



مقایسه تئوریهای تغییر شکل و نموی در تحلیل کمانش الاستوپلاستیک صفحات نازک مستطیلی به کمک روش یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته

مهدی معارفدوست^۱، مهران کدخدایان^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

۲- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

* مشهد، کدپستی ۹۱۷۷۹۴۸۹۴۴، kakhoda@um.ac.ir

چکیده- در این مقاله کمانش الاستوپلاستیک صفحات نازک مستطیلی به وسیله تئوریهای تغییر شکل (DT) و نموی (IT) در پلاستیسیته تحلیل شده و نتایج تحت بارها و شرایط مرزی متنوع مورد بررسی و مقایسه قرار می گیرند. بار به صورت صفحه ای و به صورت کششی و فشاری یکنواخت وارد می شود. ماده مورد استفاده AL7075T6 و هندسه مورد نظر صفحه $0.01 \leq h/a \leq 0.05$ می باشد. روش عددی به کار گرفته شده روش یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته است. اثرات ضریب بار، ضخامت و شرایط مرزی مختلف بر ضریب کمانش، در تحلیل دو تئوری نموی و تغییر شکل مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. در صفحات نازکتر همخوانی خوبی بین جوابهای به دست آمده از هر دو تئوری پلاستیسیته وجود دارد که با افزایش ضخامت صفحه، اختلاف قابل ملاحظه ای میان بارهای کمانشی به دست آمده از دو تئوری بوجود می آید. نتایج به دست آمده با سایر نتایج گزارش شده مقایسه گردیده و علاوه بر آن برای برخی حالات نیز نتایج جدیدی ارائه شده است. در مورد محدوده اعتبار تئوریهای مذکور و همچنین اختلاف آنها با یکدیگر نتایج جدیدی به دست آمده است.

کلیدواژگان: صفحات مستطیلی، روش یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته، کمانش الاستوپلاستیک، تئوری تغییر شکل، تئوری نموی.

A comparison between the incremental and deformation theories to analyze elastoplastic buckling of thin rectangular plates by GDQ method

M. Maarefdoust¹, M. Kadkhodayan^{2*}

1- PhD Student of Mech. Eng., Ferdowsi Univ. of Mashhad, Iran

2- Prof. of Mech. Eng., Ferdowsi Univ. of Mashhad, Iran

* P.O.Code 9177948944, Mashhad, Iran. kakhoda@um.ac.ir

Abstract- In this paper elastoplastic buckling of thin rectangular plates are analyzed with deformation theory (DT) and incremental theory (IT) and the results are investigated under different loads and boundary conditions. Load is applied in plane and in uniform tension and compression form. The used material is AL7075T6 and the plate geometry is $0.01 \leq h/a \leq 0.05$. The Generalize Differential Quadrature method is employed as numerical method to analyze the problem. The influences of loading ratio, plate thickness and various boundary conditions on buckling factor were investigated in the analysis using both incremental and deformation theories. In thin plates the results obtained from both plasticity theories are close to each other, however, with increasing the thickness of plates a considerable difference between the buckling loads obtained from two theories of plasticity is observed. The results are compared with those of others published reports. Moreover, for some different situations new results are presented. Some new consequences are achieved regarding the range of validation of two theories.

Keywords: Rectangular Plates, GDQM, Elastoplastic Buckling, Deformation Theory, Incremental Theory.

۱- مقدمه

در دهه‌های گذشته مسأله کمانش پلاستیک صفحات مورد توجه دانشمندان قرار گرفته است. آنها مسأله محاسبه بار کمانشی صفحات را معمولاً با روشهای پلاستیسیته مورد بحث و بررسی قرار داده‌اند.

دوربان در تحقیقاتش دریافت که تئوری نموی نسبت به تئوری تغییرشکل بار کمانشی بیشتری را پیش‌گویی می‌کند و نتایج آزمایشگاهی با تئوری تغییرشکل همخوانی بیشتری دارند [۱]. هرچند مواردی وجود دارند که بار بحرانی به‌دست آمده از هر دو تئوری کاملاً مشابه هم هستند که به ویژه در مورد پوسته‌های سیلندری شکل تحت بار فشاری محوری این مسأله صادق است [۲]. دوربان و زوکرمن تحلیل الاستوپلاستیک صفحات مستطیلی تحت بار کششی (فشاری) محوری را برای چندین حالت مختلف تکیه‌گاهی به روش جداسازی متغیرها انجام دادند و اولین نتایج مسأله کمانش الاستوپلاستیک صفحات مستطیلی را گزارش کردند. اما شرایط مرزی محدود در این گزارش شامل (تکیه‌گاه گیردار و ساده) داده‌های به‌دست آمده در آن را محدود کرده است [۳]. در صورتی که تمامی تکیه‌گاه‌ها گیردار باشند حل معادلات امکان‌پذیر نمی‌باشد و باید از روش‌های عددی کمک گرفته شود. در مطالعه حاضر سعی شده که این محدودیت‌ها توسط روش عددی یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته، برداشته شود و مسأله برای حالات مختلف حل شود. وانگ و همکارانش کمانش الاستیک-پلاستیک صفحات ضخیم و نازک را بر اساس تئوری تغییرشکل (DT) و تئوری نموی (IT) بررسی کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که نه تنها تئوری تغییرشکل مقدار فاکتور تنش کمانشی کمتری را محاسبه می‌کند، بلکه با افزایش ضخامت و ثابت رامبرگ از گود اختلاف نتایج بین دو تئوری پلاستیسیته افزایش می‌یابد [۴، ۵]. محققان تحقیقات زیادی روی این مسأله انجام داده‌اند، با این حال کماکان علت قطعی وجود اختلاف بین نتایج به‌دست آمده از دو تئوری تغییرشکل پلاستیک و تئوری نموی هنوز موضوع بررسی مطالعات جاری است.

در این مقاله سعی شده است تا به کمک روش عددی یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته (GDQ) مسأله کمانش پلاستیک صفحات مستطیلی مورد مطالعه قرار گیرد و موضوع اختلاف نتایج بین دو تئوری مورد بررسی دقیقتری قرار گیرد و برخی

عوامل مؤثر بر آن شناسایی گردند. علاوه بر آن، تحلیل مسأله برای حالات مختلف شرایط مرزی که در گذشته انجام نشده است، تعمیم داده شود.

۲- معادلات دیفرانسیل حاکم

معادلات حاکم بر تحلیل کمانش الاستوپلاستیک صفحات مستطیلی در مرجع [۶] آمده است. شکل ۱ هندسه حاکم بر صفحه مستطیلی ایزوتروپیک الاستیک تحت بارهای لبه محوری را نشان می‌دهد. a طول، b عرض و h ضخامت صفحه را نشان می‌دهند. تنش به‌صورت یکنواخت $\sigma_y = p$ و $\sigma_x = -\xi p$ (ξ ضریب بار است) وارد می‌شود. $\xi = 0$ برای حالت فشاری تک محوری و $\xi = -1$ برای حالت فشاری دو محوری مساوی یکنواخت در نظر گرفته شده است.

معادلات سرعت برای صفحات نازک به‌صورت (۱) می‌باشند:

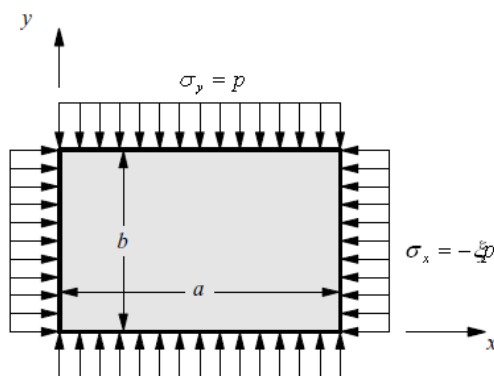
$$v_x = u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v_y = v - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad v_z = w \quad (1)$$

و رابطه بین نرخ تنش و نرخ کرنش در صفحات نیز به‌صورت (۲) است:

$$\dot{\sigma}_{xx} = E(\alpha \dot{\epsilon}_{xx} + \beta \dot{\epsilon}_{yy}), \quad \dot{\sigma}_{yy} = E(\beta \dot{\epsilon}_{xx} + \gamma \dot{\epsilon}_{yy}), \quad \dot{\tau}_{xy} = 2G \dot{\epsilon}_{xy} \quad (2)$$

که در آن E و G مدول الاستیک و مدول برشی مؤثر می‌باشند. α, β, γ و مدول برشی مؤثر به نوع تئوری پلاستیسیته بکار گرفته شده وابسته هستند.

در مطالعه حاضر از دو تئوری معروف در پلاستیسیته شامل تئوری نموی با معادلات پایه پراوتل-رس و تئوری تغییرشکل با معادلات پایه هنکی استفاده می‌شود.



شکل ۱ هندسه مسأله

الف - تئوری نمو (IT) با معادلات پایه پراوتل-رس

معادله اساسی این تئوری عبارتست از [۶]:

$$E \dot{\varepsilon}_{ij} = (1+\nu) \dot{S}_{ij} + \frac{1-2\nu}{3} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{3\dot{\sigma}_e}{2\sigma_e} \left(\frac{E}{T} - 1 \right) S_{ij} \quad (3)$$

در این رابطه S_{ij} تانسور تنش انحرافی و T مدول یانگ تانژانتی می‌باشند که با استفاده از منحنی تنش-کرنش به‌دست می‌آیند و σ_e تنش مؤثر است. T و σ_e از رابطه (۴) به‌دست می‌آیند:

$$T = \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_e} \quad (4)$$

$$\sigma_e^2 = \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2$$

که ε_e کرنش مؤثر کل می‌باشد. ضرایب α ، β ، γ و مدول برشی در این روش عبارتند از:

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \left[4 - 3 \left(1 - \frac{T}{E} \right) \frac{\sigma_1^2}{\sigma_e^2} \right]$$

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left[2 - 2(1-2\nu) \frac{T}{E} - 3 \left(1 - \frac{T}{E} \right) \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_e^2} \right]$$

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \left[4 - 3 \left(1 - \frac{T}{E} \right) \frac{\sigma_2^2}{\sigma_e^2} \right]$$

$$\rho = (5-4\nu) - (1-2\nu)^2 \frac{T}{E} - 3(1-2\nu) \left(1 - \frac{T}{E} \right) \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_e^2}$$

$$\frac{E}{G} = 2(1+\nu). \quad (5)$$

ب - تئوری تغییر شکل (DT) با معادلات پایه هنکی

معادله اساسی این تئوری عبارتست از [۵]:

$$E \dot{\varepsilon}_{ij} = \left(\frac{3E}{2S} - \frac{1-2\nu}{2} \right) \dot{S}_{ij} + \frac{1-2\nu}{3} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{3\dot{\sigma}_e}{2\sigma_e} \left(\frac{E}{T} - \frac{E}{S} \right) S_{ij} \quad (6)$$

که در آن S مدول یانگ سکانتی است که با استفاده از منحنی تنش-کرنش به‌دست می‌آید. ضرایب α ، β ، γ و مدول برشی سکانتی در این روش به‌صورت رابطه (۷) می‌باشند:

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \left[4 - 3 \left(1 - \frac{T}{S} \right) \frac{\sigma_1^2}{\sigma_e^2} \right]$$

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left[2 - 2(1-2\nu) \frac{T}{E} - 3 \left(1 - \frac{T}{S} \right) \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_e^2} \right]$$

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \left[4 - 3 \left(1 - \frac{T}{S} \right) \frac{\sigma_2^2}{\sigma_e^2} \right]$$

$$\rho = 3 \frac{E}{S} + (1-2\nu) \left[2 - (1-2\nu) \frac{T}{E} - 3 \left(1 - \frac{T}{S} \right) \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_e^2} \right]$$

$$\frac{E_s}{G_s} = 2(1+\nu_s), \quad \nu_s = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \frac{S}{E} \quad (7)$$

معادله حاکم بر کماتش ورقهای نازک عبارت است از [۶]:

$$\alpha \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2(\beta + \mu) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \gamma \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = - \frac{12}{h^2} \left(\frac{\sigma_1}{E} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\sigma_2}{E} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

حال اگر $\sigma_1 = -\xi p$ ، $\sigma_2 = p$ ، $\lambda = \frac{a}{b}$ ، $Y = \frac{y}{b}$ ، $X = \frac{x}{a}$ و $\mu = \frac{1}{1+\nu}$ آنگاه معادله (۸) به‌صورت (۹) در می‌آید:

$$\alpha \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2(\beta + \mu) \lambda^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \gamma \lambda^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} = \frac{12a^2 P}{h^2 E} \left(\xi \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) \quad (9)$$

۳- شرایط مرزی حاکم

شرایط مختلف تکیه‌گاهی عبارتند از [۶]:

- تکیه‌گاه ساده در $X=0$ و $X=a$

$$W=0, \quad \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \beta \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0 \quad (10)$$

در $Y=0$ و $Y=b$

$$W=0, \quad \gamma \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \beta \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0 \quad (11)$$

- تکیه‌گاه یکسرگیردار در $X=0$ و $X=a$

$$W=0, \quad W_{,X}=0 \quad (12)$$

و در $Y=0$ و $Y=b$

$$W=0, \quad W_{,Y}=0 \quad (13)$$

- تکیه‌گاه آزاد در $X=0$ و $X=a$

شرایط تکیه‌گاهی آزاد به کمک مرجع [۶] به‌صورت زیر استخراج گردیده است:

$$\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \beta \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0$$

$$\alpha \frac{\partial^3 W}{\partial X^3} + (\beta + 2\mu) \lambda^2 \frac{\partial^3 W}{\partial X \partial Y^2} = \frac{12\sigma_x a^2}{Eh^2} \xi \frac{\partial W}{\partial X} \quad (14)$$

و در $Y=0$ و $Y=b$

$$\gamma \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \beta \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0$$

$$\lambda^2 \gamma \frac{\partial^3 W}{\partial Y^3} + (\beta + 2\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial X^2 \partial Y} = - \frac{12\sigma_y a^2}{Eh^2} \frac{\partial W}{\partial Y} \quad (15)$$

دوربان و زوکرمین [۳] شرایط مرزی SSSS، SCSC و CSCS را بررسی کردند. در مطالعه حاضر علاوه بر تأیید

به منظور استخراج ماتریس ضرایب وزنی، تابع مطلوب در هر راستا توسط توابعی تقریب زده می‌شوند که این توابع تقریب به نام توابع آزمایش شناخته می‌شوند و شرط انتخاب این توابع، کامل بودن آنهاست. به این معنی که توابع آزمایش باید حالت یکنواختی از متغیرهای میدانی را بیان کنند و تا بالاترین مرتبه‌ای که در معادله حاکم بر مسأله ظاهر شده، قابلیت مشتق‌گیری داشته باشند.

توابع میان‌یاب لاگرانژ به عنوان توابع آزمایش، فرمول‌های صریحی را برای به دست آوردن ماتریس ضرائب ارائه کرده‌اند. در این فرمول‌ها ضرایب وزنی بطور مستقیم و دقیق، مستقل از تعداد و موقعیت گره‌ها، حاصل می‌شوند. فرمول‌های ارائه شده توسط شو و ریچارد، به واسطه بیان یک رابطه بازگشتی برای محاسبه ماتریس ضرایب در مشتق‌های مرتبه بالاتر، مورد توجه بیشتری قرار گرفته‌اند. در این فرمول‌ها مؤلفه‌های غیر قطر اصلی ماتریس ضرایب برای مشتق مرتبه اول به صورت رابطه (۱۸) بیان می‌شوند:

$$C_{kk}^{(l)} = \frac{\prod (x_i)}{(x_i - x_k) \prod_{i \neq k} (x_k)} \quad i, k = 1, 2, \dots, n_x, \quad i \neq k$$

$$\prod_{m=1}^{n_x} (x_i) = \prod_{m=1}^{n_x} (x_i - x_m) \quad (18)$$

مؤلفه‌های غیر قطر اصلی ماتریس در مشتق‌های مراتب بالاتر، توسط رابطه بازگشتی زیر محاسبه می‌شوند:

$$C_{ik}^{(r)} = r \left(C_{ii}^{(r-1)} \cdot C_{ik}^{(l)} - \frac{C_{ik}^{(r-1)}}{x_i - x_k} \right) \quad i, k = 1, 2, \dots, i \neq k, \quad 2 \leq r \leq (n_x - 1) \quad (19)$$

و اعضای قطر اصلی نیز به صورت رابطه (۲۰) تعریف می‌شوند:

$$C_{ii}^{(r)} = - \sum_{m=1, m \neq i}^{n_x} C_{im}^{(r)} \quad i = 1, 2, \dots, n_x, \quad 1 \leq r \leq (n_x - 1) \quad (20)$$

به منظور تعیین ماتریس ضرایب در مشتق‌های مرتبه بالاتر، می‌توان از رابطه بازگشتی (۲۱) استفاده کرد:

$$[C^{(r)}] = [C^{(1)}] [C^{(r-1)}], \quad 2 \leq r \leq (n_x - 1) \quad (21)$$

با توجه به اینکه وزن‌ها بر اساس تعداد و موقعیت گره‌ها حاصل می‌شوند می‌توان به این نکته پی برد که موقعیت و تعداد گره‌ها، که به آنها نقاط نمونه نیز گفته می‌شود، نقش مهمی در دقت نتایج نهایی ایفا می‌کنند. تاکنون قواعد زیادی جهت محاسبه

حالات فوق، حالت‌های SCSF, CCCC, CSFS, SSFS و CFCF مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند.

۴- روش یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته

روش مربعات دیفرانسیلی (روش یک چهارم تفاضلی) روش ساده و کارایی در حل مسائل مهندسی می‌باشد. اولین بار در سال ۱۹۷۱، بلمن و کاستی [۷] آن را به عنوان یک تکنیک جدید برای حل عددی مسائل مقدار اولیه در معادلات دیفرانسیلی معمولی و پاره‌ای، مطرح کردند. هدف آنها ارائه یک راه حل جدید برای فائق شدن بر مشکلات پایداری و حجم محاسبات مسائل عددی بود.

اولین کاربرد این روش در زمینه مسایل مهندسی توسط برت و مالیک [۸] صورت گرفت، هنگامی که مسائل مقدار مرزی در حالت دو بعدی خطی و یک بعدی غیر خطی مورد بررسی قرار گرفتند. مزیت دستیابی به یک حل دقیق با کمترین محاسبات انجام شده نسبت به روش‌های حل عددی دیگر نظیر المان محدود و یا جا به جایی محدود باعث شده است که کارایی این روش تدریجاً آشکار شود و گسترش یابد. این روش توانایی حل معادلات دیفرانسیل از درجات بالا را با انتخاب نقاط کم دارد. از ویژگی‌های دیگر آن می‌توان به سادگی در کاربرد و برنامه‌نویسی و همچنین سرعت همگرایی بالا اشاره کرد.

در این روش شبکه‌بندی به صورت تبدیل ناحیه حل به مجموعه‌ای از نقاط به نام گره انجام می‌پذیرد. در اینجا مقدار مشتق تابع f در هر گره نسبت به یک راستای مشخص (بطور مثال x) را به صورت مجموع خطی وزن دار از مقادیر تابع در تعدادی نقاط در آن راستا، بیان می‌کند. بیان ریاضی تعریف فوق را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$\frac{\partial^r f(x, y)}{\partial x^r} \bigg|_{(x_1, y_1)} = \sum_{k=1}^{m_r} C_{ik}^{(r)} \cdot f(x_k, y_f) \quad (16)$$

برای مشتق‌گیری در راستای y و مشتق مرکب، قوانین روش مربعات دیفرانسیلی به شکل رابطه (۱۷) بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial^r f(x, y)}{\partial y^r} \bigg|_{(x_1, y_1)} = \sum_{\ell=1}^{m_r} C_{f\ell}^{(s)} \cdot f(x_i, y_\ell)$$

$$\frac{\partial^{(r+s)} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \bigg|_{(x_1, y_1)} = \sum_{k=1}^{m_r} C_{ikt}^{(r)} \cdot \sum_{\ell=1}^{n_y} C_{j\ell}^{(s)} f(x_i, y_\ell) \quad (17)$$

وزن‌ها در روابط فوق، در قالب ماتریس C به نام ماتریس ضرایب وزنی بیان شده‌اند و اندیس‌های γ و s نشانگر مرتبه مشتق‌گیری و ماتریس ضرایب مربوط می‌باشند.

نقاط نمونه ارائه شده است که تعدادی از آنها در ذیل نشان داده شده‌اند.

$$x_i = 1 + 2 \frac{i-1}{n-1}, i = 1, 2, \dots, n \quad (1-22)$$

$$x_i = -\cos \frac{i-1}{n-1} \pi, i = 1, 2, \dots, n \quad (2-22)$$

$$x_i = \frac{i-1}{n-3}, i = 3, \dots, n-2 \quad (3-22)$$

$$x_i = \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{i-1}{n-3} \pi), i = 3, \dots, n-2 \quad (4-22)$$

$$x_i = \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{i-2}{n-3} \pi), i = 1, 2, \dots, n_x \quad (5-22)$$

معروفترین این قواعد نقاط واقع بر صفرهای چند جمله‌ای جیبشاف است. این نقاط توسط رابطه (۲۳) محاسبه می‌شوند:

$$x_i = \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{2i-1}{2n} \pi), i = 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

توزیع نقاط نمونه جیبشاف-گوس-لوباتو دارای بیشترین سرعت همگرایی و بالاترین دقت می‌باشد که در این تحقیق نیز از این رابطه به شکل (۲۴) استفاده می‌شود:

$$x_i = \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{i-1}{n-1} \pi), i = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

در این روش، مرز مسأله تنها یک نقطه است و از نظر ریاضی نمی‌توان دو یا چند شرط مرزی را در این نقطه اعمال کرد. به‌منظور حل این مشکل و اعمال چندین شرط مرزی در هر لبه، محققان روش‌های مختلفی را پیشنهاد کرده‌اند. اولین و ساده‌ترین روش توسط جانگ و همکارانش ارائه شد. در این روش که به تکنیک δ معروف است، نقاطی با فاصله بسیار کم، $\delta \approx 10^{-5}$ (در مقیاس بدون بعد)، در همسایگی نقاط مرزی انتخاب شده، سپس معادلات مرزی به نقاط مرزی واقعی و نقاط δ اعمال می‌شوند. روش‌های دیگری نیز مبتنی بر یکپارچه‌سازی شرایط مرزی در ماتریس ضرایب و همچنین تعریف درجات آزادی اضافی توسط محققان پیشنهاد شده است. به کمک اعمال روش یک چهارم تفاضلی معادله حاکم بر سیستم (۹) و شرایط مرزی (۱۰-۱۵) به‌صورت رابطه ۲۵ در می‌آید:

$$\begin{aligned} & \alpha \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(4)} W_{kj} + 2(\beta + \mu) \lambda^2 \sum_{m=1}^{N_y} C_{jm}^{(2)} \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(2)} W_{km} \\ & + \gamma \lambda^4 \sum_{k=1}^{N_y} C_{jk}^{(4)} W_{ik} = \frac{12a^2 P}{h^2 E} \left(\xi \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(2)} W_{kj} - \lambda^2 \sum_{k=1}^{N_y} C_{jk}^{(2)} W_{ik} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

- تکیه‌گاه یکسرگیردار

$$\begin{aligned} W_{1j} = W_{Nj} = W_{i1} = W_{iN} = 0 \\ \sum_{k=1}^{N_x} C_{1k}^{(1)} W_{kj} = \sum_{k=1}^{N_x} C_{Nk}^{(1)} W_{kj} = \sum_{k=1}^{N_y} C_{ik}^{(1)} W_{ik} = \\ \sum_{k=1}^{N_y} C_{Nk}^{(1)} W_{ik} = 0 \end{aligned}$$

- تکیه‌گاه ساده

$$\begin{aligned} W_{1j} = W_{Nj} = W_{i1} = W_{iN} = 0 \\ \alpha \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(2)} W_{kj} + \beta \lambda^2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} W_{in} = 0 \\ \beta \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(2)} W_{kj} + \gamma \lambda^2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} W_{in} = 0 \end{aligned}$$

- تکیه‌گاه آزاد $X = 0, X = 1$

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(2)} W_{kj} + \beta \lambda^2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} W_{in} = 0, i = 2, \dots, N-1 \\ (\beta + 2\mu) \lambda^2 \sum_{m=1}^{N_y} C_{jm}^{(2)} \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(1)} W_{km} + \alpha \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(3)} W_{kj} = \\ \frac{12a^2 \sigma_x}{h^2 E} \xi \left(\sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(1)} W_{kj} \right) \end{aligned}$$

- تکیه‌گاه آزاد $Y = 0, Y = 1$

$$\begin{aligned} \beta \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(2)} W_{kj} + \gamma \lambda^2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} W_{in} = 0, i = 2, \dots, N-1 \\ (\beta + 2\mu) \sum_{m=1}^{N_y} C_{jm}^{(1)} \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(2)} W_{km} + \lambda^2 \gamma \sum_{k=1}^{N_y} C_j^{(1)} \\ - \frac{12a^2 \sigma_y}{h^2 E} \left(\sum_{k=1}^{N_y} C_{jk}^{(1)} W_{ik} \right) \end{aligned}$$

حال معادله (۲۵) را می‌توان به‌صورت (۲۶) نوشت:

$$[M][W] = \frac{12Pa^2}{Eh^2} [N][W] \quad (26)$$

با توجه به اینکه معادله فوق یک معادله غیر خطی است (ضرایب به بار وابسته هستند) برای حل آن از روش تکرار استفاده می‌شود. با حل مقادیر ویژه معادله فوق، می‌توان مقدار P را محاسبه کرد. اکنون ضریب کماتش K به‌صورت رابطه (۲۷) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} K = \frac{12Pa^2(1-\nu^2)}{Eh^2\pi^2} = \frac{P(1-\nu^2)}{\alpha E} \\ \alpha = \frac{\pi^2 h^2}{12a^2} \end{aligned} \quad (27)$$

که نسبت ضخامت نامیده می‌شود.

۵- نتایج و بحث

ماده مورد استفاده در این تحقیق AL7075-T6 می باشد که به دلیل کاربرد زیاد آن در صنعت هوافضا انتخاب شده است. در اینجا از مدل رامبرگ-ازگود به شکل رابطه (۲۸) استفاده شده است:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_e}{E} + k \left(\frac{\sigma_e}{E} \right)^n \quad (28)$$

که در آن کرنش پلاستیک کل و (n, k) خواص ماده هستند. مدول تانژانتی و سکانتی مورد استفاده در معادلات به شکل ذیل محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned} \frac{E}{T} &= 1 + nk \left(\frac{\sigma_e}{E} \right)^{n-1} \\ \frac{E}{S} &= 1 + k \left(\frac{\sigma_e}{E} \right)^{n-1} \end{aligned} \quad (29)$$

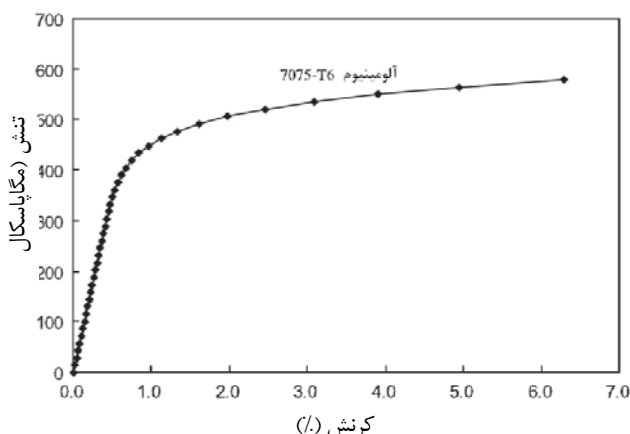
خصوصیات این فلز با استفاده از معادله (۲۸) در جدول ۱ آمده است. منحنی تنش-کرنش این فلز نیز در شکل ۲ نمایش داده شده است. برای تحلیل دقیق مسأله ابتدا به تعیین نقاط نمونه و حساسیت مش در تحلیل پرداخته می شود. همان گونه که در شکل ۳ مشخص است تعداد سیزده مش در این مسأله در نظر گرفته شده است. جدول ۲ نشان می دهد که توزیع نقاط نمونه معادله (۲۴) دارای بالاترین دقت می باشد.

با توجه به اینکه دوربان و همکارانش قبلاً به صورت روش جداسازی متغیرها به تحلیل این مسأله پرداخته اند، ابتدا نتایج به دست آمده با مرجع [۳] مقایسه شده و سپس سایر نتایج جدید ارائه شده اند.

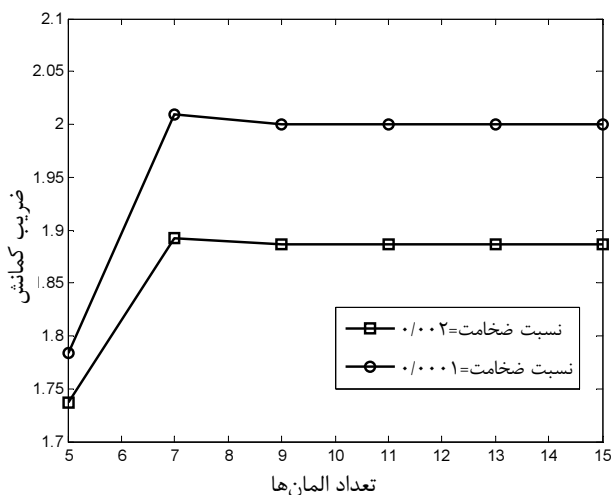
جدول ۱ خواص مواد در رابطه رامبرگ-ازگود [۳]

مدول یانگ	۷۲/۴ گیگاپاسکال
n	۱۰/۹
k	$۳/۹۴ \times ۱۰^{-۲۱}$
ضریب پواسون	۰/۳۲

منحنی ضریب بارگذاری (ξ) بر حسب ضریب کماتش (K) در نسبت های ضخامت (α) مختلف برای دو تئوری تغییر شکل و نموی و شرایط مرزی مختلف SCSC, CSCS [۳] همخوانی دارند، اشکال (۱۰ و ۹،۴). این نتایج برای صفحه مربعی $\lambda = 1$ به دست آمده اند.



شکل ۲ منحنی تنش-کرنش حقیقی فلز آلومینیوم 7075-T6 [۴]



شکل ۳ منحنی حساسیت مش برای حالت SSSS

جدول ۲ دقت توزیع نقاط نمونه برای محاسبه ضریب کماتش

شرایط	نوع تئوری	تعداد نقاط نمونه	ضریب کماتش ($\alpha=0.0001$, $\xi=-1$)	معادله (۲۲-۳)	معادله (۲۲-۴)	معادله (۲۲-۵)	معادله (۲۳)	معادله (۲۴)
SSSS	IT, DT	۱۳	۲/۰۰۱۰	۱/۹۹۹۷	۱/۹۹۹۷	۱/۹۹۹۷	۲/۰۰۰۵	۲/۰۰۰۰
	دوربان [۳]		۲/۰۰۰۰					

در حالت SSSS وقتی $\alpha = 0.0001$ باشد، کمانش در ناحیه الاستیک اتفاق می افتد و نتایج حاصل از هر دو تئوری کاملاً بر هم منطبق می شوند. در این حالت برای تمام شرایط مرزی نتایج حاصل به نتایج کمانش الاستیک نزدیک خواهد بود. وقتی $\alpha = 0.001$ ، $\xi < 0.1$ ، $\alpha = 0.002$ و $-0.25 < \xi$ باشد، تطابق خوبی بین دو تئوری پلاستیسیته بوجود می آید. با این حال، با افزایش ضریب بارگذاری ξ تفاوتها کاملاً زیاد می شود.

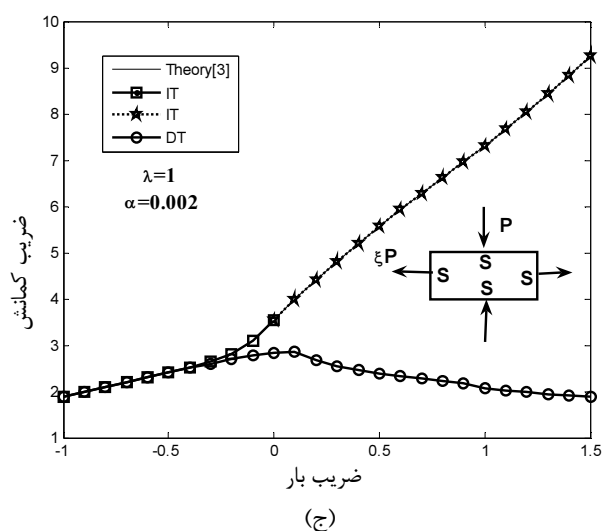
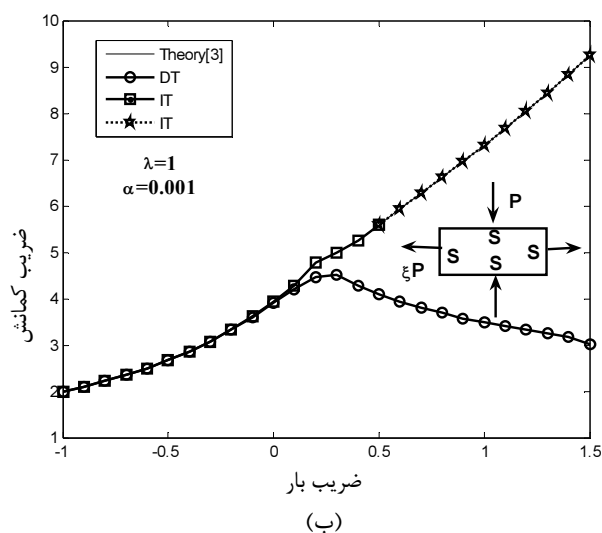
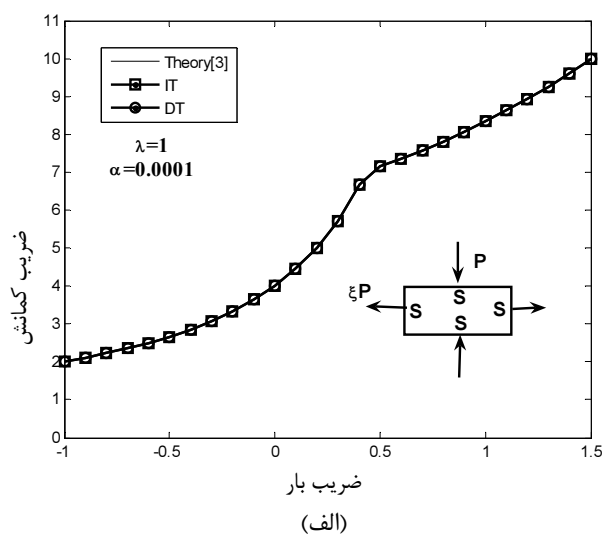
همانطور که مشخص است با افزایش ضخامت صفحه، محدوده ضریب بار برای انطباق دو تئوری تغییرشکل و نموی کمتر می شود. در حالت کشش در راستای محور و فشار عمود بر محور ($0 \leq \xi \leq 1.5$)، تنش های پیش بینی شده توسط تئوری نموی بیش از حد تحمل ماده می باشد و بنابراین نتایج حاصل به طور مضاعف وارد محدوده غیر قابل قبولی می شود. این نتایج در شکل های رسم شده با علامت ستاره مشخص شده اند. علامت مربع نشان دهنده نتایج حاصل از تئوری نموی در محدوده منحنی تنش- کرنش ماده می باشد. همچنین برای اطمینان از درستی نتایج به دست آمده، مقایسه ای با نتایج قبلی در جدول ۳ انجام شده است.

جدول ۳ مقایسه ضریب کمانش برای صفحات مربعی تحت بار تک

محوری و دو محوری با شرایط تکیه گاهی SSSS

شرایط مرزی		$\alpha = 0.0001$		$\alpha = 0.002$	
IT	DT	IT	DT	IT	DT
هندلن و پراگر [۹]					
۲/۵۷۴۰	---	۴/۰۰۰۰	-----	۲/۵۷۴۰	---
شریواستاو [۱۰]					
۲/۵۲۷۸	۲/۸۰۵۸	۴/۰۰۰۰	۴/۰۰۰۰	۲/۵۲۷۸	۲/۸۰۵۸
SSSS					
وانگ [۱۱، ۱۲]					
۳/۴۹۵۵	۲/۷۹۵۴	۴/۰۰۰۰	۴/۰۰۰۰	۳/۴۹۵۵	۲/۷۹۵۴
(تک محوری)					
وانگ [۱۳]					
۳/۴۹۵۵	۲/۷۹۵۴	۴/۰۰۰۰	۴/۰۰۰۰	۳/۴۹۵۵	۲/۷۹۵۴
دوربان [۳]					
۱/۸۷۱۳	۱/۸۶۴۹	۲/۰۰۰۰	۲/۰۰۰۰	۱/۸۷۱۳	۱/۸۶۴۹
SSSS					
وانگ [۱۲، ۱۱]					
۱/۸۷۱۳	۱/۸۶۴۹	۲/۰۰۰۰	۲/۰۰۰۰	۱/۸۷۱۳	۱/۸۶۴۹
(دو محوری)					
وانگ [۱۳]					
۱/۸۷۱۳	۱/۸۶۴۹	۲/۰۰۰۰	۲/۰۰۰۰	۱/۸۷۱۳	۱/۸۶۴۹

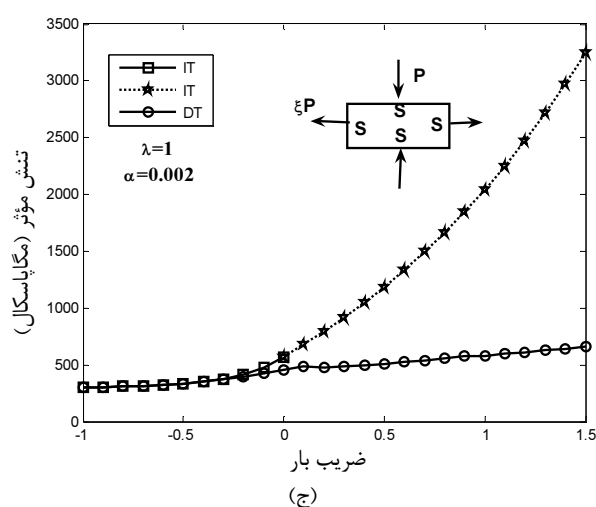
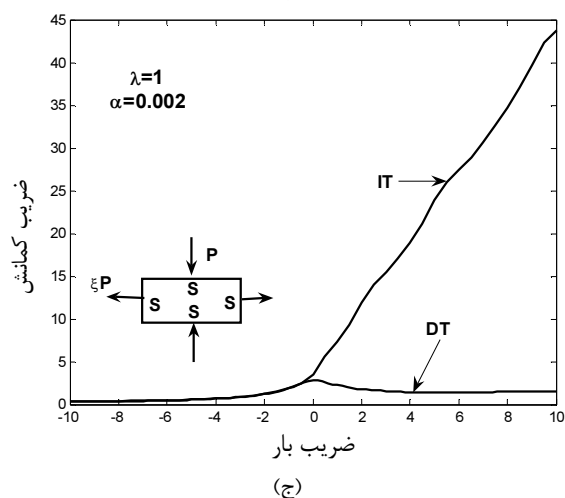
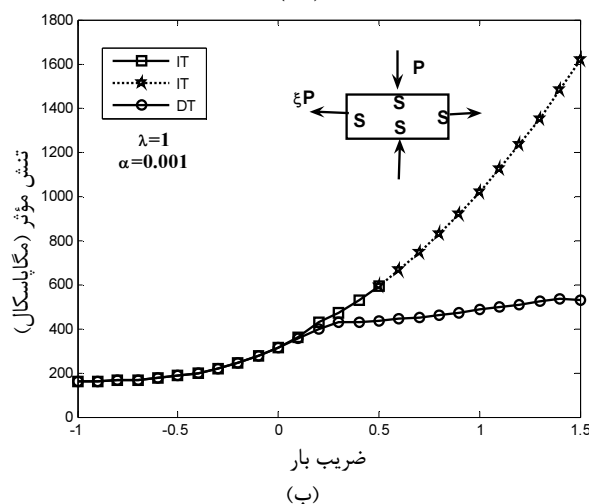
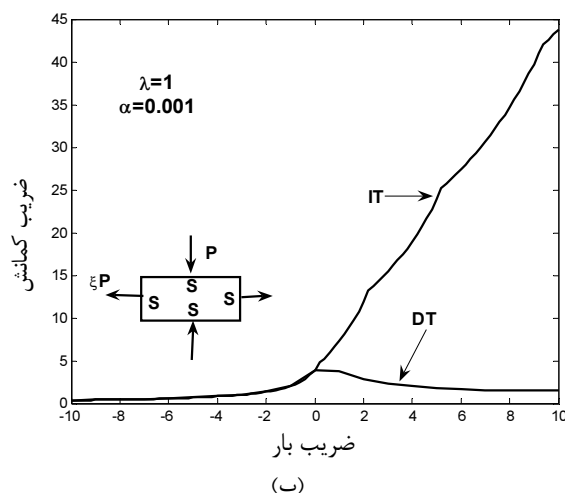
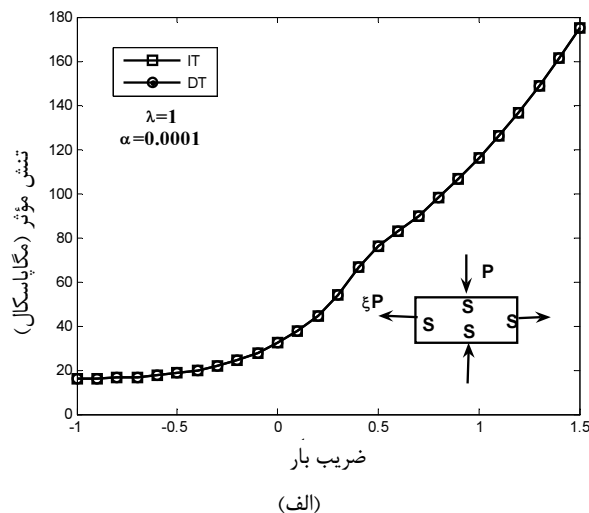
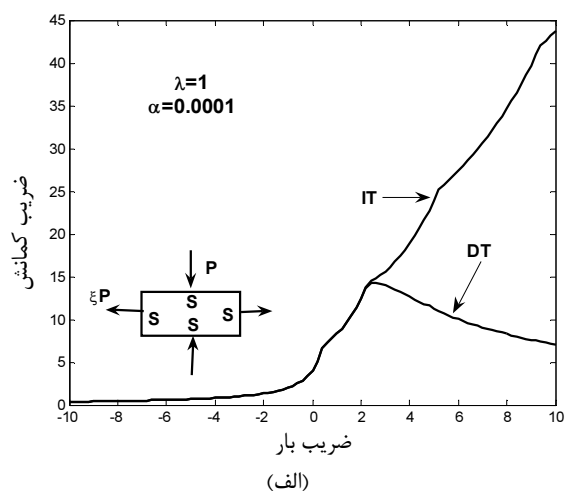
شکل ۵ منحنی ضریب بار-تنش مؤثر (σ_e) در نسبت های ضخامت (α) مختلف برای دو تئوری تغییرشکل و نموی و شرط مرزی SSSS را نشان می دهد. در حالت $\alpha = 0.001$ ، شکل ۵-الف، با افزایش ضریب بار در حالت کششی محوری، تنش مؤثر



شکل ۴ مقایسه تئوریهای نموی و تغییرشکل برای حالت SSSS

در حالت $\alpha = 0.002$ ، شکل ۵-ج، کمانش پلاستیک در جسم رخ می‌دهد و در اینجا نیز تئوری تغییر شکل در محدوده منحنی تنش-کرنش و تئوری نموی در خارج آن حرکت می‌کند.

در تئوری نموی بیش از حد تحمل جسم است. با این حال، تئوری تغییر شکل کاملاً بر روی منحنی تنش-کرنش حرکت می‌کند و کمانش الاستیک-پلاستیک در جسم را نشان می‌دهد.



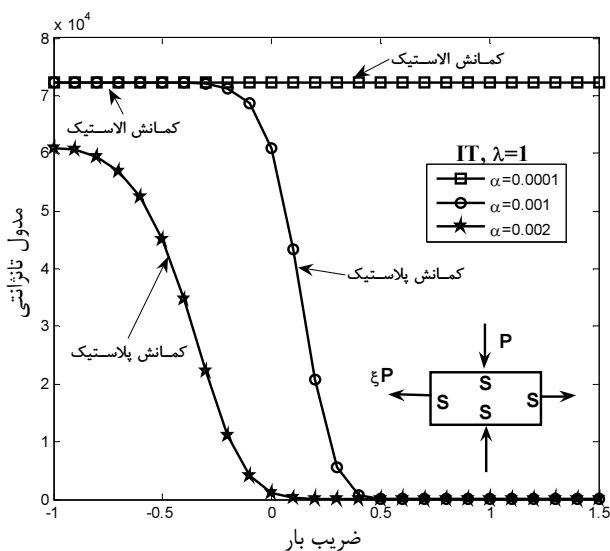
شکل ۶ اثر ضریب بار بر ضریب کمانش براساس دو تئوری نموی و تغییر شکل

شکل ۵ منحنی ضریب بار (ξ) بر حسب تنش مؤثر (σ_e)

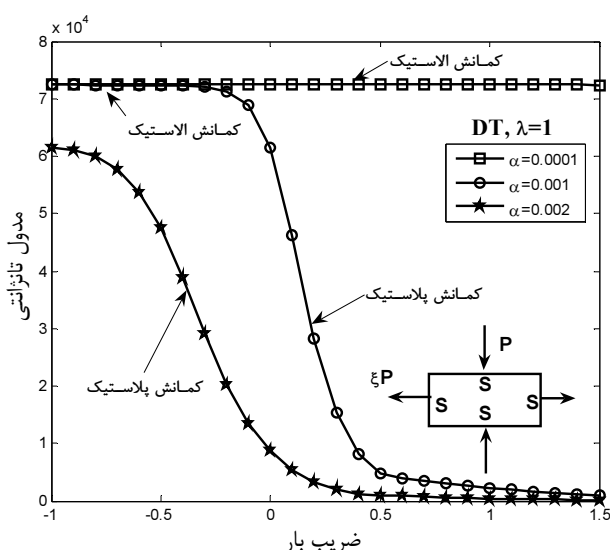
تغییرات آن نسبت به پارامتر نسبت ضخامت بیشتر است (شکل‌های ۶ و ۹-۱۲).

جدول ۴ مقدار ضریب بار برای ماکزیمم بار کمانش

شرایط مرزی	$\alpha = 0.001$	$\alpha = 0.002$
SSSS	$\xi = 0.3$	$\xi = 0$
SCSC	$\xi = 0.2$	$\xi = 0$
CSCS	$\xi = -0.3$	$\xi = -0.2$
SSCC	$\xi = 0$	$\xi = -0.1$
SCCC	$\xi = 0$	$\xi = -0.1$
CSSS	$\xi = 0$	$\xi = -0.1$
CCCC	$\xi = -0.2$	$\xi = -0.2$



شکل ۷ منحنی مدول تانژانسی - ضریب بار تئوری نموی



شکل ۸ منحنی مدول تانژانسی - ضریب بار تئوری تغییر شکل

با افزایش ضخامت صفحه، در حالت کششی محوری و فشاری عمودی جوابهای حاصل از تحلیل تئوری نموی بطور افزاینده غیرقابل قبول می‌شوند.

شکل ۶ منحنی ضریب بار- ضریب کمانش را برای مقایسه دو تئوری نموی و تغییر شکل در نسبت‌های ضخامت (α) مختلف برای شرط مرزی SSSS نشان می‌دهد. همانطور که در شکل مشخص است با افزایش ضریب بار ξ و تبدیل بار از حالت فشاری به کششی و همچنین با افزایش ضخامت، اختلاف بین دو تئوری نموی و تغییر شکل بیشتر می‌شود. علاوه بر این، هنگامی که بار بصورت فشاری صفحه‌ای وارد می‌شود تطابق خوبی بین دو تئوری وجود دارد. زمانی که بار محوری بصورت کششی به صفحه وارد می‌شود با افزایش ضخامت صفحه هیچ تطابقی بین جوابهای به دست آمده از دو تئوری مشاهده نمی‌شود. در اینجا، در حالت $\alpha = 0.0001$ و $\alpha = 0.001$ و $\alpha = 0.002$ بیشترین بار کمانشی به ترتیب در $\xi = 0.3$ و $\xi = 0$ رخ می‌دهد. در صفحات نازک ($\alpha \leq 0.001$) بیشترین بار کمانشی در حالت کششی محوری و فشاری عمودی ($\xi \geq 0$) اتفاق می‌افتد. با افزایش ضخامت صفحه، در شرایط تکیه‌گاهی مختلف، ماکزیمم بار کمانش در حالت فشاری دو محوری ($-0.2 \leq \xi \leq 0$) رخ می‌دهد (جدول ۴).

ضعیف شدن مدول فلزات با افزایش کشش و در نتیجه غلبه اثر پایداری کششی بر کمانشی از دیگر عواملی است که با افزایش $\xi \geq 0$ بار کمانشی را کاهش می‌دهد. شکل ۷ منحنی مدول تانژانسی- ضریب بار تئوری نموی در حالت SSSS را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود در حالت استفاده از تئوری نموی با افزایش نسبت ضخامت (α) و ضریب بار ($\xi \geq 0$)، مدول تانژانسی (T) بطرف صفر متمایل می‌شود و در نتیجه جوابهای این تئوری در این حالت غیر قابل قبول می‌شود، (شکل ۷). در اینجا در حالت $\alpha = 0.0001$ کمانش الاستیک، در حالت $\alpha = 0.001$ کمانش الاستیک-پلاستیک و در حالت $\alpha = 0.002$ کمانش پلاستیک در صفحه رخ داده است. با افزایش منطقه پلاستیک، سختی صفحه کاهش می‌یابد و بارهای کمانشی کوچکتر می‌شوند. با این حال، با به کارگیری تئوری تغییر شکل، این امر اتفاق نمی‌افتد، (شکل ۸). لذا، این عامل می‌تواند یکی از دلایلی باشد که جوابهای به دست آمده از حالت تئوری تغییرشکل با جوابهای آزمایشگاهی همخوانی بیشتری دارد. علاوه بر این، می‌توان دریافت که تئوری تغییرشکل وابستگی زیادی به پارامتر ضریب بار ندارد و

با توجه به رابطه (۳۰):

$$\sigma_e = (1 + \xi + \xi^2)^{(-1/2)} \left(\frac{\alpha k}{1 - \nu^2} \right) E \quad (30)$$

اثر نسبت ضخامت و ضریب بار بر روی سطح تنش کاملاً مشهود است.

زمانی که صفحات خیلی نازک باشند ($\alpha \leq 0.000$)، جوابهای به دست آمده در تمام شرایط مرزی با جوابهای حاصل از حل کمانش الاستیک بر هم منطبق هستند. اما در دو حالت ($\alpha = 0.001$ و $\alpha = 0.002$)، با توجه به شرایط مرزی مختلف، کمانش الاستیک-پلاستیک یا کمانش پلاستیک در صفحه رخ می دهد.

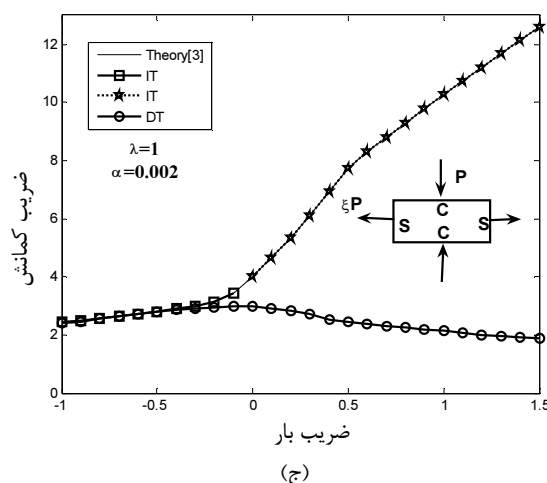
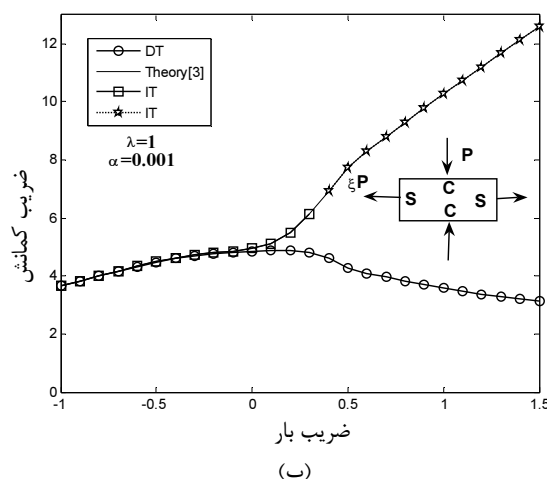
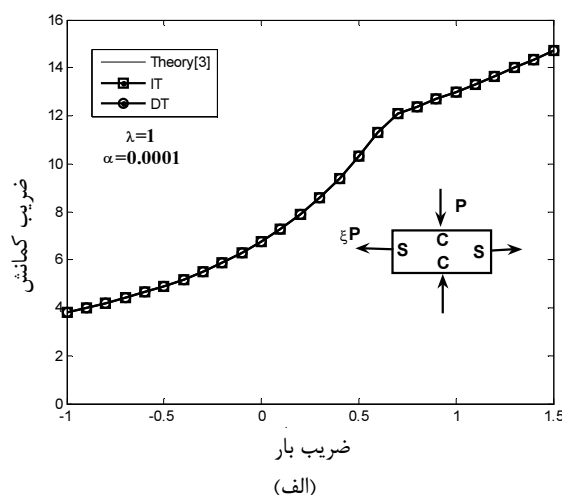
با افزایش ناحیه پلاستیک جوابهای حاصل از دو تئوری از یکدیگر فاصله گرفته و با افزایش ضریب بارگذاری در حالت کششی، اختلاف بین نتایج حاصل از دو تئوری افزایش می یابد (شکل ۹-ج). جدول ۵ محدوده ضریب بار برای تطابق دو تئوری تغییرشکل و نموی با متغیر ضخامت و شرایط تکیه گاهی مختلف را نشان می دهد. مشاهده می شود که گیردار بودن لبه ها اختلاف بین دو تئوری نموی و تغییرشکل را افزایش می دهد. زیرا شرایط مرزی گیردار باعث افزایش سطح تنش در صفحه خواهد شد که این خود بر اختلاف بین دو تئوری می افزاید. افزایش بازه ضریب بار در تطابق دو تئوری در هر حالت به دلیل کاهش سطح تنش بوجود آمده در صفحه می باشد. همچنین با افزایش ضخامت صفحه (α)، احتمال رخ دادن کمانش پلاستیک افزایش می یابد و بنابراین محدوده تطابق دو تئوری نموی و تغییرشکل کاهش می یابد.

جدول ۵ محدوده ضریب بار برای تطابق دو تئوری تغییرشکل و نموی

شرایط مرزی	$\alpha = 0.001$	$\alpha = 0.002$
SSSS	$-1 \leq \xi \leq 0$	$-1 \leq \xi \leq -0.4$
SCSC	$-1 \leq \xi \leq 0$	$-1 \leq \xi \leq -0.4$
CSCS	$-1 \leq \xi \leq -0.3$	-----
SSCC	$-1 \leq \xi \leq -0.2$	$-1 \leq \xi \leq -0.4$
SCCC	$-1 \leq \xi \leq -0.3$	-----
CSSS	$-1 \leq \xi \leq -0.2$	$-1 \leq \xi \leq -0.6$
CCCC	$-1 \leq \xi \leq -0.4$	-----

برای حالت های SCCC, SSCC, CCCC تاکنون به دلیل ناتوانی در جداسازی متغیرها در حل معادلات هیچ حل عددی ارائه نشده است. اکنون به تحلیل این موارد با روش یک چهارم

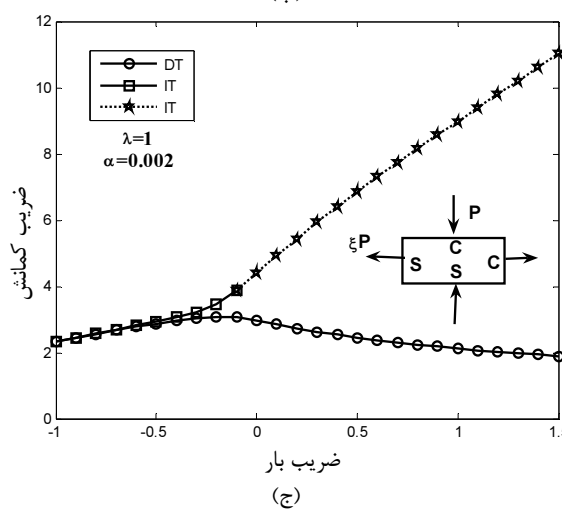
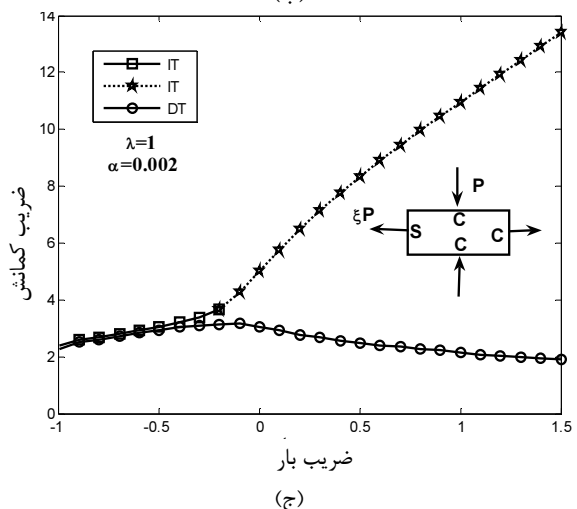
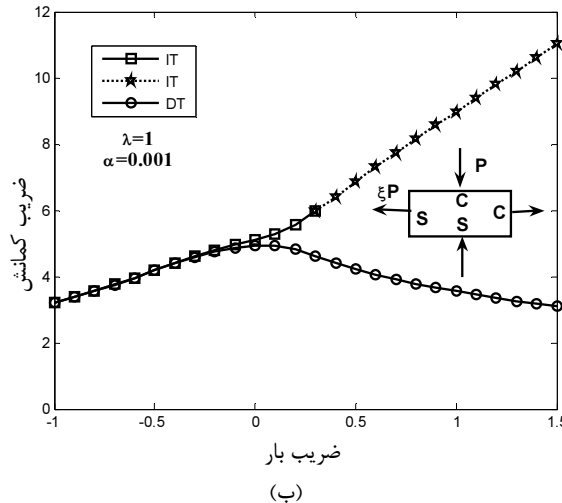
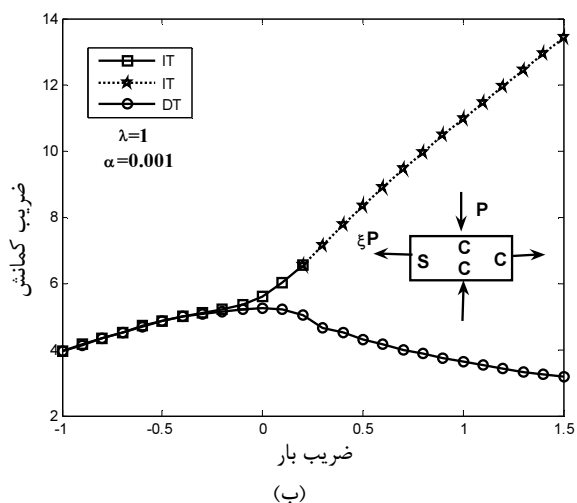
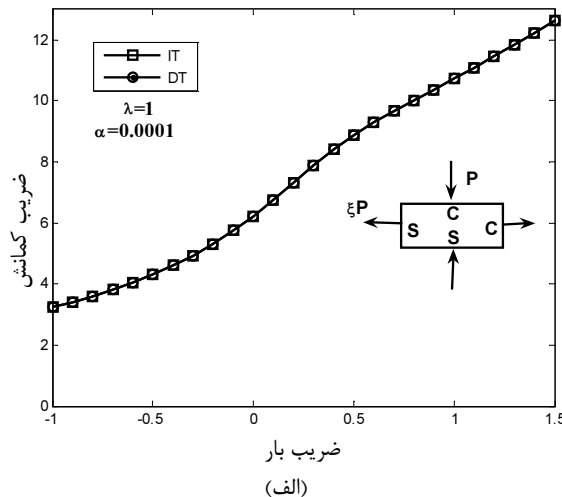
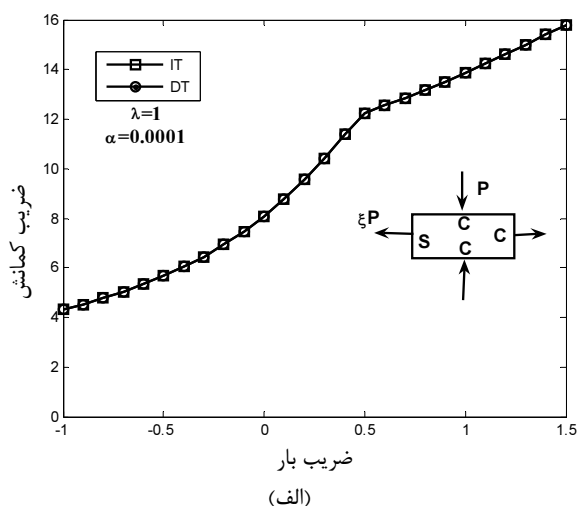
به طور کلی می توان گفت مادامی که ضریب بار و نسبت ضخامت افزایش می یابند، منطقه پلاستیک وسیع تر شده و اختلاف بیشتری بین مدول لحظه ای دو تئوری اتفاق می افتد و با توجه به اینکه نسبت ضخامت اثر بیشتری در گسترش منطقه پلاستیک صفحه دارد، اثر آن قابل ملاحظه تر است.



شکل ۹ مقایسه تئوریهای نموی و تغییرشکل برای حالت SCSC

همان گونه که در شکل های ۱۰ تا ۱۲ مشخص است با افزایش گیردار بودن صفحه، در شرایط یکسان ضریب بار و ضخامت صفحه، بار کماتشی صفحه افزایش می یابد.

تفاضلی تعمیم یافته پرداخته می شود. اشکال ۱۰ تا ۱۲ مقایسه دو تئوری تغییر شکل و نموی را برای حالات SCCC, SSCC و CCCC نشان می دهند.



شکل ۱۱ مقایسه تئوریهای نموی و تغییرشکل برای حالت SCCC

شکل ۱۰ مقایسه تئوریهای نموی و تغییرشکل برای حالت SSCC

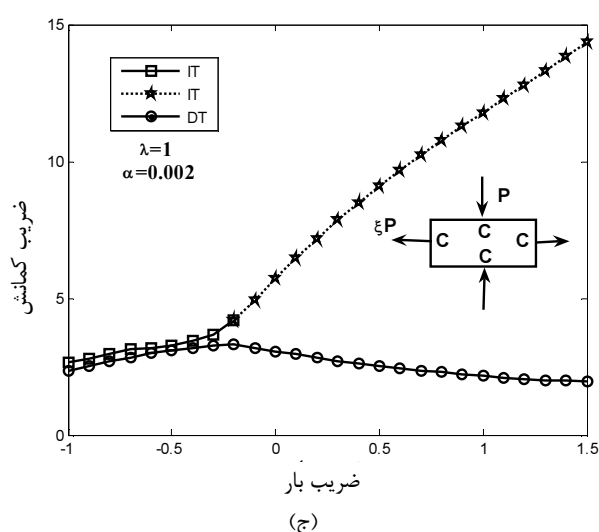
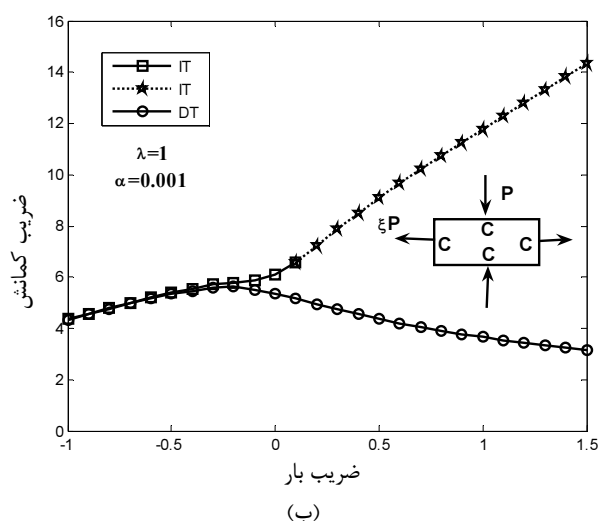
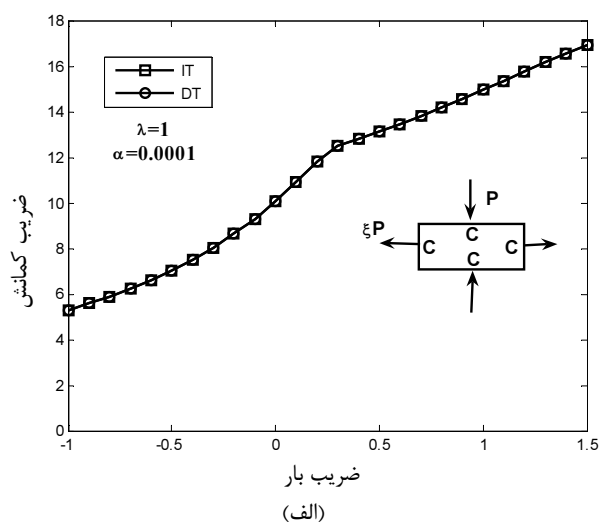
در اینجا محدوده انطباق دو تئوری تغییرشکل و نموی در حالت SSCC نسبت به حالت SCCC وسیعتر است که بدلیل افزایش گیردار بودن صفحه در شرایط مرزی دوم است (شکل های ۱۰، ۱۱).

در حالتی که تمام لبه ها گیردار باشند (CCCC)، هنگامی که $\alpha = 0.0001$ ، در صفحه کمناش الاستیک و با افزایش ضخامت، کمناش پلاستیک رخ می دهد (شکل ۱۲- الف). در این حالت با شرایط $\alpha = 0.001$ و $\xi < -0.6$ ، تطابق خوبی بین دو تئوری وجود دارد (شکل ۱۲- ب).

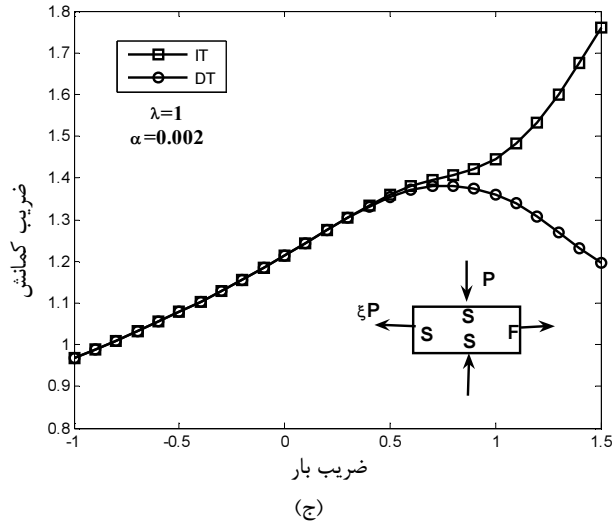
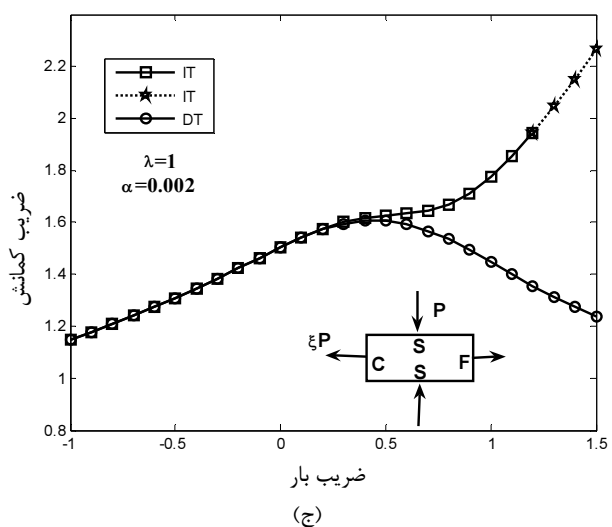
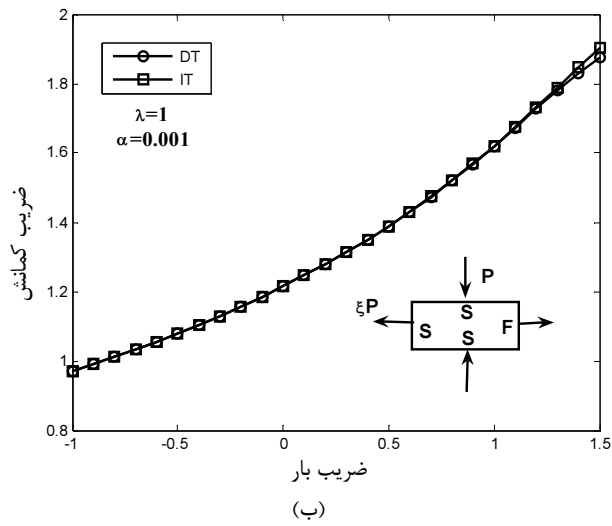
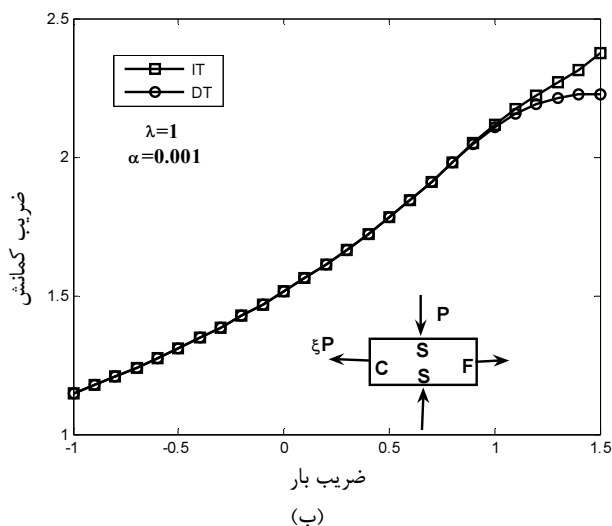
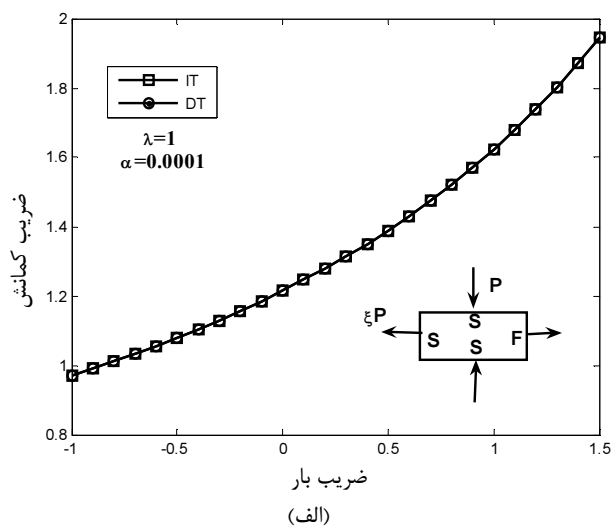
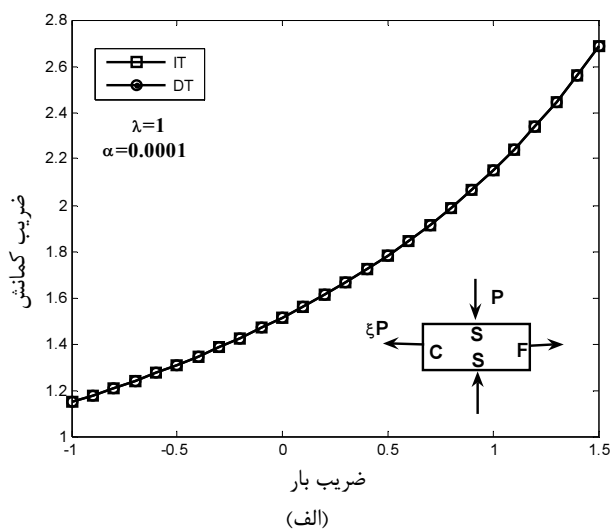
با این حال، چنانچه قبلاً ذکر شد شرایط گیردار باعث افزایش منطقه پلاستیک در صفحه می شود و بنابراین دو تئوری نموی و تغییرشکل در حالت $\alpha = 0.002$ از یکدیگر دور شده و تطابق بین دو تئوری کاهش می یابد (شکل ۱۲- ج). بنابراین با افزایش شرایط مرزی گیردار کمناش پلاستیک رخ خواهد داد.

از آنجا که شرایط تکیه گاه آزاد نیز تاکنون مورد بحث و بررسی قرار نگرفته است، در اینجا به بررسی این حالت پرداخته می شود. شکل های ۱۳ تا ۱۶ مقایسه دو تئوری تغییرشکل و نموی را برای حالت های SSFS، CSFS، SFSF، CFCF بر حسب مقادیر مختلف نسبت ضخامت نشان می دهند. همانطور که مشخص است با آزادتر شدن لبه ها، محدوده تطابق بین دو تئوری افزایش و با گیردارتر شدن آنها این محدوده کاهش می یابد (شکل های ۱۳، ۱۴). به بیان دیگر، در ضرایب بار متفاوت، با افزودن شرایط مرزی آزاد کمناش بیشتر بصورت الاستیک و با افزودن شرایط مرزی گیردار کمناش بیشتر بصورت پلاستیک رخ خواهد داد.

در حالت CFCF وقتی $\alpha = 0.002$ تطابقی بین دو تئوری مشاهده نمی شود (شکل ۱۶- ج). این به این دلیل است که با افزایش گیردار شدن صفحه سطح تنش افزایش می یابد و تفاوت بین دو تئوری بیشتر می شود. مقایسه شکل های ۱۵ و ۱۶ نشان می دهد که در شرایط یکسان چنانچه تکیه گاه های ساده به گیردار تبدیل شوند ضریب کمناش افزایش یافته و محدوده تطابق دو تئوری نموی و تغییرشکل کاهش می یابد. همچنین با تبدیل تکیه گاه های گیردار به آزاد، ضریب کمناش کاهش یافته و محدوده تطابق دو تئوری افزایش می یابد.

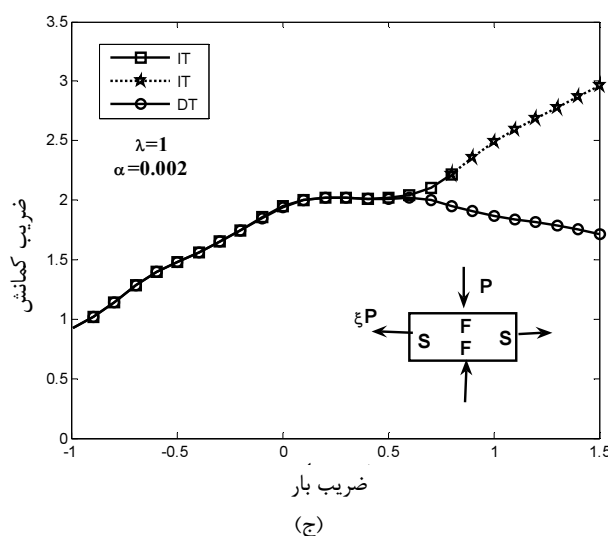
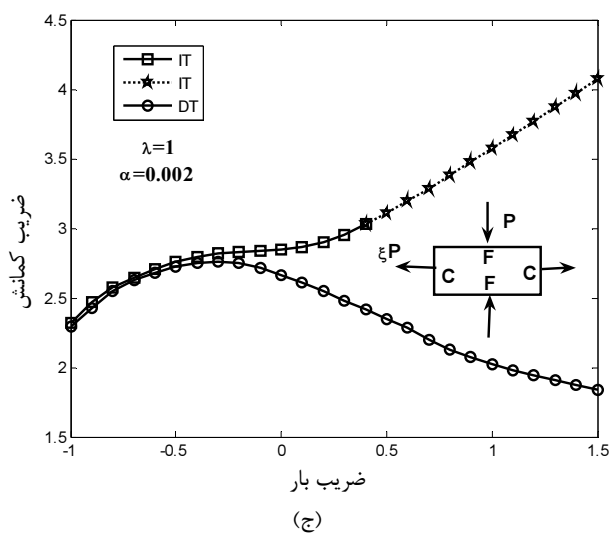
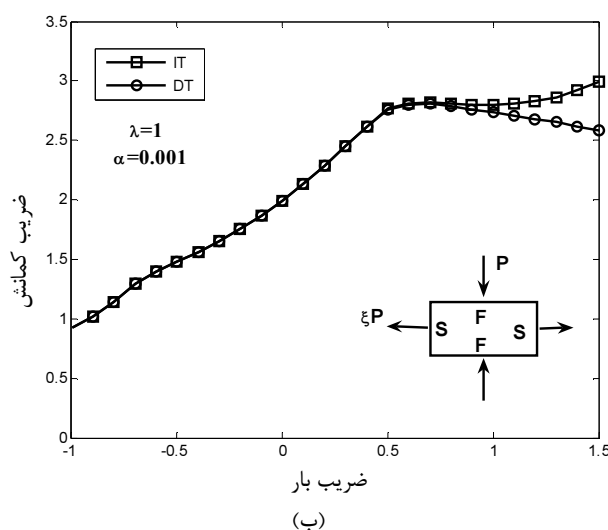
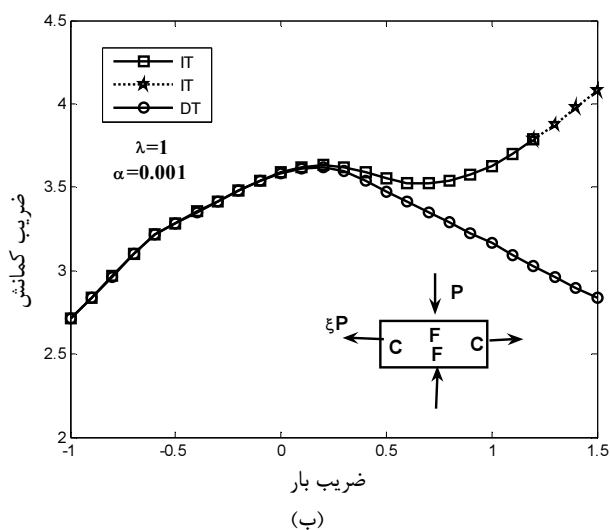
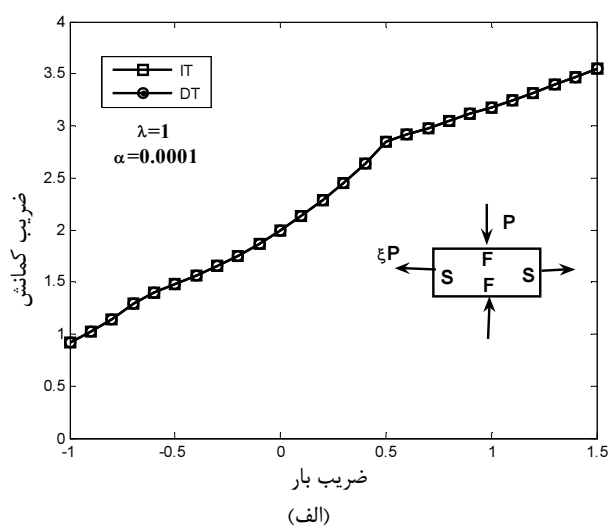
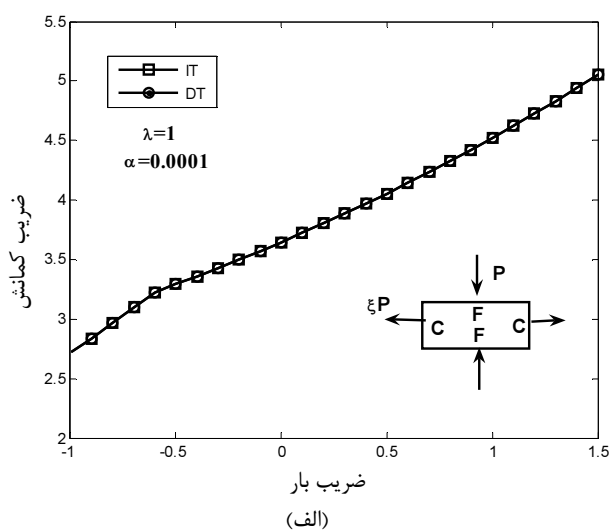


شکل ۱۲ مقایسه تئوریهای نموی و تغییرشکل برای حالت CCCC



شکل ۱۴ مقایسه تئوریهای نموی و تغییر شکل برای حالت CSFS

شکل ۱۳ مقایسه تئوریهای نموی و تغییر شکل برای حالت SSFS



شکل ۱۶ مقایسه تئوریهای نموی و تغییرشکل برای حالت CFCF

شکل ۱۵ مقایسه تئوریهای نموی و تغییرشکل برای حالت SFSF

۶- نتیجه گیری

مسأله کمانش الاستوپلاستیک صفحات به کمک روش عددی یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته و به کمک دو تئوری پلاستیسیته تغییرشکل و نموی مورد تحلیل قرار گرفت و نتایج جدیدی ارائه شد. چگونگی تاثیر عواملی مانند ضخامت صفحه، ضریب بارگذاری، خواص ماده و شرایط مرزی بر ضریب کمانش به کمک دو تئوری مختلف بررسی گردید. نتایج نشان می‌دهند زمانی که صفحات خیلی نازک باشند ($\alpha \leq 0.0001$)، جوابهای به دست آمده در تمام شرایط مرزی با جوابهای حاصل از کمانش الاستیک بر هم منطبق هستند. با این حال، با افزایش ضخامت صفحه کمانش الاستیک-پلاستیک یا کمانش پلاستیک در صفحه رخ می‌دهد. در این حالت، هنگامی که با افزایش ضریب بار ناحیه پلاستیک در صفحه گسترش می‌یابد، اختلاف بین نتایج حاصل از دو تئوری پلاستیسیته از یکدیگر بیشتر می‌شود که در اینجا اثر ضخامت صفحه از بار محسوس‌تر است.

همچنین مشخص شد که تغییرات تئوری تغییرشکل نسبت به پارامتر نسبت ضخامت (α) از تئوری نموی بیشتر می‌باشد. با گیردارتر شدن صفحه به دلیل افزایش سطح تنش، کمانش پلاستیک در آن سریعتر رخ می‌دهد. بنابراین با ازدیاد شرایط مرزی گیردار اختلاف ضریب کمانش بین دو تئوری نموی و تغییرشکل بیشتر می‌شود. از طرف دیگر، با افزایش شرایط مرزی آزاد، ضریب کمانش کاهش یافته و اختلاف ضریب کمانش حاصل از دو تئوری نموی و تغییرشکل کمتر می‌شود.

نتایج نشان می‌دهند که اختلاف بین دو تئوری نموی و تغییرشکل در حالت کششی محوری ($\xi \geq 0$) افزایش می‌یابد. به علاوه، ضرایب کمانش حاصل از تئوری تغییرشکل در مقایسه با تئوری نموی، به ضریب بار وابستگی کمتری دارند. همچنین قابل توجه است که در صفحات نازکتر در بارگذاری فشاری دو محوری و با ضرایب بار متفاوت، تطابق قابل قبولی بین ضریب کمانش حاصل از دو تئوری نموی و تغییرشکل وجود دارد. با این حال، با افزایش ضخامت صفحه، ضریب کمانش حاصل از تحلیل نموی در حالتی که بار به صورت کششی وارد شود، قابل اطمینان نیست. علاوه بر آن، افزایش ضخامت صفحه تأثیر چندانی بر ضریب کمانش حاصل ندارد که این خود نشان‌دهنده مناسب نبودن استفاده از تئوری نموی در این حالت می‌باشد.

۷- فهرست علائم

a	طول صفحه
b	عرض صفحه
c, k	پارامترهای رامبرگ-ازگود
D	صلبیت خمشی صفحه
h	ضخامت صفحه
K	ضریب کمانش
S_{ij}	تانسور تنش انحرافی
$S(E_s)$	مدول سکانتی
$T(E_t)$	مدول تانژانتی
u, v, w	جابجاییها
$X = \frac{x}{a}$	پارامتر بدون بعد طول
$Y = \frac{y}{b}$	پارامتر بدون بعد طول

علائم یونانی

α	نسبت ضخامت
β	پارامتر مورد استفاده در روابط تنش-کرنش
γ	پارامتر مورد استفاده در روابط تنش-کرنش
ρ	پارامتر مورد استفاده در روابط تنش-کرنش
ε	کرنش پلاستیک کل
λ	نسبت ابعادی
σ_e	تنش مؤثر
ν	ضریب پواسون
ξ	ضریب بار

۸- مراجع

- [1] Durban D., "Plastic Buckling of Plates and Shells", AIAA Paper 97-1245, NASA/CP-206280, 1998, pp. 293-310.
- [2] Ore E. and Durban D., "Elastoplastic Buckling of Axially Compressed Circular Cylindrical Shells", *International Journal of Mechanical Sciences* 34 (9), 1992, pp. 727-742.
- [3] Durban D. and Zuckerman Z., "Elastoplastic Buckling of Rectangular Plates in Biaxial Compression/tension", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 41, 1999, pp. 751-765.
- [4] Wang X. W. and Huang J. C., "Elastoplastic Buckling Analyses of Rectangular Plates under Biaxial Loadings by the Differential Quadrature

- [10] Shrivastava S. C., "Inelastic Buckling of Plates Including Shear Effects", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 15, 1979, pp. 567-575.
- [11] Wang C. M., Xiang Y. and Chakrabarty J., "Elastic/plastic Buckling of Thick Plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, 2001, pp. 8617-8640.
- [12] Wang C. M., Xiang. Y., and Wang. C. Y., "Buckling and Vibration of Plates with an Internal Line-Hinge via Ritz Method", *Proceedings of the First Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics*, Sydney, 2001, pp. 1663-1672.
- [13] Wang. C. M. and Aung. T. M., "Plastic Buckling Analysis of Thick Plates using p-Ritz Method", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, 2007, pp. 6239-6255.
- Method", *Thin-Walled Structures*, Vol. 47, 2009, pp. 14-20.
- [5] Zhang W. and Wang X., "Elastoplastic Buckling Analysis of Thick Rectangular Plates by using the Differential Quadrature Method", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 61, 2011, pp. 44-61.
- [6] Chakrabarty J., *Applied Plasticity*, Second Edition, Springer, 2010.
- [7] Bellman RE. and Casti J., "Differential Quadrature and Long-Term Integration", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, 1971, pp. 235-238.
- [8] Bert C. W. and Malik M., "Differential Quadrature in Computational Mechanics: a Review", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49, 1996, pp. 1-27.
- [9] Handelman G. H. and Prager W., "Plastic Buckling of Rectangular Plates under Edge Thrusts", *NACA Technical Note No. 1530*, Washington D.C, 1948.