مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر 1394، دوره 15، شماره 7، ص‌ص 274-284

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل کمانش الاستیک- پلاستیک صفحه مستطیلی ضخیم با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه- بالای سینوسی

**محمد قادری[1]، مهدی سلمانی‌تهرانی[2]*

1- دانشجوی کارشناسی‌ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

* ایران، اصفهان، کدپستی 8311184156، tehrani@cc.iut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 17 فروردین 1394
پذیرش: 02 خرداد 1394
ارائه در سایت: 19 خرداد 1394

کلید واژگان:
کمانش الاستیک-پلاستیک
صفحه ضخیم مستطیلی
نظریه مرتبه- بالای سینوسی
روش ریلی- ریتز

چکیده

در این مقاله کمانش الاستیک- پلاستیک صفحۀ مستطیلی ضخیم، براساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه- بالای سینوسی و به‌کارگیری دو نظریه پلاستیسیته نموی و تغییرشکل بررسی شده است. بارگذاری به‌صورت فشار دومحوره با نسبت‌های مختلف و تکیه‌گاه ساده روی لبه‌های خارجی درنظر گرفته شده است. تنش بحرانی کمانش با استفاده از کمینه‌سازی معیار انتگرالی یگانگی پاسخ محاسبه شده است. برای این‌کار تابع‌های آزمون جابه‌جایی عرضی و چرخش، بر پایه روش ریلی- ریتز، به‌صورت ترکیب خطی از تابع‌های پایه که شرایط مرزی هندسی را ارضا می‌کنند، انتخاب شده‌اند. برای ارزیابی تحلیل، نتایج در حالتی که از فرض تغییر شکل برشی میندلین استفاده شده با نتایج مراجع پیشین مقایسه و سازگاری خوبی بین نتایج مشاهده شده است. آن‌گاه برای صفحه از جنس آلومینیوم، اثر نسبت ضخامت صفحه، نسبت ضلع‌ها و نسبت‌های مختلف بارگذاری دومحوره بر تنش بحرانی کمانش بررسی شده است. تحلیل‌ها نشان می‌دهند پیش‌بینی نظریه میندلین و نظریه سینوسی، برای تنش بحرانی کمانش در مسأله مورد بررسی، بسیار نزدیک به یکدیگر است. بنابراین برای پیش‌بینی تنش بحرانی کمانش در این مسأله، نظریه میندلین از دقت کافی برخوردار است. همچنین هنگامی‌که بارگذاری از فشار دومحوره به تک‌محوره تغییر کند و یا نسبت ضخامت صفحه افزایش یابد، اختلاف دو نظریه پلاستیسیته بیشتر می‌شود. همچنین برای بارگذاری به‌صورت کشش- فشار، نظریه تغییر شکل نسبت به نظریه نموی بار بحرانی بسیار کمتری پیش‌بینی می‌کند.

Elastic-Plastic buckling analysis of a thick rectangular plate using sinusoidal higher-order shear deformation theory

Mohammad Ghaderi, Mehdi Salmani Tehrani*

Departmentof Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.
* P.O.B. 8415683111, Isfahan, Iran, tehrani@cc.iut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 06 April 2015
Accepted 23 May 2015
Available Online 09 June 2015

Keywords:
Elastic-Plastic Buckling
Thick Rectangular Plate
Sinusoidal Higher-Order Shear Deformation Theory
Rayleigh-Ritz Method

ABSTRACT

In this paper, elastic-plastic buckling of a thick rectangular plate has been investigated based on both Incremental (IT) and Deformation (DT) plasticity theories. Uniform biaxial edge traction was assumed as the plate loading while simply supported as the boundary conditions. Integral uniqueness criterion has been minimized to determine the critical buckling traction. Based on Rayleigh-Ritz method, a linear combination of polynomial base functions which satisfy the geometrical boundary conditions has been used as the trial functions for rotations and transverse deflection. To validate the analysis, the results for the Mindlin plate theory have been compared with the previously published results and very close agreement has been observed. Then the effects of thickness ratio, aspect ratio and also different biaxial traction ratios on the buckling traction have been investigated. The results show that for the problem considered here, very close critical buckling traction is predicted by both the Mindlin and sinusoidal plate theories. This implies that Mindlin plate theory is sufficiently accurate to predict critical buckling traction in this problem. Moreover, when the loading is gradually changed from biaxial into uniaxial compression or when the thickness-ratio is increased, the difference between the two theories is also increased. Also, for compression-tension loading case, the critical buckling traction predicted by deformation theory is much less than the incremental theory.

1- مقدمه

با توجه به ساختار و گستردگی کاربرد صفحه‌ها در صنایع و سازه‌های مهندسی مانند خوردوسازی، فضاپیماها، کشتی‌ها و ماشین‌آلات صنعتی، پژوهش‌گران به بررسی پیش‌بینی رفتار صفحه‌ها در شرایط متفاوت ترغیب

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

M. Ghaderi, M. Salmani Tehrani, Elastic-Plastic buckling analysis of a thick rectangular plate using sinusoidal higher-order shear deformation theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 7, pp. 274-284, 2015 (In Persian)

شده‌اند. از این‌رو محققان جهت بررسی رفتار صفحه‌ها، با انجام ساده‌سازی در برخی از معادله‌های حاکم، به تحلیل رفتار صفحه در بارگذاری‌های متفاوت پرداخته‌اند. یکی از مهم‌ترین جنبه‌های مطرح در تحلیل رفتار صفحه‌ها، بررسی کمانش و ناپایداری صفحه است. در واقع کمانش پدیده‌ای است که در آن صفحه تحت یکی از مودهای ناپایداری، دچار تغییرشکل‌های بزرگی می‌شود.

ازجمله پژوهش‌های انجام شده بر تحلیل کمانش الاستیک صفحه نازک مستطیلی می‌توان به کارهای یاماکی [1]، تیموشنکو [2] و ماجومدار [3] اشاره کرد. نتایج حاصل از این تحلیل‌ها، به‌دلیل فرض نظریه صفحه نازک، تخمین بالادستی از بار کمانش می‌دهد که در عمل نتیجه مطلوبی نیست. از این‌رو کمانش الاستیک صفحه ضخیم که معادلات آن‌ها براساس نظریه‌های برشی مرتبه اول و مرتبه- بالای سینوسی استخراج شده‌اند بررسی شد.

تای و وو [4] کمانش الاستیک صفحه مدرج تابعی با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه- بالای سینوسی را بررسی کردند. آن‌ها نتایج کار خود را با نظریه‌های تغییر شکل برشی میندلین و مرتبه سوم مقایسه کرد، ولی حل الاستیک کمانش صفحهٔ ضخیم نمی‌تواند پاسخ صحیحی از حالت بارگذاری که در طی آن تانسور تنش معادل در یک نقطه از صفحه از تنش تسلیم آن بزرگ‌تر باشد، ارائه دهد. به‌همین جهت مسألهٔ کمانش الاستیک- پلاستیک مورد توجه محققان قرار گرفت. دو نظریه پلاستیسیته نموی و تغییر شکل در ارتباط با پلاستیسیته مطرح است که در پژوهش‌ها مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. نخست ایلیوشین [5] و استول [6] با پیاده‌سازی روابط حاکم بر نظریه تغییر شکل، کمانش پلاستیک صفحه‌ها را بررسی کردند. هندلمن و پراگر [7] نیز با استفاده از نظریه نموی کمانش پلاستیک صفحه‌ها را بررسی کردند.

غزالی و شربورن [8] کمانش الاستیک- پلاستیک صفحه نازک مستطیلی را با استفاده از نظریه‌های نموی و تغییر شکل بررسی و جهت حل معادلات کمانش از روش نیوتن- رافسون استفاده کردند. در نهایت نتایج خود را با نتایج به‌دست‌آمده از آزمایش مقایسه کردند. دوربان و زوکرمن [9] کمانش الاستیک-پلاستیک صفحه مستطیلی نازک تحت بارگذاری کششی و فشاری تک‌محوره و دومحوره را به روش جداسازی متغیرها بررسی کردند. آن‌ها از هر دو نظریه نموی و تغییر شکل استفاده نمودند. نتایج پژوهش آن‌ها نشان می‌دهد بار کمانش ناشی از نظریه تغییر شکل کمتر از بار کمانش ناشی از نظریه نموی است. همچنین آن‌ها با استفاده از نظریه تغییر شکل یک مسیر بارگذاری بهینه برای هر شرط مرزی دلخواه ارائه کردند. بتن و شین [10] با استفاده از روش حل نیمه- تحلیلی به تحلیل کمانش الاستیک- پلاستیک صفحه نازک مستطیلی تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده در چهار طرف و بارگذاری فشاری دومحوره پرداختند. آن‌ها در کار خود به اثر نسبت ابعاد، ضریب بارگذاری و ضرایب کارسختی بر بار کمانش پرداختند. وانگ و همکاران [11] به تحلیل کمانش الاستیک- پلاستیک صفحه نازک مستطیلی تحت بارگذاری فشاری تک‌محوره در دو انتها و همچنین بارگذاری فشار تک‌محوره در دو انتها و وسط صفحه پرداختند. آن‌ها هر دو نظریه تغییر شکل و نموی را بررسی کرده و معادله کمانش را با استفاده از روش لوی حل کردند.

مسأله کمانش الاستیک- پلاستیک صفحه ضخیم را نخست شریواستاوا در پژوهش خود [12] بررسی کرد. او در نتایج خود نشان داد که بار کمانش به‌دست‌آمده از نظریه نموی نسبت به نظریه تغییر شکل بزرگ‌تر است، در حالی‌که اثر تنش‌های برشی یا به بیان دیگر تغییرشکل‌های برشی بر بار کمانش به‌دست‌آمده از نظریه نموی بیشتر از نظریه تغییر شکل است. البته با این تفاوت هنوز هم نتایج به‌دست‌آمده از دو نظریه به اندازه قابل توجهی با هم اختلاف دارند. وانگ و همکاران [13] به تحلیل کمانش الاستیک- پلاستیک صفحه ضخیم مستطیلی و دایره‌ای براساس نظریه برشی میندلین تحت بارگذاری فشاری تک‌محوره و دومحوره با شرایط تکیه‌گاهی مختلف گیردار، ساده و آزاد پرداختند. آن‌ها در کار خود به مقایسه هر دو نظریه نموی و تغییر شکل پرداخته و نشان دادند که بار کمانش به‌دست آمده از نظریه نموی نسبت به نظریه تغییر شکل بیشتر است. این نتیجه با نتایج پژوهش پیشین هم‌خوانی دارد. همچنین آن‌ها نشان دادند در نظریه نموی با افزایش نسبت ضخامت صفحه، بار کمانش افزایش می‌یابد، ولی این افزایش بار کمانش در نظریه تغییر شکل بسیار اندک است. وانگ و همکاران [14] در پژوهشی دیگر به تحلیل کمانش الاستیک-پلاستیک صفحه ضخیم با استفاده از روش حل ریتز پرداختند. آن‌ها هر دو نظریه نموی و تغییر شکل را بررسی کرده، از نظریه برشی میندلین جهت استخراج معادلات استفاده و هندسه‌های متفاوتی مانند دایره، بیضی، مثلث و مستطیل را در کار خود بررسی کردند. آن‌ها در کار خود به این نتیجه رسیدند که در نسبت ضخامت‌های کم که می‌توان از فرض صفحه نازک استفاده کرد، نظریه‌های نموی و تغییر شکل نتایج به‌نسبت یکسانی دارند، ولی با افزایش نسبت ضخامت اختلاف دو نظریه افزایش می‌یابد.

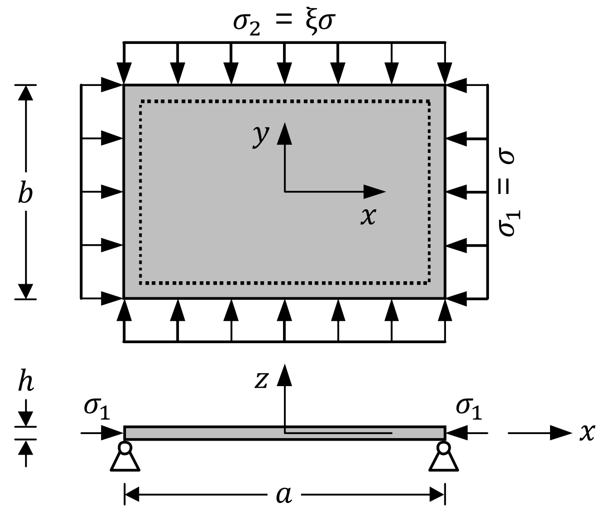
کدخدایان و معارف‌دوست [15] کمانش الاستیک- پلاستیک صفحه مستطیلی را براساس نظریه‌های نموی و تغییر شکل و با استفاده از روش عددی یک‌چهارم تفاضلی تعمیم‌یافته تحلیل کردند. آن‌ها در کار خود اثر ضخامت صفحه و ثابت‌های رامبرگ- آزگود را بر بار بحرانی کمانش بررسی و نتیجه گرفتند با افزایش سطح تغییرشکل پلاستیک، نظریه تغییر شکل بار کمانش کمتری را پیش‌بینی می‌کند. رضایی و سلمانی‌تهرانی [16] کمانش الاستیک-پلاستیک صفحه دایره‌ای نازک با ضخامت متغیر را براساس هر دو نظریه نموی و تغییر شکل و با استفاده از روش ریلی- ریتز مطالعه کردند. آن‌ها نشان دادند 10درصد تغییر ضخامت صفحه می‌تواند تا حدود 40درصد اختلاف در پیش‌بینی تنش بحرانی کمانش به‌همراه داشته باشد.

براساس جستجوی نگارندگان، تاکنون پژوهشی در زمینه کمانش الاستیک- پلاستیک صفحه مستطیلی ضخیم، بر پایه نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه- بالای سینوسی و یا مرتبه سوم، منتشر نشده است. این موضوع از آن جهت اهمیت دارد که در نظریه‌های برشی مرتبه- بالا، تنش‌های برشی در لبه‌های بالایی و پایینی صفحه صفر می‌شوند، در صورتی‌که براساس نظریه برشی میندلین، روی سطح‌های بالایی و پایینی ورق تنش برشی به‌وجود می‌آید. در صورتی‌که در واقعیت چنین نبوده و این فرض می‌تواند در نتایج نهایی تأثیرگذار بوده و بار کمانش دقیقی ندهد.

شکل 1 به‌صورت طرح‌واره، هندسه و بارگذاری مسألهٔ مورد بررسی در این مقاله را نشان می‌دهد. در شکل 1 صفحه مستطیلی به طول a، عرض b و ضخامت h تحت بارگذاری دومحوره با نسبت بارگذاری ξ نشان داده شده است. نوع و میزان بارگذاری به‌وسیلهٔ پارامتر ξ تعیین می‌شود. برای نمونه به‌ازای $\xi=0$ بارگذاری فشار تک‌محوره، به‌ازای $\xi=1$ فشار دومحوره و به‌ازای $\xi=-1$ بارگذاری متناظر با کشش- فشار یکنواخت است.

2- معادلات حاکم

در تحلیل کمانش الاستیک- پلاستیک، بار بحرانی متناظر با آستانهٔ کمانش با



شکل 1 نمایش طرح‌واره هندسه و بارگذاری صفحهٔ مستطیلی، تحت بارگذاری دومحوره با نسبت بارگذاری ξ و تکیه‌گاه ساده در چهار لبه

استفاده از شرط انتگرالی یگانگی[1] پاسخ محاسبه می‌شود [17،13]. براساس این معیار، شرط یگانگی پاسخ آن است که انرژی پتانسیل کل منفی نباشد، درنتیجه بار بحرانی کمانش که متناظر با نقطه دوشاخگی[2] است، با استفاده از شرط کمینه‌شدن انرژی پتانسیل کل محاسبه می‌شود.

برای مسأله مورد بررسی که در شکل 1 نشان داد شده است، انرژی پتانسیل کل براساس رابطه (1) محاسبه می‌شود [13].

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\Bigg\{\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \sigma_1\left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2\right] - \sigma_2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2\right]\Bigg\}dV \tag{1}$$

در رابطه (1)، $\dot{\sigma}_{ij}$ و $\dot{\varepsilon}_{ij}$ به‌ترتیب نرخ مؤلفه‌های تنش و کرنش، σ_1 و σ_2 ترکشن‌های مرزی در امتداد محور x و y هستند و v_x، v_y و v_z مؤلفه‌های دکارتی میدان سرعت هستند. میدان سرعت با توجه به فرض تغییرشکل برشی مرتبه- بالای سینوسی، در قالب رابطه (2) بیان می‌شود [4].

$$\begin{aligned} v_x &= -z\frac{\partial v_z}{\partial x} + \left(\frac{h}{\pi}\right)\omega_y(x,y)\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \\ v_y &= -z\frac{\partial v_z}{\partial y} + \left(\frac{h}{\pi}\right)\omega_x(x,y)\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \\ v_z &= v_z(x,y) \end{aligned} \tag{2}$$

در رابطهٔ (2)، v_z نرخ جابه‌جایی (سرعت) در راستای محور z، ω_y نرخ چرخش حول محور y و ω_x نرخ چرخش حول محور x را نشان می‌دهد. از سوی دیگر نرخ کرنش‌ها براساس رابطه‌های (3) تعیین می‌شوند [13].

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \dot{\varepsilon}_{yy} &= \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \dot{\varepsilon}_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \dot{\gamma}_{xz} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \dot{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \end{aligned} \tag{3}$$

با جایگزینی میدان سرعت در رابطه‌های (3)، نرخ کرنش‌ها به‌شکل رابطه (4) بازنویسی خواهد شد.

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{xx} &= -z\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \left(\frac{h}{\pi}\right)\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \\ \dot{\varepsilon}_{yy} &= -z\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \left(\frac{h}{\pi}\right)\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial y}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \\ \dot{\gamma}_{xy} &= -2z\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{h}{\pi}\right)\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_x}{\partial x}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \\ \dot{\gamma}_{xz} &= \omega_y(x,y)\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \\ \dot{\gamma}_{yz} &= \omega_x(x,y)\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

رابطه نرخ تنش برحسب نرخ کرنش در صفحه‌ها به‌صورت رابطه (5) خواهد بود [17].

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{xx} &= E\left(\alpha\dot{\varepsilon}_{xx} + \beta\dot{\varepsilon}_{yy}\right) \\ \dot{\sigma}_{yy} &= E\left(\beta\dot{\varepsilon}_{xx} + \gamma\dot{\varepsilon}_{yy}\right) \\ \dot{\tau}_{xy} &= G\dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\tau}_{xz} &= G\dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\tau}_{yz} &= G\dot{\gamma}_{yz} \end{aligned} \tag{5}$$

در رابطه‌های (5) α، β، γ و G پارامترهایی هستند که براساس مشخصه‌های مکانیکی و وضعیت تنش در ماده بیان می‌شوند. این پارامترها برای دو حالت نظریه‌های تغییر شکل و نموی متفاوت هستند. برای نظریه نموی این پارامترها مطابق روابط (6) به‌دست می‌آیند [17].

$$\begin{aligned} \rho &= (5-4\nu) - (1-2\nu)^2\left(\frac{T}{E}\right) - 3(1-2\nu)\left(1-\frac{T}{E}\right)\frac{\sigma_1\sigma_2}{{\sigma_{\mathrm{eq}}}^2} \\ \alpha &= \frac{1}{\rho}\left[4 - 3\left(1-\frac{T}{E}\right)\frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_{\mathrm{eq}}}^2}\right] \\ \beta &= \frac{1}{\rho}\left[2 - 2(1-2\nu)\frac{T}{E} - 3\left(1-\frac{T}{E}\right)\frac{\sigma_1\sigma_2}{{\sigma_{\mathrm{eq}}}^2}\right] \\ \gamma &= \frac{1}{\rho}\left[4 - 3\left(1-\frac{T}{E}\right)\frac{{\sigma_2}^2}{{\sigma_{\mathrm{eq}}}^2}\right] \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \tag{6}$$

برای نظریه تغییر شکل نیز پارامترهای α، β، γ و G براساس رابطه‌های (7) به‌دست می‌آیند [17].

$$\begin{aligned} \rho &= 3\frac{E}{S} + (1-2\nu)\left[2 - (1-2\nu)\left(\frac{T}{E}\right) - 3\left(1-\frac{T}{S}\right)\frac{\sigma_1\sigma_2}{{\sigma_{eq}}^2}\right] \\ \alpha &= \frac{1}{\rho}\left[4 - 3\left(1-\frac{T}{E}\right)\frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_{\mathrm{eq}}}^2}\right] \\ \beta &= \frac{1}{\rho}\left[2 - 2(1-2\nu)\frac{T}{E} - 3\left(1-\frac{T}{S}\right)\frac{\sigma_1\sigma_2}{{\sigma_{\mathrm{eq}}}^2}\right] \\ \gamma &= \frac{1}{\rho}\left[4 - 3\left(1-\frac{T}{S}\right)\frac{{\sigma_2}^2}{{\sigma_{\mathrm{eq}}}^2}\right] \\ G &= \frac{E}{-1 + 2\nu + 3\left(\frac{T}{S}\right)} \end{aligned} \tag{7}$$

تنش معادل σ_{eq} در روابط (7،6)، با فرض پیروی ماده از معیار تسلیم ون‌میزز، براساس رابطه (8) تعیین می‌شود [13].

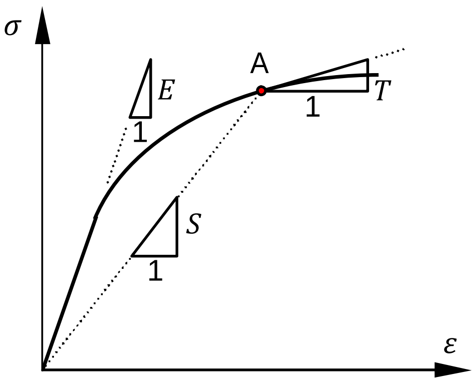
$$\left(\sigma_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{Mises}}\right)^2 = {\sigma_1}^2 - \sigma_1\sigma_2 + {\sigma_2}^2 \tag{8}$$

در رابطه (8) $\sigma_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{Mises}}$ تنش معادل ون‌میزز و σ_1 و σ_2 به‌ترتیب تنش روی لبه‌ها در جهت‌های x و y هستند (شکل 1).

همچنین پارامترهای E، T و S در روابط (7،6) به‌ترتیب نشان‌گر مدول الاستیسیته، مدول مماسی و مدول وتری ماده هستند. این پارامترها به‌صورت طرح‌واره در شکل 2 برای نقطه دلخواه A از منحنی تنش- کرنش نشان داده

1- Uniqueness
2- Bifurcation

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.7.31.9]



شکل 2 نمایش طرحواره مدول الاستیسیته، مدول مماسی و مدول وتری در نقطهٔ دلخواه A از منحنی تنش- کرنش

شده‌اند.

در این مقاله برای رابطه تنش و کرنش از مدل رامبرگ- آزگود که در رابطه (9) بیان شده [13]، استفاده شده است.

$$\varepsilon_{\mathrm{eq}} = \frac{\sigma_{\mathrm{eq}}}{E} + \mathrm{k}\frac{\sigma_0}{E}\left(\frac{\sigma_{\mathrm{eq}}}{E}\right)^{\mathrm{c}} \tag{9}$$

درنتیجه نسبت‌های مدول مماسی و مدول وتری به مدول الاستیسیته، براساس روابط (10) به‌دست می‌آیند [13].

$$\frac{T}{E} = \frac{1}{1 + \mathrm{kc}\left(\frac{\sigma_0}{E}\right)^{\mathrm{c}-1}\left(\frac{\sigma_{\mathrm{eq}}}{E}\right)^{\mathrm{c}-1}}$$
$$\frac{S}{E} = \frac{1}{1 + \mathrm{k}\left(\frac{\sigma_0}{E}\right)^{\mathrm{c}-1}\left(\frac{\sigma_{\mathrm{eq}}}{E}\right)^{\mathrm{c}-1}} \tag{10}$$

با استفاده از روابط (۵،4) و جای‌گذاری در رابطه (1) و سپس ضرب نتیجه در dt^2، رابطه (1) به‌صورت رابطه (11) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned}\Pi = E\int\Bigg\{&\alpha\left[-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{h}{\pi}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right]^2 + \\ &2\beta\left[-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{h}{\pi}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right]\times \\ &\left[-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{h}{\pi}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right] + \\ &\gamma\left[-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{h}{\pi}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right]^2 + \\ &\frac{G}{E}\left[-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{h}{\pi}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right]^2 + \\ &\frac{G}{E}\left[\varphi(x,y)\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right]^2 + \\ &\frac{G}{E}\left[\psi(x,y)\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right]^2 - \\ &\frac{\sigma_1}{E}\left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2\right] - \\ &\frac{\sigma_2}{E}\left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2\right]\Bigg\}\,dV\end{aligned} \tag{11}$$

در رابطه (11) تابع‌های w، ψ و φ به‌ترتیب بیان‌گر جابه‌جایی عرضی، زاویه چرخش حول محور x و زاویه چرخش حول محور y هستند.

3- روش حل

به‌منظور محاسبه بار بحرانی کمانش باید رابطهٔ انتگرالی (11) کمینه شود. در این بخش، نخست با معرفی پارامترهای بی‌بعد، شکل بی‌بعد رابطه (11) استخراج می‌شود. آن‌گاه روند حل براساس معادله بی‌بعد بیان خواهد شد.

3-1- بی‌بعدسازی متغیرها و معادله‌های حاکم

متغیرها و کمیت‌های بی‌بعد براساس رابطه‌های (12) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{x}} &= \frac{2x}{a}\\ \bar{\mathrm{y}} &= \frac{2y}{b}\\ \bar{\mathrm{h}} &= \frac{h}{b}\\ \bar{\mathrm{w}} &= \frac{2w}{a}\\ \bar{\sigma} &= \frac{\sigma_1}{E}\\ \xi &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\\ \eta &= \frac{a}{b}\end{aligned} \tag{12}$$

در رابطه‌های (12) $\bar{\sigma}$ بیان‌گر پارامتر بی‌بعد بارگذاری است که در قسمت نتایج، تنش بحرانی کمانش با استفاده از این پارامتر مشخص می‌شود.

با استفاده از کمیت‌های بی‌بعد در رابطه‌های (12)، شکل بی‌بعد شده رابطه (11)، پس از انتگرال‌گیری در جهت ضخامت، به‌صورت رابطه (13) به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{Eh^3}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - T_5\}\,d\bar{\mathrm{x}}\,d\bar{\mathrm{y}}\\ T_1 &= \frac{\alpha}{\eta}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\mathrm{x}}}\right)^2 + \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{\partial^2\bar{\mathrm{w}}}{\partial\bar{\mathrm{x}}^2}\right)^2 - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\mathrm{x}}}\right)\left(\frac{\partial^2\bar{\mathrm{w}}}{\partial\bar{\mathrm{x}}^2}\right)\right]\\ T_2 &= 2\beta\Bigg[\frac{-2}{\pi}\left(\frac{\partial^2\bar{\mathrm{w}}}{\partial\bar{\mathrm{x}}^2}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\mathrm{y}}} + \eta\frac{\partial^2\bar{\mathrm{w}}}{\partial\bar{\mathrm{y}}^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\mathrm{x}}}\right) + \\ &\qquad \frac{\pi^2\eta}{12}\left(\frac{\partial^2\bar{\mathrm{w}}}{\partial\bar{\mathrm{x}}^2}\right)\left(\frac{\partial^2\bar{\mathrm{w}}}{\partial\bar{\mathrm{y}}^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\mathrm{x}}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\mathrm{y}}}\right)\Bigg]\\ T_3 &= \gamma\left[\frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\mathrm{y}}}\right)^2 + \frac{\pi^2\eta^3}{12}\left(\frac{\partial^2\bar{\mathrm{w}}}{\partial\bar{\mathrm{y}}^2}\right)^2 - \frac{4\eta^2}{\pi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\mathrm{y}}}\right)\left(\frac{\partial^2\bar{\mathrm{w}}}{\partial\bar{\mathrm{y}}^2}\right)\right]\\ T_4 &= \frac{1}{2(1+\nu)}\Bigg[\frac{\pi^2\eta}{3}\left(\frac{\partial^2\bar{\mathrm{w}}}{\partial\bar{\mathrm{x}}\partial\bar{\mathrm{y}}}\right)^2 + \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\mathrm{y}}}\right)^2 + \frac{1}{2\eta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\mathrm{x}}}\right)^2 + \\ &\qquad 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\mathrm{y}}}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\mathrm{x}}}\right) - \frac{8\eta}{\pi}\left(\frac{\partial^2\bar{\mathrm{w}}}{\partial\bar{\mathrm{x}}\partial\bar{\mathrm{y}}}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\mathrm{y}}}\right) - \\ &\qquad \frac{8}{\pi}\left(\frac{\partial^2\bar{\mathrm{w}}}{\partial\bar{\mathrm{x}}\partial\bar{\mathrm{y}}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\mathrm{x}}}\right) + \frac{\pi^2\eta}{8}\left(\frac{1}{\bar{\mathrm{h}}}\right)^2(\varphi^2 + \psi^2)\Bigg]\\ T_5 &= \bar{\sigma}_{\mathrm{cr}}\left[\frac{\pi^2\eta}{4}\left(\frac{1}{\bar{\mathrm{h}}}\right)^2\left(\left(\frac{\partial\bar{\mathrm{w}}}{\partial\bar{\mathrm{x}}}\right)^2 + \xi\eta^2\left(\frac{\partial\bar{\mathrm{w}}}{\partial\bar{\mathrm{y}}}\right)^2\right)\right]\end{aligned} \tag{13}$$

3-2- روش حل

برای کمینه‌سازی معادله (13) روش‌های مختلفی وجود دارد. در این مقاله از روش ریلی- ریتز استفاده شده است. در این روش تابع‌های مجهول w، φ و ψ به‌صورت ترکیبی از m جمله که هر یک شرایط مرزی هندسی را ارضا می‌کنند، تقریب زده می‌شوند. در این مقاله تابع‌های تقریب به‌صورت چندجمله‌ای مرتبه کامل انتخاب شده‌اند. شکل بی‌بعد شده تابع‌های تقریب w، φ و ψ در رابطه‌های (14) بیان شده‌اند.

$$\bar{\mathrm{w}} = \bar{\mathrm{w}}_{\mathrm{b}}\sum_{q=0}^{p}\sum_{i=0}^{q}\bar{\mathrm{d}}_{iq}^{w}(\bar{\mathrm{x}})^{i}(\bar{\mathrm{y}})^{q-i}$$
$$\varphi = \varphi_{\mathrm{b}}\sum_{q=0}^{p}\sum_{i=0}^{q}\bar{\mathrm{d}}_{iq}^{\varphi}(\bar{\mathrm{x}})^{i}(\bar{\mathrm{y}})^{q-i}$$

$$\psi = \psi_b \sum_{q=0}^{p}\sum_{i=0}^{q} \bar{d}_{iq}^{\psi} (\bar{x})^i (\bar{y})^{q-i} \tag{14}$$

در رابطه‌های (14) درجه چندجمله‌ای تابع‌های تقریب با p بیان شده است و $\bar{d}_{iq}^{w}$، $\bar{d}_{iq}^{\varphi}$ و $\bar{d}_{iq}^{\psi}$ ضریب‌های بی‌بعد هرجمله هستند. تابع‌های $\bar{w}_b$، φ_b و ψ_b نیز چندجمله‌ای‌های پایه هستند که شرایط مرزی هندسی را ارضا می‌کنند. در این مقاله تنها شرایط تکیه‌گاهی ساده در چهار لبه ورق، بررسی می‌شود. شرایط مرزی هندسی برای شرایط تکیه‌گاهی ساده در چهار لبه ورق به‌وسیله رابطه‌های (15) بیان می‌شوند [13].

$$\begin{cases}\bar{w}_b(\bar{x} = \pm 1) = 0\\ \bar{w}_b(\bar{y} = \pm 1) = 0\end{cases}$$
$$\varphi_b(\bar{y} = \pm 1) = 0$$
$$\psi_b(\bar{x} = \pm 1) = 0 \tag{15}$$

با توجه شرایط مرزی هندسی (15)، تابع‌های پایهٔ $\bar{w}_b$، φ_b و ψ_b به‌صورت چندجمله‌ای‌های (16) انتخاب شده‌اند.

$$\bar{w}_b = (\bar{x}^2 - 1)(\bar{y}^2 - 1)$$
$$\varphi_b = (\bar{y} - 1)(\bar{y} + 1)$$
$$\psi_b = (\bar{x} - 1)(\bar{x} + 1) \tag{16}$$

در نتیجه براساس تابع‌های پایه (16)، تابع‌های تقریب جابه‌جایی بی‌بعدشده و چرخش حول محورهای x و y به‌صورت رابطهٔ (17) به‌دست می‌آیند.

$$\bar{w} = \sum_{q=0}^{p}\sum_{i=0}^{q} \bar{d}_{iq}^{w} (\bar{x}^2 - 1)(\bar{y}^2 - 1)(\bar{x})^i (\bar{y})^{q-i}$$
$$\varphi = \sum_{q=0}^{p}\sum_{i=0}^{q} \bar{d}_{iq}^{\varphi} (\bar{y}^2 - 1)(\bar{x})^i (\bar{y})^{q-i}$$
$$\psi = \sum_{q=0}^{p}\sum_{i=0}^{q} \bar{d}_{iq}^{\psi} (\bar{x}^2 - 1)(\bar{x})^i (\bar{y})^{q-i} \tag{17}$$

با قراردادن تابع‌های (17) در معادله (13)، انتگرال رابطه (13) برحسب ثابت‌های محاسبه می‌شود.

نقطه دوشاخگی که متناظر با آستانه کمانش است، با کمینه‌شدن رابطه (13) به‌دست می‌آید؛ بنابراین لازم است حاصل انتگرال (13) نسبت به ثابت‌های $\bar{d}_{iq}^{w}$، $\bar{d}_{iq}^{\varphi}$ و $\bar{d}_{iq}^{\psi}$ کمینه شود. با مشتق‌گیری از رابطه اخیر نسبت به هر یک از ثابت‌ها و مساوی صفر قرار دادن هر رابطه، یک دستگاه $(3m)$ معادله و $(3m)$ مجهول، به‌شکل رابطه (18)، حاصل خواهد شد.

$$\begin{Bmatrix} \left\{\dfrac{\partial \Pi}{\partial \bar{d}_{iq}^{w}}\right\}_{m\times 1} \\ \left\{\dfrac{\partial \Pi}{\partial \bar{d}_{iq}^{\varphi}}\right\}_{m\times 1} \\ \left\{\dfrac{\partial \Pi}{\partial \bar{d}_{iq}^{\psi}}\right\}_{m\times 1} \end{Bmatrix} = \{0\}_{3m\times 1} \tag{18}$$

پارامتر m در رابطه (18) نشان‌گر تعداد کل جمله‌ها در بسط هر یک از تابع‌های $\bar{w}_b$، φ_b و ψ_b در رابطه (14) است. دستگاه معادلات (18)، یک دستگاه معادلات همگن است که می‌توان به‌صورت رابطه (19) بازنویسی کرد.

$$[K]_{3m\times 3m} \begin{Bmatrix} \{\bar{d}_i^{w}\} \\ \{\bar{d}_i^{\varphi}\} \\ \{\bar{d}_i^{\psi}\} \end{Bmatrix}_{3m\times 1} = \{0\}_{3m\times 1}$$

$$\{\bar{d}_i^{w}\}_{m\times 1} = \begin{Bmatrix} \bar{d}_1^{w} \\ \bar{d}_2^{w} \\ \vdots \\ \bar{d}_m^{w} \end{Bmatrix}$$
$$\{\bar{d}_i^{\varphi}\}_{m\times 1} = \begin{Bmatrix} \bar{d}_1^{\varphi} \\ \bar{d}_2^{\varphi} \\ \vdots \\ \bar{d}_m^{\varphi} \end{Bmatrix}$$
$$\{\bar{d}_i^{\psi}\}_{m\times 1} = \begin{Bmatrix} \bar{d}_1^{\psi} \\ \bar{d}_2^{\psi} \\ \vdots \\ \bar{d}_m^{\psi} \end{Bmatrix} \tag{19}$$

در رابطه (19)، ضریب‌های $\bar{d}_{iq}^{w}$، $\bar{d}_{iq}^{\varphi}$ و $\bar{d}_{iq}^{\psi}$ در یک بردار ستونی مرتب شده‌اند که تعداد درایه هر بردار برابر m است. با توجه به همگن بودن دستگاه معادلات (18) و برای داشتن پاسخ غیربدیهی، لازم است دترمینان ماتریس ضرایب $[K]$ برابر صفر شود [13]. با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس $[K]$ مقدارهای ویژه ماتریس حاصل می‌شود. تنش بحرانی کمانش با استفاده از کوچک‌ترین مقدار ویژه ماتریس $[K]$ محاسبه می‌شود [13].

4- نتایج عددی و بحث

در این بخش، نتایج تحلیل کمانش پلاستیک صفحه ضخیم بر پایه نظریه برشی مرتبه- بالای سینوسی ارائه می‌شوند. پیش از بررسی اثر پارامترهای مختلف بر تنش بحرانی کمانش، نخست نتایج تحلیل این مقاله ارزیابی و اعتبارسنجی شوند. برای این منظور، ابتدا روند همگرایی نتایج تحلیل بررسی می‌شوند، سپس به‌منظور اعتبارسنجی، تحلیل‌ها برای صفحه نازک و هم‌چنین نظریه برشی میندلین تکرار و با نتایج مشابه در پژوهش‌های گذشته مقایسه می‌شود.

4-1- ارزیابی و اعتبارسنجی نتایج

برای ارزیابی و اعتبارسنجی نتایج، نخست روند همگرایی نتایج تحلیل بررسی می‌شود. پس از تأیید روند همگرایی تحلیل، لازم است اعتبار نتایج تحلیل این مقاله نشان داده شود، ولی براساس جستجوی نگارندگان، تاکنون پژوهشی در زمینه تحلیل کمانش پلاستیک با استفاده از نظریه برشی مرتبه- بالا منتشر نشده است. به‌همین دلیل و برای اعتبارسنجی نتایج، تحلیل‌های مقاله با اصلاح فرمول‌بندی، برای کمانش پلاستیک صفحه نازک و همچنین کمانش پلاستیک صفحه ضخیم میندلین تکرار و با نتایج تحلیلی موجود مقایسه شده‌اند.

جدول 1 ثابت‌های مادی مورد استفاده در تحلیل‌های مقاله را نشان می‌دهد. لازم به توضیح است که نتایج ارائه‌شده در این مقاله، با استفاده از خصوصیت‌های مادی آلومینیوم 14S-T6 و آلومینیوم 7075-T6 که در جدول 1 با نام کوتاه (a) و (b) مشخص شده‌اند، ارائه می‌شوند. این مشخصات از مرجع [13] برگرفته شده‌اند.

در مرجع [17] برای بررسی اثر پارامترهای مادی بر تنش بحرانی کمانش پلاستیک صفحه نازک، از خصوصیات مادی (c) و (d) که به‌طور فرضی انتخاب شده‌اند، استفاده شده است. در این مقاله نیز برای بررسی تنش بحرانی کمانش پلاستیک صفحه نازک، تحلیل‌ها برای همین مشخصات مادی تکرار و با نتایج تحلیلی مرجع [17] مقایسه شده‌اند.

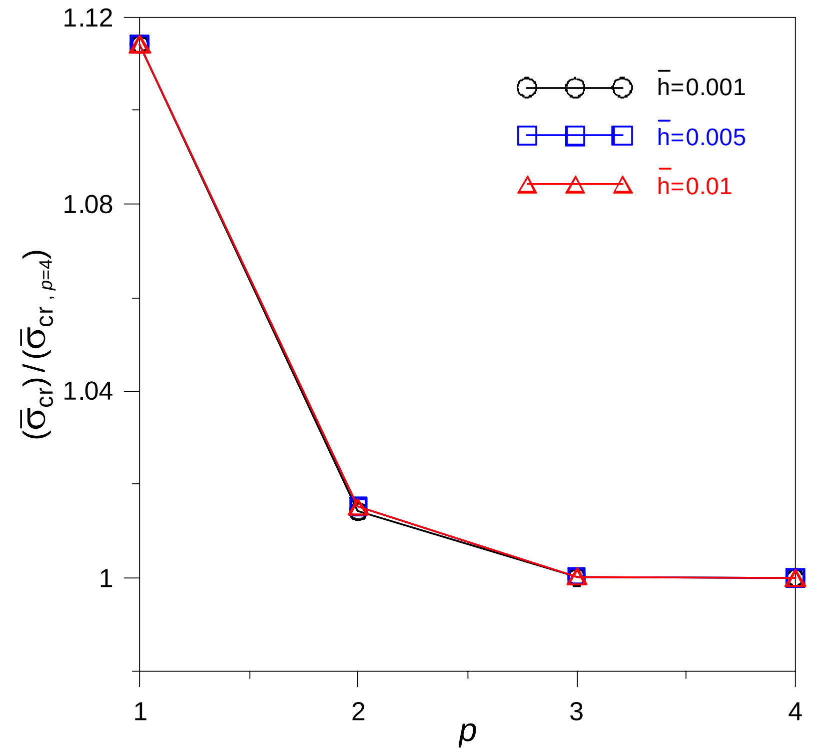
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.7.31.9]

در نمودارهای شکل 3 روند همگرایی تنش بحرانی کمانش، $\bar{\sigma}_{cr}$، برحسب افزایش درجه تابع تقریب، p، به‌ازای نسبت‌های ضخامت مختلف، $\bar{h}$، نشان داده شده است.

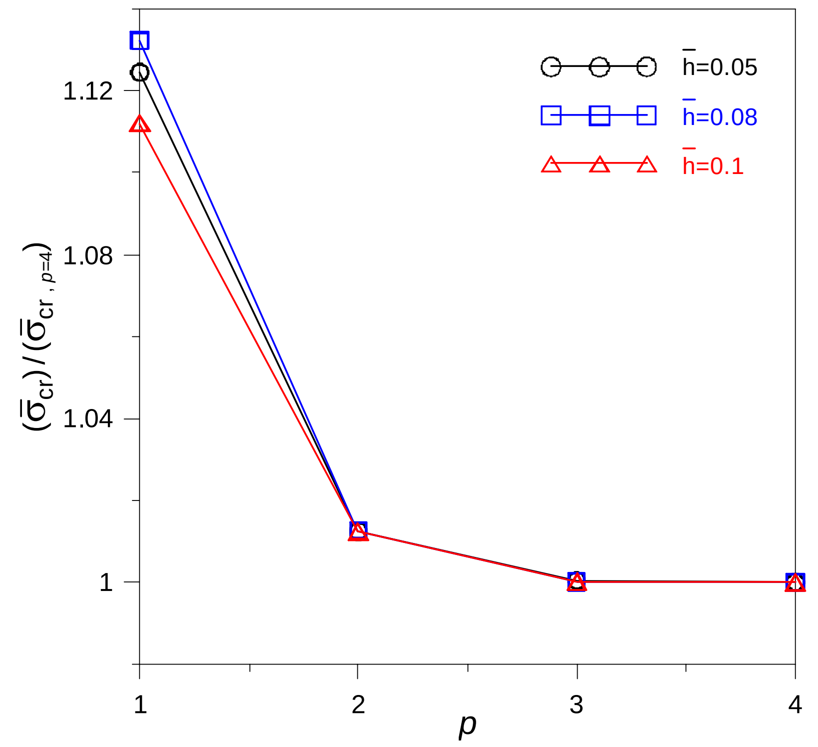
تحلیل‌های شکل 3 برای صفحه مربعی ضخیم و بر پایه نظریه برشی سینوسی و نظریه پلاستیسیته نموی، تحت فشار دومحوره انجام شده‌اند. در شکل 3 مقدار $\bar{\sigma}_{cr}$ در هر نسبت ضخامت، $\bar{h}$، با تقسیم بر مقدار $\bar{\sigma}_{cr}$ به‌ازای تابع تقریب با درجه p=4 $(\bar{\sigma}_{cr}|_{p=4})$، یکه شده است. مشاهده می‌شود که با

جدول 1 ثابت‌های مادی رابطهٔ رامبرگ- آزگود برای ماده‌های مورد استفاده در تحلیل‌های این مقاله، برگرفته از مرجع‌های [17,13]

	پارامتر / نوع ماده	c	k	$\frac{E}{\sigma_0}$	ν
(a)	آلومینیوم 14S-T6	20	0/3485	174/267	0/32
(b)	آلومینیوم 7075-T6	20	0/25	750	0/30
(c)	فرضی	2	0/25	750	0/33
(d)	فرضی	5	0/25	750	0/33



الف - نسبت ضخامت $\bar{h}$=0/001 تا $\bar{h}$=0/01



ب - نسبت ضخامت $\bar{h}$=0/05 تا $\bar{h}$=0/1

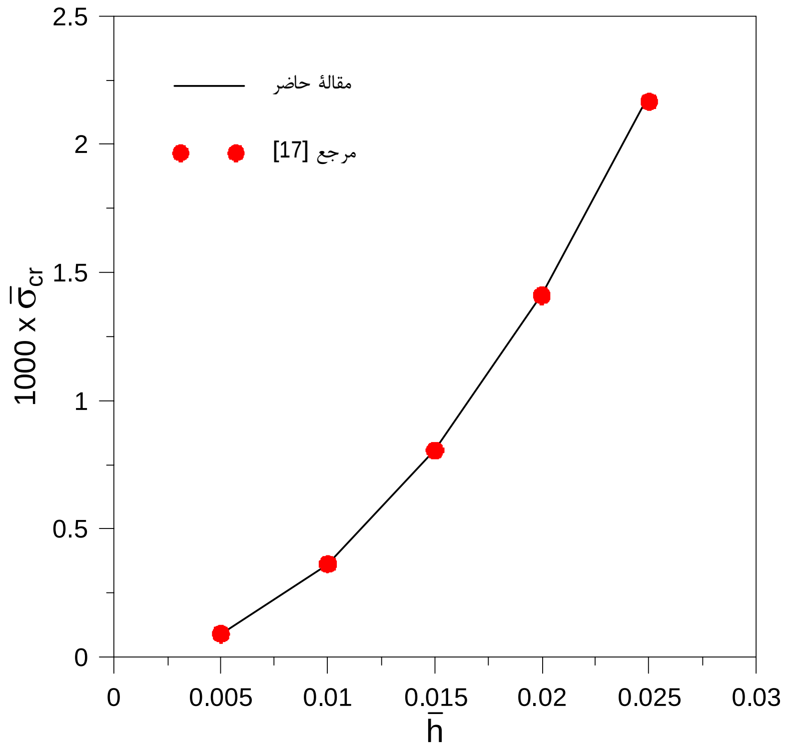
شکل 3 بررسی همگرایی تنش بحرانی کمانش بی‌بعد یکه‌شده، برحسب افزایش درجه تابع تقریب، p، برای نسبت‌های ضخامت مختلف و ماده (a) در جدول 1

افزایش درجه تابع تقریب، پاسخ‌ها همگرا می‌شوند. به‌گونه‌ای که پاسخ‌ها به‌ازای تابع تقریب با p=3 و p=4 یکسان شده‌اند. براین اساس نتایج این پژوهش با استفاده از تابع تقریب با درجه p=4 به‌دست آمده‌اند.

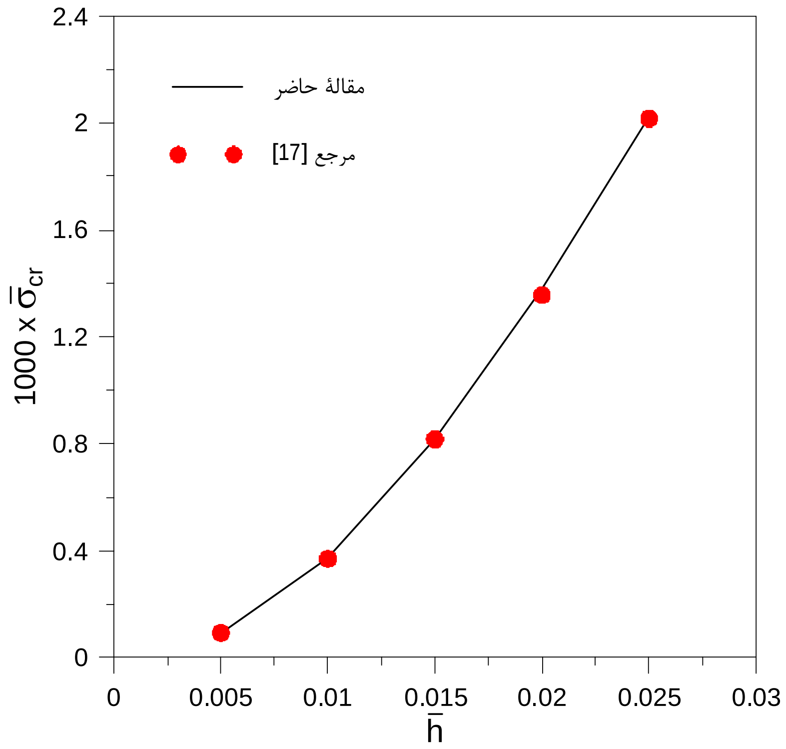
پس از بررسی همگرایی تحلیل‌ها، به‌منظور اعتبارسنجی نتایج، تنش بحرانی کمانش به‌دست آمده از تحلیل این مقاله با نتایج تحلیلی مشابه از مرجع‌های پیشین مقایسه می‌شود. نمودارهای شکل 4 مقایسه تنش بحرانی کمانش به‌دست آمده از تحلیل این مقاله را با نتایج مشابه از مرجع [17] نشان می‌دهد. نمودارهای شکل 4 برای صفحه مربعی نازک تحت فشار دومحوره و رفتار مادی (c) و (d) در جدول 1 انجام شده‌اند. تنش بحرانی کمانش پلاستیک در این شکل براساس نظریه نموی به‌دست آمده‌اند.

مقایسه نمودارهای الف و ب در شکل 4 نشان می‌دهد با افزایش پارامتر c در مدل رامبرگ- آزگود، به‌ازای نسبت ضخامت ثابت، تنش بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. این موضوع به‌دلیل آن است که با افزایش پارامتر c رفتار ماده به سمت رفتار پلاستیک کامل نزدیک‌تر می‌شود [17].

در نمودارهای شکل 5 نیز تنش بحرانی کمانش پلاستیک برای صفحه



الف - برای مشخصات ماده (c) در جدول 1



ب - برای مشخصات ماده (d) در جدول 1

شکل 4 مقایسه تنش بحرانی کمانش پلاستیک با نتایج تحلیلی مشابه از مرجع [17]، برای صفحه مربعی نازک با مشخصات مادی(c) و (d) در جدول 1

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.7.31.9]

مربعی ضخیم براساس نظریه برشی میندلین، با نتایج تحلیلی مرجع [13] مقایسه شده‌اند. تنش‌های بحرانی در شکل 5 برای بارگذاری فشار دومحوره و به‌کارگیری هر دو نظریه تغییر شکل و نموی ارائه شده‌اند. نمودارهای شکل 5 نشان می‌دهند نظریه تغییر شکل در مقایسه با نظریه نموی، تنش بحرانی کمانش کوچک‌تری را پیش‌بینی می‌کند. در مراجع پیشین مانند [17،13] نیز به این موضوع اشاره شده است، هر چند دلیلی برای آن بیان نشده است. سازگاری بسیار خوب بین نتایج این مقاله و پاسخ‌های تحلیلی مرجع‌های [17،13] در نمودارهای شکل‌های 4 و 5، در کنار تأیید روند همگرایی در شکل 3، به‌روشنی نشان‌دهنده اعتبار نتایج تحلیل این مقاله است.

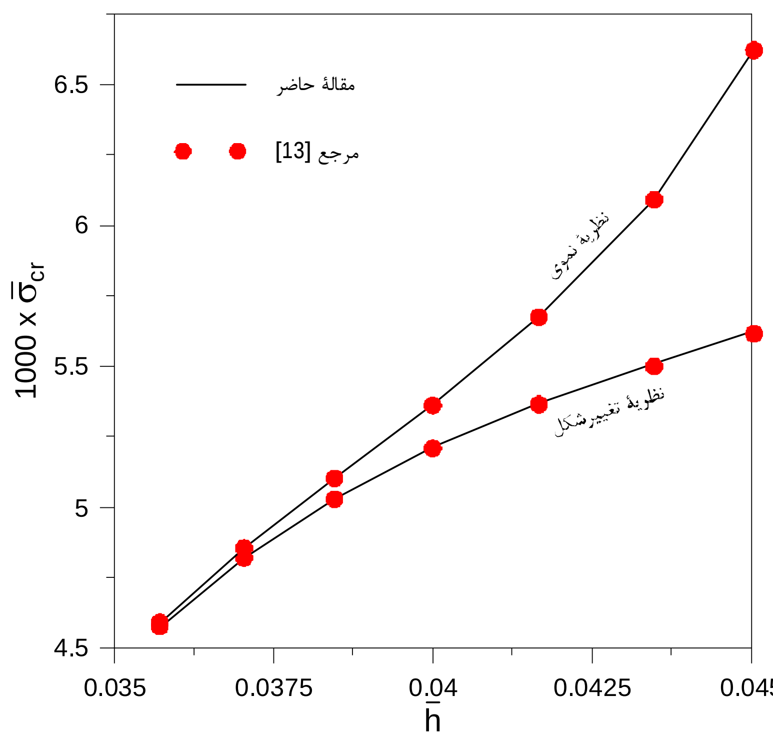
4-2- مطالعه اثر پارامترها بر تنش بحرانی کمانش

پس از اعتبارسنجی نتایج در بخش پیشین، در این بخش اثر پارامترهای مهم در مسأله مورد بررسی، بر تنش بحرانی کمانش مطالعه می‌شود.

با توجه به استفاده از نظریه برشی سینوسی در این مقاله، به‌عنوان یک نظریه برشی مرتبه- بالا، نخستین پرسش قابل طرح، مقایسه اثر این نظریه با نظریه‌های مرتبه نخست میندلین و صفحه نازک، بر تنش بحرانی کمانش است. این موضوع در شکل 6 مورد بررسی قرار گرفته است. نمودارهای شکل 6 نشان می‌دهند نظریه‌های صفحه ضخیم در مقایسه با نظریه صفحه نازک، به‌ویژه در نسبت‌های ضخامت بزرگ، تنش بحرانی به مراتب کوچک‌تری را پیش‌بینی می‌کنند، زیرا حضور تنش‌های برشی سبب کاهش مقاومت صفحه در برابر کمانش می‌شوند، ولی از سوی دیگر بین نظریه‌های برشی میندلین و سینوسی اختلاف بسیار کمی مشاهده می‌شود. این موضوع که در مرجع [4] نیز در تحلیل کمانش الاستیک صفحه هدفمند گزارش شده، نشان‌گر آن است که درنظر گرفتن ضریب تصحیح برش[1] سبب می‌شود نظریه میندلین در پیش‌بینی تنش بحرانی کمانش از دقت کافی برخوردار باشد.

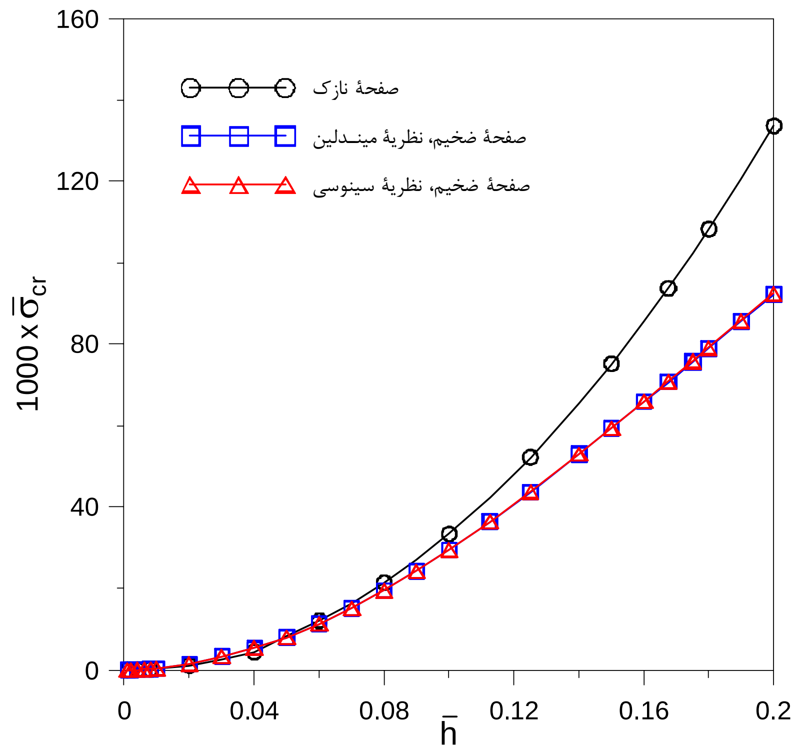
از جمله پارامترهای مهم که در این مسأله می‌تواند مورد توجه باشد، اثر نسبت بارگذاری، ξ، بر تنش بحرانی کمانش است. در شکل 7 نمودارهای تنش بحرانی کمانش صفحه مربعی ضخیم، برحسب نسبت ضخامت، $\bar{h}$، و به‌ازای نسبت‌های مختلف بارگذاری نمایش داده شده‌اند.

در هر یک از حالت‌های شکل 7، تنش بحرانی کمانش الاستیک به‌همراه

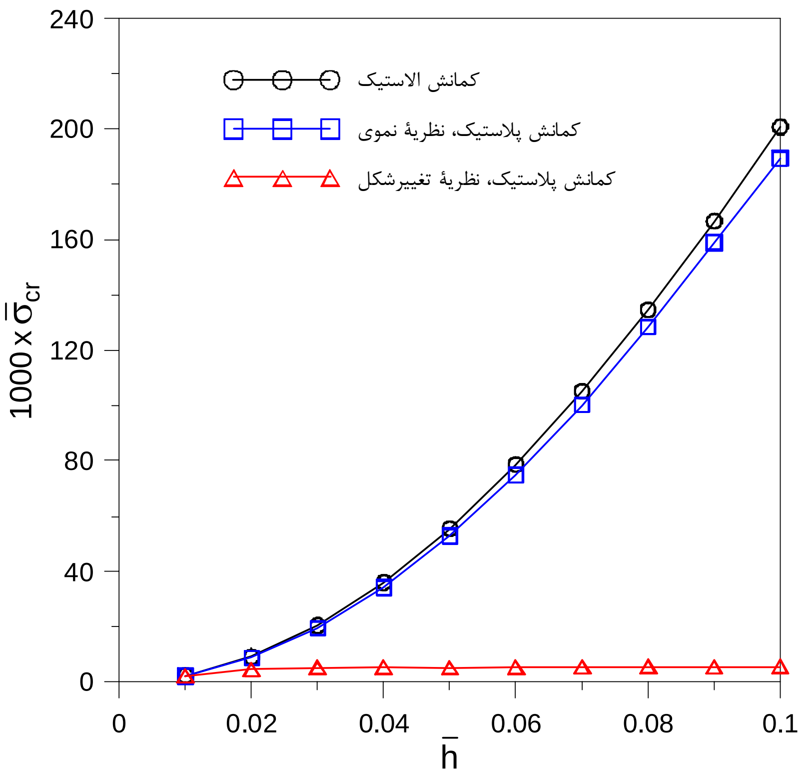


شکل 5 مقایسه تنش بحرانی کمانش پلاستیک با نتایج مشابه از مرجع [13]، برای صفحه مربعی ضخیم بر پایه نظریه برشی میندلین (ماده (a) در جدول 1)

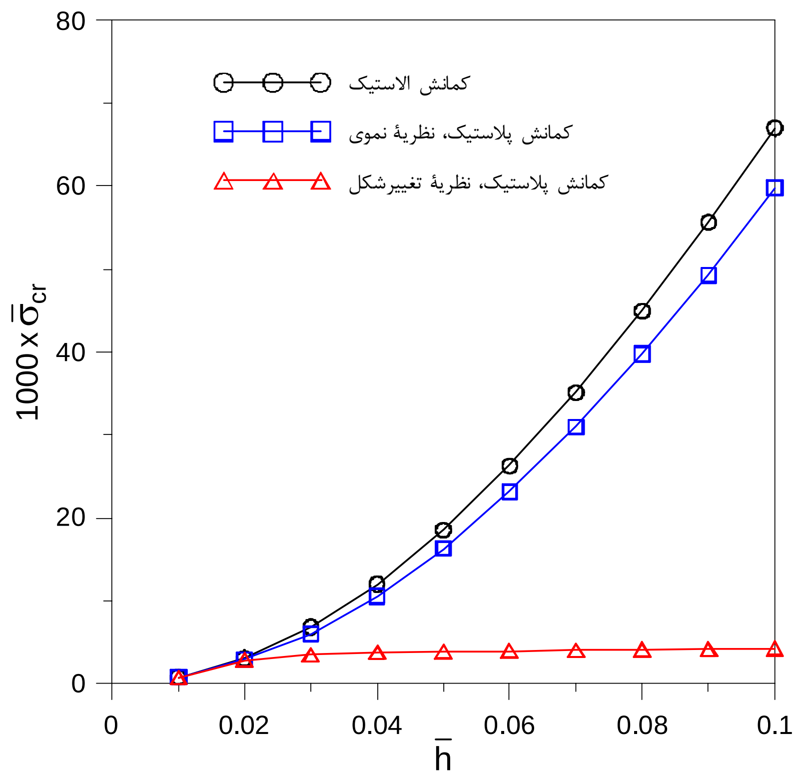
1- Shear Correction Factor



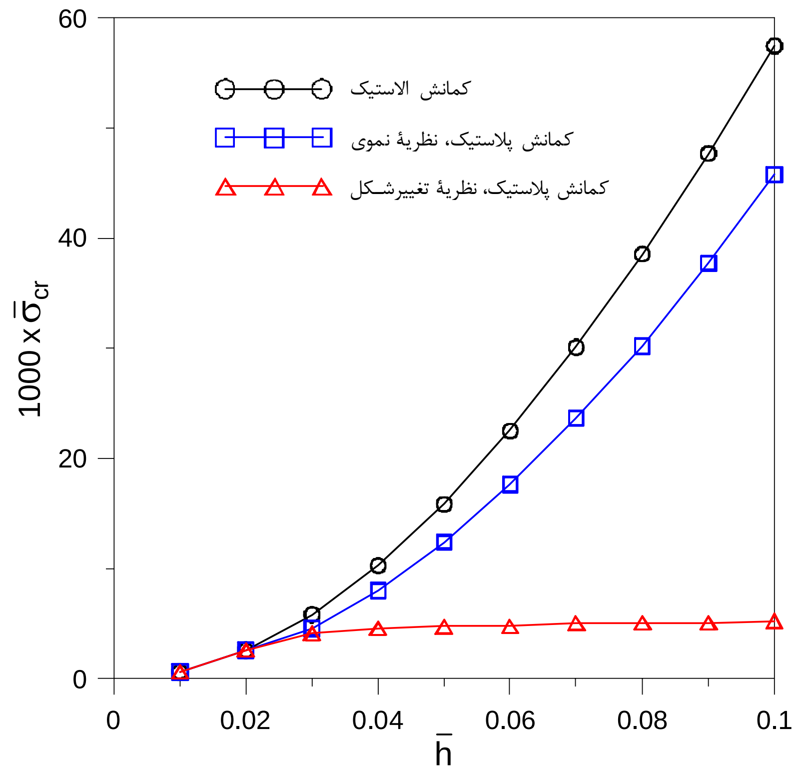
شکل 6 مقایسه اثر نظریه‌های صفحه ضخیم سینوسی و میندلین و صفحه نازک بر تنش بحرانی کمانش پلاستیک صفحه مربعی، بر پایه نظریه نموی و به‌ازای $\xi=0$



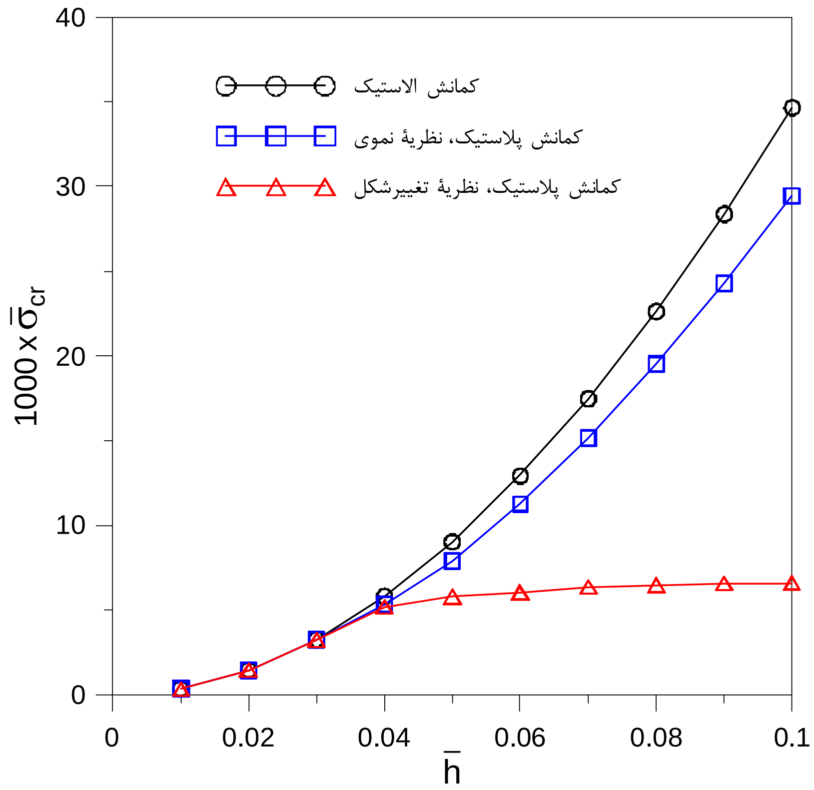
الف - $\xi= -2$



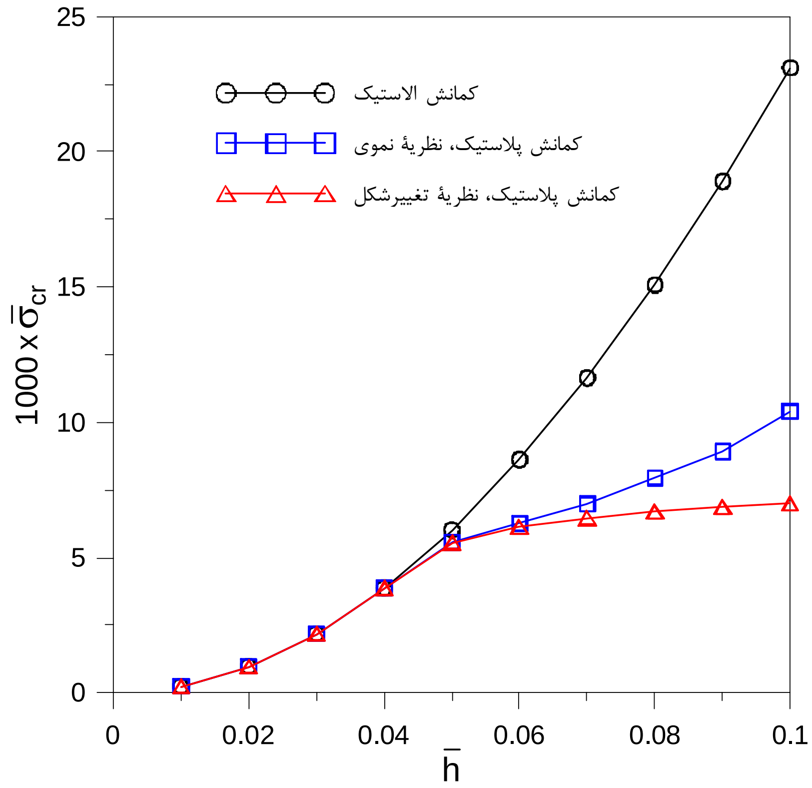
ب - $\xi=-1$



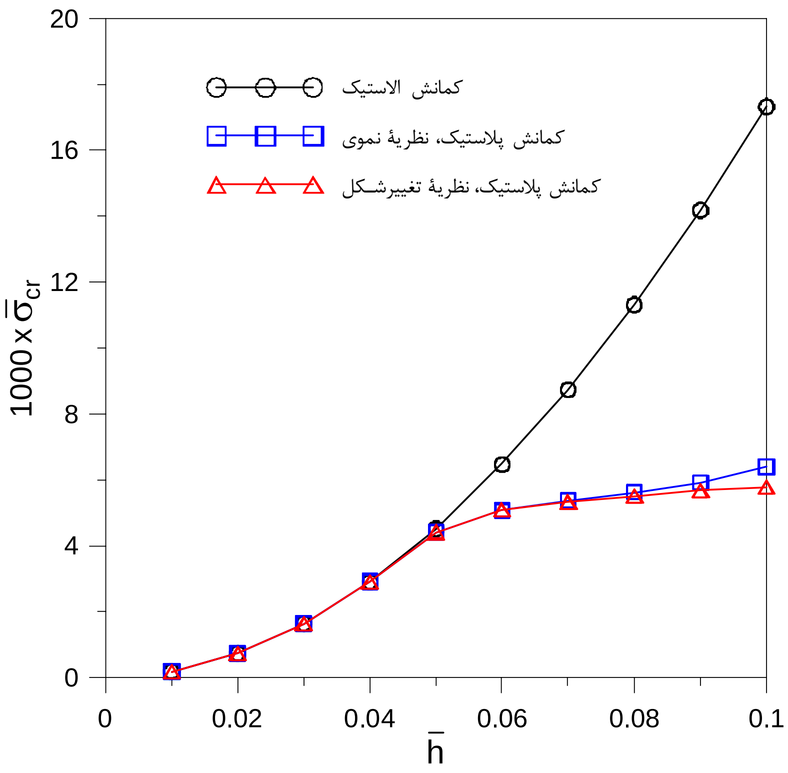
7ج - ξ= -0/5



د - ξ=0



هـ - ξ=0/5



و - ξ=1

شکل 7 مقایسه اثر نسبت بارگذاری، ξ، بر تنش بحرانی کمانش پلاستیک صفحه مربعی ضخیم، با استفاده از نظریه برشی سینوسی، برای ماده (a) در جدول 1

تنش بحرانی کمانش پلاستیک بر پایه نظریه نموی و تغییر شکل، برای صفحه ضخیم با مدل نظریه برشی سینوسی، نمایش داده شده‌اند.

نخستین نکته‌ای که در نمودارهای شکل 7 مشاهده می‌شود آن است که با تغییر باگذاری از وضعیت کشش- فشار (ξ<0) به بارگذاری فشار دومحوره (ξ>0) تنش بحرانی کمانش الاستیک و پلاستیک، کاهش می‌یابد. این موضوع مورد انتظار نیز هست. زیرا کشش در یک جهت سبب می‌شود مقاومت صفحه در برابر فشار وارد شده در جهت دیگر افزایش یافته، بروز کمانش به تأخیر بیافتد. این روند تغییر تنش بحرانی کمانش برای کمانش الاستیک و کمانش پلاستیک بر پایه نظریه نموی و تغییر شکل یکسان نیست. به‌گونه‌ای که با تغییر نسبت بارگذاری از ξ=-1 به ξ=1، در نسبت ضخامت $\bar{h}=0/1$، کاهش تنش بحرانی کمانش الاستیک و کمانش پلاستیک با نظریه نموی به‌ترتیب حدود 74 و 89 درصد است. در حالی که براساس نظریه تغییر شکل تنش بحرانی کمانش پلاستیک در حدود 36درصد افزایش یافته است. این افزایش بر خلاف انتظار است. از سوی دیگر، همچنان‌که انتظار می‌رود، با کاهش تنش بحرانی کمانش، اختلاف دو نظریه نموی و تغییرشکل نیز کاهش می‌یابد [17]. هر چند در پژوهش‌های، پیشین دلیل مشخصی برای وجود اختلاف بین دو نظریه پلاستسیته در پیش‌بینی تنش بحرانی کمانش ارائه و بیان نشده است.

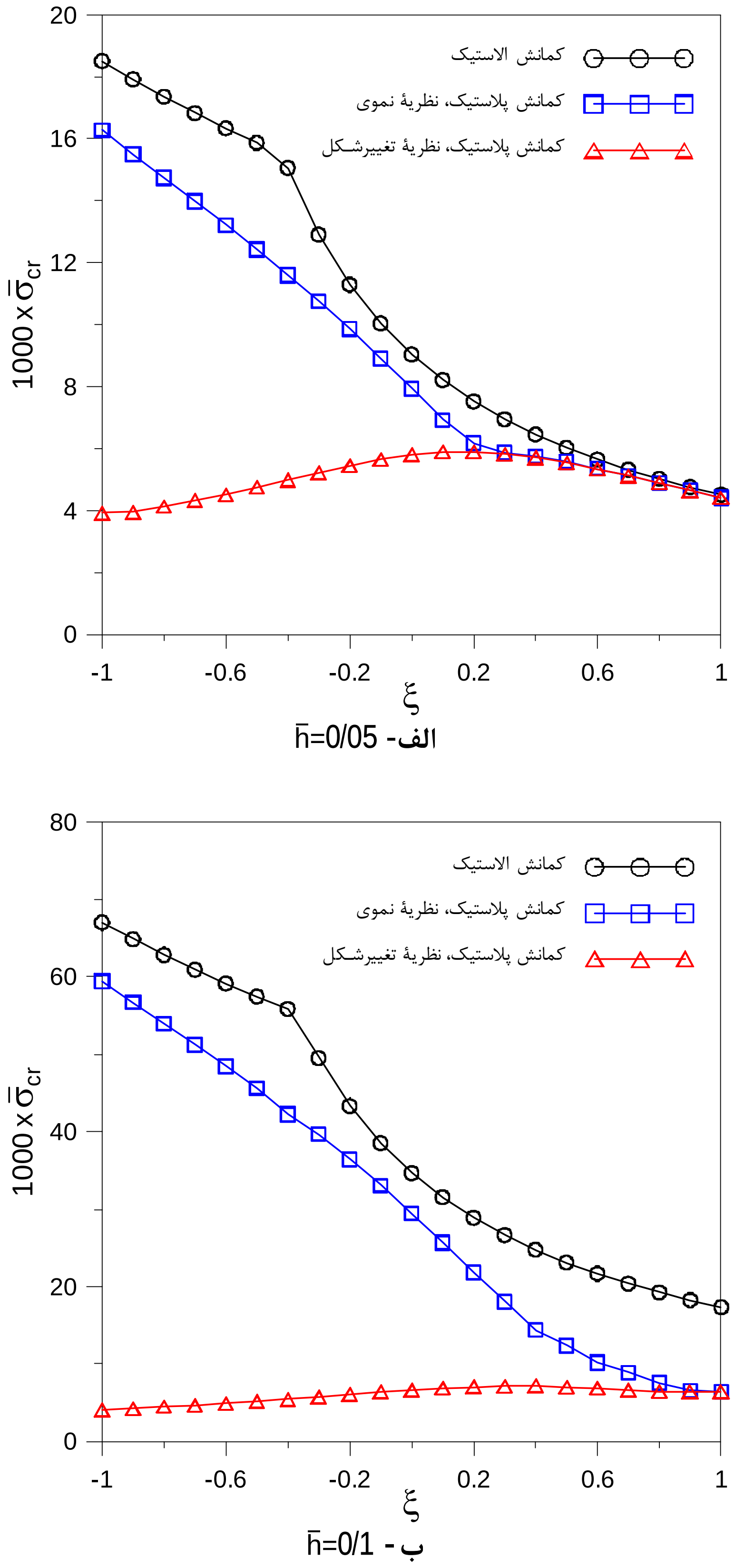
همچنین نتایج شکل 7 نشان می‌دهند برای نسبت‌های ضخامت کوچک و نسبت‌های بارگذاری بزرگ، تنش بحرانی کمانش الاستیک برای تخمین بارگذاری ناپایداری از دقت کافی برخوردار است و نیازی به تحلیل کمانش پلاستیک نیست.

برای بررسی دقیق‌تر اثر نسبت بارگذاری، نمودار تنش بحرانی کمانش بر حسب نسبت بارگذاری، برای صفحه مربعی، و به‌ازای دو نسبت ضخامت $\bar{h}=0/05$ و $\bar{h}=0/1$ در شکل 8 رسم شده است. در شکل 8، نمودارهای مربوط به کمانش الاستیک و کمانش پلاستیک با نظریه‌های نموی و تغییر شکل ارائه شده‌اند. در نمودارهای شکل 8 نیز دو نتیجه مورد انتظار مشاهده می‌شود. نخست آن‌که به‌ازای نسبت ضخامت و نسبت بارگذاری مشخص، ترتیب تنش بحرانی کمانش به‌صورت الاستیک، پلاستیک نموی و پلاستیک

تغییر شکل است. به‌علاوه در نسبت ضخامت $\bar{h}$=0/05، که نسبت ضخامت به‌نسبت کوچکی است، به‌ازای نسبت‌های بارگذاری مثبت (ξ>0)، به‌دلیل کاهش تنش بحرانی کمانش، پیش‌بینی کمانش الاستیک و کمانش پلاستیک با هر دو نظریه نموی و تغییر شکل به یکدیگر نزدیک می‌شوند.

یک نتیجهٔ غیرمنتظره نیز در نمودارهای شکل 8 مشاهده می‌شود. نمودارهای شکل 8 نشان می‌دهند با تبدیل وضعیت بارگذاری از فشار دومحوره (ξ>0) به بارگذاری کشش- فشار (ξ<0)، تنش بحرانی کمانش پلاستیک پیش‌بینی شده به‌وسیله نظریه تغییرشکل کاهش می‌یابد. این نتیجه برخلاف انتظار و البته برخلاف پیش‌بینی کمانش الاستیک و کمانش پلاستیک با نظریه نموی است. در مرجع [15] نیز مشابه همین روند در تحلیل کمانش پلاستیک صفحه نازک گزارش شده است.

با توجه به نمودارهای شکل 8 می‌توان نتیجه گرفت که در وضعیت بارگذاری کشش- فشار، نظریه پلاستیسیته تغییر شکل پیش‌بینی واقع‌بینانه‌ای از تنش بحرانی کمانش پلاستیک صفحه مستطیلی ارائه نمی‌دهد.



الف- $\bar{h}$=0/05

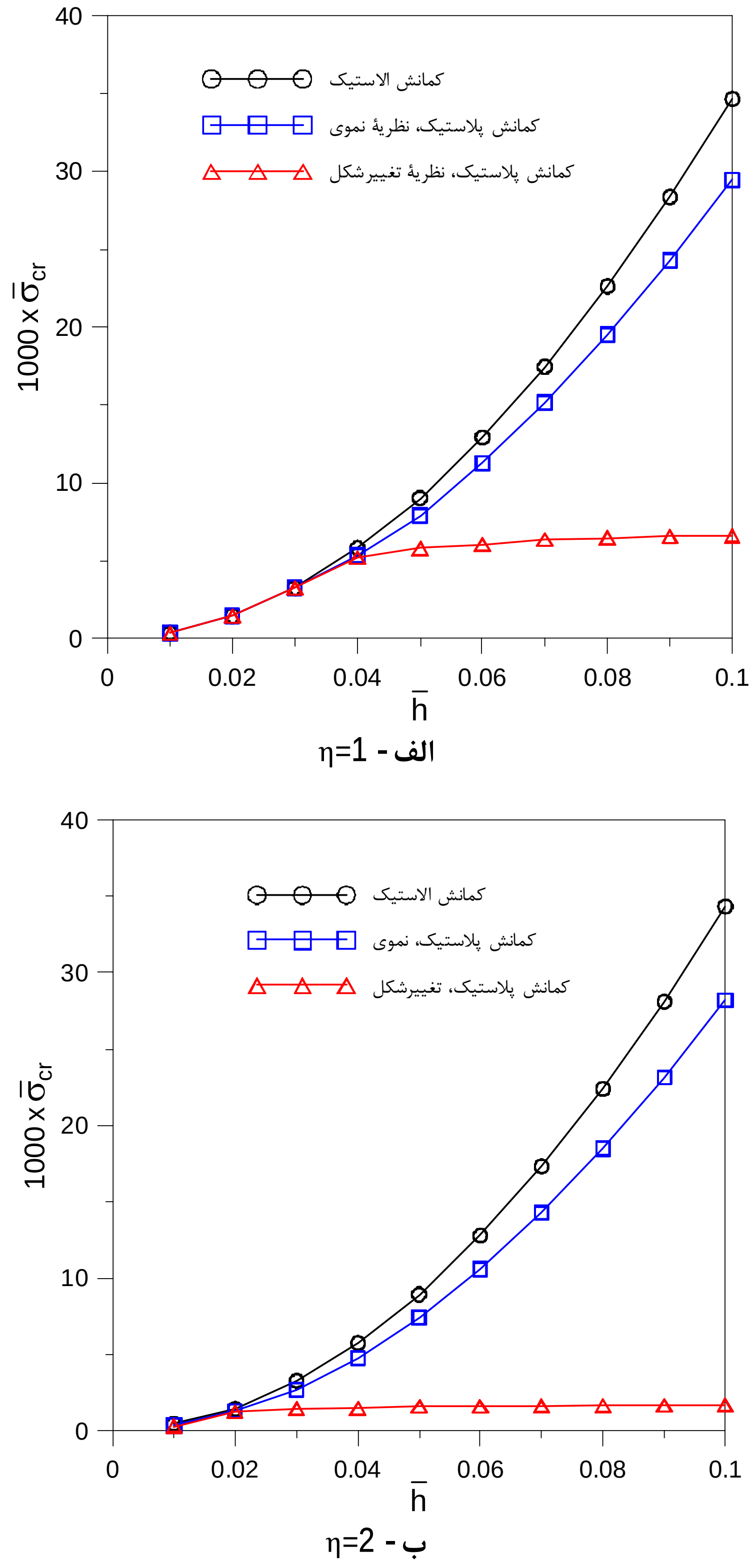
ب - $\bar{h}$=0/1

شکل 8 مقایسه اثر نسبت بارگذاری، ξ، بر تنش بحرانی کمانش الاستیک و کمانش

پلاستیک صفحه مربعی ضخیم با نظریه برشی سینوسی، برای ماده (a) در جدول 1

جنبه مهم دیگر در بررسی تنش بحرانی کمانش، اثر نسبت اندازه ضلع‌ها، η، بر تنش بحرانی کمانش است. به این منظور، نمودار تنش بحرانی کمانش برحسب نسبت ضخامت، به‌ازای سه نسبت ضلع متفاوت (η=1,2,3)، در شکل 9 رسم شده است. نمودارهای شکل 9 مربوط به صفحه ضخیم با نظریه برشی سینوسی، تحت بارگذاری فشار تک‌محوره (ξ=0) است.

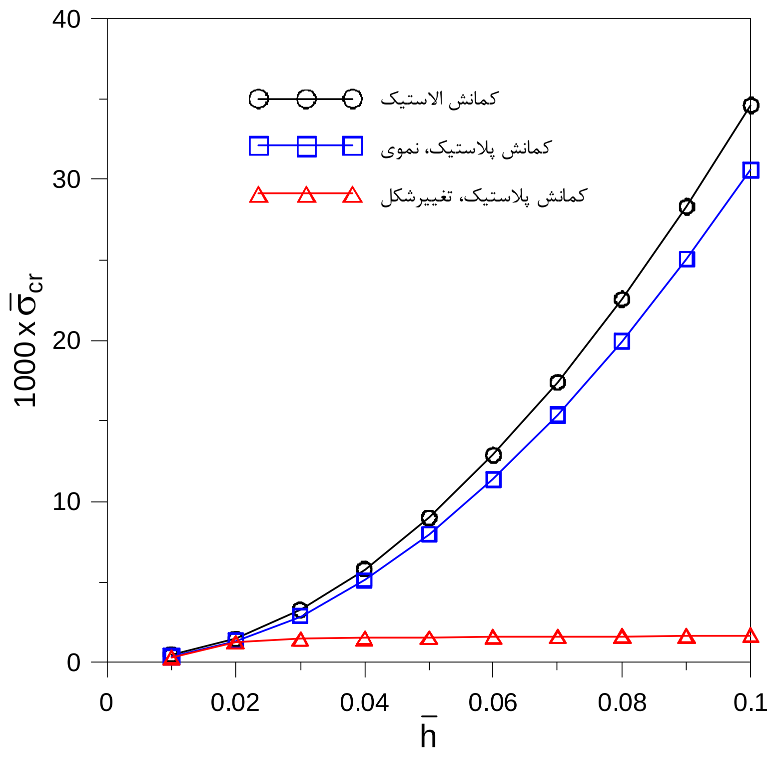
ویژگی مشترکی که میان نمودارهای شکل 9 مشاهده می‌شود، ترتیب نمودارهاست. در هر نسبت ضلع، به‌ازای یک نسبت ضخامت مشخص، تنش بحرانی کمانش الاستیک بزرگ‌ترین و تنش بحرانی کمانش پلاستیک با نظریه تغییرشکل کوچک‌ترین مقدار را دارد. این نتیجه در پژوهش‌های پیشین، مانند [17،16،13] نیز به همین صورت مشاهده و گزارش شده است. همچنین از نتایج شکل 9 می‌توان دریافت که نسبت اندازه ضلع‌ها، اثر قابل توجهی بر تنش بحرانی کمانش ندارد. به‌عبارت دیگر با افزایش نسبت اندازه ضلع‌ها، به‌جز تغییر کوچکی در نمودار کمانش پلاستیک با نظریه تغییر شکل، تغییر قابل توجهی در نمودارهای تنش بحرانی کمانش برحسب نسبت ضخامت مشاهده نمی‌شود. دلیل این موضوع می‌تواند وجود تکیه‌گاه ساده در چهار لبه صفحه باشد، به‌گونه‌ای که درگیر بودن لبه‌های بدون بارگذاری، سبب اعمال محدودیت بر تغییر شکل و تأخیر در بروز کمانش شود.



الف - η=1

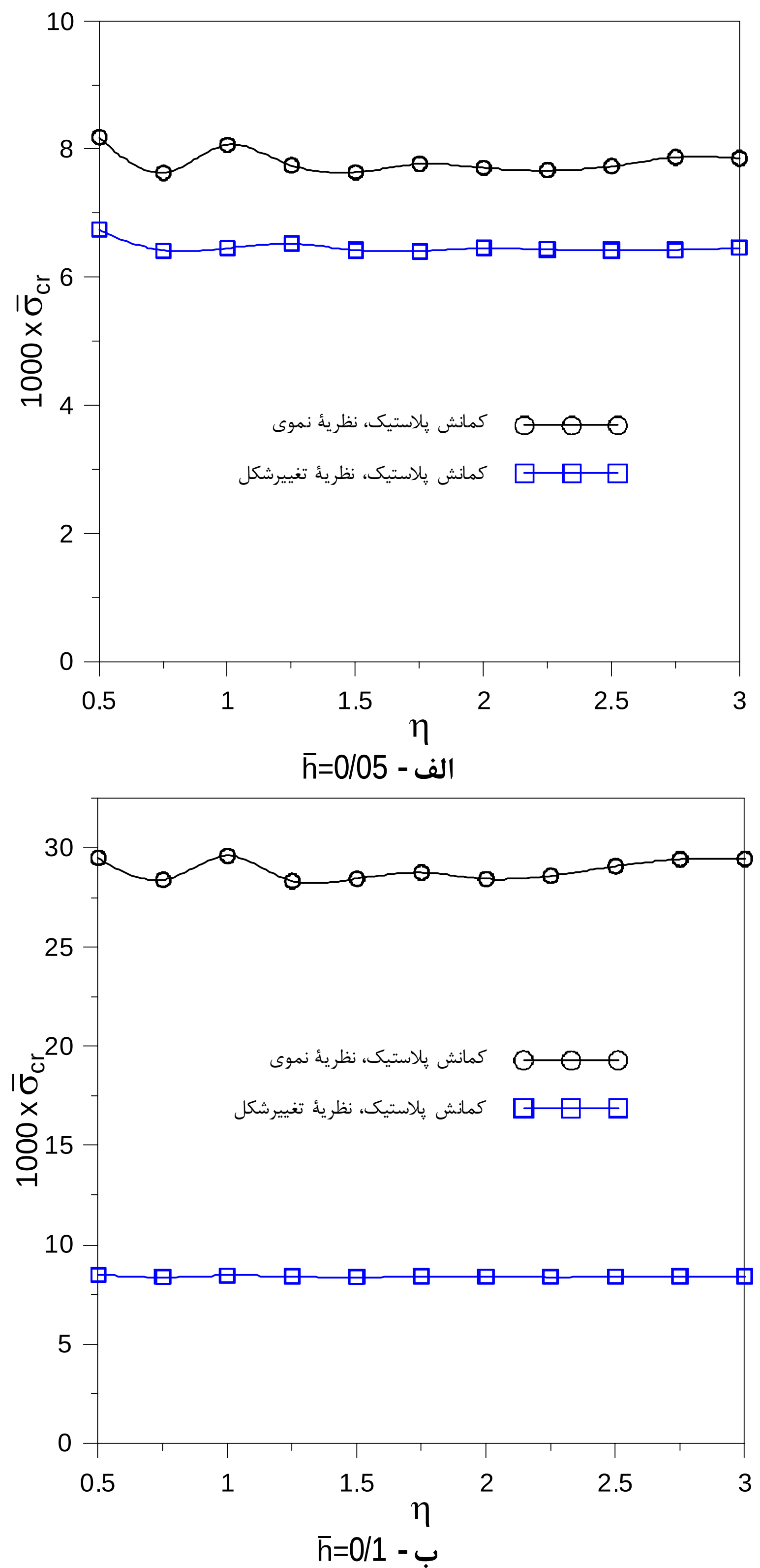
ب - η=2

[DOI: 20.1001.1.10275940.1394.15.7.31.9]



ج - η=3

شکل 9 مقایسه اثر نسبت ضلع‌ها، η، بر تنش بحرانی کمانش پلاستیک صفحهٔ ضخیم با نظریهٔ برشی سینوسی، برای نسبت بارگذاری ξ=0 و مادهٔ (a) در جدول 1



شکل 10 مقایسه اثر نسبت ضلع‌ها، η، بر تنش بحرانی کمانش پلاستیک صفحه ضخیم با نظریه برشی سینوسی، برای نسبت بارگذاری ξ=0 و ماده (b) در جدول 1

در این‌جا نیز برای بررسی دقیق‌تر اثر نسبت ضلع‌ها، نمودار تنش بحرانی کمانش برحسب نسبت ضلع‌ها برای بارگذاری تک‌محوره (ξ=0) و به‌ازای دو نسبت ضخامت $\bar{h}$=0/05 و $\bar{h}$=0/1 در شکل 10 رسم شده است. در نمودارهای شکل 10 مشاهده می‌شود، به‌جز نوسان‌های قسمت‌های نخستین (ηهای کوچک) در هر نمودار، نسبت ضلع‌ها تقریباً اثری بر تنش بحرانی کمانش پلاستیک ندارد. ناچیز بودن اثر نسبت ضلع‌ها بر تنش بحرانی کمانش، به‌ویژه در نظریه پلاستیسیته تغییر شکل بیشتر مشخص است. آن‌چه به‌صورت نوسان در ηهای نزدیک به 1 دیده می‌شود، به‌دلیل شکل مودهای[1] مختلف کمانش است. به این معنی که با تغییر نسبت ضلع‌ها، ممکن است تعداد نیم‌موج‌های طولی ثابت بماند و تعداد نیم‌موج‌های عرضی تغییر کند یا برعکس. این موضوع در کمانش الاستیک و همچنین کمانش پلاستیک صفحه مستطیلی نازک نیز در مرجع‌های [17,15] گزارش شده است، اما دلیلی برای آن بیان نشده است. از سوی دیگر با افزایش نسبت ضلع‌ها، صفحه به یک باریکه شبیه می‌شود و شکل مود کمانش در جهت طولی باریکه تعیین‌کننده خواهد بود. در نتیجه نسبت ضلع‌ها اثری بر تنش بحرانی کمانش نخواهد داشت.

لازم به توضیح است که در پژوهش‌های پیشین که کمانش پلاستیک صفحه مستطیلی ضخیم با نظریه میندلین بررسی شده است، نگارندگان بررسی اثر نسبت ضلع‌ها بر تنش بحرانی کمانش را مشاهده نکرده‌اند.

هم‌چنین براساس نمودارهای شکل 10 مشخص است که افزایش نسبت ضلع‌ها، بر نتایج نظریه تغییرشکل اثر به‌مراتب کمتری نسبت به نتایج نظریه نموی دارند. به‌علاوه مقایسهٔ شکل‌های 10-الف و 10-ب نشان می‌دهد، همان‌گونه که انتظار می‌رود، با افزایش نسبت ضخامت، پیش‌بینی تنش بحرانی کمانش در نظریه نموی به‌مراتب بیشتر از نظریه تغییر شکل افزایش می‌یابد. به‌عبارت دیگر اثر افزایش ضخامت در نظریه نموی به‌مراتب بیشتر از اثر آن در نظریه تغییر شکل است. این موضوع نیز به‌دلیل آن است که نظریه تغییر شکل در مقایسه با نظریه نموی، تنش بحرانی کوچک‌تری را پیش‌بینی می‌کند.

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله، کمانش الاستیک- پلاستیک صفحه مستطیلی ضخیم تحت بارگذاری تنش یکنواخت روی لبه‌ها، با نسبت‌های مختلف بارگذاری، و تکیه‌گاه ساده در چهار لبه، مطالعه شد. کمانش الاستیک- پلاستیک بر پایه نظریه تغییر شکل برشی مرتبه- بالای سینوسی و به‌کارگیری هر دو نظریه متداول پلاستیسیته، یعنی نظریه‌های تغییر شکل و نموی، تحلیل شد. پس از اعتبارسنجی نتایج تحلیل، اثر تغییر نسبت ضخامت، نسبت بارگذاری و نسبت ضلع‌ها بر تنش بحرانی کمانش پلاستیک در هر دو نظریه پلاستیسیته و همچنین کمانش الاستیک بررسی و مقایسه شد. در این زمینه حالت‌های مختلف بارگذاری شامل فشار تک‌محوره، فشار دومحوره و بارگذاری کشش- فشار با نسبت‌های مختلف بارگذاری بررسی شد. مهم‌ترین نتیجه‌های به‌دست آمده را می‌توان در موارد زیر شمرد.

1- در مقایسه دو نظریه تغییرشکل برشی مرتبه نخست میندلین و مرتبه- بالای سینوسی، در محدوده $\bar{h}$≤0/2، اختلاف بسیار کوچکی بین نتایج تنش بحرانی کمانش پلاستیک مشاهده شد. این موضوع نشان می‌دهد ضریب تصحیح برش که در نظریه برشی میندلین درنظر گرفته می‌شود، سبب می‌شود نظریه میندلین در پیش‌بینی تنش بحرانی کمانش از دقت کافی برخوردار باشد. به‌علاوه نتایج نشان می‌دهند که به‌ازای نسبت‌های ضخامت کوچک ($\bar{h}$≤0/06)، پیش‌بینی نظریه صفحه نازک و صفحه

1- Mode Shape

ضخیم بسیار به یکدیگر نزدیک هستند.

2- در نظریه پلاستیسیته تغییر شکل و در بارگذاری دومحوره کشش- فشار ($\xi<0$)، با افزایش نسبت کشش به فشار (منفی‌تر شدن نسبت بارگذاری، ξ)، تنش بحرانی کمانش پلاستیک کاهش می‌یابد. این نتیجه برخلاف انتظار و البته برخلاف پیش‌بینی کمانش الاستیک و کمانش پلاستیک در نظریه نموی است؛ بنابراین به‌نظر می‌رسد نتایج نظریه تغییر شکل در بارگذاری کشش- فشار قابل اعتماد نباشد.

3- در بررسی اثر نسبت ضلع‌ها بر تنش بحرانی کمانش مشاهده شد تا حدود $\eta=1/5$ تغییرات افزایش- کاهشی (موجی‌شکل) در نمودار تنش بحرانی کمانش رخ می‌دهد. این تغییرات موجی به‌دلیل شکل مود کمانش است. به‌عبارت دیگر با تغییر نسبت ضلع‌ها، ممکن است تعداد نیم‌موج‌های طولی ثابت بماند و تعداد نیم‌موج‌های عرضی تغییر کند یا برعکس. با افزایش نسبت ضلع‌ها، چون صفحه به‌شکل یک باریکه تبدیل می‌شود، شکل مود کمانش در جهت طولی تعیین کننده حالت کمانش است و در نتیجه نسبت ضلع‌ها اثری بر تنش بحرانی کمانش نخواهد داشت. نگارندگان بررسی اثر نسبت ضلع‌ها بر تنش بحرانی را در پژوهش‌های پیشین که در زمینه کمانش پلاستیک صفحه مستطیلی ضخیم با نظریه میندلین منتشرشده، مشاهده نکرده‌اند.

6- فهرست نمادها و نشانه‌ها

a	اندازه ضلع صفحه مستطیلی به‌موازات محور x (m)
b	اندازه ضلع صفحه مستطیلی به‌موازات محور y (m)
c	یکی از ثابت‌های مکانیکی بی‌بعد در رابطهٔ رامبرگ- آزگود
$\bar{d}_{iq}^{w}\left(\bar{d}_{i}^{w}\right)$	ضریب‌های بی‌بعد در تقریب ریتز جابه‌جایی عرضی بی‌بعد $\bar{w}$
$\bar{d}_{iq}^{\varphi}\left(\bar{d}_{i}^{\varphi}\right)$	ضریب‌های بی‌بعد در تقریب ریتز تابع چرخش φ
$\bar{d}_{iq}^{\psi}\left(\bar{d}_{i}^{\psi}\right)$	ضریب‌های بی‌بعد در تقریب ریتز تابع چرخش ψ
E	مدول الاستیسیته و از ثابت‌های رابطه رامبرگ- آزگود (Pa)
k	یکی از ثابت‌های مکانیکی بی‌بعد در رابطهٔ رامبرگ- آزگود
G	مدول برشی در شکل نرخی معادله‌های ساختاری (Pa)
h	ضخامت صفحه (m)
$\bar{h}$	ضخامت بی‌بعد (نسبت ضخامت) صفحه
m	تعداد جمله‌ها در تقریب ریتز تابع‌ها
p	درجه چندجمله‌ای در تقریب ریتز تابع‌ها
S	مدول وتری (Pa)
T	مدول مماسی (Pa)
v_x, v_y, v_z	به‌ترتیب مؤلفه‌های x، y و z سرعت (m/s)
w	جابه‌جایی عرضی (m)
$\bar{w}$	جابه‌جایی عرضی بی‌بعد
x, y, z	مختصات در دستگاه دکارتی (m)
$\bar{x}, \bar{y}$	مختصات بی‌بعد دکارتی درون‌صفحه‌ای

نمادهای یونانی

α	پارامتر بی‌بعد مادی وابسته به ضریب پواسون و نسبت مدول وتری و مدول مماسی به مدول الاستیسیته
β	پارامتر بی‌بعد مادی وابسته به ضریب پواسون و نسبت مدول وتری و مدول مماسی به مدول الاستیسیته
γ	پارامتر بی‌بعد مادی وابسته به ضریب پواسون و نسبت مدول وتری و مدول مماسی به مدول الاستیسیته
γ_{ij}	مؤلفه‌های برشی کرنش
ε_{ij}	مؤلفه‌های عمودی کرنش
$\varepsilon_{\mathrm{eq}}$	کرنش معادل
η	نسبت بی‌بعد اندازه ضلع‌های صفحه مستطیلی
ξ	نسبت بی‌بعد بارگذاری (تنش در جهت x به تنش در جهت y)
Π	تابع انرژی پتانسیل کل در معیار پایداری
ν	ضریب پواسون
ρ	پارامتر بی‌بعد مادی وابسته به ضریب پواسون و نسبت مدول وتری و مدول مماسی به مدول الاستیسیته
σ_{ij}	مؤلفه‌های عمودی تنش (Pa)
σ_{eq}	تنش معادل (Pa)
$\bar{\sigma}_{ij}$	مؤلفه‌های تنش بی‌بعد
$\bar{\sigma}_{\mathrm{cr}}$	تنش بحرانی کمانش بی‌بعد
σ_0	تنش تسلیم نامی و یکی از ثابت‌های رابطه رامبرگ- آزگود (Pa)
τ_{ij}	مؤلفه‌های برشی تنش (Pa)
φ	زاویه چرخش حول محور y (rad)
ψ	زاویه چرخش حول محور x (rad)
ω_x	نرخ چرخش حول محور x (rad/s)
ω_y	نرخ چرخش حول محور y (rad/s)

عملگرها

$\dot{(\,)}$	مشتق نسبت به زمان

7- مراجع

[1] N. Yamaki, Buckling of Thin Annular Plate Under Uniform Compression, Journal of Applied Mechanics, Vol. 25, No. 3, pp. 267-273, 1958.

[2] S. P. Timoshenko, J. M. Gere, Theory of Elastic Stability, New York: Mc-Graw-Hill, 1961.

[3] S. Majumdar, Buckling of a Thin Annular Plate Under Uniform Compression, AIAA Journal, Vol. 9, No. 9, pp. 1701-1707, 1971.

[4] H. T. Thai, T. P. Vo, A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling and vibration of functionally graded plates, Journal of Applied Mathematical Modelling, Vol. 37, No. 3, pp. 3269-3281, 2013.

[5] A. A. Illyushin, The Elasto-Plastic Stability of Plates, NACA Thechnical Memorandum, No. 1188, 1947.

[6] E. Z. Stowell, A Unified Theory of Plastic Buckling of Columns and Plates, NACA Technical Note, No. 898, 1948.

[7] G. H. Handelman and W. Prager, Plastic Buckling of Rectangular Plates Under Edge Thrusts, NACA Technical Note, No. 1530, 1948.

[8] H. A. El-Ghazaly, A. N. Sherbourne, Defromation Theory for Elastic-Plastic Buckling Analysis of Plates Under Non-Proportional Planar Loading, Computers and Structures, Vol. 22, No. 2, pp. 131-149, 1986.

[9] D. Durban, Z. Zuckerman, Elastoplastic Buckling of Rectangular Plates in Biaxial Compression/Tension, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 41, No. 3, pp. 751-765, 1999.

[10] J. Betten, C. H. Shin, Elastic-plastic buckling analysis of rectangular plates subjected to biaxial loads, Forschung im Ingenieurwesen, Vol. 65, pp. 273-278, 2000.

[11] C. M. Wang, Y. Chen,Y. Xiang, Plastic Buckling of Rectangular Plates Subjected to Intermediate and End Inplane Loads, Journal of Solids and Structurees, Vol. 41, No. 4, pp. 4279-4297, 2004.

[12] S. C .Shrivastava, Inelastic Buckling of Plates Including Shear Effects, International Journal of Solids and Structures, Vol. 15, pp. 567-575, 1979.

[13] C. M. Wang, Y. Xiang, J. Chakrabarty, Elastic/Plastic Buckling of Thick Plates, International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, pp. 8617-8640, 2001.

[14] C. M. Wang, T. M. Aung, Plastic Buckling Analysis of Thick Plates Using P-Ritz Method, International Journal of Solids and Structures, Vol. 44, No. 3, pp. 6239-6255, 2007.

[15] M. Maarefdoust, M. Kadkhodayan, A comparison between the incremental and deformation theories to analyze elastoplastic buckling of thin rectangular plates by GDQ method, Modares Mechanical Engineering, Vol. 12, No. 3, pp. 11-26, 2012. (In Persian)

[16] S. Rezaei, M. Salmani Tehrani, Elastic-Plastic Symmetrical Buckling Analysis of a Solid Circular Plate of Variable Thickness, Modares Mechanical Engineering, Vol. 15, No. 2, pp. 25-33, 2015. (In Persian)

[17] J. Chakrabarty, Applied Plasticity, Second Edition, pp. 519-522, New York, Springer, 2010.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.7.31.9]