



مطالعه ارتعاشات آزاد غیر خطی یک نانو عملگر پیزوالکتریک بایمورف با استفاده از تئوری الاستیسیته غیر موضعی

عباس کاغذیان¹، حمید رضا فروزنده¹، علی حاج نایب^{2*}، حمید محمد صدیقی²

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز

* اهواز، صندوق پستی 6135783151، a.nayeb@scu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 28 آبان 1394

پذیرش: 24 اسفند 1394

ارائه در سایت: 07 فروردین 1395

کلید واژگان:

تیر پیزوالکتریک بایمورف

الاستیسیته غیر موضعی

ارتعاشات غیر خطی

چکیده

در این پژوهش، ارتعاشات آزاد غیر خطی نانوعملگر پیزوالکتریک بایمورف با استفاده از تئوری الاستیسیته غیر موضعی تحلیل گردیده است. نانوعملگر پیزوالکتریک بایمورف با استفاده از تئوری تیر اویلر برنولی مدل سازی شده و برای استخراج معادلات حاکم از اصل همیلتون استفاده شده است. برای کاهش مرتبه و حل معادلات حرکت از روش گلرکین استفاده شده است. به منظور همگرایی سریع تر از شکل مودهای تیر چند مقطعی استفاده می شود. برای محاسبه فرکانس غیر خطی از روش اصل تغییرات هی استفاده گردیده است. معادلات برای شرایط مرزی تیر دو سر گیردار حل شده و اثرات مقادیر ولتاژ مستقیم، ضریب مقیاس، طول تیر، ضخامت و طول لایه های پیزوالکتریک متصل به تیر، بر روی فرکانس های طبیعی مورد بررسی قرار می گیرد. نتایج نشان می دهد که اعمال ولتاژ مستقیم باعث بوجود آمدن خیز استاتیکی و افزایش سختی در اثر کشش تار خنثی در تیر و در نتیجه افزایش فرکانس طبیعی تیر می گردد. همچنین افزایش ضریب مقیاس باعث کاهش نرخ تغییرات فرکانس می شود. با افزایش طول و ضریب مقیاس، نسبت فرکانس غیر خطی به خطی افزایش می یابد. در نهایت اثر جنس لایه الاستیک بر روی نسبت فرکانسی مورد بررسی قرار می گیرد.

Nonlinear free vibrations analysis of a piezoelectric bimorph nano actuator using nonlocal elasticity theory

Abbas Kaghazian, Hamidreza Foruzande, Ali Hajnayeb*, Hamid Mohammad Sedighi

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

* P.O.B. 6135783151, Ahvaz, Iran, a.nayeb@scu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 19 December 2015

Accepted 13 February 2016

Available Online 26 March 2016

Keywords:

Bimorph piezoelectric beam

nonlocal elasticity

nonlinear vibrations

ABSTRACT

In this paper, the nonlinear free vibrations of a bimorph piezoelectric nano actuator are studied based on nonlocal elasticity. The Euler-Bernoulli beam theory and Hamilton's principle are used to derive the equation of motion of the actuator. In order to obtain the reduced-order form of equations, the Galerkin method is used. The mode shapes of a multi-span beam are used for a faster convergence. The nonlinear natural frequencies are obtained by using He's variational approach. Equations are solved for clamped-clamped boundary conditions, and the effects of values of DC voltage, actuator length and thickness, length of piezoelectric layers and nonlocal parameter on the nonlinear natural frequencies are studied. The results show that applying a DC voltage induces a static deflection and an increase in the stiffness of the actuator. Therefore, the natural frequency increases. Moreover, increasing the nonlocal parameter decreases the rate of change in frequency variation. An increase in the nonlocal parameter or the length of the actuator increases the nonlinear to nonlinear natural frequency ratio. Finally, the effect of the middle layer material of the actuator on the frequency ratio is studied.

1- مقدمه

تیرهای پیزوالکتریک بایمورف به صورت سه لایه ای، یک لایه الاستیک در وسط تیر و دو لایه پیزوالکتریک ساخته می شوند. در این سازه ها با اعمال ولتاژ نا هم سو به لایه های پیزوالکتریک گشتاور در تیر بوجود می آید. در تیرهای پیزوالکتریک یونی مورف به صورت دو لایه ای، یک لایه پیزوالکتریک و یک لایه الاستیک ساخته می شود. در این سازه ها با اعمال ولتاژ به لایه پیزوالکتریک، گشتاور و نیروی محوری به صورت هم زمان ایجاد می شود. به منظور مدل سازی و تحلیل پیزوالکتریک ها پژوهش های زیادی انجام شده است. با توجه به این که در صورت بزرگ بودن تغییر شکل، دقت پاسخ

در سال های اخیر با افزایش کاربرد سازه های هوشمند استفاده از پیزوالکتریک ها به عنوان حسگر و عملگر مورد توجه ویژه محققان قرار گرفته است. پیزوالکتریک ها تحت تغییر شکل، میدان الکتریکی تولید کرده که اثر مستقیم نام داشته و تحت میدان الکتریکی دچار تغییر شکل شده که به آن اثر معکوس گفته می شود. از اثر مستقیم در ساخت حسگرها مثل شتاب سنج و کرنش سنج استفاده می شود و از اثر معکوس که باعث ایجاد نیرو یا گشتاور می شود در ساخت عملگرها مثل نانو پمپ ها و لرزش گر ها استفاده می شود.

Please cite this article using:

A. Kaghazian, H. Foruzande, A. Hajnayeb, H. Mohammad Sedighi, Nonlinear free vibrations analysis of a piezoelectric bimorph nano actuator using nonlocal elasticity theory, Modares Mechanical Engineering, Vol. 16, No. 4, pp. 55-66, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. Kaghazian, H. Foruzande, A. Hajnayeb, H. Mohammad Sedighi, Nonlinear free vibrations analysis of a piezoelectric bimorph nano actuator using nonlocal elasticity theory, Modares Mechanical Engineering, Vol. 16, No. 4, pp. 55-66, 2016 (in Persian)

بر ولتاژ شکست و خیز استاتیکی را بررسی کردند. نتایج نشان داد افزایش ولتاژ پیزوالکتریک موجب افزایش ولتاژ شکست شده و با افزایش ضریب اندازه، نرخ رشد ولتاژ شکست کاهش می‌یابد. ناظمی زاده و همکاران [9] یک نانوتیر پیزوالکتریک بایمورف را با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی مورد مطالعه قرار داده و اثر اندازه و نسبت طول به ضخامت لایه الاستیک بر فرکانس طبیعی تیر را بررسی نمودند. آن‌ها نشان دادند که افزایش ضریب اندازه موجب کاهش فرکانس طبیعی شده که در موده‌های بالاتر این کاهش شدیدتر است.

در تغییر شکل‌های بزرگ با افزایش خیز تیر، کشش محوری در تیر بوجود می‌آید که باعث افزایش سختی تیر و در نتیجه کاهش خیز و دامنه ارتعاشات تیر می‌شود. در تغییر شکل‌های بزرگ در نظر نگرفتن کشش محوری منجر به اختلاف قابل ملاحظه‌ای در مقایسه با نتایج خطی خواهد شد. با توجه به تحقیقات اخیر که در بالا ذکر شد و اینکه تا کنون پژوهش قابل توجهی در زمینه ارتعاشات غیرخطی نانو تیر پیزوالکتریک بایمورف صورت نگرفته است، در این پژوهش به بررسی آن پرداخته می‌شود. بدین منظور معادلات ارتعاشات غیرخطی نانو تیر پیزوالکتریک بایمورف که لایه‌های پیزوالکتریک آن دارای طولی کم تر از طول تیر می‌باشند با استفاده از الاستیسیته غیرموضعی، و تئوری تیر اوپلر برنولی استخراج می‌شوند. پس از استخراج معادلات به کمک اصل همپلتون، معادلات حاصل با استفاده از روش گلرکین گسسته‌سازی می‌شوند. شکل موده‌های تیر چند مقطعی در گسسته سازی مورد استفاده قرار می‌گیرند. سپس معادلات حل شده و اثر اندازه، ولتاژ اعمالی و تغییر طول لایه‌های پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی بررسی می‌شود. همچنین جهت صحت‌سنجی نتایج، نانو تیر در نرم-افزار اجزاء محدود انسیس شبیه‌سازی شده و پس از انجام تحلیل سازه‌ای خیز استاتیکی محاسبه شده و همچنین با انجام تحلیل مودال، فرکانس طبیعی بدست آمده و با نتایج قسمت قبل، مقایسه شده است.

2- مدل سازی

یک تیر پیزوالکتریک بایمورف به طول L ، ضخامت تیر h ، ضخامت لایه پیزوالکتریک h_p و طول پیزوالکتریک L_1, L_2 همان‌طور که در شکل یک نشان داده شده در نظر گرفته و دو سطح بالا و پایین لایه پیزوالکتریک تحت اختلاف پتانسیل الکتریکی V_0 قرار می‌گیرد. روابط کرنش جابجایی براساس تئوری اوپلر برنولی به صورت معادله (1) نوشته می‌شود [10]:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= U(x, t) - Z \left(\frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \right) \\ v(x, z, t) &= 0 \\ w(x, z, t) &= W(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

که U, W به ترتیب جابجایی‌های طولی و عرضی تیر می‌باشد. کرنش نیز برابر خواهد بود با:

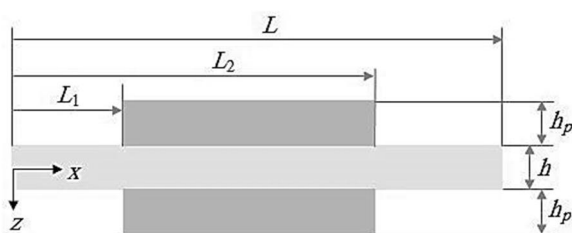


Fig. 1 Nano actuator that is modeled as a piezoelectric beam

شکل 1 نانوعملگر مدل شده بصورت یک تیر پیزوالکتریک

بدست آمده از مدل خطی چندان مناسب نیست، بسیاری از پژوهش‌های اخیر، در زمینه تحلیل غیرخطی تیرهای پیزوالکتریک انجام پذیرفته است. در یکی از نخستین تحقیقات زمانیان و همکاران [1] به تحلیل استاتیکی و ارتعاش آزاد یک میکروتیر یونی‌مورف تحت تحریک الکترواستاتیک و پیزوالکتریک با در نظر گرفتن تأثیرات غیرخطی کشش لایه میانی پرداختند. آن‌ها اثر طول و ضخامت لایه پیزوالکتریک، ولتاژ مستقیم پیزوالکتریک و ولتاژ مستقیم الکترواستاتیک بر فرکانس طبیعی، خیز استاتیکی و ولتاژ پولین را بررسی کردند. محمودی و همکاران [2] به مطالعه ارتعاش اجباری غیرخطی میکروتیر یونی‌مورف پرداختند. آن‌ها با در نظر گرفتن عوامل غیرخطی مادی و هندسی، پاسخ میکروتیر یک سرگیردار به تحریک پیزوالکتریک را بررسی کرده و با نتایج تجربی مقایسه کردند. عزیزی و همکاران [3] یک میکروتیر پیزوالکتریک بایمورف غیرخطی دو سرگیردار تحت تحریک الکترواستاتیک و پیزوالکتریک را مورد تحلیل قرار دادند. آن‌ها با اعمال ولتاژ مستقیم به لایه‌های پیزوالکتریک، اثر ولتاژ الکترواستاتیکی مستقیم و متناوب بر رفتار استاتیکی و دینامیکی میکروتیر را بررسی کردند. نتایج این پژوهش نشان داد که اعمال ولتاژ مستقیم مثبت به لایه‌های پیزوالکتریک باعث افزایش سختی خمشی شده و اعمال ولتاژ منفی باعث کاهش آن می‌شود. غفاری راد و همکاران [4] با استفاده از شکل موده‌های یک تیر ناپیوسته به مطالعه تیر پیزوالکتریک بایمورفی که لایه‌های پیزوالکتریک آن تنها بخشی از لایه الاستیک را پوشش می‌دهد، پرداختند. در این پژوهش خیز استاتیکی ناشی از اعمال ولتاژ مستقیم به لایه‌های پیزوالکتریک و همچنین ارتعاشات اجباری تیر پیزوالکتریک بایمورف یک سرگیردار و دو سرگیردار مورد بررسی قرار گرفته سپس نتایج با استفاده از مدل آزمایشگاهی مقایسه شده است. زمانیان و همکاران [5] با بررسی همگرایی پاسخ استاتیکی و دینامیکی میکروتیر یونی-مورف به تحریک پیزوالکتریک نشان دادند که استفاده از شکل موده‌های گسسته برای تیرهای دارای لایه پیزوالکتریک با طولی کم تر از طول تیر، از مزیت همگرایی سریع تر برخوردار بوده و هزینه محاسباتی را به شدت کاهش می‌دهد.

بررسی‌های تجربی نشان می‌دهد که رفتار مواد در مقیاس کوچک متفاوت می‌باشد. با توجه به ناتوانی تئوری مکانیک محیط‌های پیوسته کلاسیک در اعمال اثرات کاهش ابعاد، باید از تئوری‌های جایگزین استفاده نمود. پژوهش‌های انجام شده در زمینه نانو مواد حاکی از دقت بالای تئوری الاستیسیته غیرموضعی در این خصوص می‌باشد. که و همکاران [6] از تئوری الاستیسیته غیرموضعی بهره گرفته و فرکانس طبیعی و شکل موده‌های نانوتیر پیزوالکتریک تک لایه را بدست آوردند. در این پژوهش از مدل خطی استفاده شده و اثر تغییرات دما، ولتاژ مستقیم، نیروی محوری و ضریب اندازه بر فرکانس طبیعی و شکل موده‌ها بررسی گردید. نتایج این مقاله حاکی از تأثیر ناچیز دما و اثر شدید ضریب اندازه بوده همچنین، اهمیت در نظر گرفتن اثرات اندازه را اثبات نمود. که و همکاران [7] در ادامه پژوهش خود از مدل غیرخطی بهره گرفته و تغییرات فرکانس طبیعی غیرخطی نانوتیر پیزوالکتریک را برحسب مقادیر مختلف ولتاژ مستقیم پیزوالکتریک را مطالعه کرده، اثر تغییر دما و اندازه را نیز بر فرکانس طبیعی غیرخطی، بررسی کردند. نتایج این پژوهش نشان داد که با افزایش درجه حرارت و ضریب اندازه، فرکانس طبیعی غیرخطی افزایش پیدا می‌کند. شاه محمدی و همکاران [8] یک نانوتیر پیزوالکتریک بایمورف دو سرگیردار را با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی مورد مطالعه قرار داده و اثر اندازه و ولتاژ پیزوالکتریک

معادله (6) را به صورت زیر می‌توان بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \Pi_s = & \frac{1}{2} \int_0^L (-M_x^1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_x^1 (\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} (\frac{\partial W}{\partial x})^2) \\ & + \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} D_x^1 \frac{V_0}{h_p} dz) G(x) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L (-M_x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_x^2 \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} (\frac{\partial W}{\partial x})^2) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L (-M_x^3 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_x^3 \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} (\frac{\partial W}{\partial x})^2 \\ & + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} D_x^3 \frac{V_0}{h_p} dz) G(x) dx \end{aligned} \quad (8)$$

تغییرات انرژی کرنشی برابر است با:

$$\delta \Pi_s = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx}) dz dx \quad (9)$$

با توجه به معادلات (8) و (9) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_s = & \int_0^L (-M_x^1 \delta \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_x^1 \delta (\frac{\partial U}{\partial x} \\ & + \frac{1}{2} (\frac{\partial W}{\partial x})^2)) G(x) dx \\ & + \int_0^L (-M_x^2 \delta \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_x^2 \delta (\frac{\partial U}{\partial x} \\ & + \frac{1}{2} (\frac{\partial W}{\partial x})^2)) dx + \int_0^L (-M_x^3 \delta \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ & + N_x^3 \delta (\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} (\frac{\partial W}{\partial x})^2)) G(x) dx \end{aligned} \quad (10)$$

انرژی جنبشی تیر برابر خواهد بود با:

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left[\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (11)$$

تغییرات انرژی جنبشی برابر است با:

$$\delta \Pi_k = \int_0^L m(x) \delta \left[\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (12)$$

کار نیروی خارجی اعمال شده بر تیر، برابر است با [11]:

$$\Pi_f = \int_0^L (M_P G(x)) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx + \int_0^L \frac{C}{b} \frac{\partial W}{\partial t} W dx \quad (13)$$

تغییرات کار نیروهای خارجی به صورت معادله (14) می‌باشد:

$$\delta \Pi_f = \int_0^L (M_P G(x)) \delta \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx + \int_0^L \frac{C}{b} \frac{\partial W}{\partial t} \delta W dx \quad (14)$$

اصل همیلتون به صورت معادله (15) بیان می‌شود:

$$\delta H = \int_0^t \delta h dt = \int_0^t (\delta \Pi_s + \delta \Pi_f - \delta \Pi_k) dt = 0 \quad (15)$$

پس از جاگذاری معادلات (10) و (12) و (14) در معادله (15) و با مساوی

صفر قرار دادن ضرایب δU و δW می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial N(x)}{\partial x} = m(x) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial (N(x) W')}{\partial x} - \frac{C}{b} \frac{\partial W}{\partial t} - M_P \frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} \\ = m(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (17)$$

شرایط مرزی بدست آمده از اصل همیلتون به صورت رابطه (18) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 - Z K_x \\ \varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, K_x = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2)$$

ε_{xx} کرنش طولی تیر، ε_{xx}^0 کرنش لایه میانی و K_x انحنا تیر می‌باشد. مولفه‌های میدان الکتریکی با استفاده از معادله (3) قابل محاسبه خواهد بود [4]:

$$\begin{aligned} E_z^1 = -\frac{V_0}{h_p} \\ E_z^3 = -\frac{V_0}{h_p} \end{aligned} \quad (3)$$

بالا نویس نشان دهنده شماره لایه می‌باشد. با توجه به این‌که تکه‌های پیزوالکتریک با طول کمتر از لایه الاستیک بر روی تیر چسبانده شده با استفاده از تابع هویساید بازه محاسباتی کمیت‌های مربوط به پیزوالکتریک را با تعریف معادله (4) به صورت رابطه (4) مشخص می‌شود:

$$G(x) = H(x - L_1) - H(x - L_2) \quad (4)$$

در این تحقیق معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. انرژی کرنشی تیر پیزوالکتریک بایمورف با استفاده از رابطه (5) برای هر لایه می‌توان محاسبه نمود [4].

$$\begin{aligned} \Pi_s = & \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}^1 \varepsilon_{xx} - D_z^1 E_z^1) G(x) dz dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}^2 \varepsilon_{xx}) dz dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} (\sigma_{xx}^3 \varepsilon_{xx} - D_z^3 E_z^3) G(x) dz dx \end{aligned} \quad (5)$$

با قرار دادن معادلات (2) و (3) در معادله (5) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Pi_s = & \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}^1 \frac{\partial U}{\partial x} - z \sigma_{xx}^1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ & + \frac{1}{2} \sigma_{xx}^1 (\frac{\partial W}{\partial x})^2 + D_z^1 \frac{V_0}{h_p}) G(x) dz dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}^2 \frac{\partial U}{\partial x} - z \sigma_{xx}^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ & + \frac{1}{2} \sigma_{xx}^2 (\frac{\partial W}{\partial x})^2) dz dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} (\sigma_{xx}^3 \frac{\partial U}{\partial x} - z \sigma_{xx}^3 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ & + \frac{1}{2} \sigma_{xx}^3 (\frac{\partial W}{\partial x})^2 + D_z^3 \frac{V_0}{h_p}) G(x) dz dx \end{aligned} \quad (6)$$

با تعریف گشتاور و نیروی کششی منته به صورت معادله (7):

$$\begin{aligned} M_x^1 &= \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}^1 z) dz \\ M_x^2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}^2 z) dz \\ M_x^3 &= \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} (\sigma_{xx}^3 z) dz \\ N_x^1 &= \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx}^1 dz \\ N_x^2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx}^2 dz \\ N_x^3 &= \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \sigma_{xx}^3 dz \end{aligned} \quad (7)$$

$$M_x^2 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 (M_x^2)}{\partial x^2} = -D_{11}^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{11} z \frac{\partial U}{\partial x} dz + \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{11} z \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dz \quad (23-ب)$$

$$G(x) M_x^3 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 (G(x) M_x^3)}{\partial x^2} = -G(x) D_{11}^3 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + G(x) \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} C_{11} z \frac{\partial U}{\partial x} dz - G(x) \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} e_{31} z E_z dz + \frac{G(x)}{2} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} C_{11} z \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dz \quad (23-ج)$$

که در معادلات فوق:

$$D_{11}^1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_p} C_{11}^1 z^2 dz$$

$$D_{11}^2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{11}^2 z^2 dz$$

$$D_{11}^3 = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} C_{11}^3 z^2 dz$$

$$A_{11}^1 = \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} C_{11} dz$$

$$A_{11}^2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{11} dz$$

$$A_{11}^3 = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} C_{11} dz \quad (24)$$

اگر به لایه بالایی و پایینی پیزوالکتریک‌ها ولتاژهای ناهمسو اعمال شود، پس از جمع معادلات (22) و (23) می‌توان نوشت:

$$N_x(x) - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 (N_x(x))}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) A_{11}(x) \quad (25-الف)$$

$$M_x(x) - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 (M_x(x))}{\partial x^2} = -D_{11}(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (25-ب)$$

پس از مشتق گرفتن از معادله (16) و قرار دادن در رابطه (25-الف) می‌توان نوشت:

$$N_x(x) = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) A_{11}(x) + (e_0 a)^2 \left(m(x) \frac{\partial^3 U}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\partial m(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) \quad (26)$$

همچنین از جای‌گذاری معادله (17) در معادله (25-ب) می‌توان نوشت:

$$M_x(x) = -D_{11}(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \left[m(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{C}{b} \frac{\partial W}{\partial t} + M_p \frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} \right] - (e_0 a)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x(x) \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad (27)$$

حال با استفاده از معادله (26) جابجایی محوری محاسبه می‌شود:

$$x = 0, l \rightarrow W' = 0 \text{ یا } M_x^2 = 0$$

$$x = 0, l \rightarrow W = 0 \text{ یا } M_x^{2'} = 0$$

$$x = 0, l \rightarrow N_x^2 W' = 0 \text{ یا } W = 0$$

$$x = 0, l \rightarrow N_x^2 = 0 \text{ یا } U = 0 \quad (18)$$

که در جملات فوق:

$$m_b = h \rho_b, m_p = h_p \rho_p$$

$$m(x) = 2m_p G(x) + m_b$$

$$N(x) = N_x^2 G(x) + N_x^1 + N_x^3 G(x)$$

$$M(x) = M_x^2 G(x) + M_x^1 + M_x^3 G(x) \quad (19)$$

3- تئوری الاستیسیته غیرموضعی

در ابعاد ماکرو تنش در هر نقطه وابسته به کرنش همان نقطه می‌باشد ولی در مقیاس نانو این‌گونه نیست. در ابعاد نانو تنش در هر نقطه وابسته به کرنش تمامی نقاط جسم می‌باشد. ارینگن برای نشان دادن این تئوری معادله (20) را پیشنهاد داد. تا کنون پژوهش‌های بسیاری با استفاده از این تئوری انجام شده که حاکی از دقت مناسب آن می‌باشد [12].

$$\sigma_{ij} - (e_0 a)^2 \nabla^2 \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k \quad (20)$$

برای تیر پیزوالکتریک بایمورف می‌توان رابطه فوق را به صورت معادله (21):

$$G(x) \sigma_{xx}^1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 (G(x) \sigma_{xx}^1)}{\partial x^2} = G(x) (C_{11}^p \varepsilon_{xx} - e_{31} E_z) \quad (21-الف)$$

$$\sigma_{xx}^2 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 (\sigma_{xx}^2)}{\partial x^2} = C_{11}^E \varepsilon_{xx} \quad (21-ب)$$

$$G(x) \sigma_{xx}^3 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 (G(x) \sigma_{xx}^3)}{\partial x^2} = G(x) (C_{11}^p \varepsilon_{xx} - e_{31} E_z) \quad (21-ج)$$

با انتگرال گیری از معادلات (21) می‌توان نوشت:

$$G(x) N_x^1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 (G(x) N_x^1)}{\partial x^2} = G(x) N_E + A_{11} G(x) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - C_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{G(x)}{2} \left[\left(-\frac{h}{2} \right)^2 - \left(-\frac{h}{2} - h_p \right)^2 \right] \quad (22-الف)$$

$$N_x^2 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 N_x^2}{\partial x^2} = A_{11} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (22-ب)$$

$$G(x) N_x^3 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 (G(x) N_x^3)}{\partial x^2} = G(x) N_E + G(x) A_{11} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - G(x) C_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{h}{2} + h_p \right)^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right] \quad (22-ج)$$

همچنین از انتگرال گیری از حاصل ضرب Z در معادله (21) می‌توان نوشت:

$$G(x) M_x^1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 (G(x) M_x^1)}{\partial x^2} = -G(x) D_{11}^1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + G(x) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_p} C_{11} z \frac{\partial U}{\partial x} dz - G(x) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_p} e_{31} z E_z dz + \frac{G(x)}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_p} C_{11} z \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dz \quad (23-الف)$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{D}_{11}\bar{W}_d'''' - 2\bar{D}_{11}'\bar{W}_d'''' - \bar{D}_{11}''\bar{W}_d'' \\
& + \mu^2[\bar{C}\bar{W}_d'' + \bar{G}''\bar{M}_{AC} - \frac{\eta^2}{2}[(2\bar{W}_s'''' \int_0^1 \bar{W}_s'\bar{W}_d'd\bar{x} \\
& + 2\bar{W}_d'''' \int_0^1 \bar{W}_d'\bar{W}_s'd\bar{x} + \bar{W}_s'''' \int_0^1 \bar{W}_d'^2d\bar{x} \\
& + \bar{W}_d'''' \int_0^1 \bar{W}_d'^2d\bar{x} + \bar{W}_d'''' \int_0^1 \bar{W}_s'^2d\bar{x}) \\
& + \frac{4A_{11}'(x)}{A_{11}}\bar{W}_s'''' \int_0^1 \bar{W}_s'\bar{W}_d'd\bar{x} \\
& + \frac{2A_{11}'(x)}{A_{11}}\bar{W}_s'''' \int_0^1 \bar{W}_d'^2d\bar{x} \\
& + \frac{4A_{11}'(x)}{A_{11}}\bar{W}_d'''' \int_0^1 \bar{W}_s'\bar{W}_d'd\bar{x} \\
& + \frac{2A_{11}'(x)}{A_{11}}\bar{W}_d'''' \int_0^1 \bar{W}_s'^2d\bar{x} \\
& + \frac{2A_{11}'(x)}{A_{11}}\bar{W}_d'''' \int_0^1 \bar{W}_d'^2d\bar{x} \\
& + 2\bar{W}_s''\frac{A_{11}''(x)}{A_{11}} \int_0^1 \bar{W}_s'\bar{W}_d'd\bar{x} \\
& + \frac{A_{11}''(x)}{A_{11}}\bar{W}_s'' \int_0^1 \bar{W}_d'^2d\bar{x} \\
& + \frac{2A_{11}''(x)}{A_{11}}\bar{W}_d'' \int_0^1 \bar{W}_s'\bar{W}_d'd\bar{x} \\
& + \frac{A_{11}''(x)}{A_{11}}\bar{W}_d'' \int_0^1 \bar{W}_s'^2d\bar{x} \\
& + \frac{A_{11}''(x)}{A_{11}}\bar{W}_d'' \int_0^1 \bar{W}_d'^2d\bar{x}] + \frac{\eta^2}{2}[2\bar{W}_s'' \int_0^1 \bar{W}_s'\bar{W}_d'd\bar{x} \\
& + \bar{W}_s'' \int_0^1 \bar{W}_d'^2d\bar{x} + 2\bar{W}_d'' \int_0^1 \bar{W}_s'\bar{W}_d'd\bar{x} \\
& + \bar{W}_d'' \int_0^1 \bar{W}_s'^2d\bar{x} \\
& + \bar{W}_d'' \int_0^1 \bar{W}_d'^2d\bar{x}] - \bar{C}\bar{W}_d - \bar{M}_{AC}\bar{G}'' \\
& = \bar{m}(x)(\ddot{\bar{W}}_d - \mu^2\ddot{\bar{W}}_d'') \quad (36)
\end{aligned}$$

برای محاسبه خیز استاتیکی ابتدا با صرف نظر از مشتقات زمانی معادله به صورت رابطه (37) باز نویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}
& -(\bar{D}_{11}(x)\frac{\partial^4\bar{W}_s}{\partial\bar{x}^4} + 2\frac{\partial^3\bar{W}_s}{\partial\bar{x}^3}\frac{\partial\bar{D}_{11}(x)}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial^2\bar{W}_s}{\partial\bar{x}^2}\frac{\partial^2\bar{D}_{11}(x)}{\partial\bar{x}^2}) \\
& + (\mu)^2\left[\bar{M}_{DC}\frac{\partial^4\bar{G}(x)}{\partial\bar{x}^4} - \frac{\eta^2}{2}\left(\frac{\partial^4\bar{W}_s}{\partial\bar{x}^4} + \frac{2}{A_{11}}\frac{\partial^3\bar{W}_s}{\partial\bar{x}^3}\frac{\partial\bar{A}_{11}(x)}{\partial\bar{x}} + \right.\right. \\
& \left.\left. + \frac{1}{A_{11}}\frac{\partial^2\bar{W}_s}{\partial\bar{x}^2}\frac{\partial^2\bar{A}_{11}(x)}{\partial\bar{x}^2}\right)\int_0^1\left(\frac{\partial\bar{W}_s}{\partial\bar{x}}\right)^2d\bar{x}\right] + \\
& \frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2\bar{W}_s}{\partial\bar{x}^2}\int_0^1\left(\frac{\partial\bar{W}_s}{\partial\bar{x}}\right)^2d\bar{x} - \bar{M}_{DC}\frac{\partial^2\bar{G}(x)}{\partial\bar{x}^2} = 0 \quad (37)
\end{aligned}$$

با استفاده از روش گلرکین خیز به صورت زیر تقریب زده می‌شود [4]:

$$\begin{aligned}
\bar{W}_s(x) &= a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) + a_3\psi_3(x) + \dots \\
a_n\psi_n(x) &= \sum_{i=1}^n a_i\psi_i(x) \quad (38)
\end{aligned}$$

که n شماره مود، a_i ضرایب ثابت که با استفاده از عملیات جبری محاسبه می‌شوند و $\psi_i(x)$ به صورت رابطه (39) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= (1 - H(x - L_1))\phi_1(x) \\
&+ (H(x - L_1) - H(x - L_2))\phi_2(x) \\
&+ H(x - L_2)\phi_3(x) \quad (39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^L \frac{\partial U}{\partial x} dx &= [U]_0^L = \int_0^L \frac{N_x(x)}{A_{11}(x)} dx - \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dx \\
&- (e_0 a)^2 \left[\frac{m(x)}{A_{11}(x)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} [U]_0^L \right. \\
&+ \left. \int_0^L \frac{1}{A_{11}(x)} \left(\frac{\partial m(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) dx \right] \quad (28)
\end{aligned}$$

شرایط مرزی برای جابجایی تیر به صورت رابطه (29) می‌باشد:

$$x = 0, L \rightarrow U = 0 \quad (29)$$

با اعمال شرایط مرزی (29) در معادله (28) و با توجه به ناچیز بودن اینرسی محوری، نیروی کششی به صورت معادله (30) بدست خواهد آمد [10]:

$$N_x(x) = \frac{A_{11}(x)}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dx \quad (30)$$

با توجه به ناچیز بودن اینرسی محوری و جای گذاری معادله (17) و (30) در رابطه (27) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
M_x(x) &= -D_{11}(x)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \left[m(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{C}{b}\frac{\partial W}{\partial t} \right. \\
&+ \left. M_p\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left(\frac{A_{11}(x)}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dx \right) \right] \quad (31)
\end{aligned}$$

با جای گذاری معادلات (31) و (30) در معادله (17) معادله ارتعاش عرضی تیر به صورت رابطه (32) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
& -\left(D_{11}(x)\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}\frac{\partial D_{11}(x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 D_{11}(x)}{\partial x^2} \right) \\
& + (e_0 a)^2 \left[\frac{C}{b}\frac{\partial^3 W}{\partial t\partial x^2} + M_p\frac{\partial^4 G(x)}{\partial x^4} \right. \\
& - \frac{1}{2L} \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} A_{11}(x) + 2\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}\frac{\partial A_{11}(x)}{\partial x} \right. \\
& + \left. \left. \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 A_{11}(x)}{\partial x^2} \right) \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dx \right] \\
& + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left(\frac{A_{11}(x)}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dx \right) - \frac{C}{b}\frac{\partial W}{\partial t} \\
& - M_p\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} = m(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - m(x)(e_0 a)^2 \frac{\partial^4 W}{\partial t^2\partial x^2} \quad (32)
\end{aligned}$$

برای بی بعد کردن معادله (32) عبارات زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
\bar{W} &= \frac{W}{h}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{M}_p = \frac{M_p}{A_{11}h}, \quad \mu = \frac{e_0 a}{L}, \\
\bar{D}_{11} &= \frac{D_{11}}{A_{11}L^2}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tau = L\sqrt{\frac{m_b}{A_{11}}}, \quad \bar{c} = \frac{L^2 c}{bA_{11}\tau}, \\
\bar{m}(x) &= 1 + \frac{m_p}{m_b} G(x) \quad (33)
\end{aligned}$$

پس از جای گذاری عبارات (33) در معادله (32) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
& -\left(\bar{D}_{11}(x)\frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \bar{x}^4} + 2\frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \bar{x}^3}\frac{\partial \bar{D}_{11}(x)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial^2 \bar{D}_{11}(x)}{\partial \bar{x}^2} \right) \\
& + \mu^2 \left[\bar{C}\frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \bar{t}\partial \bar{x}^2} + \bar{M}_{AC}\frac{\partial^4 \bar{G}(x)}{\partial \bar{x}^4} - \frac{\eta^2}{2}\left(\frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \bar{x}^4} \bar{A}_{11}(x) \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{2}{A_{11}}\frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \bar{x}^3}\frac{\partial \bar{A}_{11}(x)}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{A_{11}}\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial^2 \bar{A}_{11}(x)}{\partial \bar{x}^2} \right) \int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{x}}\right)^2 d\bar{x} \right. \\
& + \left. \frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{x}}\right)^2 d\bar{x} - \bar{C}\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{t}} \right. \\
& - \left. \bar{M}_p\frac{\partial^2 \bar{G}(x)}{\partial \bar{x}^2} = \bar{m}(x)\left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{t}^2} - \mu^2\frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \bar{t}^2\partial \bar{x}^2}\right) \quad (34)
\end{aligned}$$

با اعمال ولتاژ به صورت استاتیکی و دینامیکی به صورت هم زمان عبارت خیز و گشتاور به صورت معادله (35) در نظر گرفته [13]:

$$\begin{aligned}
\bar{W} &= \bar{W}_s + \bar{W}_d \\
\bar{M}_p &= \bar{M}_{DC} + \bar{M}_{AC} \quad (35)
\end{aligned}$$

با جای گذاری معادله (35) در معادله (34) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
& \left(- \int_0^1 \bar{D}_{11}(\bar{x}) \psi_j \sum_{i=0}^n a_i \psi_i'''' dx \right. \\
& - 2 \int_0^1 \psi_j \sum_{i=0}^n a_i \psi_i''' \bar{D}_{11}'(\bar{x}) dx \\
& - \int_0^1 \psi_j \sum_{i=0}^n a_i \psi_i'' \bar{D}_{11}''(\bar{x}) dx \\
& + \left[- \int_0^1 \frac{\mu^2 \eta^2}{2} \psi_j \sum_{i=0}^n a_i \psi_i'''' \left(\int_0^1 \sum_{i=0}^n (a_i \psi_i')^2 dx \right) dx \right. \\
& - \int_0^1 \frac{\mu^2 A_{11}'(\bar{x})}{A_{11}} \psi_j \sum_{i=0}^n a_i \psi_i'''' \left(\int_0^1 \sum_{i=0}^n (a_i \psi_i')^2 dx \right) dx \\
& - \int_0^1 \frac{\mu^2 \eta^2 A_{11}''(\bar{x})}{2 A_{11}} \psi_j \sum_{i=0}^n a_i \psi_i'''' \left(\int_0^1 \sum_{i=0}^n (a_i \psi_i')^2 dx \right) dx \\
& + \left. \int_0^1 \frac{\eta^2}{2} \psi_j \sum_{i=0}^n a_i \psi_i'' \left(\int_0^1 \sum_{i=0}^n (a_i \psi_i')^2 dx \right) dx \right] \\
& = \bar{M}_{DC} \left[\int_0^1 \bar{G}'' \psi_j dx - \int_0^1 \mu^2 \bar{G}'''' \psi_j dx \right]
\end{aligned} \quad (45)$$

پس از انجام محاسبات جبری ضرایب مجهول a_i بدست خواهند آمد و با جای گذاری ضرایب a_i در معادله (38) خیز استاتیکی محاسبه خواهد شد. با جای گذاری $w(x, t) = \varphi(\bar{x}) q(\bar{t})$ در معادله (36) و ضرب $\varphi(\bar{x})$ و سپس انتگرال گیری از صفر تا یک و مرتب سازی براساس ضرایب $\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \ddot{\bar{q}}, q^3, q^2, q$ می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
& q \left[- \int_0^1 \bar{D}_{11} \psi_j \psi_j'''' dx - \int_0^1 \bar{D}_{11}'' \psi_j \psi_j'' dx \right. \\
& - \eta^2 \mu^2 \int_0^1 \psi_j \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i'''' \right) \int_0^1 \psi_j' \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i' \right) dx dx \\
& - 2 \int_0^1 \bar{D}_{11}' \psi_j \psi_j''' dx \\
& - \frac{\eta^2 \mu^2}{2} \int_0^1 \psi_j \psi_j'''' \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i' \right)^2 dx dx \\
& - \frac{2 \eta^2 \mu^2}{A_{11}} \int_0^1 A_{11}'(\bar{x}) \psi_j \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i'''' \right) \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i' \right) \psi' dx dx \\
& - \frac{\eta^2 \mu^2}{2 A_{11}} \int_0^1 \psi_j'' A_{11}''(\bar{x}) \psi_j \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i' \right)^2 dx dx \\
& - \frac{\eta^2 \mu^2}{A_{11}} \int_0^1 A_{11}'(\bar{x}) \psi_j \psi_j''' \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i' \right)^2 dx dx \\
& + \eta^2 \int_0^1 \psi_j \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i'' \right) \int_0^1 \psi_j' \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i' \right) dx dx \\
& + \frac{\eta^2}{2} \int_0^1 \psi_j \psi_j'' \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i' \right)^2 dx dx \\
& - \frac{\eta^2 \mu^2}{A_{11}} \int_0^1 A_{11}''(\bar{x}) \psi_j \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i'' \right) \int_0^1 \psi_j' \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i' \right) dx dx \\
& + q^2 \left[- \eta^2 \mu^2 \int_0^1 \psi_j \psi_j'''' \int_0^1 \psi_j' \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i' \right) dx dx \right. \\
& - \frac{\eta^2 \mu^2}{2} \int_0^1 \psi_j \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i'''' \right) \int_0^1 \psi_j'^2 dx dx \\
& - \left. \frac{\eta^2 \mu^2}{A_{11}} \int_0^1 A_{11}'(x) \psi_j \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i'''' \right) \int_0^1 \psi_j'^2 dx dx \right]
\end{aligned}$$

که ϕ_i توابع آزمون می باشند.

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= C_1 \sin(\gamma_1 x) + C_2 \cos(\gamma_1 x) + C_3 \sinh(\gamma_1 x) \\
&+ C_4 \cosh(\gamma_1 x) \\
\phi_2(x) &= C_5 \sin(\gamma_2 x) + C_6 \cos(\gamma_2 x) + C_7 \sinh(\gamma_2 x) \\
&+ C_8 \cosh(\gamma_2 x) \\
\phi_3(x) &= C_9 \sin(\gamma_3 x) + C_{10} \cos(\gamma_3 x) + C_{11} \sinh(\gamma_3 x) \\
&+ C_{12} \cosh(\gamma_3 x)
\end{aligned} \quad (40)$$

γ_2 و γ_3 را می توان بر حسب γ_1 باز نویسی نمود [4]:

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= \left[\frac{(m_b + m_p) E_b I_b}{m_b (E_b I_b + E_p I_p)} \right]^{\frac{1}{4}} \gamma_1 \\
\gamma_3 &= \left[\frac{m_p E_b I_b}{m_b E_p I_p} \right]^{\frac{1}{4}} \gamma_1
\end{aligned} \quad (41)$$

به منظور محاسبه γ_1 ابتدا چهار شرط مرزی و هشت شرط پیوستگی زیر به معادلات (40) اعمال می شود:

$$\begin{aligned}
\phi_1(0) &= \frac{d\phi_1(0)}{dx} = 0 \\
\phi_3(L) &= \frac{d\phi_3(L)}{dx} = 0 \\
\phi_1(L_1) &= \phi_2(L_1) \\
\frac{d\phi_1(L_1)}{dx} &= \frac{d\phi_2(L_1)}{dx} \\
(EI)_1 \frac{d^2 \phi_1(L_1)}{dx^2} &= (EI)_2 \frac{d^2 \phi_2(L_1)}{dx^2} \\
(EI)_1 \frac{d^3 \phi_1(L_1)}{dx^3} &= (EI)_2 \frac{d^3 \phi_2(L_1)}{dx^3} \\
\phi_2(L_2) &= \phi_3(L_2) \\
\frac{d\phi_2(L_2)}{dx} &= \frac{d\phi_3(L_2)}{dx} \\
(EI)_2 \frac{d^2 \phi_2(L_2)}{dx^2} &= (EI)_3 \frac{d^2 \phi_3(L_2)}{dx^2} \\
(EI)_2 \frac{d^3 \phi_2(L_2)}{dx^3} &= (EI)_3 \frac{d^3 \phi_3(L_2)}{dx^3}
\end{aligned} \quad (42)$$

سپس معادلات به صورت معادله (43) باز نویسی می گردد:

$$[A]_{12 \times 12} [c]_{12 \times 1} = 0 \quad (43)$$

از محاسبه ریشه های معادله دترمینان ماتریس A ، γ_1 برای مودهای مختلف بدست می آید سپس جهت محاسبه ضرایب C_1 الی C_{12} هر مود، γ_1 مربوط به مود مورد نظر در معادله (34) قرار داده می شود.

I_b, I_p ممان اینرسی پیزوالکتریک و تیر و همچنین M_{DC}, M_{AC} گشتاور دینامیکی و استاتیکی می باشند که از روابط (44) حساب می شوند:

$$\begin{aligned}
I_b &= \frac{h^3}{12} \\
I_p &= \frac{h^3}{12} + h_p \left(\frac{h_p + h}{2} \right)^2 \\
M_{DC} &= V_{DC} e_{31} (h + h_p) \\
M_{AC} &= V_{AC} e_{31} (h + h_p)
\end{aligned} \quad (44)$$

پس از جای گذاری معادله (38) در (37) و ضرب کل معادله در ψ_1 و انتگرال گیری از صفر تا یک می توان نوشت:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = 0 \quad (53)$$

با جایگذاری معادله (47) در (53) خواهیم داشت:

$$J(q) = \int_0^{T/4} \left[-\frac{1}{2} \dot{q}^2 + \omega_n^2 \frac{q^2}{2} + \beta_1 \frac{q^3}{3} + \beta_2 \frac{q^4}{4} \right] dt \quad (54)$$

با جایگذاری راه حل تقریبی $q(t) = \alpha \cos(\omega t)$ در معادله (54) و انتقال $\theta = \omega t$ می توان نوشت:

$$J(\alpha, \omega) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2} \alpha^2 \omega^2 \sin^2 \theta + \frac{\omega_n^2}{2} \alpha^2 \cos^2 \theta + \frac{\beta_1}{3} \alpha^3 \cos^3 \theta + \frac{\beta_2}{4} \alpha^4 \cos^4 \theta \right] d\theta \quad (55)$$

با توجه به شرایط تعادل $\frac{dJ}{d\alpha} = 0$ می توان نوشت:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\pi/2} [-\alpha \omega^2 \sin^2 \theta + \omega_n^2 \alpha \cos^2 \theta + \beta_1 \alpha^2 \cos^3 \theta + \beta_2 \alpha^3 \cos^4 \theta] d\theta = 0 \quad (56)$$

از رابطه فوق می توان نوشت:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^{\pi/2} [\omega_n^2 \cos^2 \theta + \beta_1 \alpha \cos^3 \theta + \beta_2 \alpha^2 \cos^4 \theta] d\theta}{\int_0^{\pi/2} [\sin^2 \theta] d\theta} \quad (57)$$

پس از انتگرال گیری و ساده سازی فرکانس طبیعی غیرخطی براساس الاستیسیته غیرموضعی و تئوری تیر اولیور برنولی به صورت معادله (58) نوشته می شود:

$$\omega^2 = \omega_n^2 + \frac{8}{3\pi} \alpha \beta_1 + \frac{3}{4} \beta_2 \alpha^2 \quad (58)$$

نسبت فرکانس غیرخطی به خطی می توان به صورت معادله (59) نوشت:

$$\frac{\omega_{NL}}{\omega_L} = \sqrt{1 + \frac{8}{3\pi} \alpha \frac{\beta_1}{\omega_n^2} + \frac{3}{4} \frac{\beta_2}{\omega_n^2} \alpha^2} \quad (59)$$

5- بحث و نتایج

در این بخش نتایج بدست آمده از حل معادلات ارائه می گردد. جنس پیزوالکتریک PZT-5 در نظر گرفته شده که مشخصات آن در جدول 1 ارائه شده است [4].

همگرایی خیز تیر با افزایش تعداد و نوع شکل مودهای مورد استفاده در روش گلرکین به ازای ولتاژ 0.1 ولت در جدول 2 و شکل 2 ارائه شده است همان طور که مشاهده می شود با افزایش تعداد مودها، پاسخ بدست آمده به نتیجه روش اجزاء محدود نزدیک می شود. با توجه به مقارن بودن تیر مورد بررسی تاثیر استفاده از مودهای مقارن نیز بر روی نتایج بررسی شده است. مشاهده می شود که استفاده از تعداد بیشتری از شکل مود مقارن نتیجه بهتری حاصل می شود [1].

با توجه به مقارن بودن لایه های پیزوالکتریک مودهای نامقارن یا مودهای زوج تاثیر چندانی بر روی نمودار خیز ندارند. در شکل 3 خیز تیر شبیه سازی شده در نرم افزار اجزاء محدود با استفاده از المان صفحه ای 182 مدل شده است.

در شکل 4 تغییرات خیز برای مقادیر مختلف ضریب مقیاس بررسی شده است. با افزایش ضریب مقیاس ماکزیمم خیز افزایش می یابد یا به عبارت دیگر سختی تیر کم می شود. در شکل 5 تغییرات خیز با اعمال ولتاژهای متفاوت مورد بررسی قرار گرفته که با افزایش ولتاژ خیز تیر افزایش یافته است.

$$\begin{aligned} & -\frac{2\eta^2\mu^2}{A_{11}} \int_0^1 \psi_j A'_{11}(x) \psi_j''' \int_0^1 \psi_j' \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i' \right) dx dx \\ & -\frac{\eta^2\mu^2}{2A_{11}} \int_0^1 \psi_j A'_{11}(x) \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i'' \right) \int_0^1 \psi_j'^2 dx dx \\ & -\frac{\eta^2\mu^2}{A_{11}} \int_0^1 A'_{11}(x) \psi_j'' \psi_j \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i' \right) \psi_j' dx dx \\ & + \frac{\eta^2}{2} \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i'' \right) \psi_j \int_0^1 \psi_j'^2 dx dx \\ & + \eta^2 \int_0^1 \psi_j \psi_j'' \int_0^1 \psi_j' \left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i' \right) dx dx \\ & + q^3 \left[-\frac{\eta^2\mu^2}{2} \int_0^1 \psi_j \psi_j''' \int_0^1 \psi_j'^2 dx dx \right. \\ & \left. -\frac{\eta^2\mu^2}{A_{11}} \int_0^1 A'_{11}(x) \psi_j''' \psi_j \int_0^1 \psi_j'^2 dx dx \right. \\ & \left. -\frac{\eta^2\mu^2}{2A_{11}} \int_0^1 A'_{11}(x) \psi_j'' \psi_j \int_0^1 \psi_j'^2 dx dx \right. \\ & \left. + \frac{\eta^2}{2L} \int_0^1 \psi_j'' \psi_j \int_0^1 \psi_j'^2 dx dx \right] \\ & + \dot{q} \bar{C} \left[\mu^2 \int_0^1 \psi_j \psi_j'' dx dx - \int_0^1 \psi_j'^2 dx dx \right] \\ & + \ddot{q} \left[\mu^2 \int_0^1 m \psi_j \psi_j'' dx dx - \int_0^1 m \psi_j'^2 dx dx \right] \\ & = M_{AC} \left[\int_0^1 G'' \psi_j dx - \mu^2 \int_0^1 G'''' \psi_j dx \right] \end{aligned} \quad (46)$$

جهت انجام تحلیل ارتعاشات آزاد از ضرایب دمپر و گشتاور تحریک صرف نظر کرده و معادله (45) به صورت (47) بازنویسی می شود:

$$\ddot{q} + \omega_n^2 q + \beta_1 q^2 + \beta_2 q^3 = 0 \quad (47)$$

4- حل معادله به روش تغییرات هی

هی روشی بسیار کار آمد و آسان برای حل معادلات غیرخطی می باشد. اگر شکل کلی معادله دیفرانسیل غیرخطی برای ارتعاش آزاد به صورت معادله (48) در نظر گرفته می شود [14]:

$$\ddot{q} + f(q) = 0 \quad (48)$$

تغییرات معادله (48) را می توان به روش نیمه معکوس به صورت معادله (49) نوشت:

$$J(q) = \int_0^{T/4} \left[-\frac{1}{2} \dot{q}^2 + F(q) \right] dt \quad (49)$$

که T دوره نوسانگر غیرخطی است و $\frac{\partial F}{\partial q} = f$ می باشد. راه حل تقریبی به صورت معادله (50) در نظر گرفته می شود:

$$q(t) = \alpha \cos \omega t \quad (50)$$

ω فرکانس نوسانگر غیرخطی و $\alpha = \frac{W_{\max}}{h_p}$ می باشد. با جایگذاری معادله (50) در (49) می توان نوشت:

$$J(q) = \int_0^{T/4} \left[-\frac{1}{2} \alpha^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + F(\alpha \cos \omega t) \right] dt \quad (51)$$

با انتقال $\theta = \omega t$ و پس از جایگذاری در معادله (51):

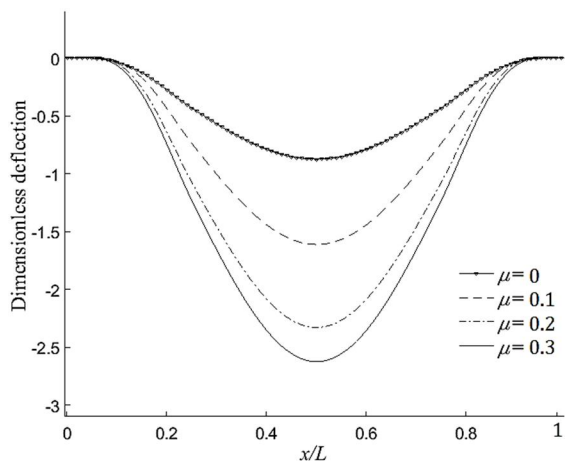
$$J(q) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2} \alpha^2 \omega^2 \sin^2 \theta + F(\alpha \cos \theta) \right] d\theta \quad (52)$$

با توجه به روش ریتز برای شرایط پایدار باید داشته باشیم $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0$ و $\frac{\partial J}{\partial \omega} = 0$ اما با این حال نتایج نادرستی برای فرکانس طبیعی غیرخطی می دهد. هی شرایط مرزی را به صورت معادله (53) اصلاح کرده [14]:

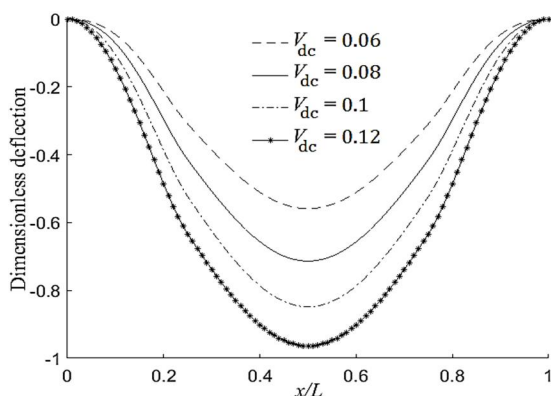
جدول 1 مشخصات مواد و ابعاد هندسی

Table 1 Material and geometric properties

مقدار	واحد	کمیت
59	GPa	E_p
105	GPa	E_b
-12.54	Cm^{-2}	e_{31}
7800	kg m^{-3}	ρ_e
9000	kg m^{-3}	ρ_p
240×10^{-9}	m	L
8×10^{-9}	m	b
4×10^{-9}	m	h_p
4×10^{-9}	m	h
207	GPa	E_{Steel}
70	GPa	E_{Alu}
128	GPa	E_{Cop}
7800	kg m^{-3}	ρ_{Steel}
2700	kg m^{-3}	ρ_{Alu}
8900	kg m^{-3}	ρ_{Cop}

Fig. 4 Deflection of the beam for different values of nonlocal parameter and $v_{DC}=0.1V$

شکل 4 خیز تیر برای $v_{DC}=0.1V$ به ازای مقادیر مختلف ضریب مقیاس

Fig. 5 Beam deflection for $\mu = 0$ and different values of the applied voltage

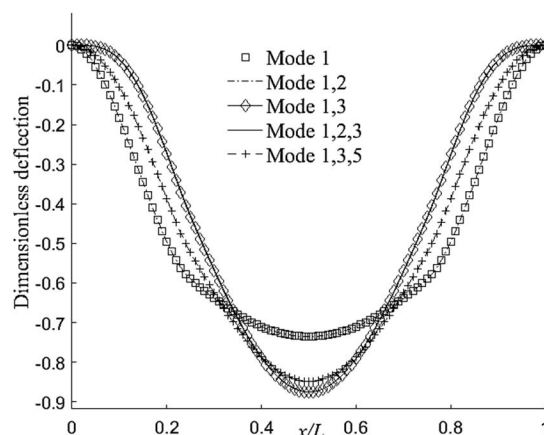
شکل 5 خیز تیر برای $\mu = 0$ و مقادیر مختلف ولتاژ

فرکانس طبیعی محاسبه شده به روش گلرکین و اجزاء محدود برای سه مود نخست به ازای دو طول مختلف پیزوالکتریک در جدول 3 ارائه شده است. میان نتایج اختلاف کمی مشاهده می‌شود که حاکی از صحت معادلات می‌باشد. فرکانس طبیعی دو مود نخست با افزایش طول پیزوالکتریک افزایش یافته در حالی که فرکانس طبیعی مود سوم کاهش می‌یابد. علت این مسئله آن است که در واقع در مود سوم با افزایش طول پیزوالکتریک، جرم معادل تیر، بیش از سختی معادل آن افزایش می‌یابد. این قضیه در شکل 6 و 7 نشان داده شده است.

جدول 3 مقایسه فرکانس طبیعی خطی (Hz) محاسبه شده به روش گلرکین و روش اجزاء محدود

Table 3 Comparing the natural frequency (Hz) calculated by the Galerkin method and FEM

مود	طول پیزوالکتریک	روش گلرکین	روش اجزاء محدود	درصد اختلاف
		$\mu = 0$		
1	$L_1 = 0.25L$	2.8345e8	2.8300e8	0.13
2	$L_2 = 0.75L$	7.3422e8	7.2612e8	1.1
3		1.9682e9	1.9543e9	0.71
1	$L_1 = 0.2L$	3.1215e8	3.1208e8	0.008
2	$L_2 = 0.8L$	8.2486e8	8.2516e8	0.036
3		1.8417e9	1.8234e9	0.99

Fig. 2 Convergence study of the deflection in the galerkin method for $v_{DC}=0.1V$

شکل 2 بررسی همگرایی خیز در روش گلرکین به ازای $v_{DC}=0.1V$

جدول 2 مقادیر خیز بیشینه محاسبه شده به روش گلرکین و روش اجزاء محدود به ازای $v_{DC}=0.1V$ Table 2 maximum values of the deflection calculated by Galerkin method and FEM for $v_{DC}=0.1V$

مدهای استفاده شده	خیز گلرکین [nm]	خیز اجزاء محدود [nm]	درصد اختلاف
1	2.94e-9	3.35e-9	12%
2,1	2.94e-9	3.35e-9	12%
3,1	3.5e-9	3.35e-9	4.3%
3,2,1	3.5e-9	3.35e-9	4.3%
5,3,1	3.39e-9	3.35e-9	1.3%

NODAL SOLUTION

STEP=1
SUB=1
TIME=1
USUM (AVG)
RSYS=0
DMX=.335E-08
SMX=.335E-08

Fig. 3 Calculated deflection of the beam using FEM for $v_{DC}=0.1V$

شکل 3 خیز محاسبه شده برای تیر با استفاده از نرم افزار اجزاء محدود به ازای $v_{DC}=0.1V$

برای ضرایب مقیاس مختلف نشان داده شده است. با افزایش ولتاژ مستقیم تیر دچار خیز استاتیکی و کشیدگی تار خنثی و افزایش سختی می‌شود در نتیجه همان‌طور که در شکل 8 مشخص می‌باشد با افزایش ولتاژ، فرکانس خطی افزایش پیدا می‌کند. شیب افزایش فرکانس طبیعی در اثر افزایش ولتاژ مستقیم اعمالی ابتدا زیاد بوده و سپس با شیب کمتری به رشد خود ادامه می‌دهد. همچنین با افزایش ضریب مقیاس، شیب افزایش فرکانس طبیعی در اثر اعمال ولتاژ مستقیم بیشتر می‌شود.

در ابتدای شکل 8 در ولتاژ خاصی فرکانس طبیعی خطی برای چند ضریب مقیاس متفاوت مساوی می‌شود.

در شکل 9 با افزایش ولتاژ، سختی تیر و به تبع آن فرکانس طبیعی خطی افزایش می‌یابد که در نتیجه باعث کاهش نسبت فرکانسی می‌شود.

در شکل 10 تغییرات نسبت فرکانسی مود اول برحسب به دامنه بی‌بعد به ازای طول پیزوالکتریک $L_1=0.25L$ ، $L_2=0.75L$ و ولتاژ مستقیم صفر و ضرایب مختلف مقیاس نشان داده شده است. با افزایش ضریب مقیاس شیب افزایش این نمودار بیشتر می‌شود.

در شکل 11 تغییرات نسبت فرکانسی با تغییر طول تیر نشان داده شده است. در این نمودار مشاهده می‌شود با افزایش طول تیر نسبت فرکانسی افزایش یافته است.

در شکل 11 با افزایش طول تیر فرکانس طبیعی خطی تیر بلندتر کاهش یافته است و در نتیجه نسبت فرکانس غیرخطی به خطی برای تیر بلندتر بیشتر می‌باشد. در شکل 12 تغییرات نسبت فرکانسی برحسب دامنه بی‌بعد و به ازای تغییرات طول پیزوالکتریک قابل مشاهده می‌باشد. مشاهده می‌شود که با افزایش طول پیزوالکتریک نسبت فرکانسی کاهش می‌یابد، که علت آن افزایش بیشتر فرکانس خطی در مقایسه با فرکانس غیرخطی می‌باشد. در شکل 13 نسبت فرکانسی برحسب دامنه بی‌بعد به ازای مقادیر مختلف با ضخامت پیزوالکتریک مورد بررسی قرار گرفته است.

جدول 4 مقادیر فرکانس طبیعی خطی [MHz] تیر برای $\frac{h_p}{h_b} = 0.2$ ، $\frac{L}{h_b} = 20$ و ضرایب مختلف مقیاس

Table 4 The values of linear natural frequency [MHz] of the beam for $\frac{h_p}{h_b} = 0.2$ ، $\frac{L}{h_b} = 20$ and different values of nonlocal parameter

ضریب مقیاس μ	تحقیق حاضر	مرجع [9]	درصد اختلاف
0	34.6781	34.6783	0.00
0.1	32.7236	33.2842	1.68
0.2	28.3894	29.9135	5.1

جدول 5 فرکانس طبیعی خطی بی‌بعد برای مقادیر مختلف ضریب مقیاس و طول پیزوالکتریک

Table 5 The values of dimensionless linear natural frequency for different values of nonlocal parameters and piezoelectric length

مُد	طول پیزوالکتریک	ضریب مقیاس $\mu = 0$	ضریب مقیاس $\mu = 0.1$	ضریب مقیاس $\mu = 0.2$	ضریب مقیاس $\mu = 0.3$
1	$L_1 = 0.25L$	0.125	0.120	0.108	0.094
2	$L_2 = 0.75L$	0.324	0.283	0.216	0.165
3		0.869	0.637	0.412	0.293
1	$L_1 = 0.2L$	0.135	0.129	0.115	0.099
2	$L_2 = 0.8L$	0.364	0.318	0.242	0.185
3		0.813	0.609	0.400	0.286

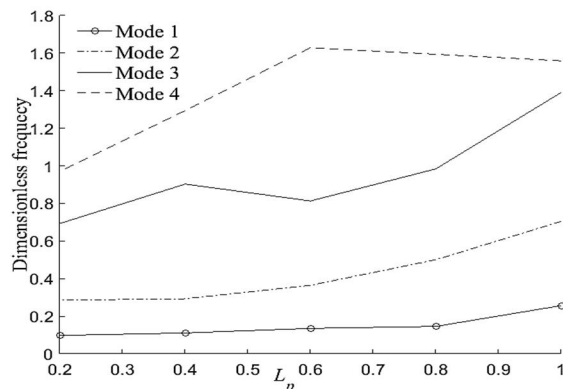


Fig. 6 Effect of the length of piezoelectric layer which is located at the center of the beam on the first four dimensionless linear natural frequencies

شکل 6 بررسی اثر طول پیزوالکتریک واقع در وسط تیر بر فرکانس طبیعی خطی بی‌بعد چهار مود اول

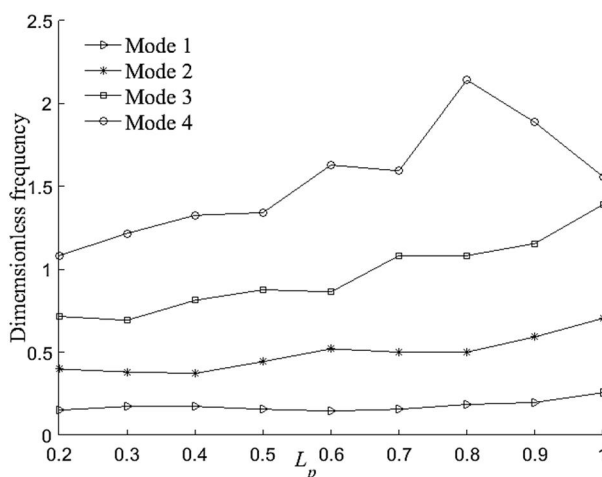


Fig. 7 Study of different length of piezoelectric layer located at the corner of the beam on the first four dimensionless linear natural frequencies

شکل 7 بررسی اثر طول پیزوالکتریک واقع در گوشه تیر بر فرکانس طبیعی خطی بی‌بعد برای چهار مود اول

در شکل 6 و 7 تغییرات فرکانس طبیعی با تغییر طول پیزوالکتریک نشان داده شده است. در شکل 6 محور افقی نمودار، طول پیزوالکتریکی را که در وسط تیر چسبانده شده نشان می‌دهد و در شکل 7 محور افقی نمودار طول پیزوالکتریک چسبانده شده در گوشه تیر را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل 6 مشخص می‌باشد در مود اول و دوم با افزایش طول پیزوالکتریک فرکانس طبیعی روند افزایشی داشته اما در مود سوم و چهارم اینگونه نمی‌باشد. جهت صحت‌سنجی تغییرات فرکانس طبیعی با تغییر ضرایب مقیاس، از مرجع [9] استفاده شده که نتایج آن در جدول 4 قابل مشاهده می‌باشد. در جدول 5 تغییرات فرکانس طبیعی خطی برای سه مود اول با تغییرات دو مولفه طول پیزوالکتریک چسبانده شده در وسط تیر و ضریب مقیاس مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که در هر سه مود با افزایش ضریب مقیاس، فرکانس طبیعی خطی کاهش می‌یابد. در مود سوم کاهش فرکانس شدیدتر از دو مود اول می‌باشد. کاهش طول پیزوالکتریک باعث افزایش فرکانس طبیعی مود سوم تیر شده است. با افزایش ضریب مقیاس درصد اختلاف فرکانس مود سوم کمتر می‌شود.

در شکل 8 تغییرات فرکانس طبیعی خطی بی‌بعد با اعمال ولتاژ مستقیم

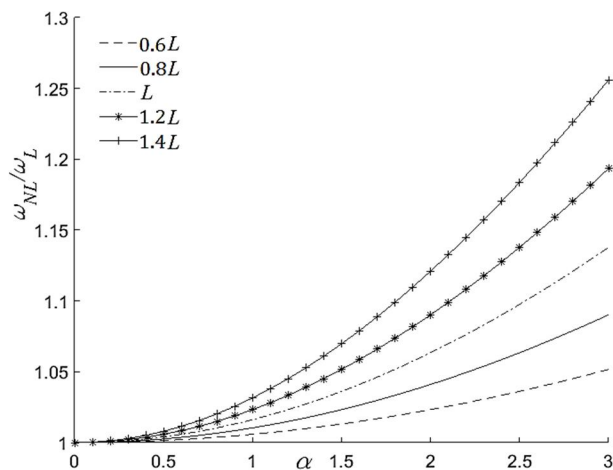


Fig. 11 Variation of the first mode frequency ratio versus the dimensionless amplitude for different values of beam length, $v_{DC}=0$, $L_1=0.25L$, $L_2=0.75L$ and $\mu = 0$

شکل 11 تغییرات نسبت فرکانسی مود اول برحسب دامنه بی بعد به ازای مقادیر مختلف طول تیر، $\mu = 0$ و $v_{DC}=0$ ، $L_2=0.75L$ ، $L_1=0.25L$

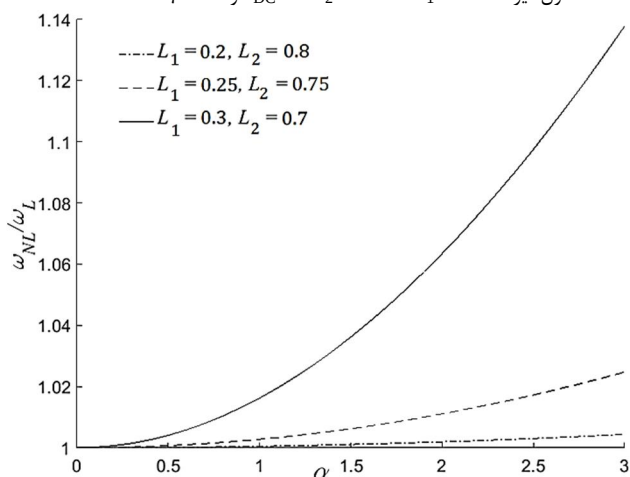


Fig. 12 Variation of the first mode frequency ratio versus the dimensionless amplitude for different lengths of piezoelectric layer, $v_{DC}=0$ and $\mu = 0$

شکل 12 تغییرات نسبت فرکانسی مود اول برحسب دامنه بی بعد برای مقادیر مختلف طول پیزوالکتریک، $\mu = 0$ و $v_{DC}=0$

با افزایش ضخامت پیزوالکتریک، تا ضخامتی برابر لایه الاستیک، نسبت فرکانسی کاهش می یابد که نشان دهنده افزایش فرکانس خطی یا افزایش سختی تیر با افزایش ضخامت دارد و با افزایش بیشتر ضخامت لایه پیزوالکتریک، نسبت فرکانسی همان طور که در شکل 13 نشان داده شده افزایش می یابد که نشان دهنده اثر بیشتر جرم نسبت به سختی تیر است که منجر به کاهش فرکانس خطی و افزایش نسبت فرکانسی می شود. در شکل 14 تغییرات نسبت فرکانسی برای مس، فولاد، آلومینیوم و برنج بررسی شده است. که به ترتیب فولاد، آلومینیوم، مس و برنج بیشترین افزایش نسبت فرکانسی را با افزایش نسبت دامنه بی بعد داشته اند.

6- نتیجه گیری

در این مقاله، ارتعاشات آزاد غیر خطی نانو عملگر پیزوالکتریک بایمورف مورد مطالعه قرار گرفت. نانو عملگر با استفاده از تئوری تیراویلر برنولی و الاستیسیته غیرموضعی مدل سازی شد. به منظور استخراج معادلات حاکم

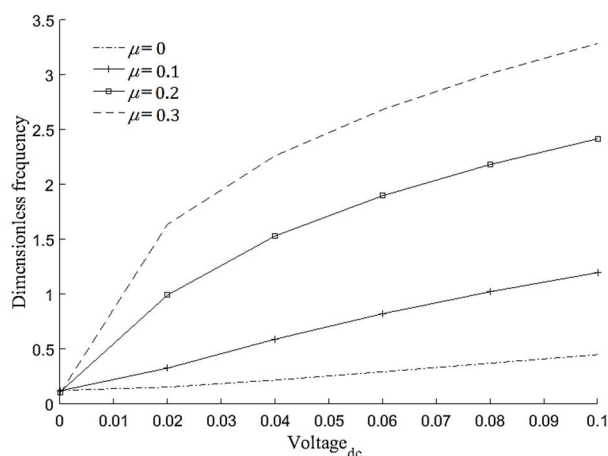


Fig. 8 Study of first dimensionless linear natural frequency for different values of voltage, nonlocal parameter and $L_2=0.75L$, $L_1=0.25L$

شکل 8 بررسی فرکانسی طبیعی خطی بعد مود اول برحسب ولتاژ مستقیم $L_2=0.75L$ و $L_1=0.25L$ به ازای، $\mu = 0$ و $v_{DC}=0$

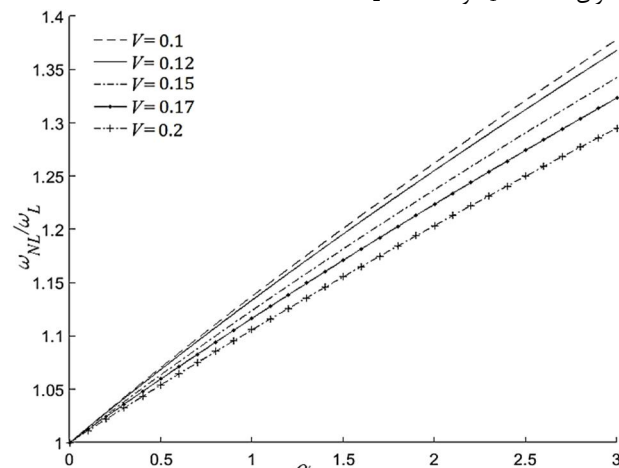


Fig. 9 The effect of applied voltage on the first frequency ratio, $L_2=0.75L$, $L_1=0.25L$ and $\mu = 0$

شکل 9 تغییرات نسبت فرکانسی برحسب ولتاژ مستقیم $L_2=0.75L$ ، $L_1=0.25L$ و $\mu = 0$

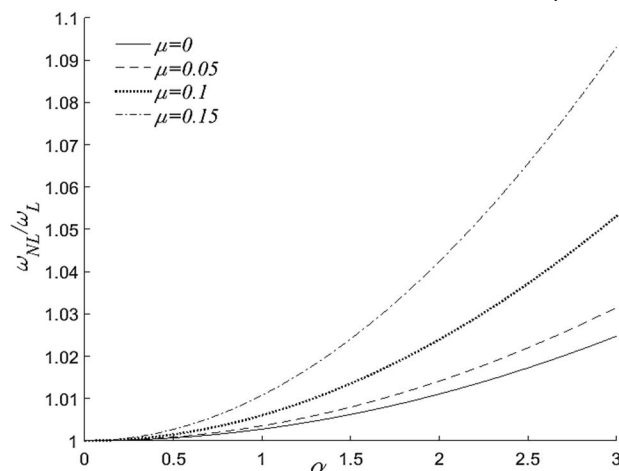


Fig. 10 Variation of the first mode frequency ratio versus dimensionless amplitude for $L_1=0.25L$, $L_2=0.75L$ and $v_{DC}=0$

شکل 10 تغییرات نسبت فرکانسی مود اول برحسب دامنه بی بعد به ازای مقادیر مختلف ضریب مقیاس، $v_{DC}=0$ و $L_2=0.75L$ ، $L_1=0.25L$

علائم یونانی

α	دامنه بی بعد
ε_{kl}	مولفه های کرنش
ε_{kl}^0	کرنش لایه میانی
μ	ضریب مقیاس بی بعد
σ_{ij}	مولفه های تنش (N/m^2)
ω_L	فرکانس طبیعی خطی بی بعد
ω_{NL}	فرکانس طبیعی غیرخطی بی بعد
Π_f	کار نیروهای خارجی (J)
Π_k	انرژی جنبشی (J)
Π_s	انرژی کرنشی (J)

8- منابع

- [1] M. Zamanian, S. Khadem, S. Mahmoodi, The effect of a piezoelectric layer on the mechanical behavior of an electrostatic actuated microbeam, *Smart Materials and Structures*, Vol. 17, No. 6, Article ID 065024, 2008.
- [2] S. N. Mahmoodi, N. Jalili, M. F. Daqaq, Modeling, nonlinear dynamics, and identification of a piezoelectrically actuated microcantilever sensor, *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, Vol. 13, No. 1, pp. 58-65, 2008.
- [3] S. Azizi, M. R. Ghazavi, G. Rezazadeh, I. Ahmadian, C. Cetinkaya, Tuning the primary resonances of a micro resonator, using piezoelectric actuation, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 76, No. 1, pp. 839-852, 2014.
- [4] H. Ghafarirad, S. Rezaei, A. A. Sarhan, M. Zareinejad, Continuous dynamic modelling of bimorph piezoelectric cantilevered actuators considering hysteresis effect and dynamic behaviour analysis, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, Vol. 21, No. 2, pp. 130-152, 2015.
- [5] M. Zamanian, H. Rezaei, M. Hadilu, H. S.A.A, A comprehensive analysis on the discretization method of the equation of motion in piezoelectrically actuated microbeams, *Smart Structures and Systems*, Vol. 16, No. 5, pp.891-918, 2015.
- [6] L.-L. Ke, Y.-S. Wang, Thermoelectric-mechanical vibration of piezoelectric nanobeams based on the nonlocal theory, *Smart Materials and Structures*, Vol. 21, No. 2, Article ID 025018, 2012.
- [7] L.-L. Ke, Y.-S. Wang, Z.-D. Wang, Nonlinear vibration of the piezoelectric nanobeams based on the nonlocal theory, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 6, pp. 2038-2047, 2012.
- [8] A. Shah-Mohammadi-Azar, A. Khanchehgardan, G. Rezazadeh, R. Shabani, Mechanical response of a piezoelectrically sandwiched nano-beam based on the nonlocal theory, *International Journal of Engineering-Transactions C: Aspects*, Vol. 26, No. 12, pp. 1515-1524, 2013.
- [9] M. Nazemizadeh, F. Bakhtiari-Nejad, Size-dependent free vibration of nano/microbeams with piezo-layered actuators, *Micro & Nano Letters*, Vol. 10, No. 2, pp. 93-98, 2015.
- [10] M. Şimşek, Large amplitude free vibration of nanobeams with various boundary conditions based on the nonlocal elasticity theory, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 56, pp. 621-628, 2014.
- [11] N. Jalili, *Piezoelectric-based vibration control: from macro to micro/nano scale systems*, pp.216-218, New York: Springer Science & Business Media, 2009.
- [12] C. Liu, L.-L. Ke, Y.-S. Wang, J. Yang, S. Kitipornchai, Thermo-electro-mechanical vibration of piezoelectric nanoplates based on the nonlocal theory, *Composite Structures*, Vol. 106, pp. 167-174, 2013.
- [13] M. Zamanian, S. Khadem, S. Mahmoodi, Analysis of non-linear vibrations of a microresonator under piezoelectric and electrostatic

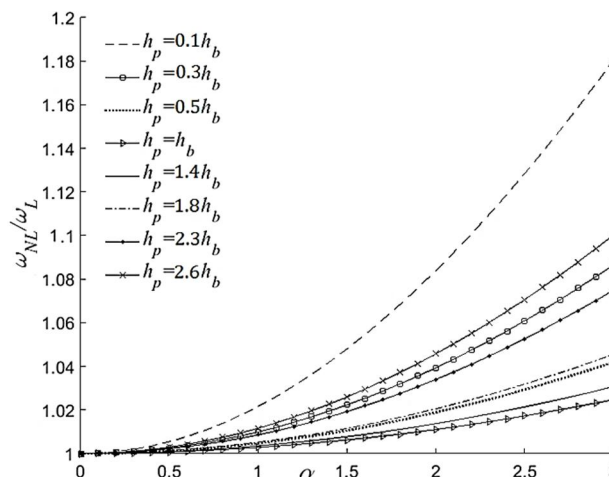


Fig. 13 Variation of the first mode frequency ratio with the dimensionless amplitude for different values of piezoelectric thickness, $v_{DC}=0$ and $\mu = 0$

شکل 13 تغییرات نسبت فرکانسی مود اول برحسب دامنه بی بعد به ازای مقادیر مختلف ضخامت پیزوالکتریک، $v_{DC}=0$ و $\mu = 0$

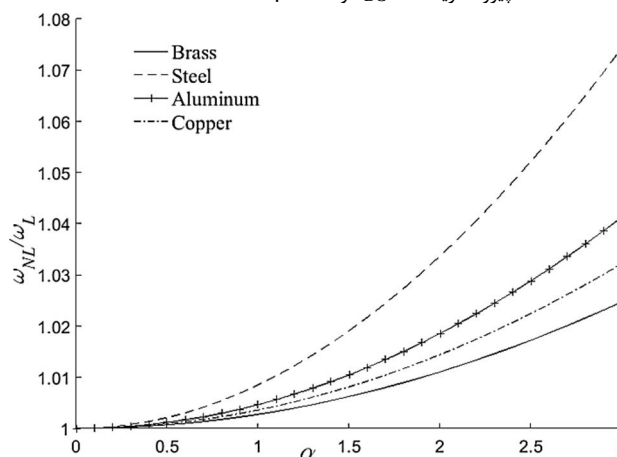


Fig. 14 Variation of the first mode frequency ratio versus the dimensionless amplitude for different materials, $v_{DC}=0$ and $\mu = 0$

شکل 14 تغییرات نسبت فرکانسی مود اول برحسب دامنه بی بعد برای جنس های مختلف لایه الاستیک، $v_{DC}=0$ و $\mu = 0$

از اصل همیلتون و جهت کاهش مرتبه و حل از روش گلرکین استفاده گردید. همچنین نتایج نشان داد افزایش ضریب مقیاس موجب کاهش فرکانس طبیعی خطی و افزایش نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به خطی می شود. افزایش ولتاژ مستقیم منجر به افزایش فرکانس طبیعی خطی و کاهش نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به خطی شد. با افزایش ولتاژ مستقیم برای ضرایب مقیاس مختلفی، فرکانس طبیعی با یکدیگر مساوی شدند. همچنین نشان داد شد که افزایش طول لایه های پیزوالکتریک همواره با افزایش فرکانس طبیعی خطی همراه نمی باشد.

7- فهرست علائم انگلیسی

E_k	مولفه های میدان الکتریکی (V/m)
$e_0 a$	ضریب مقیاس (m)
$\bar{M}_{DC}$	گشتاور ایجاد شده در اثر ولتاژ مستقیم (N.M/M)
$\bar{M}_{AC}$	گشتاور ایجاد شده در اثر ولتاژ متناوب (N.M/M)

[14] J.-H. He, Variational approach for nonlinear oscillators, *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 34, No. 5, pp. 1430-1439, 2007.

actuators, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 223, No. 2, pp. 329-344, 2009 .