



تعیین حد ناپایداری هیدرودینامیکی در جریان دوفازی با استفاده از مدل PFM

بهزاد فرامرزی^۱، محمد رضا انصاری^{۲*}

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
۲- دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
* تهران، صندوق پستی ۱۴۱۱۷۱۳۱۱۶. mra_1330@modares.ac.ir

چکیده- به دلیل کاربرد فراوان جریان‌های دوفازی در صنایع هسته‌ای، نیروگاهی، خطوط انتقال نفت و گاز، تحلیل این نوع جریان‌ها در چند دهه اخیر مورد توجه قرار گرفته است. در چند سال اخیر مدل‌های مختلفی معرفی شده که به کمک آن‌ها می‌توان جریان‌های دوفازی را با روش‌های عددی تحلیل کرد. پرکاربردترین و دقیق‌ترین این مدل‌ها در پیش‌بینی رژیم‌های مختلف جریان دوفازی در کانال و محدوده ناپایدار شدن جریان، مدل دوسیالی می‌باشد. در این تحقیق به هیپربولیک بودن یا نبودن مدل PFM^۱ پرداخته شده و معادلات براساس مدل دوسیالی نوشته می‌شود، هیپربولیک بودن مدل از این نظر مهم است که در صورت هیپربولیک بودن معادلات، مدل خوشرفتار است، در غیر این صورت بدرفتار است و حل عددی در صورت ریز کردن شبکه محاسباتی دچار ناپایداری غیرفیزیکی می‌شود. در این پژوهش همچنین، به کمک مدل PFM حد ناپایداری هیدرودینامیکی در مرز مشترک در جریان دوفاز گاز- مایع محاسبه شده است.

کلیدواژگان: جریان‌های دوفازی، خوشرفتاری و بدرفتاری، کلون هلمهلتز

Hydrodynamic Instability Criterion of Two-Phase Flow Using PFM Model

B. Faramarzi¹, M. R. Ansari^{2*}

1-M. Sc. student, Mech. Eng., TarbiatModares Univ., Tehran

2- Assoc. Prof. of Mech. Eng., TarbiatModares Univ. Tehran

*P.O.B. 1411713116, Tehran, Iran. mra_1330@modares.ac.ir

Abstract-Applications of two-phase flow in nuclear power plants, transmission lines, oil and gas have been considered in recent decades. Different models have been introduced that can contribute to the current two-phase flow approach to numerical analysis. Two-fluid model is the most widely used and most accurate model for predicting two-phase flow in channels during different regimes of unstable flow. This study addressed the PFM model Hyperbolicity. Hyperbolicity of this model is the most important for the well-posed condition; otherwise the model is ill-posed condition and the results are unstable numerically. Hydrodynamic instability of two-phase gas-liquid by using the PFM model is calculated and discussed.

Keywords: Two Phase Flows, Well Posed & Ill Posed, Kelvin-Helmholtz

1. Pressure Free Model

۱- مقدمه

مطالعه جریان دوفازی از جنبه‌های گوناگونی حائز اهمیت است. از این نوع جریان‌ها در فناوری‌های هسته‌ای و به طور خاص در مولدهای بخار هسته‌ای، بخارسازهای نیروگاهی، بویلرها، کندانسورها، سیستم‌های سردساز و مبدل‌های حرارتی، خطوط انتقال نفت و گاز، سکوی نفتی، سیستم‌های تهویه مطبوع و سیستم‌های بازیابی هیدروکربن در صنایع انتقال نفت و گاز استفاده می‌شود. در این سیستم‌ها، تعیین دقیق حداکثر محدوده‌ای که سیستم به‌صورت ایمن می‌تواند کار کند، بسیار ضروری است. بنابراین در مطالعه ناپایداری هیدرودینامیکی، مطالعه جریان‌های دوفازی در تحلیل ایمنی سیستم از اهمیت زیادی برخوردار است.

ناپایداری هیدرودینامیکی، برای مثال بر اثر جریان اسلاگ که به‌صورت متناوب در درون لوله شکل می‌گیرد، باعث وارد شدن باری متغیر به جدار لوله‌های انتقال می‌شود. همچنین این جریان در خروجی لوله‌ها به دستگاه‌های دریافت کننده جریان مانند جداکننده^۱ وارد شده و باعث صدمه دیدن دستگاه‌ها می‌شود. برای جلوگیری از این اتفاق، مساله ناپایداری مربوط به سطح مشترک باید بررسی شود که در جریان‌های چند فازی به نام ناپایداری کلون-هلمهولتز شناخته می‌شود. در تمامی صنایع یادشده رخ دادن اسلاگ در درون لوله اثر منفی بر سیستم دارد و بنابراین مطالعه ناپایداری در سطح مشترک جریان لایه‌ای^۲ از نظر طراحی و کارکرد خطوط لوله اهمیت بالایی دارد.

پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای از نظر تئوری در زمینه ناپایداری در مرز مشترک جریان حاصل شده است. تحلیل غیر-لزوج ناپایداری در مرز مشترک کلون-هلمهولتز اولین بار برطبق رابطه کلاسیک میلن-تامسون^۳ (۱۹۶۸) مطرح شد، که از رابطه زیر نتیجه می‌شود [۱]:

$$u_G - u_L \geq \sqrt{\frac{\rho_L - \rho_G}{\rho_G} \cdot g \cdot h_G} \quad (۱)$$

1. Separator
2. Stratified
3. Milne-Thomson

با انجام آزمایش‌های دقیق‌تر، والیس و دابسون^۴ (۱۹۷۳) متوجه شدند که حد ناپایداری تعیین شده توسط رابطه کلاسیک کلون-هلمهولتز تقریباً دو برابر مقدار آزمایشگاهی است [۲].

تایتل و داکلر^۵ (۱۹۷۶) مدل تئوری زیر را پیشنهاد کردند که انتقال رژیم جریان را مشخص می‌کند [۳]:

$$u_G > \left(1 - \frac{h_L}{D}\right) \sqrt{\frac{(\rho_L - \rho_G) \cdot g \cdot \cos \beta}{\rho_G} \cdot \frac{A_G}{dA_L/dh_L}} \quad (۲)$$

میشیما و ایشی^۶ (۱۹۸۰) برای حالتی که اختلاف چگالی دو فاز زیاد باشد و با صرف نظر کردن از کشش سطحی، مدل زیر را ارائه کردند [۴]:

$$u_G - u_L \geq 0.48 \sqrt{\frac{\rho_L - \rho_G}{\rho_G} \cdot g \cdot h_G} \quad (۳)$$

بارنی و تایتل^۷ (۱۹۹۴) بر اساس تحلیل خطی کلون-هلمهولتز حد ناپایداری را برای هر دو حالت لزج^۸ و غیر لزج^۹ با استفاده از مدل دو سیالی زیر به‌دست آوردند [۵]:

$$u_G - u_L > k \cdot \sqrt{(\rho_L \alpha_G + \rho_G \alpha_L) \frac{\rho_L - \rho_G}{\rho_L \rho_G} \cdot g \cdot \cos \beta \cdot \frac{A}{dA_L/dh_L}} \quad (۴)$$

که K برای حالت غیر لزج برابر ۱ است.

عیسی و کمف^{۱۰} (۲۰۰۲) با استفاده از نوعی مدل دو سیالی، ناپایداری هیدرودینامیکی جریان اسلاگ را در لوله‌های افقی و با شیب کم به روش عددی مدل‌سازی نمودند. در روش حل آنان اثر تغییر فشار سطح مشترک به طور کامل در نظر گرفته می‌شود [۶]. انصاری و شکری (۲۰۰۷) از نوعی روش عددی برای تعیین حد ناپایداری مرز مشترک استفاده کردند. آن‌ها بیان کردند که معیار ناپایداری کلون-هلمهولتز فقط برای موج‌های بلند با دامنه کوچک

4. Wallis and Dobson
5. Taitel&Dukler
6. Mishima&Ishi
7. Barnea&Taitel
8. Viscous Kelvin Helmholtz
9. Inviscid Kelvin Helmholtz
10. Issa&Kempf

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_G \rho_G) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_G \rho_G u_G) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_L \rho_L) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_L \rho_L u_L) = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_G \rho_G u_G) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_G \rho_G u_G u_G) \\ & + \alpha_G \frac{\partial P_G}{\partial x} + (P_G - \hat{P}) \frac{\partial \alpha_G}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_L \rho_L u_L) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_L \rho_L u_L u_L) \\ & + \alpha_L \frac{\partial P_L}{\partial x} + (P_L - \hat{P}) \frac{\partial \alpha_L}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \alpha_G}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \alpha_G}{\partial x} = \frac{\hat{V}}{H} \quad (9)$$

چهار معادله اول، معادلات پیوستگی و مومنتوم برای دو فاز مایع و گاز است. معادله پنجم نشان دهنده انتقال جرم^۹ مابین دو فاز است (برای مثال از فاز گاز به مایع).

برای به دست آوردن معادله مشخصه، معادلات مدل به شکل زیر نوشته می شود.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$U = (\alpha_G, \alpha_G \rho_G, \alpha_L \rho_L, \alpha_L \rho_G u_G, \alpha_L \rho_L u_L) \quad (11)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_G^2 - u_G^2 & \gamma u_G & 0 & 0 & -\rho_G \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_L^2 - u_L^2 & \gamma u_L & \rho_L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{u} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$c_k^2 = \frac{dp_k}{d\rho_k} \quad (13)$$

c_k سرعت صوت در فاز k است (k برای گاز و مایع به ترتیب اندیس های G و L می گیرد) ریشه های معادله مشخصه زیر همان مقادیر ویژه معادلات مدل است:

9. Mass transfer

درست است، بنابراین سرعت لازم برای تشکیل اسلاگ، از سرعت محاسبه شده توسط کلون هلمهولتز کمتر است [۷].

انصاری و غیاثی (۲۰۱۰) با استفاده از نوعی روش طیفی^۱ حد ناپایداری هیدرودینامیکی را در کانال به دست آورده و با نتایج تحلیلی و برنامه های تجاری مقایسه کرده و تطابق خوبی را با وجود حجم کمتر محاسبات به دست آوردند [۸].

در این پژوهش، برای تعیین حد ناپایداری، از مدل بدون فشار PFM استفاده شده است. تاکنون گزارشی مبتنی بر استفاده از این روش عددی در مدل سازی جریان های دوفازی ارائه نشده است.

۲- مدل دو سیالی و تعیین محدوده خوش رفتاری و بدرفتاری مدل

به طور کلی معادلات میدان برای سیستم های جریان دوفازی با دو مدل کلی بیان می شوند که عبارتند از: مدل مخلوط^۲ و مدل دو سیالی^۳. مدل دو سیالی خود به سه دسته ۱- مدل دو فشاری^۴، ۲- مدل تک فشاری^۵ و ۳- مدل بدون جمله فشار^۶ تقسیم می شود.

هیپربولیک بودن معادلات مدل از این نظراهمیت دارد که اگر مدل از حالت هیپربولیکی^۷ خارج و به محدوده بیضوی^۸ وارد شود، مدل بدرفتار شده و در حل عددی ناپایداری غیر فیزیکی وارد می شود. برای بررسی هیپربولیک بودن مدل، نخست باید معادله مشخصه مدل نوشته شده و ریشه های آن که همان مقادیر ویژه مدل است محاسبه شود.

۲-۱- مدل دو فشاری

در این مدل دو فاز به صورت تراکم پذیر فرض می شود و معادلات مدل به صورت زیر نوشته می شود:

1. Spectral Method
2. Mixture models
3. Two Fluid Model
3. Two Pressure Model (TPM)
4. Single Pressure Model (SPM)
5. Pressure Free Model
7. Hyperbolic
8. Elliptic

$$\det(\lambda I - A) = F(\lambda) \quad (14)$$

معادله مشخصه مدل TPM چنین است:

$$F(\lambda) = [(\lambda - u_G)^* - c_G^*][(\lambda - u_L)^* - c_L^*](\lambda - \hat{u}) \quad (15)$$

پنج ریشه معادله مشخصه عبارتند از: $u_K \pm c_K$ و $\hat{u}$ (دیده می‌شود که مقادیر ویژه همگی اعدادی حقیقی هستند و در نتیجه معادلات مدل در تمامی مقادیر سرعت دو سیال، به شکل هایپر بولیک و مدل استفاده شده خوش رفتار است [9]). خوش رفتاری به این معنا است که حل عددی دچار ناپایداری‌های غیر فیزیکی (نامحدود) نمی‌شود.

۲-۲- مدل تک فشاری

معادلات میدان برای مدل دو سیالی تک فشاری به شکل زیر است [7]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_G \rho_G) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_G \rho_G u_G) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_L \rho_L) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_L \rho_L u_L) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_G \rho_G u_G) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_G \rho_G u_G u_G) = -\alpha_G \frac{\partial P}{\partial x} \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_L \rho_L u_L) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_L \rho_L u_L u_L) = -\alpha_L \frac{\partial P}{\partial x} - P_c \frac{\partial \alpha_L}{\partial x} \quad (19)$$

فشار در مرز مشترک برابر P بوده و با توجه با روابط فشار هیدرواستاتیکی رابطه زیر صادق است:

$$P_G = P - (\gamma/2) H g \rho_G \alpha_G \quad (20)$$

$$P_L = P + (\gamma/2) H g \rho_L \alpha_L \quad (21)$$

$$P_c \frac{\partial \alpha_L}{\partial x} = \rho_L \alpha_L g \cos \beta \frac{\partial h_L}{\partial x} \quad (22)$$

معادلات پیوستگی و مومنتوم باید به شکل اولیه، مطابق رابطه (۲۳) نوشته شوند [۹] و مقادیر ویژه، ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه (۲۶) است.

$$M_A \frac{\partial \psi}{\partial t} + M_B \frac{\partial \psi}{\partial x} = S \quad (23)$$

$$M_A = \begin{bmatrix} -\rho_G & \cdot & \cdot & \alpha_G \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \rho_G \alpha_G & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \rho_L \alpha_L & \cdot \end{bmatrix} \quad (24)$$

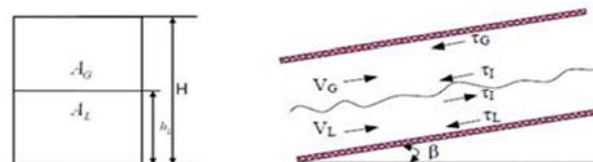
$$M_B = \begin{bmatrix} -\rho_G u_G & \rho_G \alpha_G & \cdot & \alpha_G u_G \\ u_L & \cdot & \alpha_L & \cdot \\ \cdot & \rho_G \alpha_G u_G & \cdot & \alpha_G C_G^* \\ P_c & \cdot & \rho_L \alpha_L u_L & \alpha_L C_G^* \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\det(M_B - \lambda M_A) = 0 \quad (26)$$

به دست آوردن این ریشه‌ها به روش تحلیلی و دقیق، بسیار مشکل است، اما با استفاده از تحلیل اغتشاش‌های حول پارامتر کوچک $\theta = u_r / C_G$ (به سادگی محاسبه می‌شود). با استفاده از این روش نشان داده شده است که چهار مقدار مشخصه SPM-4 همواره حقیقی‌اند. البته باید توجه کرد که مقادیر ویژه به دست آمده به این روش تقریبی، فقط برای اغتشاش‌های کوچک معتبر بوده یا به بیان دقیق‌تر، برای سرعت نسبی بین فازهای کمتر از 15m/s (برای سرعت صوت در گاز 300m/s) معتبر است. بنابراین مدل تک فشاری SPM فقط در سرعت‌های نسبی پایین خوش رفتار بوده و مدل در سرعت‌های نسبی بالا، دچار ناپایداری نامحدود می‌شود.

۲-۳- مدل PFM و فرضیات مدل

جریان تراکم ناپذیر دو فاز لایه‌ای گاز-مایع، که توسط جاذبه از هم جدا شده‌اند، در داخل کانالی به ارتفاع H و زاویه β مطابق شکل (۱) در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱ سطح مقطع و نمای جانبی جریان لایه‌ای در کانال

از آنجایی که انتشار اغتشاش‌ها در راستای محور کانال از اهمیت بیشتری نسبت به جریان عمودی برخوردار است، جریان به صورت یک‌بعدی در راستای کانال در نظر گرفته می‌شود. در این بحث جریان به صورت هم‌دما فرض می‌شود تا نیازی به حل معادله انرژی نداشته باشیم.

معادلات کلی برای جریان دو فاز با مدل PFM طبق روابط زیر است [۱۰]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho_L V_L + \rho_G V_G) + \\ & \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{2} \rho_L V_L^2 + \frac{1}{2} \rho_G V_G^2 + (\rho_L - \rho_G) \cdot g \cdot h_L \cdot \cos \beta \right) = H \\ & H = -(\rho_L - \rho_G) \cdot g \cdot \sin \beta + \\ & \left(\frac{1}{A_L} + \frac{1}{A_G} \right) \tau_i S_i + \frac{\tau_G S_G}{A_G} - \frac{\tau_L S_L}{A_L} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_L A_L + \rho_G A_G) + \frac{\partial}{\partial X}(\rho_L A_L V_L + \rho_G A_G V_G) = 0 \quad (28)$$

(ρ_G, ρ_L) و (V_G, V_L) و (A_G, A_L) به ترتیب دانسیته‌های گاز و مایع، سرعت‌ها و سطح مقطع‌ها است. P_i فشار سطح مشترک و h_L ارتفاع مایع بوده که وابسته به ارتفاع کانال و سطح مقطع‌های دو سیال است. S_G و S_L محیط‌های تر شده توسط گاز و مایع و S_i خط تر شده توسط فصل مشترک است. تنش برشی در سطح مشترک^۱ برابر τ_i بوده و τ_G و τ_L تنش‌های برشی دیواره^۲ برای گاز و مایع است.

1. Interfacial Shear Stress
2. Wall Shear Stresses

در این مدل، بردار اولیه به صورت $\psi = (R_L, V_G)^T$ در نظر گرفته می‌شود و در ماتریس‌های به دست آمده $\Delta \rho = \rho_L - \rho_G$ اختلاف چگالی و $V_r = V_G - V_L$ سرعت نسبی است. معادلات باید به شکل رابطه اولیه (۲۳) نوشته شود. ماتریس‌های M_A, M_B به شکل زیر است:

$$M_A = \begin{bmatrix} \Delta \rho & 0 \\ \rho_L \frac{V_r}{A_L} & -\left(\rho_G + \rho_L \frac{A_G}{A_L} \right) \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$M_B = \begin{bmatrix} \Delta \rho V_G & -\Delta \rho A_G \\ \rho_L V_L \frac{V_r}{A_L} + \frac{\Delta \rho g \cos \beta}{A_L} & -\left(\rho_G V_G + \rho_L V_L \frac{A_G}{A_L} \right) \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$A'_L = \frac{dA_L}{dh_L} \quad (31)$$

برای آن که چند جمله‌ای مشخصه‌ای دارای ریشه‌های حقیقی باشد، رابطه زیر باید بین سرعت دو فاز برقرار باشد:

$$(V_G - V_L)' \leq \frac{\Delta \rho (\rho_L A_G + \rho_G A_L)}{\rho_G \rho_L} \cdot g \cdot \cos \beta \cdot \frac{A}{A_L} \quad (32)$$

بنابراین برای خوش رفتار بودن مدل، به شرط بالا می‌رسیم که معادل با شرط IKH^۳ می‌باشد. [۵]

با توجه به این مطالب، مدل دو فشاری این توانایی را دارد که در تمامی محدوده‌های سرعت نسبی دو فاز $(V_r = V_G - V_L)$ ناپایداری فیزیکی را نشان دهد. اما مدل تک فشاری در محدوده‌های پایین سرعت نسبی این توانایی را دارد، و مدل (PFM) با وجود این که در محدوده بیشتری توانایی نشان دادن رشد موج را نسبت به مدل تک فشاری (SPM) دارد، اما فراتر از محدوده IKH دچار بدرفتاری و به وجود آمدن ناپایداری‌های نامحدود غیر فیزیکی می‌شود.

به ازای جریان دو فاز ۴ متغیر A_G, A_L, V_L, V_G وجود دارد، بنابراین علاوه بر ۲ معادله باقی (۲۷) و (۲۸)، دو معادله

3. Inviscid Kelvin-Helmholtz

جبری دیگر وجود دارد که مطابق روابط (۳۳) و (۳۴) بیان می‌شوند:

$$A_L V_L + A_G V_G = C(t) = (A_L V_L + A_G V_G)_{inlet} \quad (33)$$

$$A_G + A_L = A \quad (34)$$

مدل در جریان دو فاز برای تعیین حد ناپایداری به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_L V_L - \rho_G V_G) + \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{2} \rho_L V_L^2 - \frac{1}{2} \rho_G V_G^2 + (\rho_L - \rho_G) \cdot g \cdot h_L \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_L A_L + \rho_G A_G) + \frac{\partial}{\partial X}(\rho_L A_L V_L + \rho_G A_G V_G) = 0 \quad (40)$$

معادله (۳۹) مجموع معادلات مومنوم بین دو فاز مایع و گاز بوده و معادله (۴۰) مجموع دو معادله پیوستگی بین دو فاز است. معادلات مدل به صورت تفاضل محدود و با روش FCT گسسته‌سازی شده است.

۳-۱- روش عددی شار اصلاح شده انتقالی (FCT)

این روش، توسط بوریس و بوک^[۱۱] پیشنهاد شد و اولین روش با دقت بالا می‌باشد و مفهوم محدود کننده^۳ نیز در این روش ارائه شده است. این روش، نوعی روش "پیشگو/تصحیح کننده"^۴ است که در آن، مقدار زیادی دیفیوژن در مرحله پیشگویی به سیستم وارد و مقدار دیگر دیفیوژن (معمولاً مقدار مساوی) در مرحله آنتی دیفیوژن از سیستم خارج می‌شود تا بدین وسیله نقاط اکسترم اضافی در میدان حل حذف شوند.

در متد شار اصلاح شده، خروجی حل عددی جریان توسط روش ریچمایر^۵ که روش مرتبه دوم است گرفته شده و برای اصلاح شار، در آن دیفیوژن مصنوعی وارد می‌شود. دلیل اعمال این دیفیوژن مصنوعی آن است که در روش‌های مرتبه دوم نوعی پخش عددی^۶ وجود دارد که بر طبق روش شار اصلاح شده این پخش از بین می‌رود. بر طبق روابط (۳۶) و (۳۷) ضرایب F و Q برای مدل معرفی شده است. مراحل اعمال روش ریچمایر بر طبق روابط زیر است.

۳- گسسته سازی معادلات

مدل مورد استفاده در این مقاله مدل PFM است که مدلی پایستار بوده و بنابراین معادلات بقا در مدل به صورت رابطه کلی (۳۵) نوشته می‌شود. Q میدان برداری از متغیرهای پایستار جرم و مومنوم می‌باشد. بردارهای F و S توابع جبری فقط از Q است که به ترتیب بیانگر شارها و جمله چشمه در مدل هستند.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S \quad (35)$$

در مدل PFM ضرایب Q و F با روابط زیر بیان می‌شوند:

$$Q = \begin{bmatrix} \rho_L A_L + \rho_G A_G \\ \rho_L V_L - \rho_G V_G \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho_L A_L V_L + \rho_G A_G V_G \\ \frac{1}{2} \rho_L V_L^2 - \frac{1}{2} \rho_G V_G^2 + (\rho_L - \rho_G) \cdot g \cdot h_L \cdot \cos \beta \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\rho_L - \rho_G) \cdot g \cdot \sin \beta + \left(\frac{1}{A_L} + \frac{1}{A_G} \right) \left[\tau_L S_L + \frac{\tau_G S_G}{A_G} - \frac{\tau_L S_L}{A_L} \right] \end{bmatrix} \quad (38)$$

از آن جا که موضوع کار ما بررسی ناپایداری فیزیکی سطح مشترک است، کانال به صورت افقی ($\beta = 0$) و دو فاز به صورت آرام و لایه‌ای فرض می‌شود و به دلیل این که جمله اینرسی نسبت به اصطکاک بین دو سیال و اصطکاک سیال و دیواره غالب است، از اصطکاک صرف نظر می‌شود. معادلات حاکم برای

1. Flux-corrected transport
2. Boris & Book
3. Limiter
4. Predictor/Corrector
5. Ritchmyer
6. Numerical Dispersion

برای الگوریتم حاضر، ضرائب دیفیوژن و آنتی دیفیوژن یعنی V و μ ، طبق روابط زیر محاسبه می شوند [۱۲]:

$$V = \frac{1}{\gamma} (1 + \gamma C^+) \quad (50)$$

$$\mu = \frac{1}{\gamma} (1 - C^+) \quad (51)$$

۴- شرایط مرزی و شرایط اولیه برای جریان دو فازی

برای تعیین حد ناپایداری کلین- هلمهلتز باید شرط مرزی و اولیه به صورت زیر اعمال شود:

۴-۱- شرایط اولیه جریان دو فازی

سیال های متناظر برای فازهای مایع و گاز به ترتیب آب و هوا انتخاب شده است. چگالی آب برابر 1000 Kg/m^3 و چگالی هوا 1 Kg/m^3 در نظر گرفته شده است. سرعت اولیه ورودی به کانال دو فاز را در چندین حالت مختلف در نظر گرفته شده تا تاثیر اختلاف سرعت دو فاز در پایداری موج مشخص شود. اغتشاش اولیه در فصل مشترک دو فاز به صورت زیر تعریف می شود [۱۳]:

$$\alpha_G = \alpha_{Ginitial} + \delta\alpha \quad (52)$$

$$\alpha_L = \alpha_{Linitial} - \delta\alpha \quad (53)$$

$$u_G = u_{Ginitial} \times \alpha_{Ginitial} / \alpha_G \quad (54)$$

$$u_L = u_{Linitial} \times \alpha_{Linitial} / \alpha_L \quad (55)$$

$$\delta\alpha = 0.005 \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (56)$$

$\alpha_{Ginitial}$ و $\alpha_{Linitial}$ کسرهای حجمی اولیه مایع و گاز در ورودی کانال است، و رابطه زیر بین این دو برقرار است:

$$\alpha_{Ginitial} = 0.5 \alpha_{Linitial} \quad (57)$$

$$Q_{j+1/2}^n = \frac{1}{\gamma} (Q_{j+1}^n + Q_j^n) \quad (41)$$

$$\bar{Q}_{j+1/2} = Q_{j+1/2}^n - \frac{\tau}{\gamma} [F(Q_{j+1}^n) - F(Q_j^n)] + \frac{\Delta t}{\gamma} S(Q_{j+1/2}^n) \quad (42)$$

$$\hat{F}_{j+1/2}^{RI} = F(\bar{Q}_{j+1/2}) \quad (43)$$

$$\tau = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (44)$$

الگوریتم FCT از پنج مرحله تشکیل شده است که در زیر به آن اشاره می شود: (Q^n حل در گام زمانی قدیم بوده و $\bar{Q}$ جواب جدیدی است که با استفاده از روش مرتبه دوم ریچمایر به دست آمده است)

۱. تولید شارهای دیفیوژن^۱:

$$F_{j+1/2}^d = V_{j+1/2} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \quad (45)$$

۲. دیفیوژن حل^۲:

$$Q_j^d = \bar{Q}_j + (F_{j+1/2}^d - F_{j-1/2}^d) \quad (46)$$

۳. تولید شارهای آنتی دیفیوژن^۳:

$$F_{j+1/2}^{ad} = \mu_{j+1/2} (\bar{Q}_{j+1} - \bar{Q}_j) \quad (47)$$

۴. محدود کردن شارهای آنتی دیفیوژن^۴:

$$S = \text{sign}(F_{j+1/2}^{ad}) \quad (48)$$

$$F_{j+1/2}^{cad} = S \cdot \max \left[\min(S \cdot (\bar{Q}_{j+1} - Q_j^d), |F_{j+1/2}^{ad}|), S \cdot (\bar{Q}_{j+1} - Q_{j+1}^d) \right]$$

۵. تولید شارهای بین سلولی^۵:

$$\hat{F}_{j+1/2}^{FCT} = F_{j+1/2}^{cad} - F_{j+1/2}^d \quad (49)$$

1. Generation of diffusive fluxes
2. Diffusion of the solution
3. Generation of anti-diffusive fluxes
4. Limitation of the anti-diffusive fluxes
5. Generation of inter Cell flux

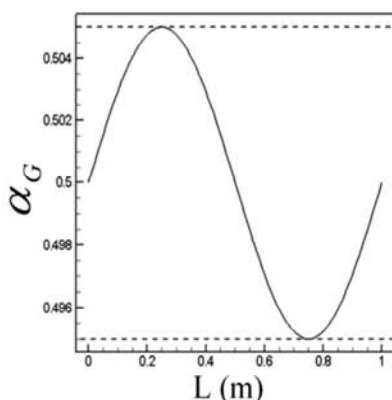
در رابطه بالا، α_{Min} حداقل کسر حجمی و α_{Max} حداکثر کسر حجمی است. در زمان $T=0$ به دلیل این که موج سینوسی القاء شده سینوسی بوده و حداقل و حداکثر موج برابرند، رشد موج برابر صفر بوده و در هر گام زمانی مقدار رشد موج باید حساب شود. تا زمانی که نمودار رشد موج برحسب زمان دارای شیب منفی باشد، جریان دو فاز پایدار است. شیب صفر نشان دهنده حد ناپایداری و شیب مثبت نمودار بیان کننده ناپایداری مرز مشترک دو سیال است.

۵- نتایج

شرایط زیر برای تعیین حد ناپایداری یک جریان دو فازی در نظر گرفته می شود:

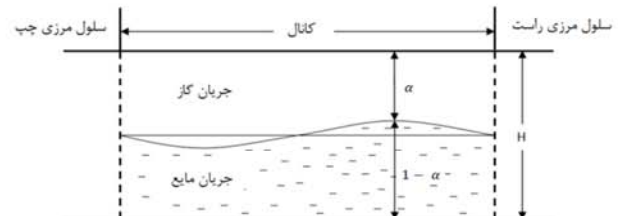
- فاز مایع: آب با چگالی (1000 Kg/m^3)
- فاز گاز: هوا با چگالی (1.2 Kg/m^3)
- طول موج اولیه: $1(m)$
- طول کانال: $1(m)$
- ارتفاع کانال: $0.2(m)$
- دامنه اولیه موج: $0.001(m)$
- سرعت اولیه فاز آب: 1 m/s

در شکل (۳) شرایط اولیه برای سطح مشترک دیده می شود که در آن، کسر حجمی برحسب طول لوله ارائه شده است. نقطه چین در شکل نشان دهنده آن است که اگر با گذشت زمان کسر حجمی از این محدوده بگذرد، جریان وارد مرحله گذر از جریان لایه ای به رژیم های دیگر (موجی و یا لختی) شده است.



شکل ۳ کسر حجمی اولیه گاز در طول لوله $1(m)$

رابطه (۵۷) نشان دهنده آن است که در حالت ورودی کانال دو سیال برابر فرض شده اند. α_L و α_G کسرهای حجمی اولیه مایع و گاز در طول کانال و $\delta\alpha$ اغتشاش سینوسی است. (مطابق شکل (۲))



شکل ۲ اغتشاش اولیه برای جریان لایه ای

۴-۲- شرط مرزی جریان دو فازی

به منظور کاهش حجم محاسبات، شرط ورودی به کانال، بعد از یک طول موج تکرار می شود^۱. به این معنا که هر چه که از مرز $x = \lambda$ خارج شود از مرز $x = 0$ وارد می شود (طول موج λ است). از نظر شبکه محاسباتی می توان گفت اگر طول کانال به N سلول محاسباتی تقسیم شود، شرط مرزی متناوب به معنای یکسان بودن شرایط گره $N+1$ با گره ۱ است.

اساس ناپایداری کلون هلمهلتز چنین است که طول کانال به قسمت های واحد تقسیم شده و برای نزدیکی بیشتر جواب ها به فیزیک مسأله، شرایط مرزی به صورت تناوبی در نظر گرفته می شود. در طول واحد انتخاب شده، در مرز دو سیال موج سینوسی با طول موج بلند و برابر طول لوله و دامنه کم داده می شود و با گذشت زمان اگر دامنه موج به سمت صفر میل کند، نشان دهنده غلبه کردن نیروی وزن بر نیروی لیفت است. سرعت نسبی دو سیال را افزایش داده تا به حدی برسیم که کاهش دامنه نداشته باشیم و موج، این ناپایداری را در خود حفظ کند.

برای نشان دادن رشد کردن و یا رشد نکردن موج از رابطه زیر استفاده می شود:

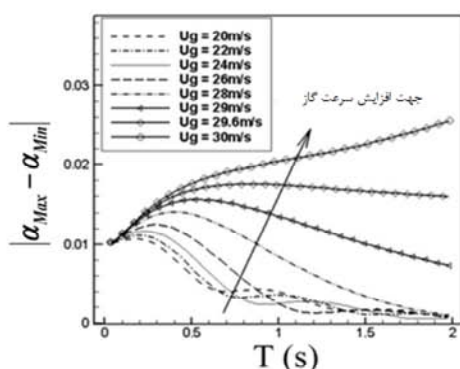
$$WaveGrowth = |\alpha_{Max} - \alpha_{Min}| \quad (58)$$

1. Cyclic Boundary condition

برای به دست آوردن دقیق حد ناپایداری در جریان دو فاز باید از نمودارهای رشد موج استفاده شود. قبل از اینکه حد ناپایداری هیدرو دینامیکی با استفاده از حل عددی بیان شود حد ناپایداری با استفاده از رابطه کلاسیک کلون-هلمهلتز (رابطه (۱)) بیان می شود.

$$(u_G - u_L) \geq \frac{1000 - 1.2}{1.2} * 10 * 0.1 \geq 28.8$$

شکل (۶) نمودار رشد موج بر حسب زمان برای سرعت های نسبی متفاوت است که بر طبق این نمودار حد ناپایداری برای جریان دو فازی 28.8 m/s به دست آمده که تطابق مناسبی با رابطه کلاسیک کلون-هلمهلتز دارد.



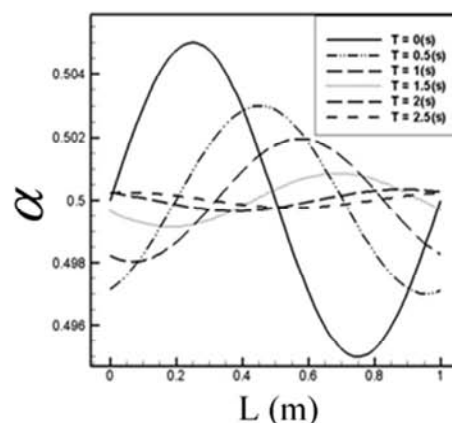
شکل ۶ نمودار رشد موج بر حسب زمان در سرعت های متفاوت گاز

$$u_L = 1 \text{ (m/s)}$$

۵-۱- اثر افزایش سرعت گاز بر روی رشد موج

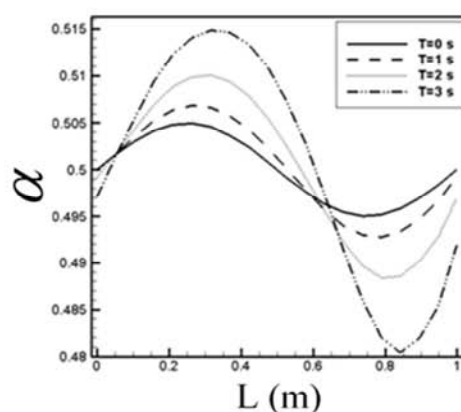
نمودار (۷) رشد موج را برای جریان پایدار با سرعت $u_G = 27 \text{ m/s}$ نشان می دهد. همان طور که دیده می شود موج با گذشت زمان میرا شده و رشدی منفی دارد. اما با توجه به شکل (۸) مشخص می شود که در سرعت $u_G = 30 \text{ m/s}$ جریان ناپایدار است. بنابراین با افزایش سرعت گاز، جریان زودتر ناپایدار شده که دلیل آن را می توان افزایش نیروی لیفت در مقابل نیروی وزن دانست.

در شکل (۴) کسر حجمی در زمان های مختلف برای سرعت گاز برابر 20 m/s ارائه شده است. همان طور که ملاحظه می شود جریان با این سرعت نسبی پایدار است.



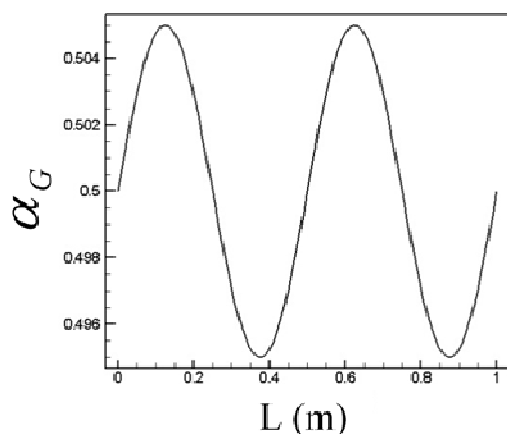
شکل ۴ کسر حجمی گاز در زمان های مختلف در $u_G = 20 \text{ (m/s)}$

در شکل (۵) کسر حجمی در زمان های مختلف برای سرعت گاز برابر 30 m/s ارائه شده است. همان طور که ملاحظه می شود موج نسبت به حالت اولیه ($T=0$) رشد کرده است و جریان ناپایدار است.

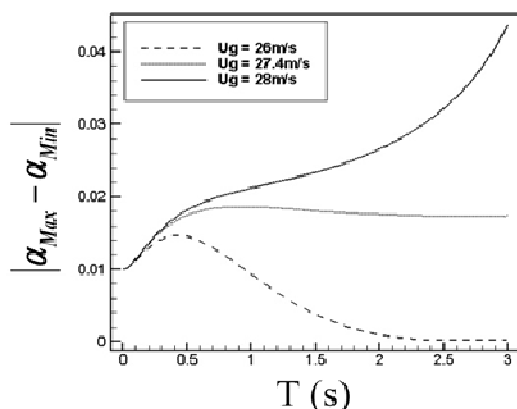


شکل ۵ کسر حجمی گاز در زمان های مختلف در $u_G = 30 \text{ (m/s)}$

(۱۰) است. همان‌طور که دیده می‌شود سرعت نسبی دو فاز برای تغییر رژیم از 28.6 m/s در طول موج یک‌متر به 26.4 m/s در طول موج 0.5 متر کاهش یافته است.



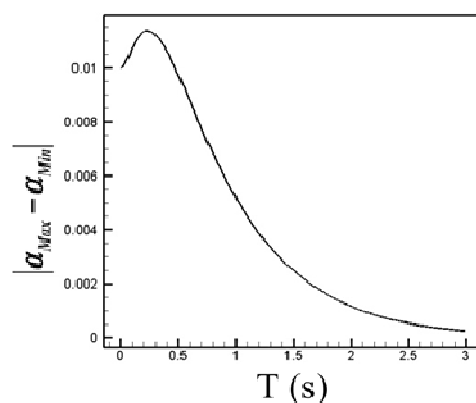
شکل ۹ کسر حجمی اولیه گاز در طول کانال $\lambda = 0.5 (m)$



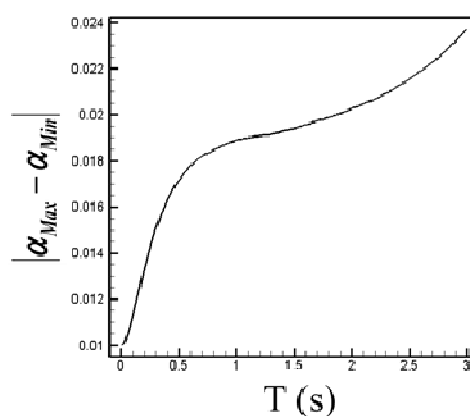
شکل ۱۰ نمودار رشد موج برحسب زمان در طول موج 0.5 متر

کسر حجمی اولیه گاز برای طول موج 0.25 متر مطابق شکل (۱۱) می‌باشد.

رشد موج برای طول موج 0.25 متر با شرایط کسر حجمی برابر برای هوا و آب و سرعت 1 m/s برای آب مطابق شکل (۱۲) است.



شکل ۷ رشد موج برای جریان پایدار $u_G = 27 (m/s)$

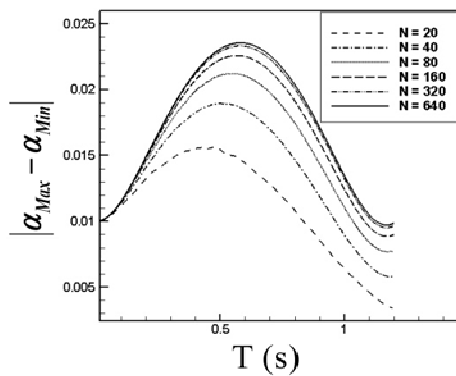


شکل ۸ رشد موج برای جریان ناپایدار $u_G = 30 (m/s)$

۵-۲- تاثیر طول موج در رشد موج

در آغاز قسمت نتایج دیدیم که برای طول موج یک متر جریان دو فازی آب و هوا با کسر حجمی برابر در اختلاف سرعت 28.6 m/s به ناپایداری می‌رسد. اکنون برای طول موج 0.5 و 0.25 متر، نمودار رشد موج برحسب زمان ترسیم می‌شود تا حد ناپایداری محاسبه شود. برای حالتی که طول موج برابر 0.5 متر باشد کسر حجمی اولیه گاز، که نشان دهنده اغتشاش مصنوعی وارد شده می‌باشد مطابق نمودار (۹) می‌باشد.

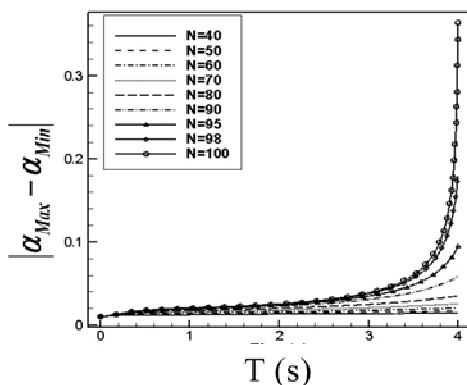
رشد موج برای طول موج 0.5 متر با شرایط کسر حجمی برابر برای هوا و آب و سرعت 1 m/s برای آب مطابق شکل



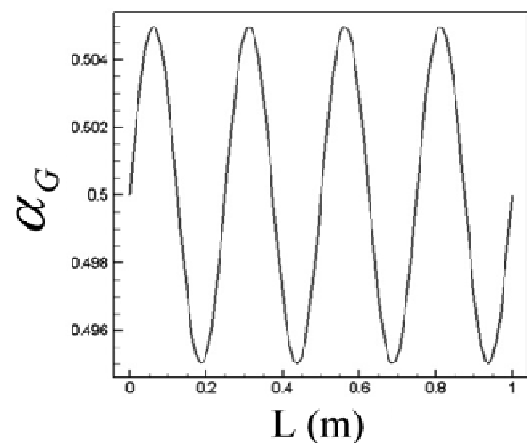
شکل ۱۳ وابستگی نداشتن محاسبات به شبکه محاسباتی در محدوده خوشرفتار

اکنون محدوده سرعت را تغییر می‌دهیم تا شرایط بد رفتاری ایجاد شود، برای این منظور در شرایط پایه سرعت‌های $u_L = 1 \text{ m/s}$ و $u_G = 30 \text{ m/s}$ قرار داده می‌شود. شکل (۱۴) تاثیر ریز کردن شبکه محاسباتی را در حالت بد رفتار نشان می‌دهد.

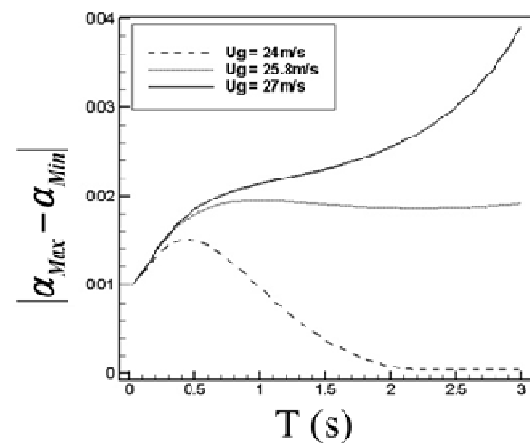
در محدوده سرعت بیان شده برای شکل (۱۴) فیزیک در محدوده حد ناپایداری قرار دارد، بنابراین شیب نمودار رشد موج - زمان باید تقریباً برابر صفر باشد. با توجه به این شکل مشخص است که اگر شبکه از حدی ریزتر شود حل دچار ناپایداری می‌شود و دیگر توانایی پیش بینی فیزیک را ندارد.



شکل ۱۴ تاثیر ریز کردن شبکه محاسباتی در محدوده سرعت نسبی بد رفتار



شکل ۱۱ کسر حجمی اولیه گاز در طول کانال $\lambda = 0.25 \text{ (m)}$



شکل ۱۲ نمودار رشد موج بر حسب زمان در طول موج 0.25 متر

۵-۳- وابستگی نداشتن حل به شبکه محاسباتی

در شکل (۱۳) وابستگی نداشتن جواب‌ها به تعداد تقسیمات شبکه بررسی شده است، در حالتی که $u_L = 1 \text{ m/s}$ و $u_G = 27 \text{ m/s}$ باشد. در این شکل استقلال جواب‌ها از تعداد تقسیمات نشان داده شده است.

با قرار دادن سرعت‌های بالا و شرایط پایه در معادله (۳۲) مشاهده می‌شود که مدل در محدوده خوشرفتار قرار دارد و دچار ناپایداری نامحدود غیر فیزیکی نمی‌شود.

۶- نتیجه گیری

با توجه به نتایج به دست آمده، دیده می شود که اگر در فصل مشترک فازها اغتشاشی ایجاد شود، رشد یا کاهش دامنه این اغتشاش وابسته است به پارامترهایی مانند طول موج اولیه اغتشاش و سرعت اولیه فاز گاز.

در هر نوع جریان دوفازی تاثیر پارامترهای ذکر شده بر حد ناپایداری به صورت زیر به دست می آید:

۱- عوامل فیزیکی موثر بر ناپایداری در مدل بدون فشار PFM بررسی و تایید شد که با کاهش طول موج اولیه اغتشاش، حد ناپایداری کاهش می یابد. این نشان دهنده آن است که که رابطه کلاسیک کلوین - هلمهلتز برای طول موج های بلند مناسب بوده و در صورت کاهش طول موج، دیگر برای تعیین حد ناپایداری اعتبار ندارد.

۲- مدل PFM مدلی است که در محدوده خاصی دچار بد رفتاری می شود، اما برای تعیین حد ناپایداری دقت بالایی دارد.

۷- مراجع

- [5] Barnea, D., Taitel, Y., Interfacial and structural stability of separated flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 1994. 20: p. 387-414.
- [6] Issa, R.I., Kempf, M.H.W., Simulation of slug flow in horizontal and nearly horizontal pipes with the two-fluid model. *International Journal of Multiphase Flow*, 2002. 29: p. 69-95.
- [7] Ansari, M.R., Shokri, V., New algorithm for the numerical simulation of two-phase stratified gas-liquid flow and its application for analyzing the Kelvin-Helmholtz instability criterion with respect to wavelength effect. *Nuclear Engineering and Design*, 2007. 273: p. 2302-2310.
- [8] Ansari, M.R., Ghiasi, N., Hydrodynamical Instability Initiation in Two-Phase Stratified Flow Using Spectral Method. *Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010. IN Press.
- [9] Omgba-Essama, C., Numerical Modelling of Transient Gas-Liquid Flows (Application to Startified & Slug Flow Regimes), in *School of Engineering, Applied Mathematics and Computing Group*. 2004, Cranfield: Uk.
- [10] Watson, M., Non-linear Waves in pipeline two-phase flows., in *Conf.on Hyperbolic Problems*. 11-15 june 1990: Uppsala, Sweden.
- [11] Boris, J.P., Book, D. L., Flux-Corrected Transport I. SHASTA, A Fluid Transport Algorithm That Works. *Journal of Computational Physics*, 1973. 11: p. 38-69.
- [12] Hoffmann, K.A., *Computational Fluid Dynamics*. Vol. 1. 2000.
- [13] Ansari, M.R., Effect of Pressure on Two-Phase Stratified Flow Modeling. *Journal of NUCLEAR SCIENCE and TECHNOLOGY*, 2004. 41: p. 709-714.
- [1] Milne-thompson, L.M., *Theoretical Hydrodynamics*. 1968, London: MacMillan Press.
- [2] Wallis, G.B., Dobson, J.E., The onset of slugging in horizontal stratified air-water flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 1973. 1: p. 173-193.
- [3] Taitel, Y., Dukler, A.E., A model for predicting flow regime transition in horizontal and near horizontal gas-liquid flow. *AIChE Journal*, 1976. 22: p. 47-55.
- [4] Mishima, K., Ishi, M., Theoretical prediction of onset of horizontal slug flow. *Journal of Fluid Engineering*, 1980. 102: p. 441-445.