

تحلیل خمش میکرو تیرهای یک سرگیردار بر اساس تئوری پلاستیسیته گرادیانی چن-ونگ

حکیمه علیزاده^۱، رضا انصاری^{۲*}

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

۲- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

* رشت، صندوق پستی ۳۷۵۶ r_ansari@guilan.ac.ir

چکیده

وقی خاصتات تیر یکسرگیردار به میکرون تقلیل می‌یابد، رفتار مکانیکی تیر تحت تأثیر ابعاد ماده و مقیاس طول داخلی قرار می‌گیرد. هدف این مقاله، تحلیل خمش میکرو تیر یکسرگیردار و ارائه رابطه‌ای برای خیز تیر مذکور با استفاده از تئوری پلاستیسیته گرادیان گرنش چن-ونگ می‌باشد. مدل تیر مورد استفاده، اوبلر-برنولی است که در سه حالت الاستیک، صلب-پلاستیک و الاستو-پلاستیک مورد تحلیل قرار گرفته است و روابط دقیقی برای گرنش‌های الاستیک و پلاستیک ارائه شده‌است. خیز تیر برای هر سه حالت، به ازای طول مشخصه‌های مختلف و بارگذاری‌های متفاوت بدست آمده، نتایج حاصل با یکدیگر و نیز با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده و تحلیل‌هایی ارائه شده‌اند. هم‌چنین نتایج حاصل از تئوری کلاسیک برای مشخص کردن ناتوانی این تئوری در پیش‌بینی دقیق رفتار مواد در اندازه‌های میکرون یا پایین‌تر نیز رسم شده‌اند. نتایج بدست آمده نشان دهنده وابستگی جواب‌ها به حدود ابعاد و طول مشخصه می‌باشد. هم‌چنین مقایسه نتایج حاصل از این تحقیق و نتایج تجربی، نشان دهنده صحت تقریبی تئوری گرادیانی به کار گرفته شده است.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۰۶ شهریور ۱۳۹۳

پذیرش: ۲۴ اذر ۱۳۹۳

ارائه در سایت: ۱۳ دی ۱۳۹۳

کلید واژگان:

پلاستیسیته گرادیان گرنش

میکروتیر یکسرگیردار

خمش

مقیاس طول داخلی

تئوری چن-ونگ

Bending analysis of micro cantilevers based on the Chen-Wang strain gradient plasticity theory

Hakimeh Alizadeh, Reza Ansari*

Department of Mechanical Engineering, Guilan University, Rasht, Iran

* P.O.B. 3756, Rasht, Iran, r_ansari@guilan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 28 August 2014

Accepted 15 December 2014

Available Online 03 January 2015

Keywords:

Strain Gradient Plasticity

Micro Cantilever Beam

Bending

Intrinsic Length Scale

Chen-Wang Theory

ABSTRACT

When the cantilever beam thickness is scaled down to micron, the dimension of material and the intrinsic length scale affect the mechanical behavior of the beam. The purpose of this paper is to analyze the bending of cantilever micro-beam and present a relation for the beam deflection using Chen-Wang gradient plasticity theory. To this end, the Euler-Bernoulli beam model is utilized and three cases including elastic, rigid-plastic and elasto-plastic beams are considered. Clear relations for elastic and plastic strains are given. For all mentioned cases, the beam deflection is determined for different intrinsic lengths and the obtained results are compared with each other and experimental data and some explanations are presented. The results obtained from classical theory are also shown in the results section to prove that classical theories do not have the ability to predict behavior of micron-size structures precisely. Numerical results clarify the dependence of responses to the range of dimensions and intrinsic lengths. The comparison between the present results and those observed from experimental tests authenticate the reliability of utilized gradient theory.

این تحقیقات نشان داده‌اند که رفتار مکانیکی مواد آشکارا به حدود ابعاد ماده وابسته است. این آزمایشات شامل پیچش سیم مسی در ابعاد میکرو و خمش ورق‌های نیکل در ابعاد میکرو [۱]، سختی‌سنگی در ابعاد میکرو و نانو [۲] و کامپوزیت‌های دارای ذرات کوچک فلزی [۳] می‌باشند. با توجه به این که تئوری‌های پلاستیسیته کلاسیک، پارامتری برای در نظر گرفتن مقیاس طول داخلی ندارند، قادر به پیش‌بینی رفتار مواد در مقیاس میکرو نمی‌باشند. بنابراین نیاز به بسط تئوری‌های پلاستیسیته جدید می‌باشد که شامل پارامتری برای اثرات ابعاد و اندازه باشد. مقیاس طولی ماده تاکنون مفهوم فیزیکی خاصی که مورد قبول محققین باشد را ندارد. در واقع

استفاده از تئوری‌های کلاسیک محیط پیوسته^۱ برای پیش‌بینی رفتار مواد در بسیاری از تغییرشکل‌ها در ابعاد میکرو به شکست می‌انجامد. نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهد که در این موارد وابستگی معناداری به پارامترهای طولی اندازه‌ای وجود دارد و برای تحلیل رفتار مواد، لازم است تئوری‌های کلاسیک محیط پیوسته بسط داده شده و کمیت‌هایی شامل ابعاد ماده وارد معادلات ساختاری شود. تأثیرات اندازه در توجیه رفتار مکانیکی، در تحقیقات بسیاری مورد توجه قرار گرفته است.

1- Classic continuum mechanic theories

Please cite this article using:

H. Alizadeh, R. Ansari, Bending analysis of micro cantilevers based on the Chen-Wang strain gradient plasticity theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 2, pp. 198-204, 2015 (In Persian)

در این مقاله ابتدا به توصیف تئوری پلاستیسیته‌ی گرادیانی چن-ونگ پرداخته شده است. سپس با استفاده از این تئوری، رابطه‌ی تحلیلی برای خیز میکروتیر یکسرگیردار تحت دو نوع بارگذاری ممان M و نیروی مرکز P در انتهاهای تیر، برای حالت‌های الاستیک، صلب-پلاستیک و الاستوپلاستیک ارائه شده است. سپس نتایج برای پارامتر طول‌های مختلف رسم می‌شود. با مشاهده نتایج می‌توان به روشنی دریافت که در ابعاد میکرون، خیز تیر بسیار وابسته به اندازه می‌باشد.

2- تئوری پلاستیسیته‌ی گرادیانی چن-ونگ

در این بخش خلاصه‌ای از تئوری چن-ونگ [11] ارائه می‌شود. در پلاستیسیته‌ی کلاسیک تنش مؤثر، مزدوج با کرنش مؤثر است که به با رابطه (1) بیان می‌شود:

$$\sigma_e = \frac{du(\varepsilon_e)}{d\varepsilon_e} \quad \sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} : \sigma'_{ij}} \quad (1)$$

تفعیرات چگالی انرژی کرنشی نیز با رابطه (2) ارائه می‌شود:

$$\delta u = \sigma' : \delta \varepsilon' + \sigma_m : \delta \varepsilon_m = \sigma : \delta \varepsilon \quad (2)$$

که

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon'_{ij}} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} \varepsilon'_{ij} \quad (3)$$

نرخ تنش انحرافی $\dot{\sigma}'_{ij}$ ، به ترتیب رابطه (4) می‌باشد:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon'_{ij}}{\varepsilon_e} \dot{\sigma}_e + \frac{2}{3} \frac{\dot{\varepsilon}'_{ij}}{\varepsilon_e} \sigma_e - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon'_{ij} \sigma_e}{\varepsilon_e^2} \dot{\varepsilon} \quad (4)$$

تنش مؤثر فون‌میسز با توجه به معیار تسلیم فون‌میسز در پلاستیسیته‌ی کلاسیک، تابعی از کرنش مؤثر می‌باشد که با توجه به [11] به صورت رابطه (5) نیز بیان می‌شود:

$$\sigma_e = A(\varepsilon_e) = \Sigma_0 + \frac{3}{2} E_p \varepsilon_e \quad (5)$$

و نرخ آن به ترتیب رابطه (6) می‌باشد:

$$\dot{\sigma}_e = A'(\varepsilon_e) \dot{\varepsilon}_e \quad (6)$$

در این تئوری، گرادیان کرنش و نرخ قانون سخت‌شوندگی، شامل جمله گرادیانی، به صورت رابطه (7) معرفی می‌گردد:

$$\dot{\sigma}_e = A'(\varepsilon_e) \left(1 + \frac{l_{cw} \eta}{\varepsilon_e} \right)^{1/2} \dot{\varepsilon}_e = B(\varepsilon_e, l_{cw} \eta) \dot{\varepsilon}_e \quad (7)$$

که در آن

$$\eta = \sqrt{c_1 \eta_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + \chi_e^2} \quad (8)$$

$\eta_{ijk}^{(1)}$ تانسور گرادیان کرنش می‌باشد که همانند عبارت گرادیان کشیدگی¹⁰ فلک و هاتچینسون [8] تعریف می‌گردد و c_1 نیز به صورت رابطه (9) بیان می‌گردد:

$$c_1 = \left(\frac{l_1}{l_{cw}} \right)^2 \quad (9)$$

در این تئوری l_1 و l_{cw} ، به ترتیب مقیاس طول داخلی مربوط به گرادیان کشش و گرادیان چرخش¹¹ می‌باشد.

3- خیز میکروتیر یکسرگیردار تحت بارگذاری نیروی مرکز در انتهای تیر

3-1- حالت صلب-پلاستیک

شکل 1، میکرو تیر یکسرگیردار اوبلر-برنولی را تحت بارگذاری نیروی مرکز P نشان می‌دهد. محور x در راستای طول تیر، محور z در راستای پهنهای تیر و محور y در راستای ضخامت تیر می‌باشد.

10- Stretch gradient
11- Rotation gradient

تنها چیزی که با قاطعیت می‌توان گفت این است که مقیاس طولی ماده، کمیتی است که بصورت ضربی از گرادیان‌های مرتبه‌ی بالای کرنش در معادلات وارد می‌شود و به کمک آن‌ها سعی شده رفتار وابسته به ابعاد ماده توجیه گردد. البته تلاش‌هایی به منظور پیدا کردن توجیه فیزیکی برای مقیاس طول داخلی انجام شده است. در تلاش‌های اولیه سعی شده است که مقیاس طول داخلی ماده، l ، به کمیت‌های میکرو ساختار¹ ارتباط داده شود [5]. در معادلات روش‌های گرادیانی، گرادیان مرتبه‌ی بالای کمیت‌های اساسی، با ضرایبی که نشان‌دهنده کمیت‌های وابسته به ابعاد ماده می‌باشند، همراه با در نظر گرفتن محیط پیوسته‌ی غیر موضعی² ارائه شده است. تاکنون تئوری‌های پلاستیسیته‌ی گرادیانی متعددی برای حل مسائل مربوط به تغییر شکل‌های کوچک و بزرگ ارائه شده است که به دو دسته تقسیم می‌شوند.

دسته‌ی اول، تئوری‌های مرتبه‌ی پایین³ هستند که ابتدا توسط آچاریا و بیودوبن [6] مطرح شد. این دسته از تئوری‌ها، تئوری مرسوم پلاستیسیته را همراه با در نظر گرفتن گرادیان کرنش پلاستیک به صورت شبه‌زمانی و یا مدول مماسی در خود دارند. به عبارتی درتابع تسلیم⁴ ماده عبارتی وابسته به گرادیان کرنش پلاستیک مؤثر وارد می‌شود و سایر معادلات ساختاری کلاسیک ماده و همچنین شرایط مرزی به صورت اولیه خود باقی مانند و نیازی به در نظر گرفتن شرایط مرزی اضافی نیست.

دسته‌ی دوم تئوری‌های مرتبه‌ی بالا⁵ هستند که ابتدا توسط ایفانتیس [7] با یک مقیاس طولی داخلی و سپس توسط فلک و هاتچینسون [10-8] با سه مقیاس طولی داخلی ارائه شد. این دسته از تئوری‌ها شرایط مرزی اضافی داشته و تنش‌های مرتبه‌ی بالا را به همراه کرنش‌های مرتبه‌ی بالا سازگار با آن وارد معادلات ساختاری می‌نماید و معادلات ساختاری مرتبه‌ی بالا با شرایط مرزی اضافی ارائه می‌گردد.

تئوری چن-ونگ که از دسته تئوری‌های مرتبه‌ی پایین است، توسط چن و ونگ ارائه شد [11]. در این تئوری یک قانون جدید سخت‌شوندگی گرادیان کرنش، بر اساس حفظ ساختار پلاستیسیته‌ی فون‌میسز⁶ مطرح شده است. در این تئوری اثرات گرادیانی به صورت مدول مماسی وارد معادلات می‌شود و نیازی به تعریف تنش‌های مرتبه‌ی بالا و شرایط مرزی اضافی نمی‌باشد. با به کارگیری این تئوری، چن-ونگ [12] به بررسی و تحلیل پدیده تسلیم پرداختند.

کاربردهای بی‌اندازه میکروتیرهای یکسرگیردار در میکروسیستم‌های الکترو-مکانیکی باعث تغییب محققان برای تحلیل رفتار آن‌ها شده است. خمث میکرو تیر در حالت‌های الاستیک و پلاستیک در تحقیقات بسیاری مورد توجه قرار گرفته است [13-16]. آیدیارت و همکارانش [17] با استفاده از تئوری پلاستیسیته‌ی گرادیانی فلک و ویلیس [18] اثرات اندازه را در خمث تیرهای نازک مورد تحلیل قرار دادند. جی و همکارانش [19] رفتار الاستوپلاستیک میکرو تیر را با استفاده از تئوری پلاستیسیته‌ی تنش کوپل⁷ بررسی نمودند. شی و همکارانش [20] اثرات گرادیان کرنش و منحنی تنش و کرنش⁸ در مقیاس میکرو را در خمث میکروتیر مورد توجه قرار دادند. مائو و همکارانش [21] رفتار الاستوپلاستیک میکروتیر ساخته شده از مواد هوشمند را با تئوری برپایه مکانیزم⁹ تحلیل نمودند.

1- Microstructure

2- Non-Local

3- Lower order

4- Yield surface

5- Higher order

6- Von-mises

7- Couple stress

8- Stress-Strain curve

9- Mechanism-Based

$$\sigma_e = (\Sigma_0 + E_p z w'') \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2} \frac{l_{cw}}{z}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

که Σ_0 تنش تسلیم است. با توجه به رابطه (3) اجزای غیر قابل حذف تنش-های انحرافی به صورت رابطه (23) می‌باشد:

$$\sigma'_{xx} = -\frac{1}{2} \sigma'_{yy} = -\frac{1}{2} \sigma'_{zz} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} \varepsilon'_{ij} \quad (23)$$

تنش حجمی، σ_m ، به صورت رابطه (24) خواهد بود:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{kk}}{2} = \frac{\sigma'_{xx}}{2} \quad (24)$$

حال با استفاده از اصل انرژی پتانسیل مینیمم کل، معادلات حاکم و شرایط مرزی استخراج می‌شود:

$$\delta \pi = (k_2 w'' + k_1) \delta w'(x) \Big|_0^L - k_2 w'''(x) \Big|_0^L + \int_0^L k_2 w'''(x) \delta w(x) dx - P \delta w(L) = 0 \quad (25)$$

که k_1 و k_2 ثابت‌های وابسته به مقیاس طولی داخلی می‌باشند و با روابط (26-الف) و (26-ب) مشخص می‌گردند:

$$k_1 = \frac{1}{8} \Sigma_0 b [(2h + \sqrt{6}l_{cw}) \sqrt{h^2 + l_{cw}h\sqrt{6}} - 3l_{cw}^2 \ln \left(1 + \frac{\sqrt{6}h + \sqrt{6h^2 + 6\sqrt{6}l_{cw}h}}{3l_{cw}} \right)] \quad (26-\text{الف})$$

$$k_2 = E_p b \left[\frac{1}{48} \sqrt{h^2 + l_{cw}h\sqrt{6}} (4h^2 + l_{cw}h\sqrt{6} - 9l_{cw}^2) + \frac{3\sqrt{6}}{32} l_{cw}^3 \ln \left(1 + \frac{\sqrt{6}h + \sqrt{6h^2 + 6\sqrt{6}l_{cw}h}}{3l_{cw}} \right) \right] \quad (26-\text{ب})$$

حال با توجه به شرایط مرزی و معادله حاکم به محاسبه خیز تیر پرداخته می‌شود. شرایط مرزی در انتهای گیردار تیر یعنی $x = 0$ بصورت رابطه (27) می‌باشد:

$$w(0) = 0, w'(0) = 0 \quad (27)$$

در انتهای آزاد، یعنی $x = L$ داریم:

$$M_{x=L} = \int_A (m_{xy} + \sigma_{xx} z) dA |L = (k_2 w'' + k_1) = 0 \quad (28-\text{الف})$$

$$M'_{x=L} = M' = -k_2 w'''(L) = 0 \quad (28-\text{ب})$$

با توجه به رابطه (25) خواهیم داشت:

$$k_2 w'''(x) = 0 \quad (29)$$

با توجه به رابطه (29) و شرایط مرزی، خیز تیر بصورت رابطه (30) مشخص می‌شود:

$$w^P = \frac{P x^2}{6 k_2} \left[3 \left(L - \frac{k_1}{P} \right) - x \right] \quad (30)$$

و شبیه پلاستیک، θ^P ، نیز به صورت رابطه (31) خواهد بود:

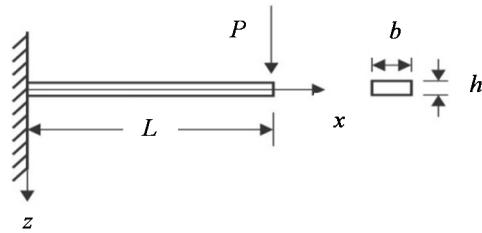
$$\theta^P = \frac{(2PL - Px - 2k_1)x}{k_2} \quad (31)$$

کرنش پلاستیک، ε_{xx}^P ، به ترتیب رابطه (32) می‌باشد:

$$\varepsilon_{xx}^P = -\frac{(PL - Px - k_1)z}{k_2} \quad (32)$$

3-2- حالت الاستیک

در حالت الاستیک، $E_p = E$ و $\Sigma_0 = 0$ خواهد بود. بنابراین خیز تیر در حالت الاستیک، تحت اعمال نیروی متمرکز به انتهای تیر با رابطه (33) تعیین می‌گردد:



شکل 1 میکرو تیر یکسر گیردار تحت نیروی متمرکز در انتهای تیر

میدان جابجایی برای تیر مذکور به صورت رابطه (10) می‌شود:

$$u_1 = -zw'(x), u_2 = 0, u_3 = w(x) \quad (10)$$

با توجه به میدان جابجایی مولفه‌های کرنش نیز به ترتیب رابطه (11) می‌باشد:

$$\varepsilon_{xx} = -zw''(x) \quad (11-\text{الف})$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0 \quad (11-\text{ب})$$

کرنش حجمی ε_m و مؤلفه‌های کرنش انحرافی ε'_{ij} به صورت روابط (12) و

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = -zw''(x) \quad (12)$$

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_m \delta_{ij} \quad (13-\text{الف})$$

$$\varepsilon'_{xx} = -\frac{1}{2} \varepsilon'_{yy} = -\frac{1}{2} \varepsilon'_{zz} = -\frac{2}{3} zw''(x) \quad (13-\text{ب})$$

کرنش موثر ε_{eff} ، نیز به ترتیب رابطه (14) بدست می‌آید:

$$\varepsilon_{eff}^2 = \frac{2}{3} \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} \quad (14-\text{الف})$$

$$\varepsilon_{eff} = \frac{2}{3} zw''(x) \quad (14-\text{ب})$$

مؤلفه بردار چرخش θ_y ، نیز با رابطه (15) مشخص می‌گردد:

$$\theta_y = w'(x) \quad (15)$$

و تانسور انجناه مؤثر با رابطه (16) می‌باشد:

$$\chi_{ij} = \theta_{ij} \quad (16-\text{الف})$$

$$\chi_{yx} = w''(x) \quad (16-\text{ب})$$

تانسور انجناه مؤثر با رابطه (17) می‌گردد:

$$\chi_{eff}^2 = \frac{2}{3} \chi_{ij} \chi_{ij} = \frac{2}{3} w''^2 \quad (17)$$

با توجه به تعریف $\eta_{ijk}^{(1)}$ در تئوری فلک و هاتچینسون [8]، $\eta_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)}$ با رابطه

$$\eta_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} = \frac{2}{5} z^2 (w''')^2 + \frac{4}{15} (w'')^2 \quad (18)$$

قانون سختشوندگی پلاستیک در این تئوری با توجه به رابطه (7) به

صورت رابطه (19) می‌گردد:

$$\sigma_e = \frac{3}{2} E_p \dot{\varepsilon}_e \left(1 + \frac{l_{cw} \eta}{\varepsilon_e} \right)^{1/2} \quad (19)$$

که تانسور گرادیان کرنش پلاستیک، با توجه به رابطه (8) به ترتیب رابطه

$$\eta = \sqrt{c_1 \left[\frac{2}{5} z^2 (w''')^2 + \frac{4}{15} (w'')^2 \right] + \frac{2}{3} w''^2} \quad (20)$$

از آنجا که مقیاس طول داخلی مربوط به گرادیان کشنش یعنی l_1 بسیار کمتر

از مقیاس طول داخلی مربوط به گرادیان چرخش w می‌باشد [13]، عبارت

$$c_1 \text{ بسیار کوچک و قابل صرفنظر می‌باشد. در نتیجه رابطه (20) به صورت}$$

$$\text{رابطه (21) بازنویسی می‌شود:}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{3} w''^2} \quad (21)$$

با انتگرال گیری از رابطه (19) تنش مؤثر کل σ_e مشخص خواهد شد:

$$w_1 = w^{l_0} \quad (42)$$

$$w_2 = \theta^{l_0}(x - l_0) \quad (42)$$

$$w_3 = \frac{P(x - l_0)^2(3L - 2l_0 - x)}{6k_3} \quad (42)$$

می‌توان خیز تیر را در این حالت با معادله کاری (43) بیان نمود:

$$w^{ep} = \begin{cases} \frac{Px^2}{6k_2} \left[3\left(L - \frac{k_1}{P}\right) - x \right] & x < l_0 \\ \frac{w^{l_0} + \theta^{l_0}(x - l_0) + P(x - l_0)^2(3L - 2l_0 - x)}{6k_3} & x \geq l_0 \end{cases} \quad (43)$$

که l_0 , θ^{l_0} و w^{l_0} به ترتیب با معادلات (38-40) بیان می‌شوند.

4- خیز میکروتیر یکسرگیردار تحت بارگذاری ممان M در انتهای تیر

4-1- حالت صلب-پلاستیک

شکل 2، میکرو تیر یکسرگیردار اویلر-برنولی به طول L , صخامت h و پهنای b را تحت بارگذاری ممان M نشان می‌دهد. محور x در راستای طول تیر، محور y در راستای پهنای تیر و محور z در راستای ضخامت تیر می‌باشد.

با بکارگیری اصل انرژی پتانسیل مینیمم کل خواهیم داشت:

$$\delta\pi = k_2 w'' + k_1) \delta w'(x) \Big|_0^L - k_2 w'''(x) \Big|_0^L + \int_0^L k_2 w'''(x) \delta w(x) dx - M \delta w'(L) = 0 \quad (44)$$

شرط مرزی در انتهای گیردار تیر یعنی در $x = 0$ همان رابطه (27) می-باشد و در انتهای آزاد، یعنی $x = L$ داریم:

$$M_{x=L} = \int_A (m_{xy} + \sigma_{xx} z) dA_L = (k_2 w'' + k_1) = M \quad (45)$$

$$M'_{x=L} = M' = -k_2 w'''(L) = 0 \quad (45)$$

با توجه به معادله حاکم:

$$w'''(x) = 0 \quad (46)$$

با توجه به معادله حاکم و شرایط مرزی (27) خیز تیر یکسرگیردار با معادله (47) مشخص می‌گردد:

$$w = \frac{M - k_1}{2k_2} x^2 \quad (47)$$

رابطه (47) نشان می‌دهد که خیز تیر وابسته به اثرات ابعاد و مقیاس طولی داخلی می‌باشد.

4-2- حالت الاستیک

در حالت الاستیک، $E = E_p$ و $\Sigma_0 = 0$ خواهد بود. بنابراین خیز تیر در حالت الاستیک، تحت اعمال ممان به انتهای تیر با رابطه (48) تعیین می‌گردد:

$$w = \frac{M}{2k_3} x^2 \quad (48)$$

اگر l_0 باشد، رابطه (49) حاصل خواهد شد که همان رابطه خیز در الاستیسیته کلاسیک می‌باشد:

$$w_{classic} = \frac{M}{2EI} x^2, I = \frac{bh^3}{12} \quad (49)$$

لازم به ذکر است که برای تحلیل الاستوپلاستیک تیر تحت خمش خالص، با توجه به [19] حل تحلیلی ارائه نشده است. دلیل این امر این است که در محاسبات ذکر شده روابط مربوط به ϵ_{xx}^e و ϵ_{xx}^p وابسته به x نخواهند بود.

5- بحث و نتایج

در این بخش ابتدا در بخش (1-5)، برای تعیین صحت تقریبی نتایج و اطمینان از قابل قبول بودن تئوری ارائه شده، به مقایسه نتایج بدست آمده

$$w^e = \frac{P(3L - x)x^2}{6k_3} \quad (43)$$

$$k_3 = Eb \left[\frac{1}{48} \sqrt{h^2 + l_{cw} h \sqrt{6}} (4h^2 + l_{cw} h \sqrt{6} - 9l_{cw}^2) + \frac{3\sqrt{6}}{32} l_{cw}^3 \ln \left(1 + \frac{\sqrt{6}h + \sqrt{6h^2 + 6\sqrt{6}l_{cw}h}}{3l_{cw}} \right) \right] \quad (33)$$

که e ، بیانگر حالت الاستیک است. شبب الاستیک θ^e ، نیز به صورت رابطه (34) خواهد بود:

$$\theta^e = \frac{(2PL - Px)x}{3k_3} \quad (34)$$

اگر $l_{cw} = 0$ باشد، به رابطه (35) خواهیم رسید که همان رابطه خیز در الاستیسیته کلاسیک می‌باشد.

$$w_{classic} = \frac{Px^2}{6EI} (3L - x), I = \frac{bh^3}{12} \quad (35)$$

و کرنش الاستیک نیز بصورت رابطه (36) خواهد بود:

$$\epsilon_{xx}^e = -\frac{P(L - x)z}{k_3} \quad (36)$$

3-3- حالت الاستو-پلاستیک

در این حالت، تغییر شکل پلاستیک در شکل 1 از انتهای گیردار شروع می‌شود که همانند حالت صلب-پلاستیک بوده و خیز تیر در این قسمت با معادله (30) تعیین می‌گردد. تغییر شکل الاستیک در $x = l_0$ از انتهای گیردار شروع می‌شود که l_0 طول جدایکننده ناحیه الاستیک و پلاستیک می‌باشد. با توجه به پیوستگی ϵ_{xx} در این طول، به محاسبه‌ی l_0 پرداخته می‌شود. در $x = l_0$ ، کرنش الاستیک برابر با کرنش پلاستیک می‌باشد:

$$\epsilon_{xx,x=l_0}^e = \epsilon_{xx,x=l_0}^p \quad (37)$$

با جایگذاری رابطه‌های (32) و (36) در رابطه (37)، l_0 بدست می‌آید:

$$l_0 = L + \frac{k_1}{P \left[\frac{E_p}{E} - 1 \right]} \quad (38)$$

شبب و خیز در $x = l_0$ که به ترتیب با θ^{l_0} و w^{l_0} نشان داده می‌شود با توجه به معادلات (30) و (31) به ترتیب با روابط (39) و (40) مشخص می‌گردند:

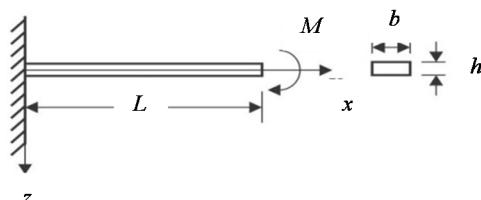
$$\theta^{l_0} = \frac{(2PL - Px - 2k_1)x}{k_2} \quad (39)$$

$$w^{l_0} = \frac{l_0^2(3PL - Pl_0 - 3k_1)}{6k_2} \quad (40)$$

حال به محاسبه خیز تیر در حالت الاستوپلاستیک پرداخته می‌شود. همانطور که ذکر گردید تغییر شکل پلاستیک از $x = 0$ تا $x = l_0$ می‌باشد که این تغییر شکل به صورت صلب-پلاستیک بوده و خیز تیر با معادله (30) بیان می‌گردد. اکنون به محاسبه خیز تیر در محدوده الاستیک پرداخته می‌شود. تغییر شکل الاستیک تیر از طول l_0 شروع می‌شود که در این طول، تیر دارای یک شبب θ^{l_0} و یک خیز w^{l_0} می‌باشد. خیز تیر در قسمت الاستیک شامل سه بخش است:

$$w^{ep} = w_1 + w_2 + w_3 \quad (41)$$

که بیانگر حالت الاستو-پلاستیک است. w_1 , w_2 , $x = l_0$, w^{l_0} در w^{ep} , w_3 , خیز ایجاد شده توسط شبب θ^{l_0} و w_3 , خیز مربوط به قسمت تغییر شکل الاستیک می‌باشد که با معادلات (42) بیان می‌شود:



شکل 2 میکرو تیر یکسرگیردار تحت بارگذاری ممان M

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3\sqrt{6}}{4} \left(\frac{E_p}{\Sigma_0} \right) \left(\frac{l_{cw}}{h} \right)^3 \\
 & \times \ln \left\{ 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \left[\left(\frac{h}{l_{cw}} \right) + \sqrt{\left(\frac{h}{l_{cw}} \right)^2 + \sqrt{6} \left(\frac{h}{l_{cw}} \right)} \right] \right\} \\
 & + \left[1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\frac{l_{cw}}{h} \right) \right] \sqrt{1 + \sqrt{6} \left(\frac{l_{cw}}{h} \right)} - \frac{3}{2} \left(\frac{l_{cw}}{h} \right)^2 \\
 & \times \ln \left\{ 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \left[\left(\frac{h}{l_{cw}} \right) + \sqrt{\left(\frac{h}{l_{cw}} \right)^2 + \sqrt{6} \left(\frac{h}{l_{cw}} \right)} \right] \right\} \quad (53)
 \end{aligned}$$

مان خمشی بی بعد کلاسیک نیز با صفر قراردادن مقیاس طول داخلی به صورت رابطه (54) بدست می آید:

$$\frac{4M}{\Sigma_0 b h^2} = \frac{8}{12} \varepsilon_b \left(\frac{E_p}{\Sigma_0} \right) \quad (54)$$

برای مقایسه نتایج تحلیلی در حالت پلاستیک با داده‌های تجربی، مانند تحقیق شرتریا و همکارانش [23]، مدول پلاستیسیته معادل $1/03$ گیگاپاسکال، مقیاس طول داخلی تئوری چن-ونگ برابر با $4/8$ میکرومتر در نظر گرفته شده‌اند. جدول 2 مقایسه نتایج را در حالت پلاستیک نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که این تئوری هم در حالت الاستیک و هم در حالت پلاستیک، برای تیرهای ضخیم‌تر تطابق بیشتری با نتایج آزمایشگاهی دارد.

5- تحلیل نتایج

نمودارهای 3 الی 7 خیز بی بعد تیر، $\frac{w}{h}$ ، بر حسب طول بی بعد، $\frac{x}{h}$ ، می‌باشند که برای حالت‌های صلب-پلاستیک، الاستیک و الاستیوپلاستیک و تحت بارگذاری‌های نیروی متتمرکز و ممان وارد به انتهای تیر رسم شده است و تأثیر مقیاس طول داخلی را بر خیز تیر نشان می‌دهد.

برای رسم نمودارها، نسبت طول تیر به ضخامت تیر، $\frac{L}{h}$ ، معادل ۰.۴۰ نسبت پهنه‌ای تیر به ضخامت، $\frac{b}{h}$ ، معادل ۰.۶ نسبت مدول پلاستیسیته به تنش تسلیم، $\frac{E_p}{\Sigma_0}$ ، معادل ۰.۴۰، نسبت $\frac{M}{\Sigma_0 b h^2}$ برابر $1/2$ ، نسبت $\frac{PL}{Eb h^2}$ برابر $1/200$. نسبت $\frac{PL}{\Sigma_0 b h^2}$ برابر $2/3$ و نسبت $\frac{PL}{Eb h^2}$ معادل $1/200$ می‌باشد. لازم به ذکر است که در نتایج غیرکلاسیک، l ثابت فرض شده و با تغییر h ، نسبت‌های مختلف $\frac{L}{h}$ بدست آمداند. و برای رسم نتایج کلاسیک l برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود.

جدول 1 مقایسه نتایج حاصل با داده‌های آزمایشگاهی در حالت الاستیک

ضخامت (تحقیق حاضر) (میکرومتر) (گیگاپاسکال)	صلبیت خمشی Lm و همکاران (مرجع [22]) (گیگاپاسکال)	صلبیت خمشی چن-ونگ (مرجع [23]) (گیگاپاسکال)
0/229	0/33	20
0/183	0/18	40
0/157	0/16	75
0/1455	0/14	115

جدول 2 مقایسه نتایج حاصل با داده‌های آزمایشگاهی در حالت پلاستیک

مان خمشی بی بعد (تحقیق حاضر) (گیگاپاسکال)	مان خمشی بی بعد (مرجع [23]) (گیگاپاسکال)	ضخامت کرنش سطح (میکرومتر)
1/36	1/5	0/025 25
1/20	1/35	0/054 50
1/10	1/22	0/088 100
1/055	1/09	0/09 200

از تئوری چن-ونگ با داده‌های تجربی پرداخته می‌شود و سپس در بخش (2-5)، با استفاده از روابط تعیین شده برای خیز تیر، اثر پارامتر مقیاس طول ماده در سه حالت ذکر شده و برای بارگذاری‌های مختلف بررسی می‌شود.

5- مقایسه با نتایج آزمایشگاهی

5-1-1- حالت الاستیک

در این بخش، با توجه به تحقیق Lm ¹ و همکارانش [22]، برای مقایسه نتایج آزمایشگاهی با نتایج تحلیلی در حالت الاستیک، صلبیت خمشی بی بعد بکار گرفته می‌شود. در حالت پلاستیک نیز با توجه به تحقیق شتریا و همکارانش [23] از ممان خمشی بی بعد استفاده می‌شود.

رابطه بین صلبیت خمشی و ضخامت تیر به صورت آزمایشگاهی توسط Lm و همکارانش [22] ارائه شده است. صلبیت خمشی برای تیر، D ، با توجه به رابطه $\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ ، بصورت حاصلضرب مدول الاستیسیته E در ممان اینرسی I تعریف می‌گردد که با ضخامت رابطه مستقیم دارد و با رابطه (50) مشخص می‌شود.

$$D = EI \quad (50)$$

و با توجه به تحقیق Lm و همکارانش [22]، صلبیت خمشی بی بعد، بصورت $D' = \frac{D}{bh^3}$ تعریف شده است که b پهنای تیر و h ضخامت تیر می‌باشد و با ضخامت رابطه عکس دارد. این تعریف برای مقایسه با نتایج آزمایشگاهی بکار گرفته شده است.

صلبیت خمشی در حالت کلاسیک به ترتیب رابطه (51) می‌باشد:

$$D'_{\text{classic}} = \frac{EI}{bh^3} = \frac{E}{12} \quad (51)$$

صلبیت خمشی برای تئوری چن-ونگ نیز با توجه به رابطه (48) با رابطه (52) بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned}
 D' &= E h^{-3} \left[\frac{1}{48} \sqrt{h^2 + l_{cw} h \sqrt{6}} (4h^2 + l_{cw} h \sqrt{6} - 9l_{cw}^2) \right] \\
 &+ E h^{-3} \left[\frac{3\sqrt{6}}{32} l_{cw}^3 \ln \left(1 + \frac{\sqrt{6}h + \sqrt{6h^2 + 6\sqrt{6}l_{cw}h}}{3l_{cw}} \right) \right] \quad (52)
 \end{aligned}$$

صلبیت خمشی به ازای مقیاس طول داخلی صفر، برابر $\frac{E}{12}$ می‌باشد. به منظور مقایسه نتایج تحلیلی در حالت الاستیک با نتایج آزمایشگاهی، همانند تحقیق Lm و همکارانش [22]، مدول الاستیسیته معادل $1/44$ گیگاپاسکال، مقیاس طول داخلی تئوری چن-ونگ در حالت الاستیک برابر با $8/14$ میکرومتر می‌باشد. جدول 1 مقایسه نتایج را در حالت الاستیک نشان می‌دهد.

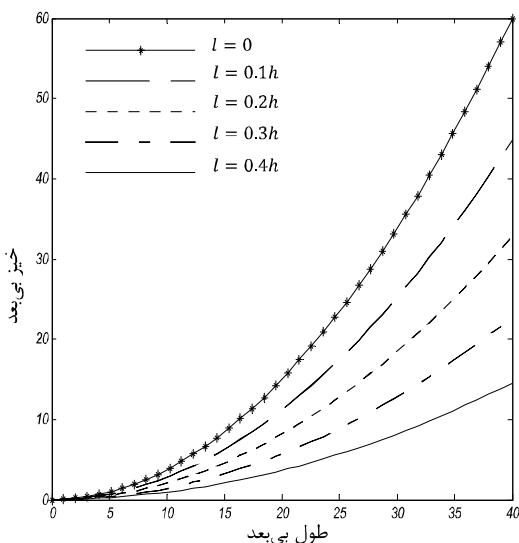
5-2- حالت صلب-پلاستیک

برای مقایسه نتایج تحلیلی حالت صلب-پلاستیک، نتایج آزمایشگاهی شرتریا² و همکارانش [23] بکار گرفته می‌شود. بدین منظور از ممان خمشی بی بعد، $\frac{4M}{\Sigma_0 b h^2}$ به عنوان تابعی از کرنش سطح، $(z = \frac{h}{2}) \varepsilon_b$ استفاده می‌شود.

مان خمشی بی بعد تئوری چن-ونگ نیز با بکارگیری رابطه (11) و به ترتیب رابطه (53) می‌باشد:

$$\begin{aligned}
 \frac{4M}{\Sigma_0 b h^2} &= \frac{1}{6} \varepsilon_b \left(\frac{E_p}{\Sigma_0} \right) \sqrt{1 + \sqrt{6} \left(\frac{l_{cw}}{h} \right)} \\
 &\times \left[4 + \sqrt{6} \left(\frac{l_{cw}}{h} \right) - 9 \left(\frac{l_{cw}}{h} \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

1- Lam
2- Shrotriya



شکل 6 خیز بی بعد میکرو تیر یکسر گیردار صلب-پلاستیک بر حسب طول بی بعد تحت بار گذاری ممان M

شکل‌های 3 و 4 بترتیب، خیز بی بعد تیر بر حسب طول بی بعد را تحت بار گذاری نیروی متتمرکز به انتهای تیر در حالت صلب-پلاستیک و الاستیک نشان می‌دهد. همانگونه که قابل مشاهده است، در هر دو حالت با کاهش ضخامت، سفتی¹ تیر بیشتر و خیز کمتر می‌گردد.

در صورتی که مقیاس طول داخلی برابر صفر باشد، حل کلاسیک حاصل می‌گردد که به منظور مقایسه رسم شده است. بیشترین مقدار خیز تیر به ازای $l = 0$ و کمترین میزان خیز به ازای $l = 0.4h$ می‌باشد. در هر دو حالت الاستیک و صلب-پلاستیک با کاهش ضخامت تیر اثرات اندازه و طول مشخصه تأثیر بیشتری بر میزان خیز تیر دارد. همچنین با کاهش نسبت $\frac{l}{h}$ نتایج به نتایج حاصل از تئوری کلاسیک می‌کنند.

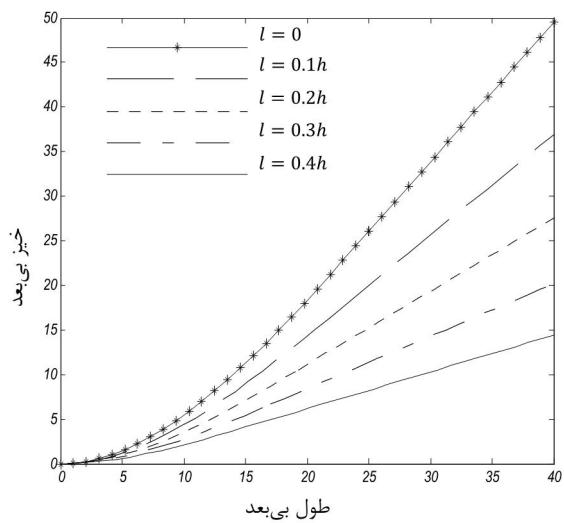
در شکل 5، خیز تیر در حالت الاستوپلاستیک رسم شده است. l_0 طول جداکننده محدوده تغییر شکل پلاستیک از بخش الاستیک می‌باشد.

همانگونه که از شکل مشخص است، با کاهش ضخامت محدوده پلاستیک کوچکتر شده و به صفر نزدیک می‌شود. دلیل این امر این است که تیر با ضخامت، سفتی تیر بیشتر شده و بنابراین در یک نیروی مشخص، ضخامت بیشتر، کمتر دچار تغییر شکل پلاستیک می‌شود.

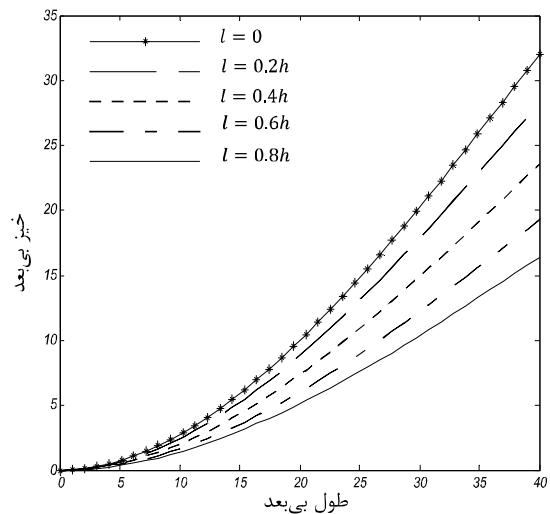
در این حالت نیز اثرات ابعاد و اندازه بر میزان خیز تیر حائز اهمیت است. همچنین واضح است که با کاهش ضخامت، سفتی تیر افزایش می‌یابد.

شکل‌های 6 و 7 بترتیب، خیز بی بعد تیر بر حسب طول بی بعد را تحت بار گذاری ممان M ، در حالت صلب-پلاستیک و الاستیک و برای مقادیر متغیر مقیاس طول داخلی نشان می‌دهد.

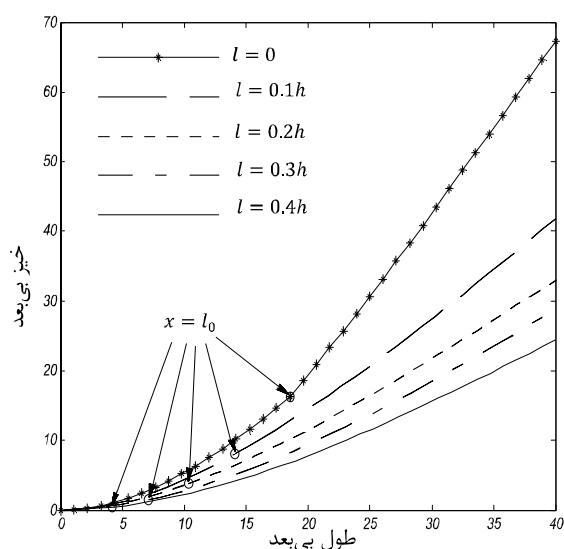
قابل مشاهده است، باز هم در هر دو حالت با کاهش ضخامت، سفتی تیر بیشتر و خیز کمتر می‌گردد. در هر دو حالت الاستیک و صلب-پلاستیک با کاهش ضخامت تیر اثرات اندازه و طول مشخصه تأثیر بیشتری بر میزان خیز تیر دارد. همانند حالات قبلی، در اینجا باز هم با کاهش نسبت $\frac{l}{h}$ نتایج به تئوری کلاسیک نزدیک شده و نیز با قرار دادن مقدار این نسبت برابر با صفر، نتایج تئوری کلاسیک حاصل می‌شوند. همچنین واضح است که میزان خیز تیر تحت اعمال ممان نسبت به نیروی متتمرکز بیشتر است.



شکل 3 خیز بی بعد میکرو تیر یکسر گیردار صلب-پلاستیک بر حسب طول بی بعد و تحت اعمال نیروی متتمرکز

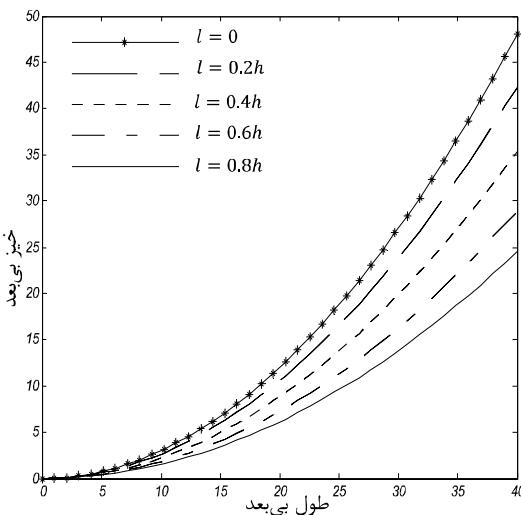


شکل 4 خیز بی بعد میکرو تیر یکسر گیردار الاستیک بر حسب طول بی بعد و تحت اعمال نیروی متتمرکز



شکل 5 خیز بی بعد میکرو تیر یکسر گیردار الاستوپلاستیک بر حسب طول بی بعد و تحت اعمال نیروی متتمرکز

- [2] J. S. Stolken, A. G. Evans, A microbend test method for measuring the plasticity length scale, *Acta Materialia*, Vol. 46, pp. 5109-5115, 1998.
- [3] R. K. Abu Al-Rub, G. Z. Voyatzis, Analytical and Experimental Determination of the Material Intrinsic Length Scale of Strain Gradient Plasticity Theory from Micro- and Nano-Indentation Experiments, *International Journal of Plasticity*, Vol. 20(6), pp. 1139-1182, 2004.
- [4] M. B. Taylor, H. M. Zbib, M. A. Khaleel, Damage and size effect during superplastic deformation, *International Journal of Plasticity*, Vol. 18, pp. 415-442, 2002.
- [5] W. D. Nix, H. Gao, Indentation size effect in crystalline materials: A law for strain gradient plasticity, *Journal of mechanics and physics of Solids*, Vol. 46(3), pp. 411-425, 1998.
- [6] A. Acharya, A. J. Beaudoin, Grain-size effect in viscoplastic polycrystals at moderate strains, *Journal of mechanics and physics of Solids*, Vol. 48, pp. 2213-2230, 2000.
- [7] E. C. Aifantis, Strain gradient interpretation of size effect, *International Journal of Fracture*, Vol. 95, pp. 299-314, 1999.
- [8] N. A. Fleck, J. W. Hutchinson, A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity, *Journal of mechanics and physics of Solids*, Vol. 41, pp. 1825-1857, 1993.
- [9] N. A. Fleck, J. W. Hutchinson, Strain gradient plasticity, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 33, pp. 295-361, 1997.
- [10] N. A. Fleck, J. W. Hutchinson, A reformulation of strain gradient plasticity, *Journal of mechanics and physics of Solids*, Vol. 49, pp. 2245-2271, 2001.
- [11] S. H. Chen, T. C. Wang, A new hardening law for strain gradient plasticity, *Acta Materialia*, Vol. 48, pp. 3997-44005, 2000.
- [12] S. H. Chen, T. C. Wang, Interface crack problems with strain gradient effects, *International Journal of Fracture*, Vol. 117, pp. 25-37, 2002.
- [13] S. K. Park, X. L. Gao, Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory, *Journal of mechanics and physics of Solids*, Vol. 16, pp. 2355-2359, 2006.
- [14] S.H. Chen, B. Feng, Size effect in micro-scale cantilever beam bending, *Acta Mechanica*, Vol. 219, pp. 291-307, 2011.
- [15] N. Challamel, C. M. Wang, The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved, *Nanotechnology*, Vol. 19, pp. 345703, 2008.
- [16] W. Wang, Y. Huang, K. J. Hsia, K. X. Hu, A. Chandra, A study of microbend test by strain gradient plasticity, *International Journal of Plasticity*, Vol. 19, pp. 365-382, 2003.
- [17] M. I. Idiart, V. S. Deshpande, N. A. Fleck, J. R. Willis, Size effect in the bending of thin foils, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 47, pp. 1251-1264, 2009.
- [18] N. A. Fleck, J. R. Willis, A mathematical basis for strain gradient plasticity theory. Part II: tensorial plastic multiplier, *Journal of mechanics and physics of Solids*, Vol. 57, pp. 1045-1057, 2009.
- [19] B. Ji, W. J. Chen, J. Zhao, Measurement of length-scale and solution of cantilever beam in couple stress elasto-plasticity, *Acta Mechanica*, Vol. 25, pp. 381-387, 2009.
- [20] Z. F. Shi, B. Huang, H. Tan, Y. Huang, T. Y. Zhang, P. D. Wu, K. C. Hwang, H. Gao, Determination of the microscale stress-strain curve and strain gradient effect from the micro-bend of ultra-thin beams, *International Journal of Plasticity*, Vol. 24, pp. 1606-1624, 2008.
- [21] Y. Q. Mao, S. G. Ai, D. N. Fang, Y. M. Fu, C. P. Chen, Elasto-plastic analysis micro FGM beam basing on mechanism-based strain gradient plasticity theory, *Composite Structure*, Vol. 101, pp. 168-179, 2013.
- [22] D. C. C. Lam, F. Yang, A. C. M. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of mechanics and physics of Solids*, Vol. 51, pp. 1477-1503, 2003.
- [23] P. Shrotriya, S. M. Allameh, J. Lou, T. Buchheit, W. O. Soboyejo, On the measurement of the plasticity length scale parameter in LIGA nickel foils, *Mechics of Materials*, Vol. 35, pp. 233-243, 2003.



شکل 7 خیز بی بعد میکرو تیر یکسرگیردار الاستیک بر حسب طول بی بعد تحت بار گذاری ممان M

در یک نگاه کلی به نتایج عدم توانایی تئوری کلاسیک را در پیش‌بینی دقیق رفتار ماده مشاهده کرد. هرچه ابعاد ماده کوچکتر شود، این عدم توانایی بیشتر شده و نتیجه‌ی پیش‌بینی شده اختلاف بیشتری نسبت به جواب واقعی خواهد داشت. این امر لزوم بکارگیری تئوری‌های غیرکلاسیک را قادر به در نظر گرفتن اثرات ابعاد و اندازه باشند، بهوضوح نشان می‌دهد.

6- جمع‌بندی

در این تحقیق خمش میکروتیر یکسرگیردار در حالت الاستیک، صلب-پلاستیک و الاستوپلاستیک با به کار گیری تئوری چن-ونگ و تحت بارگذاری‌های متفاوت بررسی شده است و روابط مربوط به خیز تیر در تمامی حالات ذکر شده به دست آمده و با استفاده از روابط بدستآمده، نمودارهای خیز تیر رسم شده‌اند.

نتایج نشان می‌دهند که خیز میکرو تیر در تمامی حالات‌ها وابسته به کمیات ابعاد و مقیاس طول داخلی می‌باشد. در صورت استفاده از تئوری‌های کلاسیک، نمی‌توان این وابستگی را نشان داد. در حالی که تئوری گرادیانی چن-ونگ این وابستگی را به خوبی نشان می‌دهد. هر چه که مقدار ضخامت میکرو تیر کوچکتر باشد این وابستگی بیشتر در رفتار ماده تأثیر گذار می‌باشد. علاوه بر این مشاهده شد که میزان خیز تیر تحت بارگذاری ممان در انتهای تیر، نسبت به بارگذاری نیروی متمرکز اعمال شده در انتهای تیر، بیشتر است. در حالت الاستوپلاستیک نیز با افزایش نسبت $\frac{l}{h}$ ، محدوده پلاستیک کوچکتر خواهد شد.

7- مراجع

- [1] N. A. Fleck, G. M. Muler, M. F. Ashby, J. W. Hutchinson, Strain Gradient Plasticity: Theory and Experiment, *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 42, pp. 475-487, 1994.