



## تحلیل حد شکل پذیری ورق‌های فلزی تحت بارگذاری نامتناسب دو محوره بر پایه مدل‌های ناپایداری پلاستیک ناهمسانگرد پخشی و موضعی ورتکس

اصغر زاجکانی<sup>1\*</sup>، علی بندی زکی<sup>2</sup>

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین

\* قزوین، صندوق پستی 34148-96818، zajkani@eng.ikiu.ac.ir

### چکیده

در این مقاله، یک مدل تحلیلی ناپایداری پلاستیک وابسته به مسیر برای هر دو گلوبی‌شدگی پخشی و محلی پیشنهاد خواهد شد. به‌منظور پیش‌بینی گلوبی‌شدگی پخشی وابسته به مسیر کرنش، از معیار نیروی بیشینه اصلاح شده استفاده خواهد شد که علاوه بر سخت‌شوندگی، تاثیر تغییرات بارگذاری را نیز مدنظر قرار می‌دهد. همچنین، در پیش‌بینی گلوبی‌شدگی موضعی شده از مدل ورتکس پیشنهاد شده توسط اشتورن و رایس استفاده خواهد شد که بر مبنای تئوری تغییر شکل پلاستیسیته کلاسیک ارائه شده است. در این مدل، فرض ناپیوستگی نرخ تغییر شکل در لایه گلوبی‌شدگی برقرار می‌باشد. بررسی تاثیر پیش‌بار و مسیر کرنش برای هر دو جهت بزرگ و کوچک ورق مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج آن با نتایج تجربی ارائه شده توسط سایر نویسندگان مقایسه و اعتبارسنجی خواهد شد. از طرفی، به‌منظور بهبود نتایج ارائه شده مدل ورتکس، از زوایای لایه گلوبی‌شدگی موضعی شده وابسته به معیار تسلیم استفاده خواهد شد. نهایتاً، با بهره‌گیری از معیار تسلیم هیل درجه دوم، تاثیر ناهمسانگردی و معیار تسلیم بر نمودارهای حد شکل‌دهی بارگذاری نامتناسب اعمال خواهد شد.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 13 آبان 1396  
پذیرش: 25 آذر 1396  
ارائه در سایت: 15 دی 1396  
کلید واژگان:  
ناپایداری پلاستیک  
گلوبی‌شدگی‌های پخشی و موضعی شده  
مدل ورتکس  
معیار نیروی بیشینه اصلاح شده  
مسیر کرنش

## Investigation of formability limit of metallic sheets subjected to non-proportional biaxial loading based on anisotropic diffuse and vertex localized plastic instability models

Asghar Zajkani\*, Ali Bandizaki

Department of Mechanical Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

\* P.O.B. 34148 – 96818, Qazvin, Iran, zajkani@eng.ikiu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 04 November 2017  
Accepted 16 December 2017  
Available Online 05 January 2018

#### Keywords:

Plastic instability  
Diffuse and localized necking  
Vertex model  
MMFC model  
Strain path

### ABSTRACT

In this paper, an analytical path-dependent plastic instability model is proposed for the thin metallic sheets through considering a linear pre-straining path for the both diffuse and localized necking. The model is introduced by extending a modified maximum force (MMFC) that the MMFC considers the strain hardening on the diffuse necking as well as the loading conditions. Also, the vertex criterion will be used to prediction of localized necking. The vertex criterion presented by Stören and Rice are usually based on the  $J_2$  deformation theory of classical plasticity, which explores the localized necking through the rate discontinuity assumption at the necking band. Both models will be combined with the strain path effect through a linear adoption of an equivalent strain. It will be investigated by applying a pre-strain in the major and minor directions for prediction of the formability in the non-proportional loading. Moreover, a dependent to yield criterion (DYC) - angle is used for prediction of the necking band angle in the vertex theory. Finally, the quadratic Hill criterion is used to investigate the anisotropy effect. The model is verified by experimental results presented by other authors.

### 1- مقدمه

شکل‌دهی ارائه شده‌اند. دسته‌ای از این مدل‌ها که پیش‌بینی یک تغییر شکل حجمی تحت عنوان گلوبی‌شدگی پخشی را مدنظر قرار می‌دهند، با فرض نیروی بیشینه در هنگام وقوع گلوبی‌شدگی، محدوده شکل‌دهی را ارائه می‌کنند [1,2]. توسعه یافته معیارهای مربوط به گلوبی‌شدگی پخشی، معیار نیروی بیشینه اصلاح شده<sup>1</sup> می‌باشد که در مقایسه با مطالعات پیشین، مزیت‌هایی را شامل می‌شود [3]. دسته‌ای دیگر از تغییر شکل‌ها که در آن

باتوجه به کاربرد فراوان شکل‌دهی فلزات لایه نازک در صنعت، مطالعه آن به شدت مورد توجه قرار گرفته است. نمودارهای حد شکل‌دهی که رابطه بین کرنش‌های اصلی بزرگ و کوچک می‌باشند ابزاری مفید در بررسی حدود شکل‌پذیری هستند که عموماً از طریق آزمون‌های تجربی ارائه شده‌اند. در این راستا، مطالعات تجربی از دو روش ناکازیما و مارسینیاک صورت پذیرفته‌اند. اما مدل‌های پیش‌بینی‌کننده‌ای نیز وجود دارند که به منظور مطالعه نظری

<sup>1</sup> Modified maximum force criterion (MMFC)

#### Please cite this article using:

A. Zajkani, A. Bandizaki, Investigation of formability limit of metallic sheets subjected to non-proportional biaxial loading based on anisotropic diffuse and vertex localized plastic instability models, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 01, pp. 211-218, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

امر نقش موثری بر شکل‌پذیری نمونه‌های تحت کشش دارد. یکی از اصلی‌ترین عوامل در شکل‌پذیری با در نظر گرفتن اثر مسیر کرنش، جهت پیش بار می‌باشد. در این جا از طریق یک فرض خطی، یک رابطه عمومی مربوط به مسیر کرنش در هر دو جهت پیشنهاد خواهد شد. به‌طور کلی، پیش بار می‌تواند در شرایط بارگذاری کشش تک محوره تا کشش دو محوره متقارن روی می‌دهد. با توجه به این که نسبت کرنش در بارگذاری متناسب به صورت  $\beta = \varepsilon_2/\varepsilon_1 = \varepsilon_2^p/\varepsilon_1^p$  می‌باشد که نسبت کرنش‌ها یا نرخ کرنش‌های اصلی دوم به اول می‌باشد، شکل کلی نسبت کرنش در بارگذاری نامتناسب به‌صورت زیر است:

$$\beta_i^p = \frac{\varepsilon_{1i} \text{ یا } \dot{\varepsilon}_{1i}}{\varepsilon_i \text{ یا } \dot{\varepsilon}_i} \quad (1)$$

از این پس، بالا نویس p مربوط به مولفه‌های پیش بار می‌باشد. همچنین در رابطه بالا، اندیس i مربوط به جهت پیش بار می‌باشد. با توجه به یک فرض خطی برای مسیر کرنش، کرنش موثر در بارگذاری نامتناسب به صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \int_0^{\varepsilon_1^p} \phi_i^p d\varepsilon_1 + \int_{\varepsilon_1^p}^{\varepsilon_1} \phi d\varepsilon_1 + \int_0^{\varepsilon_2^p} \frac{\phi_i^p}{\beta_1^p} d\varepsilon_2 + \int_{\varepsilon_2^p}^{\varepsilon_2} \frac{\phi}{\beta} d\varepsilon_2 \right) \quad (2)$$

که می‌توان نوشت:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \phi_i^p \varepsilon_1^p + \phi (\varepsilon_1 - \varepsilon_1^p) + \frac{\phi_i^p}{\beta_1^p} \varepsilon_2^p + \frac{\phi}{\beta} (\varepsilon_2 - \varepsilon_2^p) \right) \quad (3)$$

در رابطه بالا،  $\phi$  نسبت کرنش موثر به کرنش اصلی اول می‌باشد که در پیوست ارائه می‌شود. همچنین، اندیس 1 مربوط به جهت پیش کرنش در جهت بزرگ ورق می‌باشد.

### 1-1-2- پیش کرنشی در جهت بزرگ

برای اعمال پیش کرنش در جهت بزرگ، با توجه به رابطه (1)، نسبت کرنش به صورت  $\beta_1^p = \varepsilon_2^p/\varepsilon_1^p$  می‌باشد که کرنش اصلی کوچک این مسیر کرنش به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_2 = \int_0^{\varepsilon_1^p} \beta_1^p d\varepsilon_1 + \int_{\varepsilon_1^p}^{\varepsilon_1} \beta d\varepsilon_1 = \beta_1^p \varepsilon_1^p + \beta (\varepsilon_1 - \varepsilon_1^p) \quad (4)$$

بنابراین با جای‌گذاری رابطه (4) و نسبت کرنش مربوطه در (3) خواهیم داشت:

$$\bar{\varepsilon} = \phi_1^p \varepsilon_1^p + \phi (\varepsilon_1 - \varepsilon_1^p) \quad (5)$$

### 1-2-2- پیش کرنشی در جهت کوچک

با توجه به رابطه (1)، در پیش کرنشی در جهت کوچک ورق، نسبت کرنش مربوطه به صورت  $\beta_2^p = \varepsilon_1^p/\varepsilon_2^p$  خواهد بود. از این رو، نسبت‌های بارگذاری مربوطه به صورت‌ها  $\alpha_2^p = \sigma_1^p/\sigma_2^p$ ،  $Q_2^p = \bar{\sigma}^p/\sigma_2^p$  و  $\phi_2^p = \bar{\varepsilon}^p/\varepsilon_2^p$  می‌باشند که در پیوست ارائه شده‌اند. بنابراین با توجه به تعریف  $\beta_2^p = 1/\beta_1^p$  می‌توان گفت که  $\alpha_2^p = \alpha_1^p$ ،  $Q_2^p = Q_1^p$  و  $\phi_2^p = \phi_1^p$  روابط کرنش‌های مربوط به این مسیر کرنش به صورت زیر خواهند بود:

$$\int_{\varepsilon_2^p}^{\varepsilon_2} d\varepsilon_2 = \int_{\varepsilon_1^p}^{\varepsilon_1} \beta d\varepsilon_1 \quad (6)$$

که

تغییر شکل در یک لایه نازک از ورق تحت بار روی می‌دهد نیز وجود دارد که عمده مدل‌های موجود در این دسته شامل مدل هیل، نقص اولیه<sup>1</sup> و ورتکس<sup>2</sup> هستند. معیار هیل صرفاً به‌منظور پیش‌بینی گلوبی شدگی در کشش تک محوره، از طریق فرض وقوع آن در جهت عمود بر تغییر طول صفر کاربرد دارد [4]. مدل نقص اولیه یک مدل نموی می‌باشد که از طریق فرض یک شیار در محل وقوع گلوبی شدگی موضعی شده، کرنش‌های حدی در آن ناحیه را استخراج می‌کند [5]. مطالعات گسترده‌ای در زمینه بررسی نمودارهای حد شکل‌دهی بر مبنای مدل نقص اولیه صورت پذیرفته است [6-9]. مدل ورتکس یک مدل تحلیلی می‌باشد که بر مبنای نظریه تغییر شکل پلاستیسیته کلاسیک ارائه شده است [10]. مدل مذکور مزایای را نسبت به سایر مدل‌های نامبرده شامل می‌شود. در این میان، تأثیر پیش کرنش و تاریخچه بارگذاری بر نمودارهای حد شکل‌دهی اجتناب‌ناپذیر است. نمودارهای حد شکل‌دهی که ابتدا جهت استفاده در بارگذاری متناسب ارائه شده بودند، در پیش بینی حدود شکل‌دهی مربوط به بارگذاری نامتناسب نیز مورد توجه قرار گرفتند. گرف و همکاران، پیش کرنشی در دو جهت اصلی ورق را به صورت تجربی مورد بررسی قرار دادند [11]. همچنین، لی و همکاران از طریق فرض یک مسیر کرنش غیرخطی، تأثیر بارگذاری نامتناسب را بر نمودارهای حد شکل‌دهی به صورت‌های نظری و تجربی مورد مطالعه قرار دادند [12].

در این مقاله، به‌منظور مطالعه و بررسی حدود شکل‌دهی در گلوبی شدگی‌های پخشی و موضعی شده به ترتیب از معیارهای نیروی بیشینه اصلاح شده و ورتکس استفاده خواهد شد که نسبت به مدل‌های دیگر مزایایی از قبیل دقت نتایج، حل تحلیلی، در نظر گرفتن پارامترهای و اثرات فیزیکی مختلف و... را شامل می‌گردند. یکی از پارامترهای مهم در گلوبی شدگی موضعی، زاویه گلوبی شدگی می‌باشد که پیش از این از رابطه بسط صفر هیل<sup>3</sup> استفاده می‌شد. در این مطالعه از زاویه وابسته به معیار تسلیم<sup>4</sup> استفاده خواهد شد که از طریق در نظرگیری پارامترهای مختلف سبب بهبود دقت نتایج می‌گردد. جهت بررسی تأثیر مسیر کرنش و پیش بار از طریق یک فرض خطی، روابط عمومی پیشنهاد خواهد شد که پیش کرنش پلاستیک در دو جهت اصلی ورق را مدنظر قرار می‌دهد. معیار تسلیم هیل درجه دوم ما را در اعمال تأثیر ناهسانگردی بر شکل‌دهی یار می‌دهد. نهایتاً، نتایج ارائه شده توسط این مطالعه با نتایج تجربی ارائه شده توسط سایر نویسندگان اعتبارسنجی و مقایسه خواهد شد.

## 2- معادلات ساختاری

در ورق‌های تحت کشش، شکل‌دهی از طریق گلوبی شدگی محدود می‌گردد. اولین تغییر شکل عمده این نوع بارگذاری، گلوبی شدگی پخشی می‌باشد که یک تغییر شکل حجمی می‌باشد. با توسعه گلوبی شدگی پخشی و ادامه تغییر شکل، گلوبی شدگی موضعی روی می‌دهد. مطالعه گلوبی شدگی‌های بارگذاری متناسب و نامتناسب متفاوت می‌باشد که در آن جهت پیش بار مورد اهمیت است.

### 1-2- وابستگی به مسیر کرنش

بررسی‌های صورت گرفته در ارتباط با مسیر کرنش نشان می‌دهد که تأثیر این

<sup>1</sup> Initial imperfection (M-K)

<sup>2</sup> vertex

<sup>3</sup> Hill zeros extension

<sup>4</sup> Dependent to yield criterion-angle (DYC-angle)

$$E_s = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} = k\bar{\epsilon}^{n-1} \quad (16)$$

همچنین، برای دو حالت پیش بار داریم:

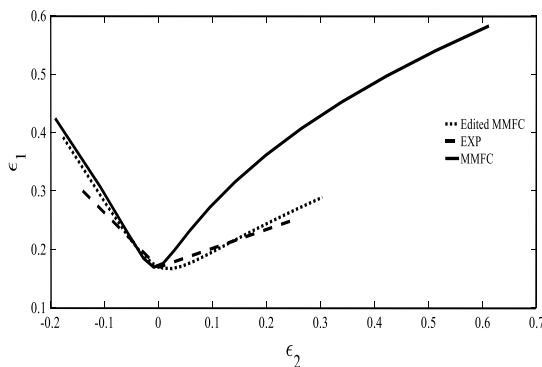
$$\frac{\partial \beta}{\partial \epsilon_1} = -\frac{(\epsilon_2 - \beta_1^p \epsilon_1^p)}{(\epsilon_1 - \epsilon_1^p)^2} = \frac{-\beta}{\epsilon_1 - \epsilon_1^p} \quad (\text{پیش کرنشی بزرگ}) \quad (17)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \epsilon_1} = -\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_2^p)}{(\epsilon_1 - \beta_2^p \epsilon_2^p)^2} = \frac{-\beta}{\epsilon_1 - \beta_2^p \epsilon_2^p} \quad (\text{پیش کرنشی کوچک}) \quad (18)$$

دو رابطه اخیر مربوط به تغییرات بارگذاری در گلوبی‌شدگی پخشی هستند که مطابق معیار نیروی بیشینه اصلاح شده، این ترم سبب صفر شدن تاثیر بارگذاری در حالت کرنش صفحه‌ای می‌شود. بررسی‌های صورت گرفته نشان می‌دهد که این ترم سبب اختلاف نتایج تجربی و نظری در سمت راست نمودارهای حد شکل‌دهی می‌گردد. ملاحظه می‌شود که یک در نظر گرفتن این ترم سبب بهبود نتایج کرنش‌های حدی ارائه شده از معیار نیروی بیشینه اصلاح شده می‌گردد. نتایج مربوط به این موضوع در "اشکال 1 و 2" ارائه شده‌اند.

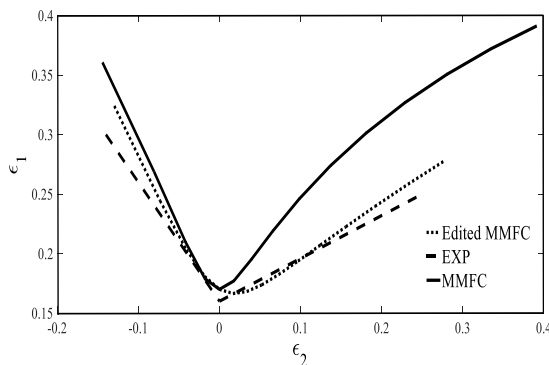
### 2-3- گلوبی‌شدگی موضعی شده

جهت پیش‌بینی گلوبی‌شدگی موضعی شده از مدل ورتکس پیشنهاد شده



**Fig. 1** Comparison of the edited MMFC and MMFC and experimental related to Al 6111 T4 [10]

شکل 1 مقایسه نتایج معیار نیروی بیشینه اصلاح شده و ویرایش آن با نتایج تجربی مربوط به Al 6111 T4 [11]



**Fig. 2** Comparison of the edited MMFC and MMFC and experimental related to DC01 [13]

شکل 2 مقایسه نتایج معیار نیروی بیشینه اصلاح شده و ویرایش آن با نتایج تجربی مربوط به DC01 [13]

$$\epsilon_2 = \epsilon_2^p + \beta(\epsilon_1 - \beta_2^p \epsilon_2^p) \quad (7)$$

همچنین با جای‌گذاری رابطه بالا و نسبت کرنش مربوطه در (3) خواهیم داشت:

$$\bar{\epsilon} = (\phi_2^p - \beta_2^p \phi) \epsilon_2^p + \phi \epsilon_1 \quad (8)$$

روابط بالا، یک شکل کلی از معادلات ساختاری مربوط به مسیر کرنش در هر دو جهت کوچک و بزرگ می‌باشند که از طریق یک فرض مسیر کرنش خطی پیشنهاد شده‌اند. جای‌گذاری روابط مربوطه در معیارهای پیش‌بینی کننده ناپایداری پلاستیک، نتایج مربوط به نمودارهای حد شکل‌دهی بارگذاری نامتناسب را در اختیار ما قرار می‌دهند.

### 2-2- گلوبی‌شدگی پخشی

گلوبی‌شدگی پخشی برای اولین بار توسط کانسیدر برای کشش تک محوره از طریق فرض نیروی بیشینه مورد بررسی قرار گرفت [1]. او با تفکیک تغییرشکل‌های پایدار و ناپایدار پلاستیک تقابل سخت‌شوندگی با ازدیاد تنش را مورد توجه قرار داد. پس از او، سوئیفت بر مبنای مطالعات کانسیدر، معیار نیروی بیشینه را ارائه کرد. اما نقایص موجود در این مدل سبب توسعه مدل‌های پیشین و ارائه معیار نیروی بیشینه اصلاح شده گشت که علاوه بر تاثیر سخت‌شوندگی، تاثیر تغییرات بارگذاری را نیز مورد توجه قرار داد. نیروی بیشینه اصلاح شده به صورت زیر است:

$$dF_1 = d(\sigma_1 A_1) = d\sigma_1 A_1 + \sigma_1 dA_1 = 0 \quad (9)$$

از طرفی، مطابق معیار نیروی بیشینه اصلاح شده، در اثر تقابل ازدیاد تنش ناشی از کاهش سطح مقطع و کرنش سختی، یک نمو کرنش اضافی ایجاد می‌گردد که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$d\sigma_1 = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \epsilon_1} d\epsilon_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} d\beta \quad (10)$$

با استفاده از روابط (9)، (10)، بیان ریاضیاتی این معیار به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \epsilon_1} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \epsilon_1} \geq \sigma_1 \quad (11)$$

در رابطه بالا، ترم اول مربوط به اثر سخت‌شوندگی و ترم دوم مربوط به اثرات بارگذاری و وقوع گلوبی‌شدگی پخشی در حالت کرنش صفحه‌ای می‌باشد که این رابطه، توسعه یافته مدل سوئیفت است. به عبارتی می‌توان گفت که در ترم اول، عبارات مربوط به بارگذاری و در ترم دوم، عبارات مربوط به تنش اعمالی و سخت‌شوندگی ثابت هستند. جهت در نظرگیری اثر سخت‌شوندگی از رابطه توانی کرنش سختی استفاده می‌شود که:

$$\bar{\sigma} = k\bar{\epsilon}^n \quad (12)$$

در رابطه بالا،  $k, n$  ثوابت ماده هستند. بنابراین با توجه به دو رابطه اخیر می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \epsilon_1} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \epsilon_1} = \phi^2 E_t \quad (13)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\bar{\sigma}}{Q} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = -\frac{\bar{\sigma}}{Q^2} \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \quad (14)$$

که

$$E_t = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}} = nk\bar{\epsilon}^{n-1} \quad (15)$$

زیر می‌باشد:

$$Z_{ijij} = \frac{E_s}{3} (\varepsilon_i - \varepsilon_j) \coth(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \quad (29)$$

با جای گذاری روابط (25) (29) - (24) می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

اما یکی از پارامترهای مهم و تعیین کننده در گلوئی‌شدگی موضعی شده، زاویه گلوئی‌شدگی می‌باشد که در بسیاری از مطالعات از زاویه بسط صفر هیل استفاده شده است که به صورت زیر می‌باشد:

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{n_2}{n_1} \right) = \tan^{-1} \sqrt{-\beta} \quad (31)$$

این رابطه در مطالعات مختلف، به صورت‌های مختلفی استخراج شده است [14]. این رابطه تنها وابستگی به نسبت بارگذاری را در نظر می‌گیرد که در مقابل زاویه وابسته به معیار تسلیم اختلاف بیشتری را با نتایج تجربی دارد. زاویه وابسته به معیار تسلیم با در نظر گرفتن اثرات ناهمسانگردی و معیار تسلیم و نرخ تغییر شکل، دقت قابل قبولی را به نمودارهای حد شکل‌دهی می‌بخشد [15]. این زاویه به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\theta = \tan^{-1}(\alpha) \quad (32)$$

نهایتاً، با جای‌گذاری روابط مربوط به پیش‌کرنش در دو مدل نیروی بیشینه اصلاح شده و ورتکس، تاثیر بارگذاری نامتناسب بر گلوئی‌شدگی‌های پخشی و موضعی شده مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

### 3- بحث و نتایج

در این مقاله، پیش‌بینی مقادیر کرنش‌های حدی گلوئی‌شدگی‌های پخشی و موضعی شده در بارگذاری نامتناسب در دستور کار قرار گرفت. به منظور پیش‌بینی گلوئی‌شدگی‌های پخشی و موضعی شده به ترتیب از معیارهای نیروی بیشینه اصلاح شده و ورتکس استفاده شده است که به بررسی تاثیر نسبت بارگذاری در سمت راست نمودارهای حد شکل‌دهی در معیار نیروی بیشینه اصلاح شده نیز پرداخته شد. همچنین، با استفاده از زاویه وابسته به معیار تسلیم به جای زاویه بسط صفر هیل، بهبود نتایج حد شکل‌دهی ارائه شده مشهود می‌باشد. جهت اعمال مسیر کرنش، از یک فرض خطی مسیر کرنش در پیشنهاد رابطه عمومی پیش‌بار در هر جهت از ورق استفاده شد. تاثیر ناهمسانگردی و معیار تسلیم نیز توسط هیل درجه دوم مورد بررسی قرار گرفت و نهایتاً، نتایج ارائه شده با نتایج تجربی سایر نویسندگان بررسی و اعتبارسنجی شد. در گلوئی‌شدگی پخشی در شرایط کرنش صفحه‌ای، توان کرنش سختی به صورت  $n = \bar{\varepsilon} / (Q \cdot \phi^2)$  می‌باشد که جهت اعتبارسنجی گلوئی‌شدگی پخشی از مرجع [11] استفاده می‌شود. همچنین، برای گلوئی‌شدگی موضعی شده از ماده‌ای با مشخصات  $n = 0.182$ ,  $r = 1.18$  در مرجع [12] استفاده می‌شود.

در این‌جا، مطالعه پیش‌کرنش از دو منظر مورد توجه قرار می‌گیرد. یکی بحث در مورد تاثیر تاریخچه بارگذاری بر نمودارهای حد شکل‌دهی و دیگری بررسی چگونگی میزان بهبود شکل‌پذیری و افزایش کرنش‌های حدی مربوط به این امر است. اعمال پیش‌کرنش تحت شرایط مختلف، نتایج گوناگونی را شامل می‌گردد. از عوامل مهم در این امر، نوع بارگذاری و جهت آن می‌باشد. همان‌گونه که در نتایج ارائه شده در "اشکال 3-7" مشهود می‌باشد، پیش‌کرنش در جهت بزرگ سبب افزایش و بهبود شکل‌پذیری و پیش‌کرنش در

توسط اشتورن و رایس استفاده خواهد شد که بر مبنای تئوری تغییر شکل پلاستیسیته کلاسیک ارائه شده است [10]. فرض اصلی این مدل، پیوستگی تغییر شکل در خارج از لایه گلوئی‌شدگی و ناپیوستگی نرخ تغییر شکل در لایه گلوئی‌شدگی می‌باشد. از این‌رو، تغییرات سرعت داخل و خارج لایه به صورت رابطه (19) بیان خواهد شد:

$$\begin{aligned} \Delta v_i &= v_{i, \text{localized}} - v_{i, \text{diffusion}} \\ &= v_{i, \text{inside}} - v_{i, \text{outside}} \end{aligned} \quad (19)$$

همچنین، با توجه به دگرگونی گرین و ناپیوستگی تغییر شکل در داخل لایه گلوئی‌شدگی می‌توان گفت:

$$\iiint_V \nabla_j (\Delta v_i) dV = \iint_A g'_i n_j dA = g_i n_j \quad i, j = 1, 2 \quad (20)$$

که،  $g_i$  و  $n_j$  به ترتیب بردار یک  $(n_1 = \cos \theta, n_2 = \sin \theta)$  و تابع نرخ تغییر شکل مربوط به لایه گلوئی‌شدگی هستند. همچنین،  $g'_i$  مشتق  $g_i$  می‌باشد. از طرفی با توجه به تعریف کرنش اوپلری و بخش متقارن از نرخ تانسور تغییر شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\Delta v_{i,j} + \Delta v_{j,i}) = \frac{1}{2} (g_i n_j + g_j n_i) \quad ; i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (21)$$

در رابطه بالا،  $\varepsilon_{ij}$  تانسور نرخ کرنش می‌باشد. همچنین، باتوجه به شکل عمومی معادله تعادل و ناپیوستگی نرخ تغییر شکل در لایه گلوئی‌شدگی، برای نرخ تعادل در آن لایه می‌توان نوشت:

$$\nabla_t \cdot (\nabla_i (\sigma_{ii} h) + \nabla_j (\sigma_{ij} h)) = 0 \quad (22)$$

در رابطه بالا،  $h$  ضخامت ورق می‌باشد. در رابطه بالا تمامی تنش‌های احتمالی موجود در لایه گلوئی‌شدگی در نظر گرفته شده است. چرا که تضمینی در عدم وجود برش در المان‌های لایه پس از آغاز گلوئی‌شدگی وجود ندارد. اما، مطالعات صورت گرفته توسط ژو و همکاران نشان می‌دهد که باید از برش‌ها صرف‌نظر گردد که مطابق آن، رابطه بالا به صورت زیر در می‌آید [14]:

$$\begin{cases} \Delta \dot{\sigma}_1 - \sigma_1 (g_1 n_1 + g_2 n_2) = 0 \\ \Delta \dot{\sigma}_2 - \sigma_2 (g_1 n_1 + g_2 n_2) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

در رابطه بالا  $\dot{\sigma}_{ij}$  نرخ تنش می‌باشد. فرض اصلی این مدل، وقوع گلوئی‌شدگی موضعی شده در لحظه صفر شدن نرخ ترکشن اسمی می‌باشد که:

$$\Delta \dot{T}_{ij} = n_i (\sigma_{ij}^j + \sigma_{in} \Delta v_{j,n} - (\sigma_{in} \varepsilon_{jn} + \sigma_{jn} \varepsilon_{in})) \quad (24)$$

باتوجه به فرض دوران صلب المان‌های تحت تغییر شکل در لایه گلوئی‌شدگی از نرخ جاومن استفاده می‌شود:

$$\sigma_{ij}^j = \dot{\sigma}_{ij} + W_{ni} \sigma_{nj} + \sigma_{in} W_{nj} \quad (25)$$

که تانسور چرخش آن به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$W_{ni} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_n - \nabla_n v_i) \quad (26)$$

اما به منظور برقراری ارتباط میان نرخ‌های تنش و کرنش از مدول‌های آنی استفاده خواهد شد که برای آن می‌توان نوشت:

$$\sigma_{ij}^j = L_{ijkl} \nabla_l v_k \quad (27)$$

که  $L_{ijkl}$  مدول آنی می‌باشد که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} L_{ijkl} &= \frac{2}{3} E_s \left[ \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \\ &\quad - (E_s - E_t) \frac{\sigma_{ij} \sigma_{kl}}{\bar{\sigma}^2} + Z_{ijkl} \end{aligned} \quad (28)$$

که  $\delta_{ik}$  دلتای کرونگر می‌باشد و مولفه برشی مربوط به مدول آنی به صورت

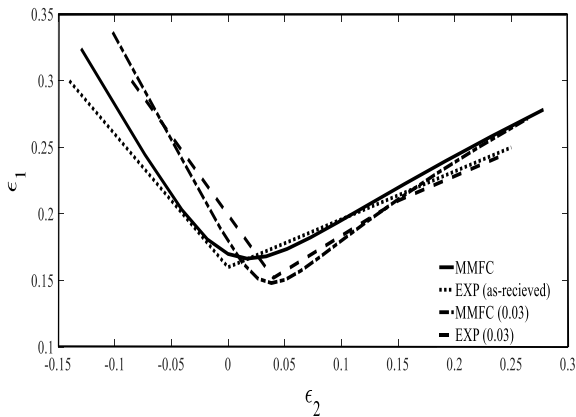


Fig. 5 Comparison of the experiment and MMFC results in the equibiaxial pre-straining[11]

شکل 5 مقایسه نتایج معیار نیروی بیشینه و تجربی در پیش کرنش دو محوره متقارن [11]

حالت پیش بار کشش دو محوره متقارن نیز مانند پیش بار در جهت کوچک، نتایج مناسبی ارائه نمی‌کند (شکل 5) را ببینید) و سبب تضعیف شکل‌پذیری می‌گردد. در این حالت، نمودارهای حد شکل‌دهی بارگذاری نامتناسب به سمت پایین و راست این نمودارها جابجا می‌شوند. اما، دقیقاً برعکس پیش بار در جهت بزرگ ورق، پیش بار در جهت کوچک سبب تضعیف شکل‌پذیری گشته که بدترین اثر مربوط به پیش بار کشش تک محوره می‌باشد (شکل 6).

در هر دو حالت پیش بار کشش تک محوره و کرنش صفحه‌ای، نمودارهای حد شکل‌دهی با تغییر عرضی و طولی ناچیز به سمت راست و پایین نمودارها جابجایی می‌شوند. اما، پیش بار در جهت بزرگ کرنش صفحه‌ای و کشش تک محوره بیشترین اثر را بر سمت راست نمودارهای حد شکل‌دهی دارند. اما در سایر حالات، این اثر تقریباً یکسان است.

در بررسی پیش بار در گلوبی‌شدگی موضعی شده، نتایج ارائه شده در "اشکال 8-12" در هر دو جهت مشابه گلوبی‌شدگی پخشی می‌باشد. به طوری که، بهترین تاثیر پیش بار بر کشش تک محوره و بعد از آن کرنش صفحه‌ای در جهت بزرگ می‌باشد. تاثیر قابل توجه پیش بار در جهت بزرگ بر سمت راست نمودارهای حد شکل‌دهی کاملاً مشهود می‌باشد. در جهت کوچک نیز نمودارهای حد شکل‌دهی بدون تغییر عرضی و طولی به سمت

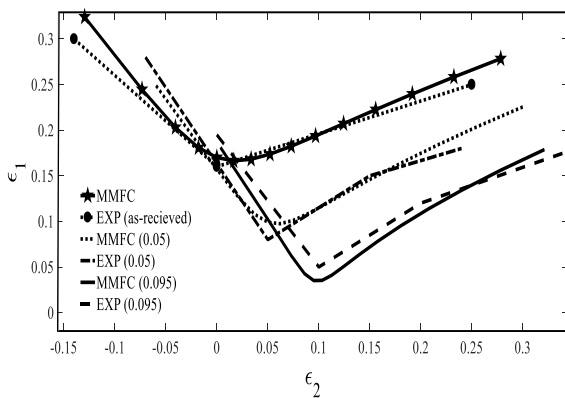


Fig. 6 Comparison of the experiment and MMFC results in the Uniaxial pre-straining at the minor direction[11]

شکل 6 مقایسه نتایج معیار نیروی بیشینه و تجربی در پیش کرنش کشش تک محوره در جهت کوچک [11]

جهت کوچک سبب کاهش شکل‌پذیری می‌گردد. تقویت و تضعیف شکل‌پذیری به ترتیب در پیش کرنش جهت‌های بزرگ و کوچک به تغییرات در ریز ساختار ورق‌ها برمی‌گردد. به طوری که، عموماً کار پلاستیک سبب ریز دانه شدن نمونه و نهایتاً تقویت آن می‌گردد. اما، در چرایی تفاوت نتایج مربوط به جهت پیش‌بار، می‌توان به جهت‌گیری دانه‌ها اشاره داشت. به طور کلی، جهت‌گیری دانه‌ها در راستای پیش بار اعمالی می‌باشد و طبق یک نتیجه کلی، شکل‌پذیری در جهت دانه‌ها بهترین نتایج را دارد. این موضوع برای جهت عمود بر جهت دانه‌های عکس می‌باشد. به همین علت، شکل‌پذیری در پیش کرنشی در جهت بزرگ ورق افزایش می‌یابد. جزئیات بیشتر در مورد ریز ساختار نمونه تحت کار پلاستیک در [16] موجود است. اما در بررسی نتایج پیش بار جهت بزرگ بر گلوبی‌شدگی پخشی می‌توان گفت که، مطابق "شکل 3" پیش بار در کشش تک محوره سبب کاهش عرضی نمودارهای حد شکل‌دهی و حرکت آن‌ها به سمت چپ و بالای این نمودارها می‌باشد. این حالت بهترین تاثیر را در میان شرایط مختلف پیش بار دارد. اما، مطابق "شکل 4"، در حالت پیش بار کرنش صفحه‌ای، کاهش عرضی کمتری در نمودارهای حد شکل‌دهی روی می‌دهد و متعاقباً کرنش‌های حدی بزرگ آن در مقادیر بزرگتری روی می‌دهند و نمودارها به سمت بالا حرکت می‌کنند.

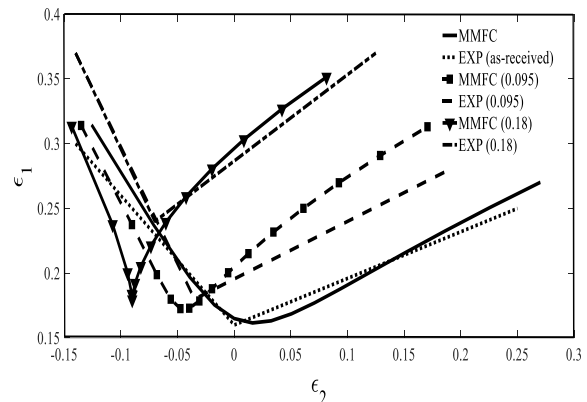


Fig. 3 Comparison of the experiment and MMFC results in the uniaxial pre-straining at the major direction [11]

شکل 3 مقایسه نتایج معیار نیروی بیشینه و تجربی در پیش کرنش کشش تک محوره در جهت بزرگ [11]

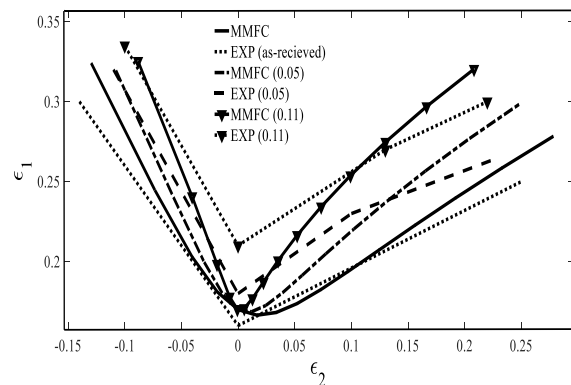
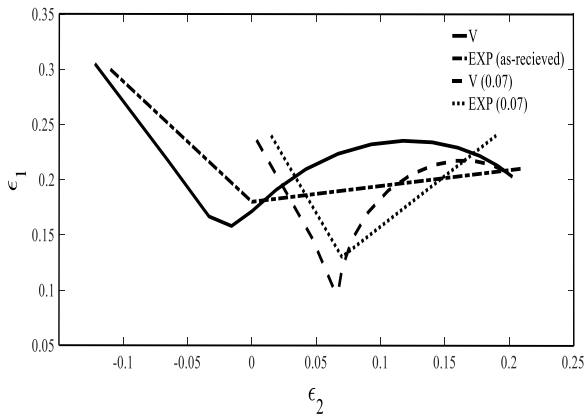


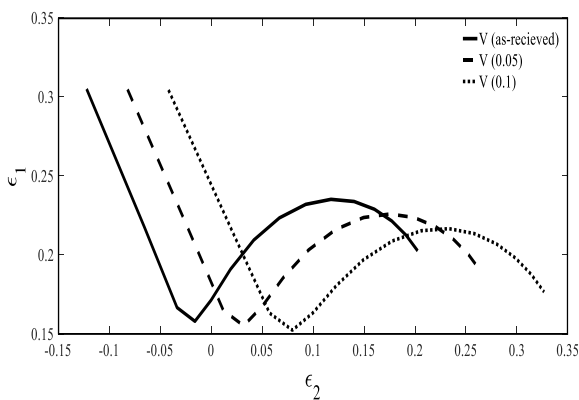
Fig. 4 Comparison of the experiment and MMFC results in the plane strain pre-straining at the major direction[11]

شکل 4 مقایسه نتایج معیار نیروی بیشینه و تجربی در پیش کرنش کرنش صفحه‌ای در جهت بزرگ [11]



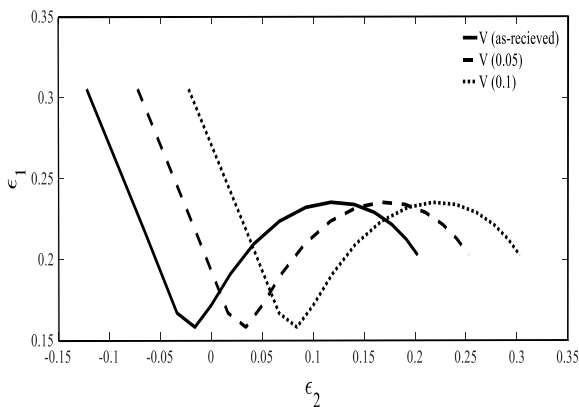
**Fig. 10** Comparison of the experiment and vertex results in the equi-biaxial pre-straining[12]

شکل 10 مقایسه نتایج مدل ورتکس و تجربی در پیش کرنش دو محوره متقارن [12]



**Fig. 11** The theoretical results of the vertex in the Uniaxial pre-straining at the minor direction[12]

شکل 11 نتایج نظری مدل ورتکس پیش کرنش کشش تک محوره در جهت کوچک [12]

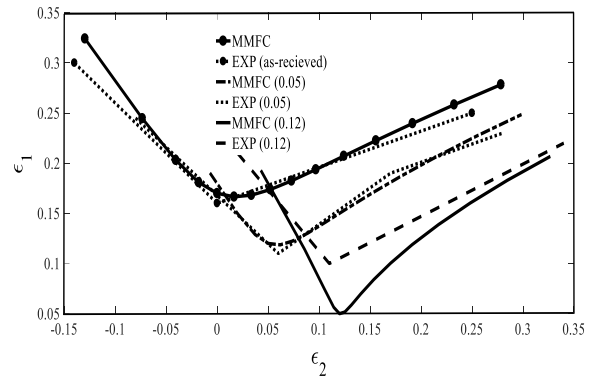


**Fig. 12** The theoretical results of the vertex in the plane strain pre-straining at the minor direction [12]

شکل 12 نتایج نظری مدل ورتکس پیش کرنش کشش صفحه‌ای در جهت کوچک [12]

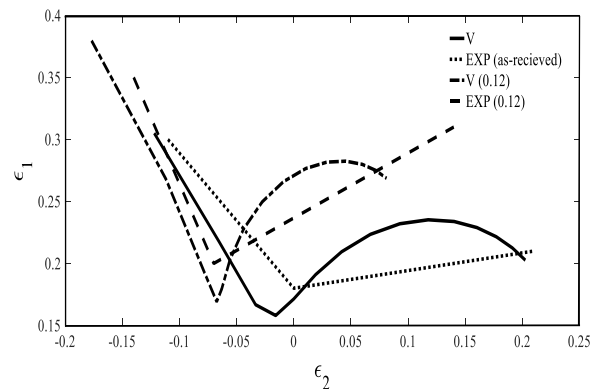
#### 4- نتیجه گیری

بررسی نمودارهای حد شکل‌دهی وابسته به مسیر کرنش، برای هر دو جهت پیش بار و گلوبی‌شدگی‌های پخشی و موضعی شده مورد توجه قرار گرفت که یک فرض مسیر کرنش خطی، اساس روابط ساختاری عمومی پیش کرنش قرار گرفت. در این بین ملاحظه گشت که تاثیر پیش بار و کار پلاستیک بر



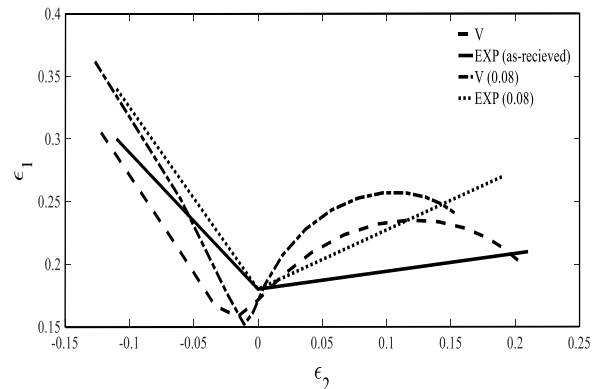
**Fig. 7** Comparison of the experiment and MMFC results in the plane strain pre-straining at the minor direction[11]

شکل 7 مقایسه نتایج معیار نیروی بیشینه و تجربی در پیش کرنش صفحه‌ای در جهت کوچک [11]



**Fig. 8** Comparison of the experiment and vertex results in the Uniaxial pre-straining at the major direction[12]

شکل 8 مقایسه نتایج مدل ورتکس و تجربی در پیش کرنش کشش تک محوره در جهت بزرگ [12]



**Fig. 9** Comparison of the experiment and vertex results in the plane strain pre-straining at the major direction[12]

شکل 9 مقایسه نتایج مدل ورتکس و تجربی در پیش کرنش کشش صفحه‌ای در جهت بزرگ [12]

راست حرکت می‌کنند. این نتایج نشان می‌دهند که تاثیر مسیر کرنش در گلوبی‌شدگی پخشی بیشتر از گلوبی‌شدگی موضعی شده می‌باشد. این موضوع برای هر دو جهت پیش بار در تقویت و تضعیف شکل‌پذیری صادق می‌باشد. اما، در یک بیان کلی، پیش بار در جهت بزرگ ورق سبب افزایش شکل‌پذیری به خصوص در سمت راست نمودارهای حد شکل‌دهی می‌گردد که این امر در کشش تک محوره بیشتر از کرنش صفحه‌ای می‌باشد.

$\varepsilon_{ij}$  نرخ تانسور کرنش  
 $\varepsilon_w$  کرنش عرضی  
 $\varepsilon_t$  کرنش ضخامتی

### 6- پیوست

در این بخش، با به کارگیری قانده جریان در تنش‌های تسلیم هیل درجه دوم، ضرایب بارگذاری مورد محاسبه قرار می‌گیرند. فرض اصلی این معیار تسلیم، هم محوری محورهای ناهسانگردی و محورهای اصلی می‌باشد. بنابراین:

$$|\sigma_1 + \sigma_2|^2 + (1 + 2R)|\sigma_1 - \sigma_2|^2 = 2(1 + R)\bar{\sigma}^2 \quad (6.1)$$

با فرض همسانگردی در صفحه، ضریب ناهسانگردی به دست آمده از آزمون کشش تک محوره به صورت زیر است:

$$R_\theta = \frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_t} \quad (6.2)$$

که در رابطه بالا،  $\varepsilon_t$  و  $\varepsilon_w$  به ترتیب کرنش عرضی و ضخامتی می‌باشد.

$$R = \frac{R_0 + 2R_{45} + R_{90}}{4} \quad (6.3)$$

برای انرژی کرنشی داریم:

$$\int_V \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon} = \int_V \sigma_i d\varepsilon_i \quad (6.4)$$

با استفاده رابطه (6.4)-(6.1) خواهیم داشت:

$$\frac{\varepsilon_1}{\bar{\varepsilon}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) + (1 + 2R)(\sigma_1 - \sigma_2)}{2(R + 1)\bar{\sigma}}$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\bar{\varepsilon}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) - (1 + 2R)(\sigma_1 - \sigma_2)}{2(R + 1)\bar{\sigma}} \quad (6.5)$$

که با استفاده از رابطه بالا و معیار تسلیم داریم:

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\beta(1 + R) + R}{R(\beta + 1) + 1}$$

$$Q = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_1} = \left( \frac{(1 + \alpha)^2 + (1 + 2R)(1 - \alpha)^2}{2(R + 1)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi = \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_1} = \frac{Q(R + 1)}{(R + 1) - R\alpha} \quad (6.6)$$

### 7- مراجع

- [1] M. Considère, L'emploi du fer et de l'acier dans les constructions, *Ann. des ponts chaussées*, Vol. 1, pp. 574-775, 1885.
- [2] H. W. Swift, Plastic instability under plane stress, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 1, No. 1, pp. 1-18, 1952.
- [3] P. Hora, L. Tong, B. Berisha, Modified maximum force criterion, a model for the theoretical prediction of forming limit curves, *International Journal of Material Forming*, Vol. 6, No. 2, pp. 267-279, 2013.
- [4] R. Hill, On discontinuous reference plastic states, with special to localized necking in thin sheets, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 1, No. 2, pp. 19-30, 1952.
- [5] Z. Marciniak, K. Kuczyński, Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 9, No. 9, pp. 609IN1613-612IN2620, 1967.
- [6] M. Aghaie-Khafri, R. Mahmudi, Predicting of plastic instability and forming limit diagrams, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 46, No. 9, pp. 1289-1306, 2004.
- [7] M. Hosseinpour Gollo, S.M.H. Seyedkashi, N. Valian Iraj, The effects of Hosford, Hill's quadratic and non-quadratic yield criteria on prediction of

گلوبی شدگی پختی بیشتر از گلوبی شدگی موضعی شده می‌باشد. با اعمال پیش کرنش پلاستیک در جهت بزرگ ورق، کرنش‌های حدی مقادیر بزرگتری خواهند داشت که تاثیر آن‌ها بر سمت راست نمودارهای حد شکل‌دهی بیشتر از سمت چپ آن است. همچنین، در میان بارگذاری‌های پیش بار، کشش تک محوره بهترین نتیجه را دارد. حالت پیش بار کرنش صفحه ای نیز نتایج مناسبی را ارائه می‌کنند. عموماً، پیش بار کشش دو محوره مقارن و پیش بار در جهت کوچک سبب کاهش ظرفیت شکل‌پذیری گشته و نتایج آن‌ها عکس نتایج پیش بار در جهت بزرگ ورق می‌باشد.

### 5- فهرست علائم

$A_1$	سطح مقطع عمود بر جهت اصلی اول
$E_s$	مدول قاطع
$E_t$	مدول مماسی
$F_1$	نیروی اصلی اول
$g_{ij}$	تانسور وابسته به نرخ تغییر شکل
$g'_{ij}$	تانسور وابسته به تغییر شکل
$G_{ij}$	تانسور معادله ورتکس
$h$	ضخامت ورق
$k$	ثابت سخت شوندگی ماده
$L_{ij}$	تانسور مدول آنی
$n$	ضریب کرنش سختی
$n_i$	بردار یکه مربوط به لایه گلوبی شدگی موضعی شده
$Q$	نسبت تنش موثر بر تنش اصلی اول
$Q^{pre}$	نسبت تنش موثر بر تنش اصلی اول مربوط به پیش بار
$R$	ضریب ناهمسانگردی معادل
$R_{ij}$	بردار ضریب ناهمسانگردی
$\dot{T}_{ij}$	بردار نرخ ترکشن اسمی
$v_i$	بردار سرعت
$W_{ij}$	تانسور دوران یا چرخش
$Z_{ij}$	تانسور مدول آنی برشی

### علائم یونانی

$\sigma_{ij}$	تانسور تنش
$\varepsilon_{ij}$	تانسور کرنش
$\varepsilon_{ij}^{pre}$	تانسور پیش کرنش
$\bar{\sigma}$	تنش موثر
$\bar{\varepsilon}$	کرنش موثر
$\beta$	نسبت کرنش‌های اصلی کوچک به بزرگ
$\beta^{pre}$	نسبت کرنش‌های اصلی کوچک به بزرگ مربوط به پیش بار
$\alpha$	نسبت تنش‌های اصلی کوچک به بزرگ
$\alpha^{pre}$	نسبت تنش‌های اصلی کوچک به بزرگ مربوط به پیش بار
$\delta_{ij}$	تانسور دلتای کرونگر
$\phi$	نسبت کرنش موثر به کرنش اصلی اول
$\phi^{pre}$	نسبت کرنش موثر به کرنش اصلی اول مربوط به پیش بار
$\theta$	زاویه گلوبی شدگی موضعی شده
$\dot{\sigma}_{ij}$	نرخ تانسور تنش
$\dot{\sigma}_{ij}^I$	تانسور تنش نرخ جاومن

- Journal of Material Forming*, pp. 1–13, 2017.
- [13] D. S. Comsa, G. Dragos, L. Paraiianu, D. Banabic, Prediction of the forming limit band for steel sheets using a new formulation of hourglass criterion (MMFC), *American Institute physics, International Confrence on Advances in Materials and Proccesing Technology*, Vol. 1315, No. 1, pp. 425–431, 2011.
- [14] X. Zhu, K. Weinmann, A. Chandra, A unified bifurcation analysis of sheet metal forming limits, *Journal of Engineering Material Technology*, Vol. 123, No. 3, pp. 329, 2001.
- [15] A. Zajkani, A. Bandizaki, An efficient model for diffusion to localized necking evolution in rate dependent bifurcation analysis of metallic sheets, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 58, No. 7, pp. 794–803, 2017.
- [16] M. W. Fu, W. L. Chan, *Micro-scaled Products Development via Microforming*, Springer series in advanced manufacturing, Springer, London. Vol. 10, No. 1007, pp. 978-1, 2014.
- forming limit diagrams based on MK Model, *Modares Mechecanical Engineering*, Vol. 14, No. 5, pp. 137-146, 2014 (In Persian)
- [8] M. Saradar, A. Basti, M. Zaeimi, Numerical study of the effect of strain rate on damage prediction by dynamic forming limit diagram in high velocity sheet metal forming, *Modares Mechecanical Engineering*, Vol. 14, No. 16, pp. 212–222, 2015. (In Persian فارسی)
- [9] R. Hashemi, K. Abrinia, Analysis of the extended stress-based forming limit curve considering the effects of strain path and through-thickness normal stress, *Material and Design*, Vol. 54, No. 1, pp. 670–677, 2014.
- [10] S. Stören, J. R. Rice, Localized necking in thin sheets, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 23, No. 6, pp. 421–441, 1975.
- [11] A. Graf, W. Hasford, The influence of strain-path changes on forming limit diagrams of al 6111 t4, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 36, No. 10, pp. 897–910, 1994.
- [12] H. Li, G. Li, G. Gao, W. Zhang, X. Wu, A formability evaluation method for sheet metal forming with non-linear strain path change, *International*