrm{bm} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\mathrm{b}}{\partial \tilde{l}} = \vec{F}_\mathrm{bm} \cdot {}_s\vec{e}_1 \tag{90}$$

عبارت سمت چپ تساوی معادلهٔ (87) بر اساس قاعدهٔ لایب‌نیتس به‌این صورت قابل بیان است:

$$\dot{\vec{L}}_\mathrm{m} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\mathrm{m}}{\partial \tilde{l}} + \dot{\vec{L}}_\mathrm{b} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\mathrm{b}}{\partial \tilde{l}} = \dot{p}_{\tilde{l}} - \left[\vec{L}_\mathrm{m} \cdot \frac{{}^i\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}_\mathrm{m}}{\partial \tilde{l}} + \vec{L}_\mathrm{b} \cdot \frac{{}^i\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}_\mathrm{b}}{\partial \tilde{l}}\right] \tag{91}$$

که $p_{\tilde{l}}$ مومنتوم تعمیم‌یافتهٔ متناظر با مختصات تعمیم‌یافتهٔ تغییر طول بوم است:

$$p_{\tilde{l}} := \vec{L}_\mathrm{m} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\mathrm{m}}{\partial \tilde{l}} + \vec{L}_\mathrm{b} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\mathrm{b}}{\partial \tilde{l}} = m_\mathrm{r}\left(\frac{\vec{L}_\mathrm{b}}{m_\mathrm{b}} - \frac{\vec{L}_\mathrm{m}}{m_\mathrm{m}}\right) \cdot {}_s\vec{e}_1 \tag{92}$$

برای عبارت داخل پرانتز معادلهٔ (92) رابطهٔ زیر بر قرار است:

$$\frac{\vec{L}_\mathrm{b}}{m_\mathrm{b}} - \frac{\vec{L}_\mathrm{m}}{m_\mathrm{m}} = \dot{\vec{\rho}}_\mathrm{b} - \dot{\vec{\rho}}_\mathrm{m} = \dot{\tilde{l}}\,{}_s\vec{e}_1 + \tilde{l}\vec{\omega} \times {}_s\vec{e}_1 \tag{93}$$

که در به‌دست آوردن تساوی‌های معادلهٔ (93) به‌ترتیب از معادلات (88)، تعریف مومنتوم خطی بدنهٔ اصلی و بوم و مشتق زمانی معادلهٔ (5) استفاده شده است. درنهایت، از معادلهٔ (92) و (93) مومنتوم تعمیم‌یافتهٔ تغییر طول بوم به‌این صورت به‌دست می‌آید:

$$p_{\tilde{l}} = m_\mathrm{r}\dot{\tilde{l}} \tag{94}$$

عبارت داخل کروشهٔ معادلهٔ (91) به‌این صورت به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\vec{L}_\mathrm{m} \cdot \frac{{}^i\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}_\mathrm{m}}{\partial \tilde{l}} + \vec{L}_\mathrm{b} \cdot \frac{{}^i\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}_\mathrm{b}}{\partial \tilde{l}} &= m_\mathrm{r}\left(\frac{\vec{L}_\mathrm{b}}{m_\mathrm{b}} - \frac{\vec{L}_\mathrm{m}}{m_\mathrm{m}}\right) \cdot \left(\vec{\omega} \times {}_s\vec{e}_1\right) \\ &= m_\mathrm{r}\tilde{l}\vec{\omega} \cdot \left({}_s\vec{e}_{1\times}^{\,\mathrm{T}} \cdot {}_s\vec{e}_{1\times}\right) \cdot \vec{\omega}\end{aligned} \tag{95}$$

با توجه به معادلات بالا، معادلات حرکت تغییر طول بوم به‌این صورت می‌شود:

$$\dot{\tilde{l}} = \frac{p_{\tilde{l}}}{m_\mathrm{r}} \tag{96}$$

$$\dot{p}_{\tilde{l}} = m_\mathrm{r}\tilde{l}\vec{\omega} \cdot \left({}_s\vec{e}_{1\times}^{\,\mathrm{T}} \cdot {}_s\vec{e}_{1\times}\right) \cdot \vec{\omega} + Q_{\tilde{l}} + \tilde{u} \tag{97}$$

با تعریف طول بوم نرمال‌شده l به‌صورت معادلهٔ (16)، متغیرهای نرمال‌شده p_l، Q_l و u به‌این صورت تعریف می‌شوند:

$$p_l := \vec{L}_\mathrm{m} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\mathrm{m}}{\partial l} + \vec{L}_\mathrm{b} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\mathrm{b}}{\partial l} = \frac{p_{\tilde{l}}}{\sqrt{m_\mathrm{r}}} = \dot{l} \tag{98}$$

$$Q_l := \vec{F}_{\mathrm{mg}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\mathrm{m}}}{\partial l} + \vec{F}_{\mathrm{bg}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\mathrm{b}}}{\partial l} = \sqrt{m_{\mathrm{r}}}\left(\frac{\vec{F}_{\mathrm{bg}}}{m_{\mathrm{b}}} - \frac{\vec{F}_{\mathrm{mg}}}{m_{\mathrm{m}}}\right) \cdot {}_{s}\vec{e}_1 = \frac{Q_{\tilde{l}}}{\sqrt{m_{\mathrm{r}}}} \tag{99}$$

$$u := \vec{F}_{\mathrm{mb}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\mathrm{m}}}{\partial l} + \vec{F}_{\mathrm{bm}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\mathrm{b}}}{\partial l} = \frac{1}{\sqrt{m_{\mathrm{r}}}} \vec{F}_{\mathrm{bm}} \cdot {}_{s}\vec{e}_1 = \frac{\tilde{u}}{\sqrt{m_{\mathrm{r}}}} \tag{100}$$

بنابراین، با استفاده از معادلات (96) تا (100) معادلات حرکت تغییر طول نرمال‌شدۀ بوم (17) و (18) به‌دست می‌آید.

9- مراجع

[1] R. Wiśniewski, M. Blanke, Fully magnetic attitude control for spacecraft subject to gravity gradient, *Automatica,* Vol. 35, No. 7, pp. 1201-1214, 1999.

[2] M. I. Martinelli, R. S. Sánchez Peña, Passive 3 axis attitude control of MSU-1 pico-satellite, *Acta Astronautica,* Vol. 56, No. 5, pp. 507-517, 2005.

[3] M. Ovchinnikov, Attitude dynamics of a small-sized satellite equipped with hysteresis damper, in *Advances in the Astronautical Sciences,* Porto, 2012, pp. 311-330.

[4] A. E. a. Zakrzhevskii, V. S. b. Khoroshilov, Dynamics of an unstabilized spacecraft during the deployment of an elastic pantograph structure, *International Applied Mechanics,* Vol. 50, No. 3, pp. 341-351, 2014.

[5] V. I. Dranovskii, V. S. Khoroshylov, A. E. Zakrzhevskii, Spacecraft dynamics with regard to elastic gravitational stabilizer deployment, *Acta Astronautica,* Vol. 64, No. 5–6, pp. 501-513, 2009.

[6] J. B. Han, H. Huang, X. S. Wang, Regid-flxible coupling dynamic modeling and attitude simulation of gravity-gradient satellite, in *ISSCAA2010 - 3rd International Symposium on Systems and Control in Aeronautics and Astronautics,* Harbin, 2010, pp. 1325-1328.

[7] G. M. Connell, A Method of Earth-Pointing Attitude Control for Elliptic Orbits, *AIAA Journal,* Vol. 10, No. 3, pp. 258-263, 1972.

[8] H. Kojima, Minimum time deployment control for gravity-gradient stabilized space structure, *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu, C Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C,* Vol. 68, No. 5, pp. 1435-1440, 2002.

[9] J. Ashenberg, E. C. Lorenzini, Active gravity-gradient stabilization of a satellite in elliptic orbits, *Acta Astronautica,* Vol. 45, No. 10, pp. 619-627, 1999.

[10] K. Kumar, A. Khosla, K. Chaudhary, Tether as a satellite attitude stabilizer in elliptic orbits: a new concept, in *Advances in the Astronautical Sciences,* Victoria, BC, Can, 1993, pp. 859-875.

[11] M. B. Larsen, M. Blanke, Passivity-based control of a rigid electrodynamic tether, Vol. 34, No. 1, pp. 118-127, 2011.

[12] V. V. Sidorenko, A. Celletti, A "Spring-mass" model of tethered satellite systems: Properties of planar periodic motions, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy,* Vol. 107, No. 1, pp. 209-231, 2010.

[13] H. Makarem, H. Salarieh, G. R. Vossoughi, A. Alasty, Kinematic attitude control of three pairwise connected in-plane masses by varying the lengths of the links, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 7, pp. 127-141, 2013. (In Persian)

[14] Y. Yao, Y. Jiang, Attitude stabilization of spacecraft with two moving-mass via interconnection and damping assignment, in *CCDC 2008 - Chinese Control and Decision Conference,* Yantai, Shandong, 2008, pp. 5115-5118.

[15] V. Duindam, A. Macchelli, S. Stramigioli, H. Bruyninckx, *Modeling and Control of Complex Physical Systems: The Port-Hamiltonian Approach*: Springer, 2009.

[16] J. Forshaw, G. Smith, *Dynamics and Relativity*: Wiley, 2009.

[17] V. V. Beletskii, *Motion of an Artificial Satellite about its Center of Mass*: Israel Program for Scientific Translations, 1966.

[18] P. C. Hughes, *Spacecraft Attitude Dynamics*: Dover Publications, 2012.

[19] T. R. Kane, P. W. Likins, D. A. Levinson, *Spacecraft dynamics*: McGraw-Hill, 1983.

[20] H. Nijmeijer, A. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*: U.S. Government Printing Office, 1990.

[21] F. Bullo, A. D. Lewis, *Geometric Control of Mechanical Systems*: Springer, 2005.

[22] D. Cheng, X. Hu, T. Shen, *Analysis and Design of Nonlinear Control Systems*: Springer, 2010.

[23] S. Sastry, Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control: Springer New York, 1999.

[24] A. van der Schaft, L2 - Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control: Springer London, 1999.

[25] U. M. Ascher, L. R. Petzold, *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 1998.