



# مدل سازی سه بعدی اثر ناحیه ورودی در جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال مستطیلی

علی جلالی<sup>۱</sup>، محمد حسن کیهانی<sup>۲</sup>، محمود نوروزی<sup>۳\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

۲- دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

۳- استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

\*شاهرود، کد پستی ۳۶۱۹۹۵۱۶۱. mnorouzi@shahroodut.ac.ir

**چکیده-** در این پژوهش، مدل سازی عددی جریان سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه در کانال های مستطیلی مدنظر قرار گرفته است. در بیشتر پژوهش های انجام شده در این زمینه، با صرف نظر کردن از اثر ناحیه ورودی، فقط ناحیه توسعه یافته تحلیل شده است. با توجه به در دست نبودن تحلیلی جامع در این زمینه، مدل سازی سه بعدی ناحیه ورودی، نوآوری این پژوهش است. برای مدل سازی عبارت تنش، از مدل PTT که یکی از کامل ترین مدل های پیشنهادی برای سیالات ویسکوالاستیک است، استفاده کردیم. لازم است ذکر شود که در این پژوهش شرایط اولدروید در نظر گرفته شده و جریان های گردابی آشکارسازی شده است. با توجه به غیرخطی بودن معادلات حاکم و همچنین سه بعدی بودن محدوده حل، برای حل معادلات از روش فشرده سازی مصنوعی همراه با شبکه جابه جا شده استفاده شده است. نتایج به دست آمده در ناحیه توسعه یافته، همخوانی خوبی را با دیگر نتایج موجود در این زمینه نشان می دهد.

**کلیدواژگان:** سیال ویسکوالاستیک، جریان در حال توسعه، مدل سازی سه بعدی، معادله PTT.

## Three-Dimensional Simulation of Entrance Region effect for Viscoelastic flows in a Rectangular Duct

A. Jalali<sup>1</sup>, M. H. Kayhani<sup>2</sup>, M. norouzi<sup>3\*</sup>

1- Ph. D. student of shahrood univ of tech., Faculty of mechanical engineering, Shahrood

2- Assoc. Prof. of shahrood univ of tech., Faculty of mechanical engineering, Shahrood

3- Assis. Prof. of shahrood univ of tech., Faculty of mechanical engineering, Shahrood

\*P.C 3619995161, Shahrood, Iran. mnorouzi@shahroodut.ac.ir

**Abstract-** In this paper, numerical 3D simulation of viscoelastic developing flow in a rectangular duct with the nonlinear constitutive equation was considered.

So far, researchers have focused on the fully developed zone. In these cases, the effects of entrance region of flow and changes in important quantities of developing flow were neglected. Therefore three-dimensional modeling of the entrance region is an innovation of this work. For modeling the stress term, PTT constitutive equation which is one of the most perfect models was used. It should be noted that, the Oldroyd conditions was ingratiated and secondary flow has been simulated.

Considering three-dimensionality of the solution domain as well as the dependency and nonlinearity of equations, artificial compressibility explicit method and staggered grid for solving the equations is purposed.

The result is in good agreement with the others reported in the fully developed region.

**Keywords:** Viscoelastic fluid, developing flow, three-dimensional modeling, PTT constitutive equation.

## ۱- مقدمه

با رشد صنعت و گسترش سیالات مورد استفاده، محققان با سیالاتی برخورد کردند که قوانین سیالات نیوتونی در مورد آنها معتبر نبوده و در عوض پدیده‌های متفاوتی مانند ایجاد جریان‌های ثانویه، دارا بودن تنش تسلیم و بالا آمدن سیال از میله چرخان در آنها اتفاق می‌افتد. از این‌رو شاخه‌ای جدید در مکانیک سیالات به نام رئولوژی در باره سیالات غیر نیوتونی به وجود آمد. با گسترش رئولوژی، سیالات غیر نیوتونی به گروه‌های بیشتری تقسیم شد که سیالات ویسکوالاستیک شاخه‌ای از آنها است. همان‌طور که نام نشان می‌دهد، این سیالات ترکیبی از خاصیت‌های ویسکوز و الاستیک را نشان می‌دهند. تاکنون پژوهش‌های متعددی در راستای مطالعه جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های مستقیم انجام شده است. یکی از تفاوت‌های بین سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی، اختلاف بین تنش‌های نرمال در سیالات غیرنیوتنی است؛ که اگر جهت اصلی جریان را جهت ۱ و جهت تغییر کمیت‌ها را جهت ۲ فرض کنیم، داریم:

$$N_1 = \sigma_{11} - \sigma_{22} \quad (1)$$

$$N_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33} \quad (2)$$

$N_1$  اختلاف تنش نرمال اول و  $N_2$  اختلاف تنش نرمال دوم و  $\sigma_{ii}$ ، مولفه‌های تانسور تنش در راستاهای مورد نظر است. یکی از پدیده‌های مهم در جریان سیال ویسکوالاستیک، پیدایش جریان‌های ثانویه در مقاطع عمود بر جریان اصلی جریان است. با توجه به معادلات حاکم می‌توان اثبات کرد که شرط لازم برای تشکیل این جریان‌ها وجود اختلاف تنش نرمال دوم در سیال است. بعدها شرایط ایجاد نشدن جریان‌های گردابی توسط اولدرویوید<sup>۱</sup> [۱] به شرح زیر بیان شده است:

1. Oldroyd

(۱) جریان متقارن محوری یا صفحه‌ای باشد.

(۲) اختلاف تنش نرمال دوم برابر صفر باشد (در

مدل SPTT, Oldroyd-B, UCM)

(۳) ضریب اختلاف تنش نرمال دوم و ویسکوزیته هردو

ثابت باشند (در مدل MPTT اگر  $g=1$ ،  $n=1$ )

(۴) اختلاف تنش نرمال دوم ضریب ثابتی از ویسکوزیته

باشد (در مدل PTT, MPTT اگر  $g=1$ )

تحلیل جریان‌های ثانویه برای اولین بار توسط گرین و ریولین<sup>۲</sup> [۲] انجام شده است. آنان از مدل راینر-ریولین<sup>۳</sup> برای مدل‌سازی عبارت تنش استفاده کرده‌اند و به علت صفر بودن اختلاف تنش‌های نرمال اول در این مدل، جواب‌های به دست آمده چندان با واقعیت سازگار نیست.

دادسون<sup>۴</sup> و همکاران [۳] به بررسی جریان‌های ثانویه واقع در جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های مستطیلی با استفاده از مدل CEF<sup>۵</sup> پرداختند. آنان در ادامه، محلول ویسکوالاستیک به دست آمده را که حاوی ترکیب چند ماده خاص بود در آزمایشگاه مطالعه کردند و هماهنگی خوبی را در مقایسه نتایج آزمایشگاهی و مدل‌سازی عددی گزارش کردند. در همین زمینه تانسنده<sup>۶</sup> و همکاران [۴] با استفاده از مدل CEF و روش حساب اختلال‌ها، جریان سیال ویسکوالاستیک را در کانال‌های مستطیلی مطالعه کردند. آنان همچنین در تحقیق آزمایشگاهی، جریان شش سیال ویسکوالاستیک مختلف را بررسی کردند که در هر شش مورد، هشت جریان ثانویه در مقطع کانال مستطیلی گزارش شده است. آنان همچنین دریافتند که شدت جریان‌های ثانویه با اختلاف تنش نرمال دوم رابطه‌ای مستقیم دارد.

گایروس<sup>۷</sup> [۵] و نیکولرس<sup>۱</sup> [۶] جریان در حال توسعه سیال ویسکوالاستیک همراه با انتقال حرارت را با استفاده

2. Green A. E and Rivlin R. S

3. Reiner-Rivlin

4. A. G. Dodson

5. Criminale-Eriksen-Filbey

6. P. Townsend

7. Gaidos

در کانال مستطیلی به روشی تحلیلی مطالعه کردند. در سال ۲۰۰۳، یاماماتو<sup>۱۰</sup> [۱۲] در هندسه‌ای پیچیده‌تر و به روش‌های عددی و تجربی و با استفاده از مدل PTT، جریان سیال در کانال مستطیلی همراه با حفره را مدل‌سازی کرد.

اوبرگا<sup>۱۱</sup> و همکاران [۱۳] نیز با استفاده از مدل ساده شده فن تین-تنر<sup>۱۲</sup> جریان سیال ویسکوالاستیک را در کانال مستطیلی مطالعه کردند. در تحقیقات ایشان که در ناحیه در حال توسعه و به‌صورت دوبعدی انجام شده، خواص سیال به‌صورت تابعی از دما منظور شده و اثر تغییر دما بر خواص سیال بررسی شده است. در سال ۲۰۰۶، تانو<sup>۱۳</sup> [۱۴] جریان سیال ویسکوالاستیک توسعه یافته را در کانال صاف به‌صورت سه‌بعدی و با استفاده از معادله PTT مدل‌سازی کرد. بوتابا<sup>۱۴</sup> و همکاران [۱۵] پایداری جریان ویسکوالاستیک را در کانال خمیده با استفاده از مدل PTT بررسی کردند. در سال ۲۰۰۹ پرس<sup>۱۵</sup> [۱۶] به مدل‌سازی سه‌بعدی جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال مستطیلی با نسبت اضلاع ۲ و ۱ - که از نظر هیدرولیکی توسعه یافته و از نظر حرارتی در حال توسعه است - پرداخت. در تحقیقات وی وجود جریان‌های ثانویه در مقاطع عرضی کانال باعث افزایش عدد ناسلت و افزایش انتقال حرارت توصیف شده است.

دیده می‌شود که بیشتر تحقیقات در زمینه جریان سیال ویسکوالاستیک، بر ناحیه توسعه یافته تمرکز داشته و تحقیقات معدودی درباره ناحیه در حال توسعه انجام شده است. همچنین تحقیقات به‌صورت دوبعدی بوده و لذا امکان مشاهده جریان‌های ثانویه فراهم نیست و یا این‌که حل با فرض حالت‌های خاصی انجام شده است. از این‌رو در این تحقیق مدل‌سازی سه‌بعدی جریان سیال

از مدل انتقالی ماکسول به‌صورت دو بعدی مدل‌سازی کردند که به علت دوبعدی بودن مدل‌سازی ایشان، جریان‌های ثانویه قابل دیدن نیست. جروانگ<sup>۲</sup> و همکاران [۷] با استفاده از مدل CEF و روش حجم محدود، به مدل‌سازی جریان‌های ثانویه و اثرهای آن بر افت فشار در کانال‌های مستطیلی پرداختند.

در سال ۱۹۷۷ تنر<sup>۳</sup> و همکاران [۸]، معادله جدیدی را که از تئوری شبکه به‌دست آمده بود ارائه کردند. این مدل که به مدل PTT<sup>۴</sup> مشهور است، نوعی مدل غیر خطی است که در آن به‌طور همزمان اختلاف تنش نرمال اول و دوم مخالف صفر بوده و همچنین دارای رفتار باریک‌شوندگی<sup>۵</sup> نسبت به نرخ برش برای اختلاف تنش نرمال اول و دوم و ویسکوزیته است. از آن پس تحقیقات متعددی در زمینه سیالات ویسکوالاستیک با استفاده از این مدل انجام شده است.

ژو<sup>۶</sup> و همکاران [۹] با استفاده از روش حجم محدود و افزودن عبارتی با نام فشار مصنوعی به دو سمت معادله مومنتم، جریان سیال ویسکوالاستیک را در کانال‌های مستطیلی مطالعه کردند. لازم است ذکر شود که آنان به منظور مدل‌سازی عبارت تنش، از شکل بهبود یافته معادله فن تین-تنر<sup>۷</sup> استفاده کردند. در تحقیق حاضر که در ناحیه توسعه یافته جریان انجام شده، اثر تغییر ابعاد کانال بر شکل و قدرت جریان‌های ثانویه نیز مطالعه شده است.

در سال ۱۹۹۹ کیهارا<sup>۸</sup> و همکاران [۱۰]، جریان سیال ویسکوالاستیک را در کانال همگرا با استفاده از معادله PTT مدل‌سازی کردند. الوس<sup>۹</sup> و همکاران [۱۱] نیز با استفاده از معادله PTT جریان سیال ویسکوالاستیک را

10. Takehiro Yamamoto
11. N.obrega
12. Phan-Thien-Tanner (PTT)
13. S. Tanoue
14. Mohammed Boutabaa
15. N. Peres

1. Teo Nikoleris
2. B. Gervang
3. I. Tanner
4. Phan-Thien-Tanner (PTT)
5. Shear Thinning
6. S.-C. Xue
7. Modify Phan-Thien-Tanner (MPTT)
8. S. Kihara
9. Manuel A. Alves

$$D^* = \frac{D}{D_h}, \quad P^* = \frac{PD_h}{\eta \cdot W_{ref}}, \quad \tau^* = \frac{\tau D_h}{\eta \cdot W_{ref}} \quad (6)$$

که در آن  $D^*$ ,  $P^*$ ,  $\tau^*$  به ترتیب، مقادیر بی‌بعد طول، فشار و تنش است، معادلات حاکم در حالت بی‌بعد به شکل زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\nabla \cdot V^* = 0 \quad (7)$$

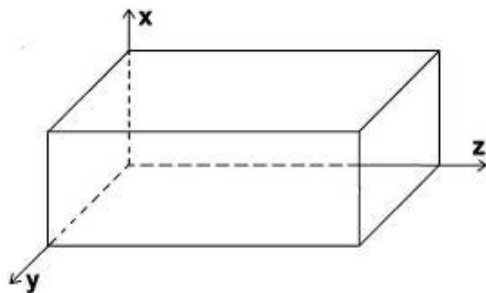
$$V^* \cdot \nabla V^* = \frac{1}{Re} (-\nabla P^* + \nabla \cdot \tau^*) \quad (8)$$

$$g \tau^* + We(V^* \cdot \nabla V^* - L^* \tau^* + \tau^* L^{T*}) = \mu D^* \\ We = \frac{\lambda W_{ref}}{D_h} \quad (9)$$

همان‌طور که گفته شد، در معادله PTT،  $g \neq 1$  شرط لازم و کافی برای پیدایش جریان‌های ثانویه است.

### ۳- مدل‌سازی عددی

هندسۀ مورد نظر در این پژوهش در شکل ۱ نشان داده شده است. با توجه به تقارن در راستای  $x$ ،  $y$  و همچنین برای صرفه‌جویی در هزینه محاسباتی، یک چهارم هندسه اصلی برای دامنه حل در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم با استفاده از روش تفاضل محدود به شکل صریح گسسته‌سازی شده و برای مشتقات مکانی از تقریب مرکزی مرتبه دو و برای مشتقات زمانی از تقریب مرکزی مرتبه اول استفاده شده است.



شکل ۱ هندسه مورد نظر در این پژوهش

ویسکوالاستیک در حال توسعه با استفاده از مدل PTT هدف قرار گرفت.

### ۲- معادلات حاکم

با توجه به دائمی و تراکم‌ناپذیر بودن جریان موردنظر در این پژوهش، معادلات حاکم به صورت زیر است:

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (3)$$

$$\rho(V \cdot \nabla V) = (-\nabla P + \nabla \cdot \sigma) \quad (4)$$

همان‌طور که گفته شد، در این پژوهش به منظور مدل‌سازی عبارت تنش در معادله بقای مومنتم، از مدل PTT استفاده شده است. این مدل نسبت به مدل‌های دیگر، کاملتر بوده و همچنین با در نظر گرفتن شرایط اولدروید، جریان‌های ثانویه در آن قابل مشاهده است. مدل PTT در حالت کلی به صورت زیر است.

$$\sigma = \gamma(1 - \beta)\eta \cdot D + \tau \\ \lambda \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + \nabla \cdot (V\tau) \right) = \\ \gamma \mu \beta \eta \cdot D + \lambda (L\tau + \tau L^T) - g \tau \\ g = 1 + \frac{\lambda \varepsilon}{\eta_m} \text{tr}(\tau), \quad \beta = \frac{\eta_m}{\eta} \\ \mu = \frac{\eta_m}{\eta} = 1, \quad L = \nabla V^T - \xi D \quad (5)$$

که در آن  $\varepsilon$  و  $\xi$  پارامتر مادی،  $\lambda$  زمان آسودگی از تنش،  $\text{tr}(\tau)$  مجموع عناصر قطر اصلی تانسور تنش در معادله PTT و  $D$  تانسور نرخ برش است.

با تعریف  $W_{ref}$  به عنوان سرعت مشخصه،  $D_h$  (قطر هیدرولیکی) به عنوان طول مشخصه و  $\eta_0$  ویسکوزیته سیال در نرخ برش صفر و همچنین تعریف بقیه پارامترهای بی‌بعد به شکل زیر است:

## ۴- نتایج

در آغاز محاسبات، به منظور شبکه بندی بهینه دامنه حل، استقلال حل از شبکه را باید بررسی کنیم. زیرا از یک سو، ریز کردن شبکه تاحدی جواب های به دست آمده را دقیق تر ساخته و از سوی دیگر هزینه محاسباتی را افزایش می دهد. از این رو دامنه حل با شبکه های متفاوتی بررسی شد که نتایج به شرح زیر است.

**جدول ۱** مقادیر خطا و زمان محاسبه برای شبکه بندی های مختلف

| تعداد<br>سلول های<br>شبکه | درصد خطای نسبی<br>مربوط به معادله<br>پیوستگی | زمان محاسبه<br>(Second * GHz) |
|---------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------|
| ۱۴×۱۴×۱۰۴                 | ۱۳/۲۱                                        | ۲۲۱۰                          |
| ۲۴×۲۴×۲۰۴                 | ۳/۳۲                                         | ۱۲۱۰۴۰                        |
| ۳۴×۳۴×۳۰۴                 | ۱/۲                                          | ۲۲۴۴۰۰                        |
| ۴۴×۴۴×۴۰۴                 | ۰/۹۳                                         | ۵۱۶۸۰۰                        |

با توجه به دقت قابل قبول محاسبات و افزایش چشمگیر هزینه محاسباتی با افزایش تعداد گره های شبکه، شبکه ۳۴×۳۴×۳۰۴ به عنوان شبکه بهینه در این پژوهش انتخاب شد. لازم است ذکر شود که شبکه بندی کاملاً یکنواخت بوده و حداکثر نسبت ابعاد گره های محاسباتی برابر دو است.

همان طور که گفته شد تاکنون تحقیقی در زمینه بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه در حالت سه بعدی انجام نشده، لذا برای بررسی صحت نتایج به دست آمده، نتایج این تحقیق در ناحیه توسعه یافته با نتایج موجود در این زمینه مقایسه شده و نتایج هماهنگی خوبی

با توجه به نبود وابستگی دوطرفه بین معادلات پیوستگی و مومنتم و به منظور ایجاد نوعی وابستگی دو طرفه بین این معادلات و همچنین برای استفاده از روش صریح در حل معادلات، از روش فشرده سازی مصنوعی استفاده شده است. در این روش یک عبارت به عنوان فشار مصنوعی به صورت گذرا و به شکل  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial p^*}{\partial t}$  به معادله پیوستگی اضافه می شود. با توجه به اینکه حل دائم مسأله مورد نظر است، با پیشروی در زمان و با رسیدن به حل دائمی، اثر این عبارت به صفر میل می کند. از سوی دیگر به سبب نبود شرطی مناسب برای فشار در مرزها، شبکه بندی دامنه حل با استفاده از دو شبکه مجزا انجام می شود که یکی بر روی مرزها و دیگری شبکه داخلی است. با تعریف مقادیر فشار بر روی شبکه داخلی، نیازی به تعریف شرط مرزی برای فشار نیز وجود ندارد. در این حالت با قرارگیری شمارنده های فرد بر روی مرزها، سرعت در جهت  $x$  بر روی گره های  $u(2i+1, 2j, 2k)$ ، سرعت در جهت  $y$  بر روی گره های  $v(2i, 2j+1, 2k)$  و سرعت در جهت  $z$  بر روی گره های  $w(2i, 2j, 2k+1)$  و فشار و دیگر مقادیر بر روی گره های  $(2i, 2j, 2k)$  تعریف می شود.

بر روی مرزهای جامد، شرط عدم لغزش برای سرعت اعمال شده و در صفحه تقارن  $yz$ ، سرعت در راستای  $x$  برابر صفر و سرعت در دو جهت دیگر برابر با گره مجاور مرز فرض شده است. در صفحه تقارن  $xz$ ، سرعت در جهت  $y$  برابر صفر و سرعت در دو جهت دیگر برابر با سرعت در گره مجاور مرز است. شرایط مرزی دیگر هم در مرزهای تقارن بنا بر خاصیت آینه ای اعمال شده است. در ورودی کانال پروفیل سرعت محوری یکنواخت و در خروجی کانال فرض توسعه یافتگی جریان در نظر گرفته شده است.

را نشان می‌دهد. کمیت‌های فرض شده برای پارامترهای مادی معادله PTT در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۲ مقادیر فرض شده برای پارامترهای مادی

| $\eta_0$ | $\varepsilon$ | $\lambda$ | $\xi$ | $\beta$ | $\rho$ | $\mu$ |
|----------|---------------|-----------|-------|---------|--------|-------|
| ۰.۱      | ۰.۱           | ۰.۰۱      | ۰.۲   | ۱       | ۲۵     | ۱     |

جریان، افزایش می‌یابد. تغییر طول توسعه یافتگی نسبت به عدد رینولدز در جدول ۳ نشان داده شده است.

جدول ۳ تغییر طول ناحیه توسعه‌یافتگی به‌ازای تغییر عدد رینولدز

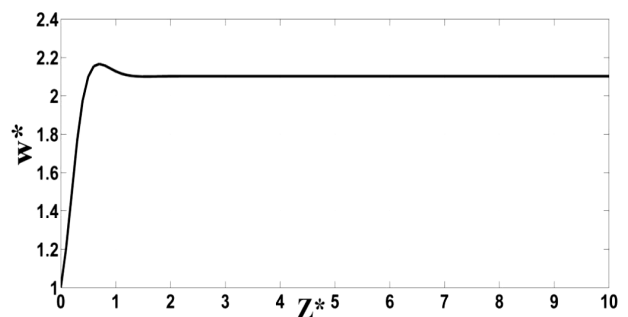
| Re  | ۱   | ۵   | ۱۰  | ۵۰  | ۶۵  |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Le* | ۱.۲ | ۱.۵ | ۱.۷ | ۲.۳ | ۳.۸ |

تا اینجا دیدیم که یکی از پدیده‌های مهم در جریان سیال ویسکوالاستیک، تشکیل جریان‌های ثانویه در مقاطع عرضی کانال است. به‌منظور مقایسه شدت این جریان‌ها، پارامتری را به نام شدت جریان‌های عرضی تعریف می‌کنیم که نسبت جریان‌های عرضی به جریان محوری را نشان می‌دهد. البته بزرگی این عدد دلیلی بر وجود و تشکیل جریان‌های ثانویه نیست:

$$S = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{w} \quad (10)$$

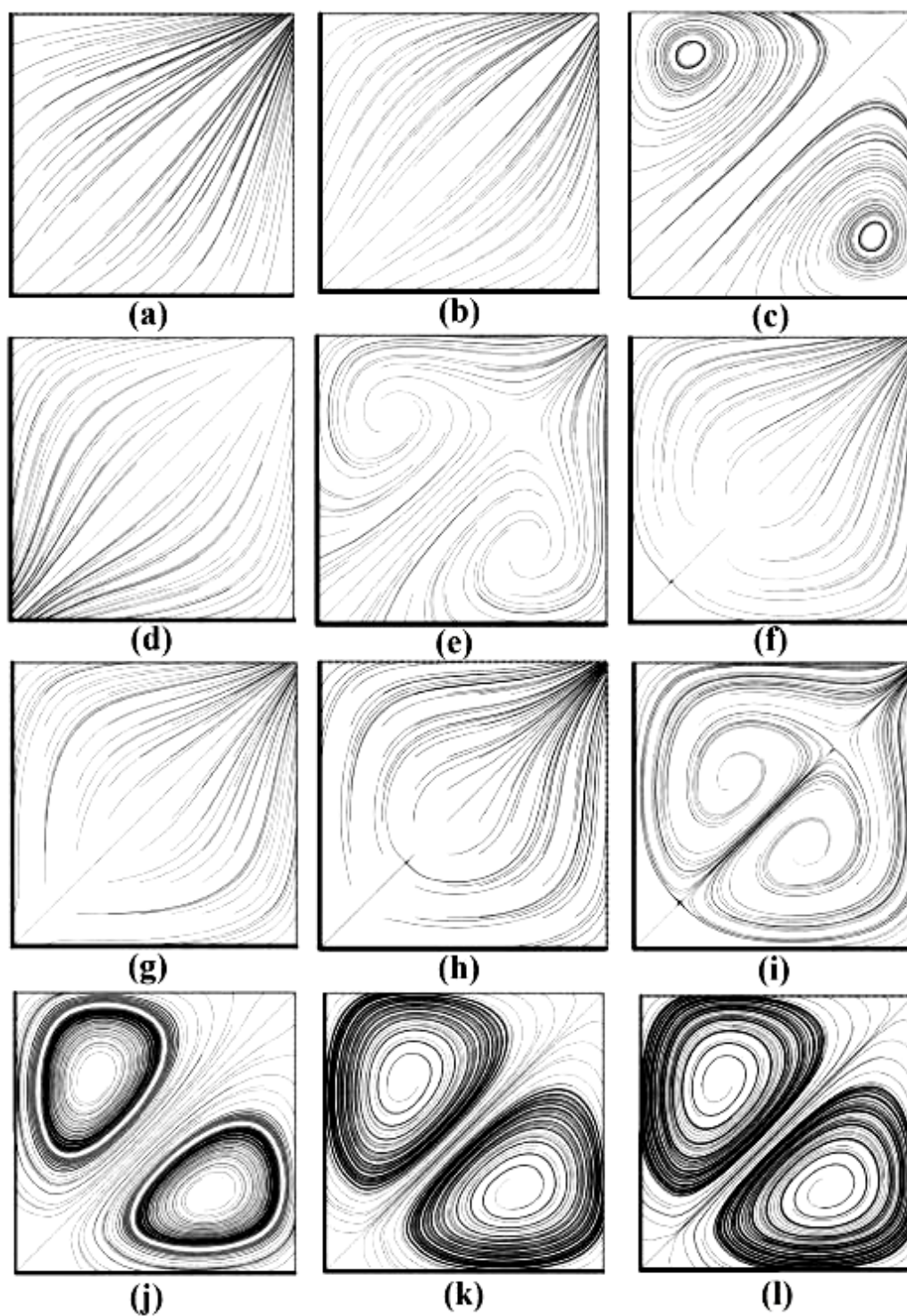
همان‌طور که در شکل ۳ نشان داده شده، در مقاطع آغازین کانال- ناحیه در حال توسعه- به علت تغییر پیوسته مشخصه‌های جریان، جریان ثانویه‌ای در مقاطع عرضی کانال شکل نمی‌گیرد، در حالی‌که در این ناحیه شدت جریان‌های عرضی تا حدود ۰/۳۸ مقدار سرعت محوری افزایش می‌یابد. البته در مقاطع (c) و (e) هسته‌های کوچک جریان ثانویه شروع به تشکیل می‌کنند، اما در این مقاطع این جریان‌های ثانویه توسط جریان اصلی ضعیف شده و از بین می‌روند. با پیشروی در راستای محور کانال- ناحیه توسعه یافته- جریان‌های ثانویه مانند نتایج [9] شکل گرفته و این روند تا پایان کانال ادامه می‌یابد. ضمناً در این ناحیه هیچ تغییری در الگو و شدت جریان‌های ثانویه ایجاد نمی‌شود.

با توجه به شرایط مرزی فرض شده برای جریان، سرعت محوری در کانال از مقدار اولیه شروع شده و با پیشروی در راستای محور Z و تشکیل لایه مرزی - که به دنبال آن مقدار مومنتم سیال در نواحی مرزها کاهش می‌یابد- افزایش یافته تا لایه مرزی کامل شده و جریان به ناحیه توسعه یافته می‌رسد. از این ناحیه به بعد، به علت توسعه یافتگی جریان، تغییر تمامی کمیت‌ها به جز فشار نسبت به محور اصلی کانال برابر صفر شده و فقط فشار استاتیک سیال با نرخ ثابت کاهش می‌یابد. نحوه تغییر سرعت محوری در راستای کانال در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲ تغییرات سرعت محوری روی محور مرکزی کانال

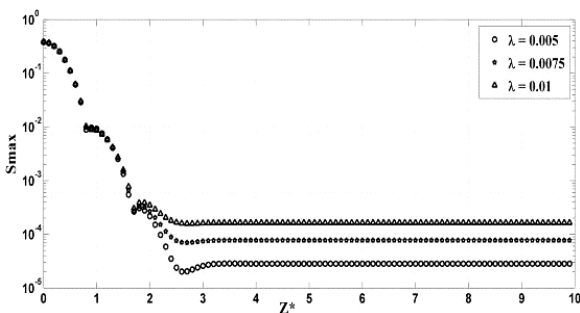
از دهانه ورودی کانال تا جایی که جریان به ناحیه توسعه یافته می‌رسد را طول توسعه یافتگی می‌نامیم. این طول به شدت تابع عدد رینولدز بوده و با افزایش عدد رینولدز



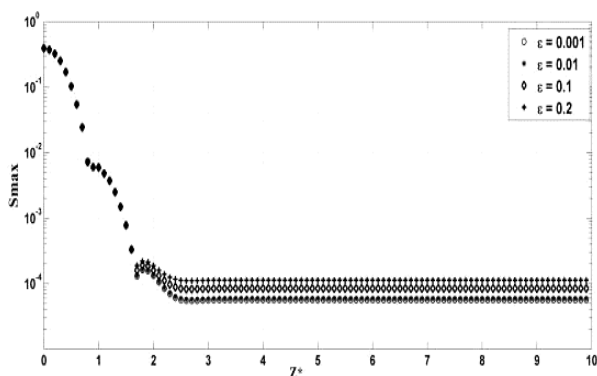
شکل ۳ تغییر جریان‌های عرضی در ناحیه در حال توسعه جریان

$a) z^* = 0.3, \quad b) z^* = 0.59, \quad c) z^* = 0.8, \quad d) z^* = 1.3, \quad e) z^* = 1.7, \quad f) z^* = 1.9,$   
 $g) z^* = 2.1, \quad h) z^* = 2.3, \quad i) z^* = 2.57, \quad j) z^* = 2.97, \quad k) z^* = 3.36, \quad l) z^* = 3.96$

وضعیت مشابهی برقرار است. با نزدیک شدن سیال به حالت نیوتنی، از شدت جریان‌های عرضی در ناحیه توسعه یافته کاسته شده و به سمت صفر میل می‌کند. ضمناً در این حالت هیچ جریان ثانویه‌ای در محدوده توسعه یافته نیز مشاهده نمی‌شود.



شکل ۴ تغییر شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به ازای تغییر  $\lambda$



شکل ۵ تغییر شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به ازای تغییر  $\epsilon$

همان‌طور که در معادله ۱۱ مشخص است، پارامتر  $\xi$  نیز اثر مستقیمی بر اختلاف تنش نرمال دوم و در نتیجه قدرت جریان‌های ثانویه دارد. همان‌طور که در شکل ۶ دیده می‌شود با افزایش  $\xi$  بر شدت جریان‌های ثانویه افزوده می‌شود. نکته حائز اهمیت دیگر در این نمودارها، کم اثر بودن تغییر پارامترهای رئولوژی بر تغییر شدت جریان‌های عرضی در بخش آغازین کانال و تا رسیدن جریان به ناحیه توسعه یافته است. در این

یکی از شرایط لازم و اثرگذار بر تشکیل و شدت جریان‌های ثانویه، وجود اختلاف تنش نرمال دوم در جریان سیال ویسکوالاستیک است. با توجه به مدل مورد استفاده در این پژوهش و رابطه  $N_2$  با پارامترهای رئولوژی سیال - که به شکل معادله ۱۱ است - تغییر پارامترهایی مانند  $\epsilon$ ,  $\xi$ ,  $\lambda$  باعث تغییر اختلاف تنش نرمال دوم و در نهایت شدت جریان‌های عرضی می‌شود. البته در ناحیه توسعه یافته، این جریان‌های عرضی به صورت جریان‌های گردابی نمایان می‌شوند.

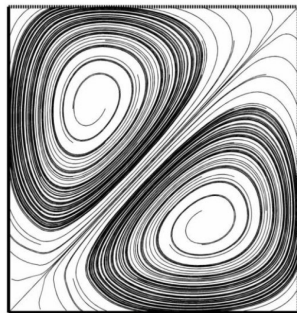
همان‌طور که در شکل ۴ دیده می‌شود، شدت جریان‌های ثانویه در آغاز کانال از حدود ۰/۴ مقدار جریان اصلی شروع شده و با پیشروی در راستای محور کانال کاهش می‌یابد و در پایان با رسیدن به ناحیه توسعه یافته به مقداری ثابت میل می‌کند که این مقدار وابستگی زیادی به پارامترهای مادی سیال دارد. در ناحیه در حال توسعه، نمودار شدت جریان‌های عرضی در دو نقطه مقداری پرش دارد که با توجه به شکل ۳، دقیقاً در این دو نقطه، الگوی جریان‌های عرضی تغییر کرده و هسته‌هایی از جریان‌های ثانویه شروع به شکل گرفتن می‌کنند که البته توسط جریان اصلی از بین می‌روند. تغییر در الگوی جریان‌های عرضی، شدت این جریان‌ها را تغییر داده و در نتیجه روندی غیر یکنواخت را در مقادیر مربوط به این ناحیه ایجاد می‌کند.

با افزایش  $\lambda$ ، مقدار اختلاف تنش نرمال دوم افزایش یافته و در نتیجه شدت جریان‌های عرضی افزایش می‌یابد که این همان خاصیت باریک شونده‌گی برش در مدل PTT است. در شکل ۵، تغییر شدت جریان‌های عرضی در ازای تغییر  $\epsilon$  نشان داده شده است. در این مدل با کم شدن  $\epsilon$ ،  $g$  به یک نزدیک می‌شود که با توجه به شرایط بیان شده، جریان‌های ثانویه بسیار ضعیف می‌شوند و در عوض با افزایش  $\epsilon$ ، از  $g$  کاسته شده و باعث شدت یافتن جریان‌های عرضی می‌شود:

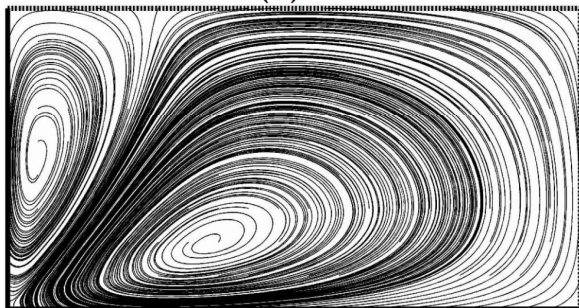
$$N_2 \approx \frac{\xi \lambda}{g} \eta(\dot{\gamma}) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (11)$$

لازم است ذکر شود که در تمامی حالت‌ها با صفر شدن خواص الاستیک، اختلاف تنش نرمال دوم نیز برابر صفر شده و در نتیجه شدت جریان‌های عرضی در ناحیه توسعه یافته بسیار کاهش یافته و به صفر میل می‌کند. در مورد سیال نیوتنی

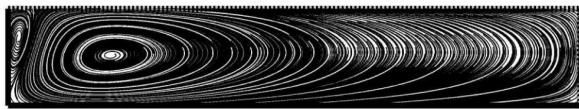
سمت ضلع دیگر گسترش یافته و باعث تضعیف گردابه کوچکتر و در نتیجه حذف آن می‌شود. این پدیده هماهنگی خوبی با نتایج [۹] دارد.



(a)



(b)



(c)



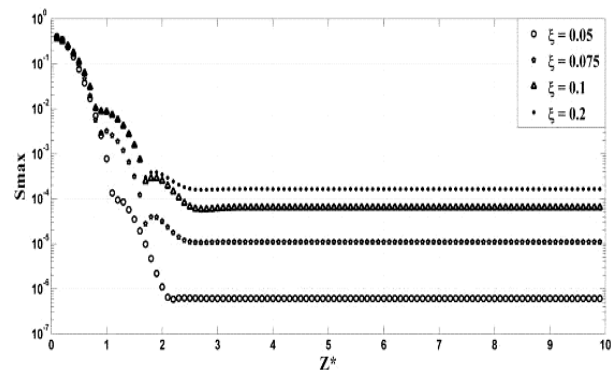
(d)

شکل ۷ جریان‌های ثانویه در  $1/4$  مقطع کانال در نسبت‌های مختلف ابعاد

$$a) \frac{a}{b} = 1, \quad b) \frac{a}{b} = 2, \quad c) \frac{a}{b} = 6.25, \quad d) \frac{a}{b} = 16$$

همان‌طور که در شکل ۸ دیده می‌شود، در مقاطع آغازین کانال تا رسیدن جریان به ناحیه توسعه یافته، به علت تغییر مشخصه‌های جریان و همچنین شدت بالای جریان‌های عرضی، افت فشار سیال بسیار شدید است. با رسیدن جریان به ناحیه توسعه یافته، افت فشار سیال به مقدار ثابتی رسیده و تا دهانه خروجی کانال بدون تغییر باقی می‌ماند.

ناحیه به‌علت تغییر شدید تمامی کمیت‌ها در راستای جریان، با وجود تشکیل نشدن جریان‌های ثانویه، جریان‌های عرضی بسیار فعال بوده و لذا تغییر پارامترهای رئولوژی اثر چندانی بر شدت جریان‌های عرضی در این ناحیه ندارند.



شکل ۶ تغییر شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییر  $\xi$

لازم است ذکر شود که در این مدل، شدت جریان‌های عرضی وابستگی زیادی به عدد رینولدز جریان نداشته و در راستای جریان با تغییر عدد رینولدز تغییر زیادی نمی‌کنند. بدین منظور شدت جریان‌های ثانویه در ناحیه توسعه یافته به ازای تغییر عدد رینولدز در جدول ۴ آورده شده است.

جدول ۴ شدت جریان‌های ثانویه در ناحیه توسعه یافته به‌ازای تغییر عدد رینولدز

| Re        | ۱          | ۵          | ۱۰         |
|-----------|------------|------------|------------|
| $S_{max}$ | $16.41e-5$ | $16.43e-5$ | $16.46e-5$ |
| Re        | ۵۰         | ۶۵         | ۷۵         |
| $S_{max}$ | $16.55e-5$ | $16.59e-5$ | $16.81e-5$ |

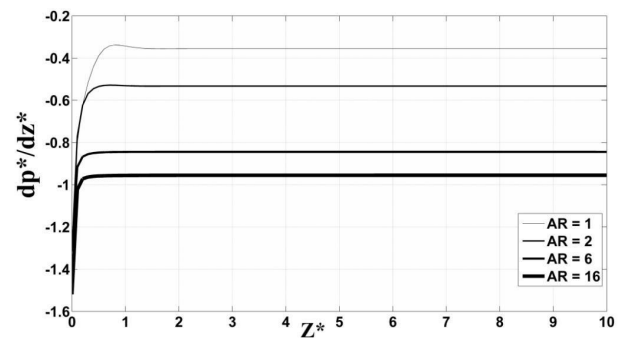
در جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های مستطیلی، در هر یک چهارم کانال، دو جریان ثانویه تشکیل می‌شود که البته قدرت و الگوی تشکیل این جریان‌های ثانویه وابستگی زیادی به نسبت ابعاد کانال دارد. همان‌طور که در شکل ۷ دیده می‌شود با افزایش نسبت ابعاد کانال، گردابه نزدیک به ضلع بزرگتر، به

## ۶- فهرست علائم

|                                          |                    |
|------------------------------------------|--------------------|
| مقادیر بی‌بعد سرعت در راستاهای $x, y, z$ | $u^*, v^*, w^*$    |
| فشار استاتیک                             | $P$                |
| طول‌های بی‌بعد                           | $x^*, y^*, z^*$    |
| سرعت مشخصه                               | $W_{ref}$          |
| قطر هیدرولیکی                            | $D_h$              |
| مقادیر بی‌بعد طول، فشار و تنش            | $\tau^*, P^*, D^*$ |
| زمان آسودگی از تنش                       | $\lambda$          |
| پارامترهای مادی در معادله PTT            | $\xi, \varepsilon$ |
| ویسکوزیته سیال در نرخ برش صفر            | $\eta_0$           |
| نرخ برش تعمیم یافته                      | $\dot{\gamma}$     |
| اختلاف تنش نرمال اول و دوم               | $N_2, N_1$         |
| تانسورهای نرخ برش و تنش                  | $\tau, D$          |
| طول توسعه یافتگی                         | $Le$               |
| مجموع عناصر قطر اصلی تانسور تنش          | $tr(\tau)$         |
| عدد رینولدز                              | $Re$               |
| عدد وایزنبرگ                             | $We$               |

## ۷- مراجع

- [1] Oldroyd J. G., "Some steady flows of the general elastico-viscous liquid", Proc. R. Soc. London, Ser. A 283, pp 115-133, 1965.
- [2] Green A. E and Rivlin R. S., "steady flow of non-newtonian fluids through tubes", Q Appl. Math 14, pp 299-308, 1956.
- [3] Dodson A. G., Townsend P, and Walters K, "Non-Newtonian flow in pipes of non-circular cross section", Comput. Fluids 2, pp 317-338, 1974.
- [4] Townsend P, Walters K, and Waterhouse W.M., "Secondary flows in pipes of square cross-section and measurement of the second normal stress difference", J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1, pp 107-123, 1976.
- [5] Guides R, Darby R, " Numerical simulation and change in type in the developing flow of a nonlinear viscoelastic fluid", Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 31, pp 193-207, 1989.



شکل ۸ تغییر افت فشار در راستای محور کانال در نسبت ابعاد مختلف سطح مقطع

همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود، با افزایش نسبت ابعاد، بر میزان افت فشار سیال در راستای محور کانال نیز افزوده می‌شود که این مشابه نتایج مربوط به سیالات نیوتونی است. از سوی دیگر تغییر پارامترهای رئولوژی - که منجر به تغییر اختلاف تنش نرمال دوم می‌شود- اثر چندانی بر افت فشار محوری سیال ندارد که این مطلب در [۷] و [۱۷] نیز گفته شده است.

## ۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، مدل‌سازی سه‌بعدی جریان سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه با استفاده از معادله PTT مد نظر قرار گرفته است. در مقاطع آغازین کانال و تا رسیدن جریان به حالت توسعه یافته، جریان‌های ثانویه شکل نمی‌گیرند، در حالی که شدت جریان‌های عرضی در این ناحیه بسیار بیشتر از ناحیه توسعه یافته است. با افزایش خواص الاستیک بر شدت اختلاف تنش نرمال دوم و در نتیجه جریان‌های عرضی افزوده شده و این افزایش در ناحیه توسعه یافته بیشتر قابل مشاهده است. با رسیدن جریان به ناحیه توسعه یافته، در هر یک چهارم مقطع کانال، دو جریان ثانویه متقارن تشکیل شده که با تغییر نسبت اضلاع، از قدرت یکی از جریان‌های ثانویه کاسته شده و بر قدرت دیگری افزوده می‌شود. با افزایش نسبت ابعاد سطح مقطع، افت فشار محوری سیال نیز افزایش می‌یابد. لازم است ذکر شود که اثر تغییر خواص الاستیک بر افت فشار محوری ناچیز است.

- [13] Obrega J. M. N, Pinho F.T, Oliveira P.J, Carneiro O. S, "Accounting for temperature-dependent properties in viscoelastic duct flows", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47, pp 1141–1158, 2004.
- [14] Tanoue S, Naganawa T and Iemoto Y, "Quasi-three-dimensional simulation of viscoelastic flow through a straight channel with a square cross section", *Journal of Soc. Rheol., Jpn.* 34, pp 105–113, 2006.
- [15] Boutabaa M , Helin L, Mompean G and Thais L, "Numerical study of Dean vortices in developing Newtonian and viscoelastic flows through a curved duct of square cross-section", *Journal of Comptes Rendus Mechanique*, pp 40-47, 2009.
- [16] Peres N, Afonso A. M, Alves M.A and Pinho F. T, "Heat transfer enhancement in laminar flow of viscoelastic fluids through a rectangular duct", *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería* 2009.
- [17] Hashemabadi S.H, Etemad S.Gh, "Effect of Rounded Corners on the Secondary Flow of Viscoelastic Fluids through Non-Circular Ducts", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, pp 1986-1990, 2006.
- [6] Nikoleris T, Darby R, "Numerical simulation of the non-isothermal flow of a nonlinear viscoelastic fluid in a rectangular chanel", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 31, pp 193-207, 1989.
- [7] Gervang B and Larsen P. S, "Secondary flows in straight ducts of rectangular cross section", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 39, pp 217–237, 1991.
- [8] Phan Thin N and Tanner R.I, "A new constitutive equation driven from network theory", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2, pp 353-365, 1977.
- [9] Xue S.C, Phan Thien N, Tanner R. I, "Numerical study of secondary flows of viscoelastic fluid in straight pipes by an implicit finite volume method", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 59, pp 191–213, 1995.
- [10] Kihara S, Gouda T, Matsunaga K and Funatsu K, "Numerical Simulation of Three-Dimensional Viscoelastic Flow Within Dies", *Journal of polymer engineering and science*, Vol. 39, No. 1, pp 152-163, January 1999.
- [11] Alves M.A, Pinho F.T, Oliveira P.J, "Study of steady pipe and channel flows of a single-mode Phan-Thien–Tanner fluid", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 101, pp 55–76, 2001.
- [12] Yamamoto T, Ishiyama M, Nakajima M, Nakamura K, Mori N, "Three-dimensional viscoelastic flows through a rectangular channel with a cavity", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 114, pp 13–31, 2003.